การแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยจากการรบกวนโดยดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์

นายสาม ศรีสุโร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-17-0376-7

THE VARIATION OF ORBITAL ELEMENTS OF ASTEROIDS PERTURBED BY JUPITER AND SATURN

Mr.Sam Srisuro

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2001

ISBN 974-17-0376-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยจากการรบกวนโดยดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์

โดย นายสาม ศรีสุโร

สาขาวิชา ฟิสิกส์

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... รองคณบดีฝ่ายบริหาร
(รองศาสตราจารย์ ดร.พิพัฒน์ การเที่ยง) รักษาราชการแทนคณบดีคณะวิทยาศาสตร์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(อาจารย์ ดร.ชัยสิงห์ ภู่รักษ์เกียรติ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.รัฐชาติ มงคลนาวิน)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.บุญโชติ เผ่าสวัสดิ์ยรรยง)

นายสาม ศรีสุโร : การแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยจากการรบกวนโดยดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์. (THE VARIATION OF ORBITAL ELEMENTS OF ASTEROIDS PERTURBED BY JUPITER AND SATURN) อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ, จำนวน 148 หน้า. ISBN 974-17-0376-7.

ดาวเคราะห์น้อยฮิลดามีคาบการโคจรเป็นอัตราส่วนอย่างง่ายกับคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดีคือ 2/3 ซึ่งจะทำให้วงโคจรถูกรบกวนอย่างเป็นระบบจากดาวพฤหัสบดีโดยสม่ำเสมอ ผู้วิจัยได้คำนวณหาหลักมูลทางโคจรที่เวลาต่างๆเป็นเวลา 20,000 วัน หรือประมาณ 54.76 ปี โดยคิดการรบกวนจากดาวเสาร์เพิ่มเข้าไปด้วย ผลที่ได้พบว่าคาบการแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อย ฮิลดามีค่าเท่ากับคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา คือ 23.7 ปี โดยรูปแบบของการรบกวนจะสังเกตได้จากการแปรผันของครึ่งแกนเอก (a) ซึ่งจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวโยงกับระยะห่างระหว่างดาวพฤหัสบดีและดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (P) โดยเมื่อการรบกวนมีค่าเพิ่มขึ้น ก็จะทำให้ a มีค่าลดลง และเมื่อการรบกวนมีค่าลดลง ก็จะทำให้ a มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งตำแหน่งที่เกิดการรบกวนมากที่สุดจะอยู่ถัดจากตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเล็กน้อย ขณะที่ตำแหน่งที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดจะอยู่ถัดจากตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเล็กน้อยเช่นกัน

ภาควิชาฟิสิกส์	ลายมือชื่อนิสิต...
สาขาวิชาฟิสิกส์	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา......................................
ปีการศึกษา 2544	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม...............................

4172483523 : MAJOR PHYSICS

KEY WORD: ASTEROIDS / ORBITAL ELEMENTS / PERTURBATION / COWELL METHOD / JUPITER

SAM SRISURO : THE VARIATION OF ORBITAL ELEMENTS OF ASTEROIDS PERTURBED BY JUPITER AND SATURN. THESIS ADVISOR : ASSIST. PROF. PIRAPAT SIRISOMBOONLAP , Ph.D. , 129 pp. ISBN 974-17-0376-7.

The ratio of orbital period of Hilda asteroids to Jupiter is 2/3. The orbital of Hilda asteroids is systematically perturbed by Jupiter. We have calculated the orbital elements at each epoch time for 20,000 days or approximately 54.76 years. The perturbation effect of Saturn is also included. The result shows that the variation of the orbital elements of Hilda asteroids is equal to the concidental period between Jupiter and Hilda asteroids, which is 23.7 years. The character of the perturbation can be observed from the variation of semimajor axis (**a**) which is related to the distance between Hilda asteroids and Jupiter (**P**). If the perturbation is increased then **a** will be reduced and if the perturbation is reduced then **a** will be increased. The maximum perturbation occurs just after point where Hilda asteroids is closest to Jupiter, while the minimum is just after point where Hilda asteroids is farthest to Jupiter.

Department of Physics. Student's signature...

Field of study Physics. Advisor's signature...

Academic year 2001 Co-advisor's signature...

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยคำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดีของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่มีประโยชน์ต่อผู้วิจัยเป็นอย่างมาก ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.ชัยสิงห์ ภู่รักษ์เกียรติ , อาจารย์ ดร.รัฐชาติ มงคลนาวิน และอาจารย์ ดร.บุญโชติ เผ่าสวัสดิ์ยรรยง เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้สละเวลาช่วยตรวจ แก้ไข และให้คำแนะนำในการเขียนวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัยในการเขียนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นอย่างมาก และสุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบ พระคุณบิดา-มารดา ซึ่งคอยให้กำลังใจและทุนทรัพย์แก่ผู้วิจัยตลอดมา

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

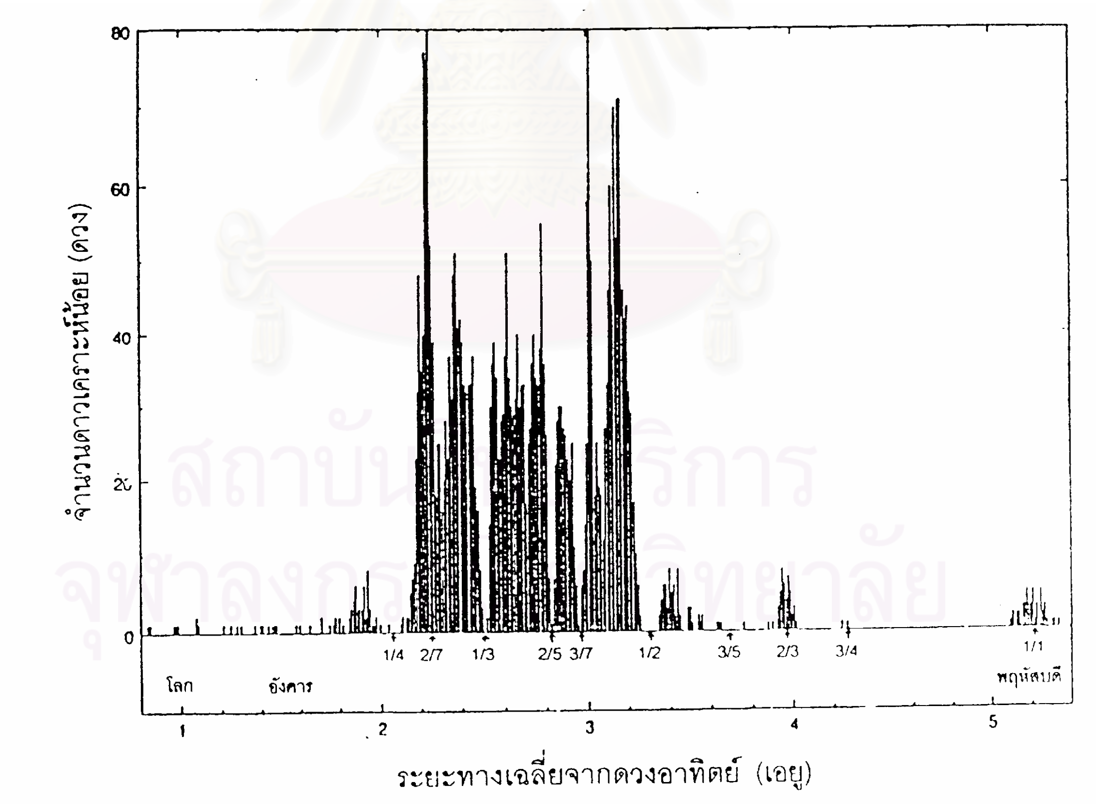
สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ดาวเคราะห์น้อยเป็นวัตถุขนาดเล็กที่เคลื่อนที่เป็นรูปวงรีรอบๆ ดวงอาทิตย์ ดาวเคราะห์น้อยโดยส่วนใหญ่มีวงโคจรอยู่ระหว่างดาวอังคารและดาวพฤหัสบดี โดยมีระยะทางเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์หรือครึ่งแกนเอก (a) อยู่ในช่วง 1.7 ถึง 4.0 หน่วยดาราศาสตร์ (เอยู) และมีระนาบวงโคจรใกล้เคียงกับระนาบวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์หรือระนาบสุริยะวิถี (ecliptic plane) ซึ่งเราจะเรียกบริเวณที่มีดาวเคราะห์น้อยส่วนใหญ่โคจรอยู่นี้ว่าแถบดาวเคราะห์น้อย (asteroid belt) [1] โดยในแถบดาวเคราะห์น้อยจะมีช่องว่างเป็นช่วงๆ เรียกว่าช่องว่างเคิร์กวูด (Kirkwood gaps) ดาวเคราะห์น้อยที่โคจรอยู่ในช่องว่างเคิร์กวูดนี้จะมีคาบการโคจรเป็นอัตราส่วนอย่างง่ายกับคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดี เช่น 1/4, 1/3, 1/2, 2/3 เป็นต้น ซึ่งจะทำให้ดาวเคราะห์น้อยเหล่านี้ถูกรบกวนจากแรงดึงดูดของดาวพฤหัสบดีอย่างเป็นรูปแบบโดยสม่ำเสมอ



รูปที่ 1.1 ช่องว่างเคิร์กวูด [2]

รูปที่1.1แสดงถึงการแจกแจงปริมาณของดาวเคราะห์น้อยที่ระยะทางเฉลี่ยต่างๆจากดวงอาทิตย์ ซึ่งแถบดาวเคราะห์น้อยจะอยู่ในช่วงระยะทางเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์ตั้งแต่ 1.7 ถึง 4.0 เอยู โดยมีช่องว่างเคิร์กวูดอยู่เป็นช่วงๆ ซึ่งดาวเคราะห์น้อยที่โคจรอยู่ในช่องว่างเคิร์กวูดนี้จะมีคาบการโคจรเป็นอัตราส่วนอย่างง่ายกับคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดีแตกต่างกันไปในแต่ละช่อง เช่น 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7 เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้เราจะศึกษาดาวเคราะห์น้อยชื่อฮิลดา (Hilda) ซึ่งถูกค้นพบโดยโยฮันน์ พาลิสา (Johann Palisa) [3] เมื่อวันที่ 2 พฤศจิกายน ค.ศ.1875 สมบัติโดยทั่วไปของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา คือ มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางประมาณ 180 กิโลเมตร มีระยะทางเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์ประมาณ 4.0 เอยู และมีคาบการโคจรประมาณ 7.90 ปี ลักษณะพิเศษที่สำคัญของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาคือ จะมีคาบการโคจรเป็นอัตราส่วนอย่างง่ายกับคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดี โดยจะเท่ากับ 2/3 ซึ่งตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะอยู่ในบริเวณขอบของแถบดาวเคราะห์น้อยค่อนไปทางดาวพฤหัสบดีดังแสดงในรูปที่1.1 ส่วนลักษณะพิเศษอีกประการหนึ่งก็คือ ตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุดนั้นจะอยู่ในบริเวณจุดใกล้ดวงอาทิตย์ของตัวมันเอง และตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุดก็จะอยู่ในบริเวณจุดไกลดวงอาทิตย์ของตัวมันเองด้วย

การที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดามีคาบการโคจรเป็นอัตราส่วน 2/3 ของคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดีนั้น จะทำให้ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาได้รับการรบกวนจากแรงดึงดูดของดาวพฤหัสบดีอย่างเป็นรูปแบบโดยสม่ำเสมอ ซึ่งทำให้เราสนใจที่จะศึกษาและวิจัยดาวเคราะห์น้อยดวงนี้ ในการวิจัยเราจะคำนวณหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ โดยคำนึงถึงการรบกวนที่เกิดขึ้นทั้งจากดาวพฤหัสบดี และจากดาวเสาร์ เพิ่มเข้าไปด้วย โดยใช้ข้อมูลหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา ณ วันที่ 13 กันยายน ค.ศ. 2000 เวลา 24.00 น. ตามเวลาสากล ซึ่งเป็นข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการณ์จากประเทศญี่ปุ่น [4] เนื่องจากเป็นข้อมูลล่าสุดที่เรามีอยู่เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณ โดยจะคำนวณไปจนถึงวันที่ 17 มิถุนายน ค.ศ. 2055 เวลา 24.00 น. ตามเวลาสากล เป็นเวลารวมทั้งสิ้น 20,000 วัน หรือประมาณ 54.76 ปี แล้วนำผลการคำนวณหลักมูลทางโคจรที่ได้ไปศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยที่เกิดขึ้นจากการรบกวนโดยดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ ซึ่งเป็นวัตถุประสงค์ของการทำวิจัยนี้

ขั้นตอนในการทำงานวิจัยนี้เราจะเริ่มจากการแปลงหลักมูลทางโคจรเริ่มต้นของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาไปเป็นเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วที่เวลาเริ่มต้น แล้วใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) แก้สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเพื่อหาเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่างๆจนครบ 20,000 วัน แล้วจึงแปลงเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วต่างๆที่ได้นี้กลับไปเป็นหลักมูลทางโคจรอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งในท้าย

ที่สุดเราก็จะได้ผลการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ เพื่อนำไปวิเคราะห์ผลการรบกวนที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ต่อไป โดยประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัยนี้คือ

1. ทำให้เข้าใจถึงกลไกของการรบกวนดาวเคราะห์น้อยที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ได้เป็นอย่างดี
2. สามารถนำข้อมูลที่ได้จากการวิจัยนี้ไปใช้อ้างอิงในการกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์น้อยได้

เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นการคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุที่โคจรอยู่ในระบบสุริยะ ดังนั้นเราจะใช้ระบบพิกัดสุริยะวิถีสุริยะมัธยม (heliocentric ecliptic coordinate system) ในการอ้างอิงตำแหน่งต่างๆ ซึ่งในระบบพิกัดนี้จะมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง มีระนาบวงโคจรของโลกเป็นระนาบอ้างอิง และทิศทางของแกน +X คือทิศทางที่ชี้ออกจากดวงอาทิตย์ตรงไปยังจุดวสันตวิษุวัต (vernal equinox) ส่วนหน่วยต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณจะเป็นหน่วยทางดาราศาสตร์ คือ ระยะทางวัดเป็นหน่วยของครึ่งแกนเอกของวงโคจรโลก เรียกว่า 1 หน่วยดาราศาสตร์ (เอยู) มวลวัดเป็นหน่วยมวลของดวงอาทิตย์ เวลาวัดเป็นหน่วย 1 วันตามปฏิทินสากล และค่าคงที่แรงโน้มถ่วงจะใช้ค่าคงที่แรงโน้มถ่วงแบบเกาส์ (Gaussian gravitational constant)

เนื้อหาส่วนต่อไปในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็นบทต่างๆ ดังนี้คือ บทที่ 2 จะเป็นส่วนของทฤษฎีพื้นฐานต่างๆ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ [5] ในบทที่ 3 จะนำเสนอขั้นตอนในการคำนวณหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่จะนำมาใช้ บทที่ 4 จะเป็นส่วนที่แสดงผลการคำนวณที่ได้และการวิเคราะห์ผลในแง่มุมต่างๆ และในบทที่ 5 จะเป็นการสรุปผลและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัย

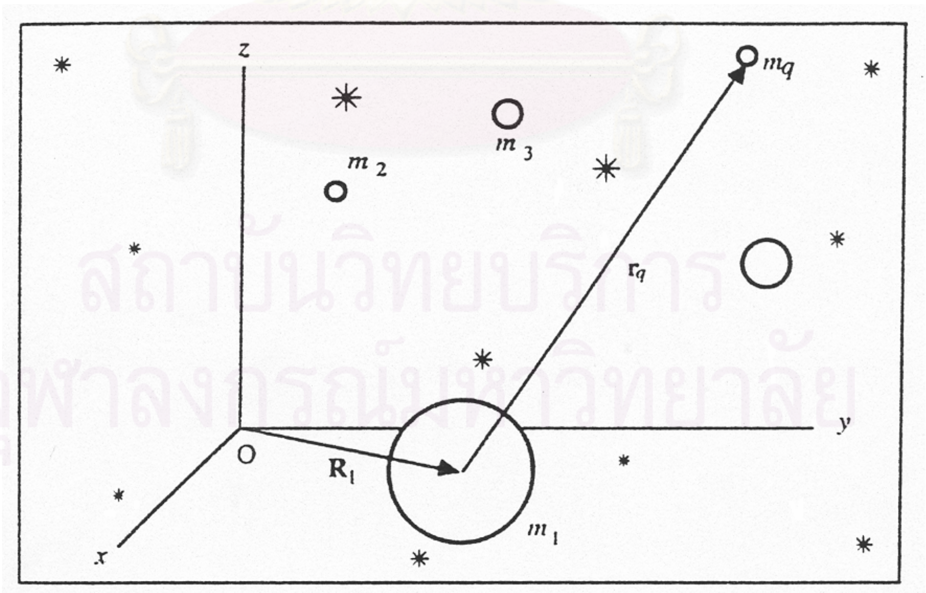
บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 สมการการเคลื่อนที่

การเคลื่อนที่เป็นวงโคจรของวัตถุในระบบสุริยะ สามารถที่จะอธิบายได้โดยสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งจะแสดงถึงความเร่งชั่วขณะในเทอมของแรงทั้งหมด เราสามารถที่จะลดปัญหาลงได้โดยการไม่คิดผลกระทบใดๆ นอกจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น การประยุกต์หลักการพื้นฐานนี้ทำให้เราได้สมการการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถที่จะนำไปใช้คำนวณการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ต่างๆ และจะอธิบายผลกระทบที่เกิดจากวัตถุใดๆ ที่มารบกวนพวกมัน ซึ่งทฤษฎีพื้นฐานต่างๆในบทนี้ได้นำมาจากรายการอ้างอิงที่ 5 โดยจะแสดงเฉพาะในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยของเราเท่านั้น

2.1.1 สมการการเคลื่อนที่เฉื่อย



รูปที่ 2.1 แรงโน้มถ่วงที่มวลหลัก m_1 กระทำต่อวัตถุอื่น

รูปที่ 2.1 แสดงให้เห็นถึงแรงโน้มถ่วงที่วัตถุขนาดใหญ่มวล m_1 กระทำต่อวัตถุอื่นๆ ที่มีมวล $m_2, m_3, \cdots, m_N$ จำนวน *N* ชิ้น กำหนดให้ $\vec{R}_1$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ m_1 เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดเฉื่อย O และกำหนดให้ $\vec{r}_q$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวลอันดับที่ q เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของ m_1 เราสามารถเขียนเวกเตอร์ของแรงโน้มถ่วงที่ m_1 กระทำกับวัตถุใดๆ ได้คือ

$$\vec{F}_q = k^2 \frac{m_1 m_q}{r_q^3} \vec{r}_q \tag{2.1}$$

เมื่อ *k* คือค่าคงที่แรงโน้มถ่วงแบบเกาส์

ดังนั้นแรงสุทธิ $\vec{F}$ ที่กระทำต่อ m_1 คือ

$$\vec{F} = \sum_{q=2}^{N} \vec{F}_q \tag{2.2}$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ความเร่งเฉื่อย $\vec{A}_1$ ของมวล m_1 คือ

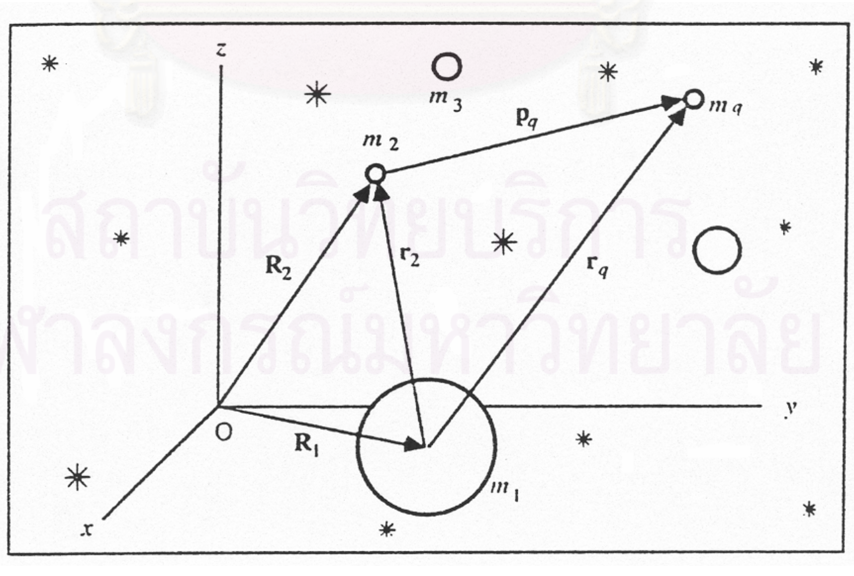
$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}$$

ดังนั้น

$$\vec{A}_1 = \sum_{q=2}^{N} \frac{k^2 m_q}{r_q^3} \vec{r}_q \tag{2.3}$$

สมการ (2.3) เรียกว่าสมการการเคลื่อนที่เฉื่อยของมวล m_1 เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

2.1.2 สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์



รูปที่ 2.2 ปัญหาความโน้มถ่วงของวัตถุหลายชิ้น

รูปที่ 2.2 แสดงถึงปัญหาความโน้มถ่วงที่เราต้องแก้เพื่อที่จะคำนวณวงโคจรของมวล m_2 ซึ่งมวลต่างๆ $m_1, m_2, \cdots, m_N$ เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงดึงดูดร่วมระหว่างกัน เวกเตอร์ $\vec{R}_1$ และ $\vec{R}_2$ แสดงถึงตำแหน่งของ m_1 และ m_2 เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดเฉื่อย O ตามลำดับ $\vec{r}_q$ และ $\vec{p}_q$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของ m_q สัมพัทธ์กับ m_1 และ m_2 ตามลำดับ ดังนั้นจากรูปที่ 2.2 เราจะได้

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \tag{2.4}$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะพบว่าแรงดึงดูดร่วมระหว่าง m_1 และ m_2 จะทำให้ m_1 และ m_2 ถูกเร่งเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดเฉื่อย ความเร่ง $\vec{a}_2$ ของ m_2 เทียบกับ m_1 สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (2.4) เทียบกับเวลาสองครั้ง เราก็จะได้

$$\vec{a}_2 = \vec{A}_2 - \vec{A}_1 \tag{2.5}$$

เมื่อ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ คือความเร่งเฉื่อยของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ
จากสมการ(2.3) เมื่อนำมาเขียนใหม่จะได้

$$\vec{A}_1 = \frac{k^2 m_2 \vec{r}_2}{r_2^3} + \sum_{q=3}^{N} \frac{k^2 m_q \vec{r}_q}{r_q^3} \tag{2.6}$$

โดยการอุปมาเปรียบเทียบกับสมการ (2.6) เราสามารถที่จะเขียน $\vec{A}_2$ ในเทอมของ $m_1, \vec{r}_2, m_q$ และ $\vec{p}_q$ ได้คือ

$$\vec{A}_2 = -\frac{k^2 m_1 \vec{r}_2}{r_2^3} + \sum_{q=3}^{N} \frac{k^2 m_q \vec{p}_q}{p_q^3} \tag{2.7}$$

โดยที่ $\vec{p}_q = \vec{r}_q - \vec{r}_2$ และ $p_q = |\vec{p}_q|$

เทอมแรกทางขวามือของสมการ (2.7) เป็นลบเพราะความเร่งของ m_2 เนื่องจาก m_1 มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{r}_2$ เมื่อนำสมการ (2.6) และ (2.7) ไปแทนลงในสมการ (2.5) จะได้

$$\vec{a}_2 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r_2^3}\vec{r}_2 + \sum_{q=3}^{N} k^2 m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right) \tag{2.8}$$

สมการ(2.8) เรียกว่าสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของมวล m_2 เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดที่อยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล m_1

2.1.3 **สมการการเคลื่อนที่ที่นำไปใช้งาน**

กลับไปพิจารณาสมการ (2.8) อีกครั้ง เราสามารถเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยให้ m_1 เป็นมวลศูนย์กลาง คืออยู่ที่จุดกำเนิด O และ m_2 เป็นมวลของวัตถุที่โคจร นอกจากนั้นในระบบพิกัดสุริยะมัธยม(heliocentric coordinate system) และ ระบบพิกัดโลกามัธยม (geocentric coordinate system) ค่ามวล m_1 จะทำให้เป็นหนึ่งหน่วย [5] ดังนั้นเราสามารถนิยามค่ามวลรวมระหว่างมวลศูนย์กลางกับมวลของวัตถุที่โคจรได้คือ

$$\mu \equiv 1 + m_2 \qquad (2.9)$$

เราจะเลิกใช้สัญลักษณ์ $\vec{a}_2$ และ $\vec{r}_2$ และปรับค่าดัชนีให้เหมาะสมโดยจะให้เริ่มต้นที่ $q = 1$ จนถึง n ซึ่งเท่ากับจำนวนของวัตถุที่มารบกวน ดังนั้นสมการ(2.8) ก็จะกลายเป็น

$$\vec{a} = -\frac{k^2 \mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{n} k^2 m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right) \qquad (2.10)$$

เราสามารถทำสมการนี้ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยการนิยามเวลาดัดแปลง (τ) คือ

$$\tau \equiv k(t - t_0) \qquad (2.11)$$

ดังนั้น

$$d\tau = kdt \qquad (2.12)$$

โดย t คือเวลาใดๆ

t_0 คือเวลาเริ่มต้น (epoch)

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ $\vec{r}$ เทียบกับ τ เราจะได้ว่า

$$\dot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{k} \right) \vec{v} \qquad (2.13)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{k^2} \right) \vec{a} \qquad (2.14)$$

ดังนั้นเมื่อเราคูณสมการ(2.10) ด้วย $\frac{1}{k^2}$ ทั้งสองข้างเราจะได้

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{n} m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right) \qquad (2.15)$$

สมการ(2.15) นี้เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่เราจะนำไปใช้ในการคำนวณ จากสมการนี้ถ้าเราทราบตำแหน่งและความเร็วของวัตถุที่เวลาเริ่มต้น เราก็จะสามารถหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่างๆ ได้ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย

เพื่อความสะดวก เราจะนิยามสัญลักษณ์ $\vec{v}$ และ $\vec{a}$ ใหม่ดังนี้

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} \qquad (2.16)$$

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} \qquad (2.17)$$

เนื้อหาตั้งแต่นี้ไป ทุกการเคลื่อนที่เราจะกำหนดโดยคิดอนุพันธ์เทียบกับเวลา τ

2.1.4 สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อย

เราจะสร้างสมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยโดยคำนึงถึงการรบกวนจากดาวพฤหัสดีและดาวเสาร์เพียงสองดวง โดยให้ดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดกำเนิดและมวลของดวงอาทิตย์เป็นหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากสมการ (2.15) เราจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + m_1\left(\frac{\vec{p}_1}{p_1^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) + m_2\left(\frac{\vec{p}_2}{p_2^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \qquad (2.18)$$

โดยที่ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยเทียบกับดวงอาทิตย์

$\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์เทียบกับดวงอาทิตย์ตามลำดับ

m_1 และ m_2 คือมวลของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ในหน่วยมวลของดวงอาทิตย์

$\vec{p}_1$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีสัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อย

$\vec{p}_2$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเสาร์สัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อย

เนื่องจาก

$$\vec{p}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}$$
$$\vec{p}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}$$

ดังนั้นสมการ(2.18) จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + m_1\left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) + m_2\left(\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r})}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \qquad (2.19)$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยที่เราจะนำไปใช้ในการคำนวณ

2.2 ปัญหาวัตถุสองชิ้นและหลักมูลทางโคจร

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณวงโคจรของวัตถุสองชิ้นโดยการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย ซึ่งจะไม่คิดการรบกวนทุกชนิด และจะพิจารณาเฉพาะแรงดึงดูดระหว่างวัตถุที่โคจรกับมวลที่ศูนย์กลาง การเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นเช่นนี้จะเป็นวงโคจรพื้นฐานซึ่งเราสามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นได้

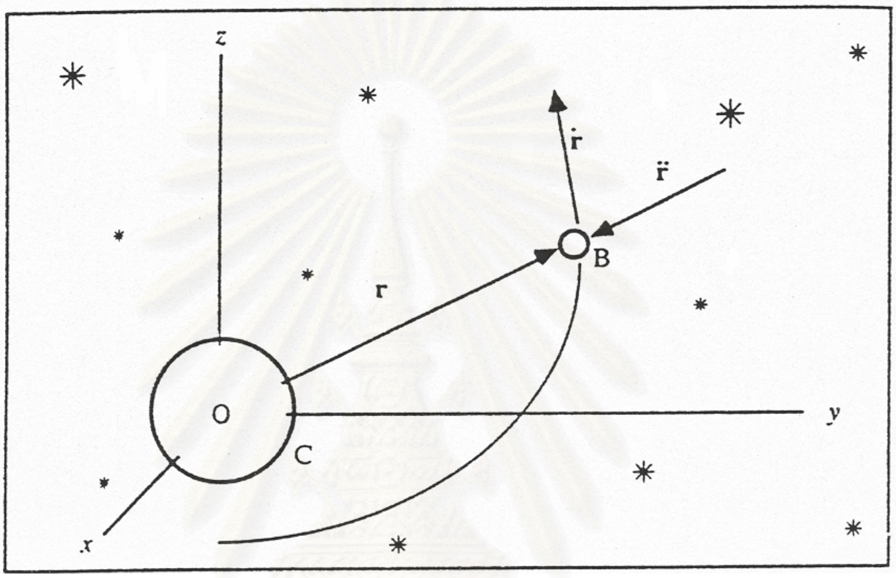
2.2.1 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น

ปัญหาวัตถุสองชิ้นนั้นเป็นกรณีเฉพาะของปัญหาวัตถุหลายชิ้น(many-body problem) ซึ่งแสดงโดยสมการ(2.15)คือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{n} m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right)$$

สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นสามารถหาได้จากสมการข้างต้นโดยการตัดทุกเทอมที่มีมวล m_q ดังนั้นในการคำนวณวงโคจรโดยการประมาณอันดับแรก เราจะได้

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \qquad (2.20)$$



รูปที่ 2.3 วงโคจรของวัตถุสองชิ้น

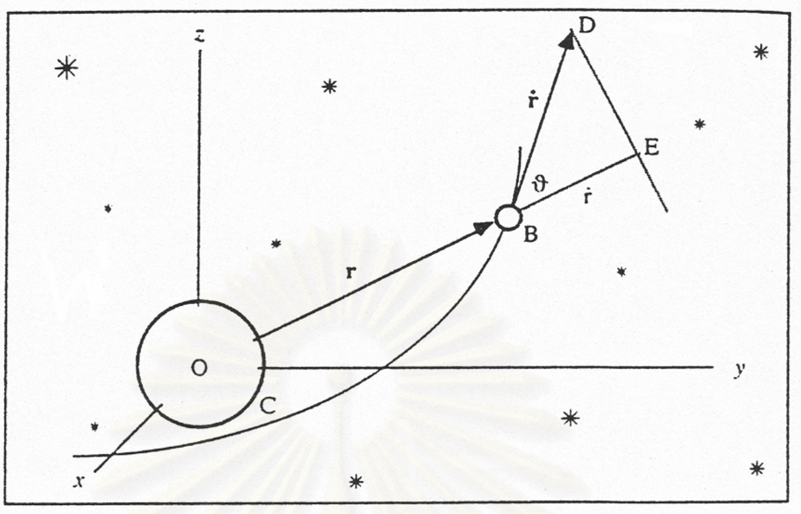
ซึ่งสมการ(2.20) ก็คือสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น ในรูปที่ 2.3 ความเร่ง $\ddot{\vec{r}}$ ปกติจะมีทิศทางชี้ไปที่จุดกำเนิด O ซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุ C ซึ่งเป็นทิศทางของแรงสุทธิที่กระทำบนวัตถุ B ผลที่เกิดขึ้นก็คือวัตถุ B จะไม่เคลื่อนที่ออกไปจากระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ และ O ดังนั้นวงโคจรของวัตถุสองชิ้นจะถูกจำกัดขอบเขตให้อยู่ในระนาบซึ่งวางผ่านจุดศูนย์กลางของวัตถุศูนย์กลาง

ก่อนที่จะแก้สมการหาผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น เราจะต้องเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเคลื่อนที่ตลอดทั้งเส้นทางวงโคจรกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของเวกเตอร์รัศมี $\vec{r}$ ในรูปที่ 2.4 วัตถุ B มีความเร็ว $\dot{\vec{r}}$ ซึ่งก็คือเส้นสัมผัสวงโคจรที่ $\vec{r}$ ขนาดของ $\dot{\vec{r}}$ คืออัตราเร็วในการโคจร v ดังนั้นเราจะได้

$$v = \left|\dot{\vec{r}}\right| \qquad (2.21)$$

ให้ $\dot{r}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสเกลาร์ r เมื่อเทียบกับ τ จะได้

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} \tag{2.22}$$



รูปที่ 2.4 อัตราของวงโคจรและรัศมี

โดยที่ $$r = |\vec{r}| \tag{2.23}$$

สมการ(2.22) คือความสัมพันธ์เชิงสเกลาร์ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของระยะห่างระหว่างวัตถุ B และ C เมื่อเวลาเปลี่ยนไป

ในสามเหลี่ยม BDE ทางขวามือของรูปที่ 2.4 ϑ จะแทนมุมระหว่างด้านทั้งสอง ซึ่งความยาวของด้านทั้งสองจะอยู่ในอัตราส่วน $\frac{\dot{r}}{v}$ ดังนั้น

$$\dot{r} = v \cos \vartheta \tag{2.24}$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์เราจะได้ว่า

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = |\vec{r}||\dot{\vec{r}}| \cos \vartheta \tag{2.25}$$

แต่ต้องระมัดระวังว่า $\dot{r} \neq |\dot{\vec{r}}|$

แต่เป็น $v = |\dot{\vec{r}}|$

แทนค่าสมการ(2.21) และ (2.23) ลงในสมการ(2.25) จะได้

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = rv \cos \vartheta \tag{2.26}$$

ดังนั้นเมื่อเทียบกับสมการ(2.24) เราจะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญ คือ

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r} \tag{2.27}$$

2.2.2 กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น

เมื่อเราแก้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้จะเป็นไปตามกฎของเคปเลอร์(Kepler 's Law) ซึ่งเป็นกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เสนอโดย โจฮันเนส เคปเลอร์(Johannes Kepler) มี 3 ข้อ [5] คือ

1. ดาวเคราะห์ทุกดวงจะโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดโฟกัสจุดหนึ่ง

2. เส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์จะกวาดเป็นพื้นที่ในอวกาศที่เท่ากันในช่วงระยะเวลาที่ใช้เท่ากัน

3. คาบทางดาราคติ(sideral period) ของดาวเคราะห์ยกกำลังสองจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะครึ่งแกนยาวของวงโคจร(หรือระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์)ยกกำลังสาม

1. **กฎภาคตัดกรวย**(The Conic Section Law)

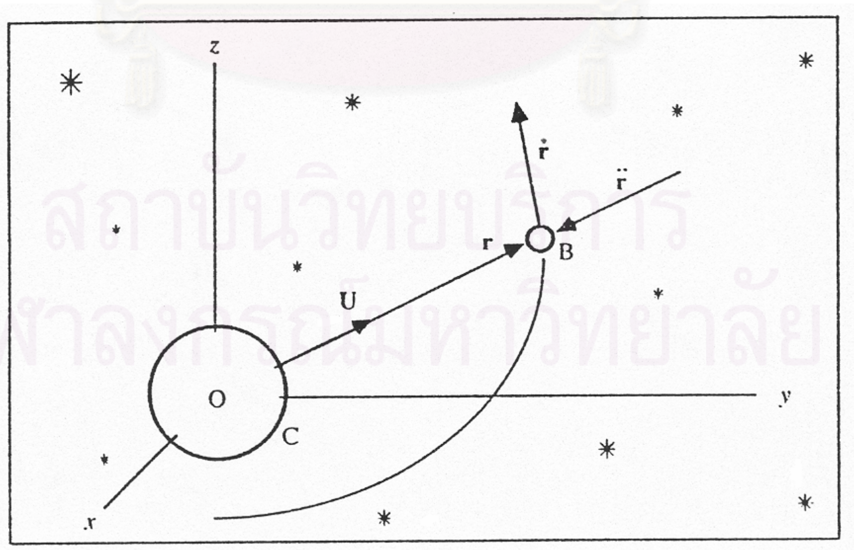
จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นคือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{U} \tag{2.28}$$

โดยที่

$$\hat{U} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.29}$$

คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์รัศมีดังที่แสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ปัญหาวัตถุสองชิ้น

เมื่อทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่างสมการ(2.28) กับ $\vec{r}$ เราจะได้

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}(\vec{r} \times \hat{U})$$

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \qquad (2.30)$$

เนื่องจาก $\vec{r}$ และ $\hat{U}$ ขนานกัน ทำให้ผลคูณเวกเตอร์เป็นศูนย์(null vector) เมื่อพิจารณาหาอนุพันธ์ต่อไปนี้เทียบกับ τ

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) + (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})$$

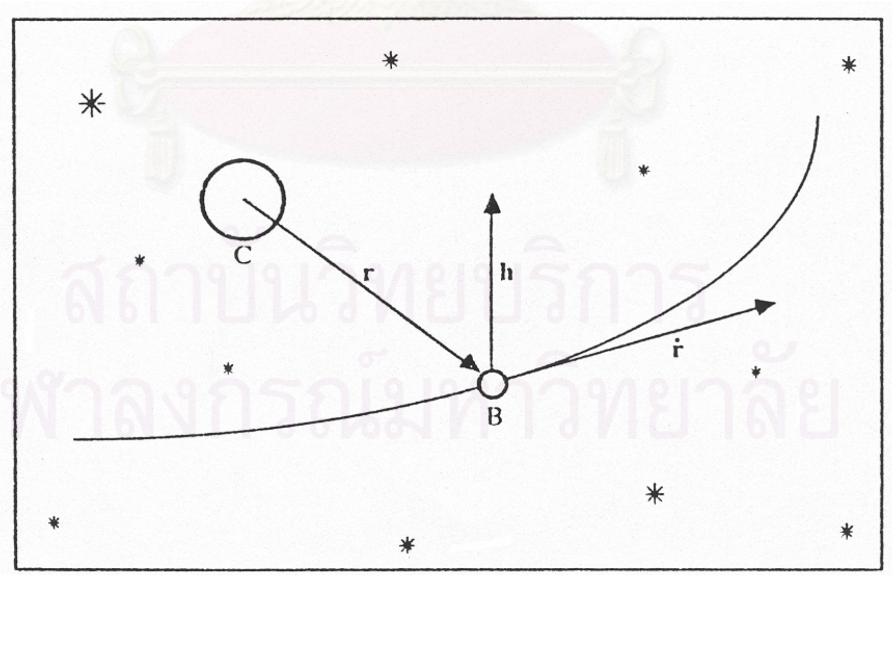
ซึ่งจะได้

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \qquad (2.31)$$

เนื่องจากสมการ(2.30) และ $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ ด้วยเหตุผลทำนองเดียวกัน ถ้าเราทำการอินทิเกรตสมการ(2.31) เราจะได้ว่า

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \qquad (2.32)$$

เมื่อ $\vec{h}$ คือเวกเตอร์คงที่จากการอินทิเกรตซึ่งมีค่าเท่ากับโมเมนตัมเชิงมุมต่อหน่วยมวลของระบบวัตถุสองชิ้น เรียกว่าเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม



รูปที่ 2.6 เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{h}$

ดังแสดงในรูปที่ 2.6 $\vec{h}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ซึ่งหมายความว่าขนาดและทิศทางของมันในอวกาศไม่เปลี่ยนแปลง ทิศทางของ $\vec{h}$ จะอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจรในระบบพิกัดฉาก เมื่อส่วนประกอบในแนวแกน z ของ $\vec{h}$ มีค่าเป็นบวก วัตถุ B จะเคลื่อนที่ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านที่เป็นบวกในแนวแกน z ซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่ทางตรง(direct motion) แต่เมื่อส่วนประกอบในแกน z ของ$\vec{h}$ มีค่าเป็นลบ วัตถุ B จะเคลื่อนที่ไปตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านที่เป็นบวกในแนวแกน z ซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่ย้อนกลับ(retrograde motion)

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมสามารถที่จะนำไปใช้แปลงสมการการเคลื่อนที่ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการอินทิเกรต ย้อนกลับไปที่สมการ(2.28) เมื่อเราทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่างสมการนี้กับ $\vec{h}$ เราจะได้

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}(\hat{U} \times \vec{h}) \qquad (2.33)$$

ดังนั้น
$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}(\hat{U} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) \qquad (2.34)$$

เนื่องจาก $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ จากคุณสมบัติของเวกเตอร์ เมื่อ$\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ คือเวกเตอร์ใดๆ จะได้

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \overline{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \qquad (2.35)$$

เมื่อนำคุณสมบัตินี้ไปประยุกต์กับสมการ (2.34) จะได้

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}\left[(\hat{U} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - (\hat{U} \cdot \vec{r})\dot{\vec{r}}\right]$$

แทน $\hat{U}$ ตามนิยามและใช้สมการ (2.27) เราจะได้รูปแบบอย่างง่าย คือ

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^2}(r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}) \qquad (2.36)$$

พิจารณาสมการ

$$\frac{d\hat{U}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (2.37)$$

หาอนุพันธ์ทางด้านขวาของสมการ (2.37) จะได้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} \qquad (2.38)$$

พิจารณาหาอนุพันธ์ของ $\dot{\vec{r}} \times \vec{h}$ เทียบกับ τ จะได้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \left(\ddot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) + \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{h}}\right) \qquad (2.39)$$

$\vec{h}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ ดังนั้น

$$\dot{\vec{h}} = 0 \qquad (2.40)$$

สมการ(2.39) ก็จะอยู่ในรูปอย่างง่ายคือ

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \left(\ddot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) \qquad (2.41)$$

ย้อนกลับไปที่สมการ(2.36) เราจะเห็นว่าทางขวามือและทางซ้ายมือของสมการสามารถถูกแทนได้โดยสมการ(2.38) และ (2.41) ตามลำดับ เมื่อแทนเข้าไปแล้วเราจะได้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \mu \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (2.42)$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการนี้ เราจะได้

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu\left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right) \qquad (2.43)$$

เมื่อ $\vec{e}$ คือเวกเตอร์คงที่ใดๆ จากการอินทิเกรต เมื่อเราทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.43) กับ $\vec{r}$ เราจะได้

$$\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) \cdot \vec{r} = \mu\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \qquad (2.44)$$

โดยการใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ คือ

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \qquad (2.45)$$

และ $$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \qquad (2.46)$$

เราจะเขียนสมการ(2.44) ได้ในรูปใหม่ คือ

$$\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) \cdot \vec{h} = \mu\left(r + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \qquad (2.47)$$

นำสมการ (2.32) มาแทนจะได้

$$h^2 = \mu\left(r + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \qquad (2.48)$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์ เราจะได้

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \nu \qquad (2.49)$$

โดยที่ $e = |\vec{e}|$

และ ν คือมุมระหว่าง $\vec{e}$ และ $\vec{r}$

แทนค่าสมการ (2.49) ลงในสมการ (2.48) จะได้ความสัมพันธ์เชิงสเกลาร์อีกอย่างหนึ่งคือ

$$h^2 = \mu r(1 + e \cos \nu) \qquad (2.50)$$

หรือ $$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + e \cos \nu} \qquad (2.51)$$

ความหมายทางเรขาคณิตของสมการ (2.51) เห็นได้จากการเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของภาคตัดกรวยที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) คือ

$$r = \frac{\wp}{1 + e \cos \nu} \qquad (2.52)$$

โดยที่จุดกำเนิดอยู่ที่จุดโฟกัส มุมขั้ว ν คือมุมระหว่างเวกเตอร์รัศมีกับจุดบนทางโคจรที่อยู่ใกล้กับจุดโฟกัสมากที่สุด โดยที่

$$\wp = \frac{h^2}{\mu} \qquad (2.53)$$

สรุปก็คือวงโคจรของวัตถุสองชิ้นโดยปกติจะมีลักษณะเป็นภาคตัดกรวยซึ่งตั้งอยู่บนระนาบคงที่ที่ลากผ่านวัตถุศูนย์กลางที่จุดโฟกัส ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่หนึ่งของเคปเลอร์ โดยที่รูปร่างของวงโคจรกำหนดจากค่าของ e กล่าวคือ

ถ้า $e = 0$ วงโคจรจะเป็นวงกลม

$0 < e < 1$ วงโคจรจะเป็นวงรี

$e = 1$ วงโคจรจะเป็นพาราโบลา

$e > 1$ วงโคจรจะเป็นไฮเพอร์โบลา

ซึ่งค่า e นี้ เราเรียกว่าภาวะเยื้องศูนย์ (eccentricity)

.ในกรณีของวงรี ส่วนประกอบต่างๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.7 ซึ่ง $\vec{e}$ กำหนดโดยทิศทางของจุดใกล้โฟกัส (perifocus) และ

ν คือ มุมกวาดจริง (true anomaly)

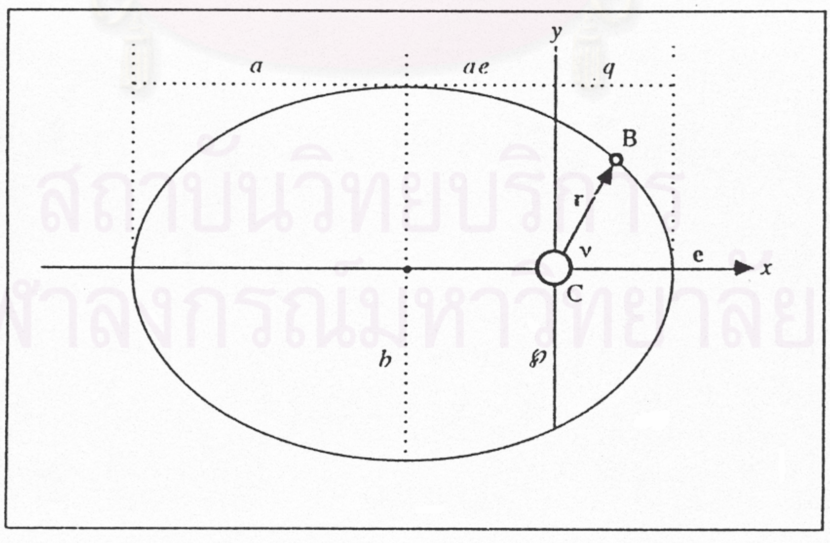
$\wp$ คือ พารามิเตอร์ย่อย (semiparameter)

e คือ ภาวะเยื้องศูนย์ (eccentricity) หรือความรี

q คือ ระยะของจุดใกล้โฟกัส (perifocal distance)

a คือ ครึ่งแกนเอก (semimajor axis)

b คือ ครึ่งแกนโท (semiminor axis)



รูปที่ 2.7 ส่วนประกอบต่างๆ ของวงโคจรวงรี

ส่วนประกอบต่างๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้ [5]

$$\wp = q(1+e) \tag{2.54}$$

$$q = a(1-e) \tag{2.55}$$

$$\wp = a(1-e^2) \tag{2.56}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{2.57}$$

$$b = \sqrt{\wp a} \tag{2.58}$$

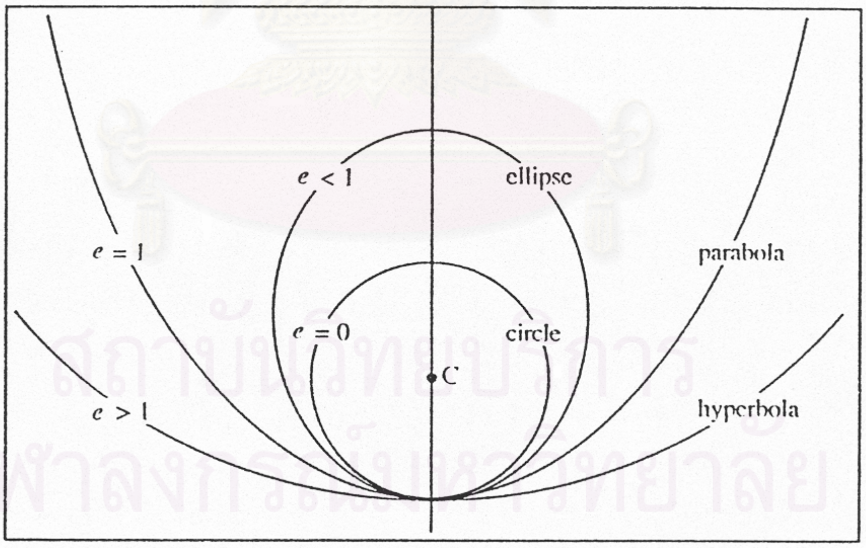
ภาวะเยื้องศูนย์เป็นคุณสมบัติเฉพาะของภาคตัดกรวยซึ่งแสดงโดยสมการ (2.51) ลักษณะของวงโคจรทั้ง 4 ชนิด แสดงในรูปที่ 2.8

จากสมการ (2.43) เราจะได้ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ที่มีประโยชน์ คือ

$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.59}$$

โดยที่ $\vec{e}$ คือเวกเตอร์ภาวะเยื้องศูนย์

ดังนั้นเราสามารถที่จะหาค่า e โดยที่ $e = |\vec{e}|$ และทิศทางของจุดใกล้โฟกัสในอวกาศได้เมื่อทราบ $\vec{r}$ และ $\dot{\vec{r}}$ ที่จุดใดๆ ในวงโคจร



รูปที่ 2.8 ลักษณะของภาคตัดกรวยทั้งสี่ชนิด

2. **กฎแห่งพื้นที่**(The Law of Areas)

จากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตดังที่แสดงในรูปที่ 2.9 เราจะได้ผลคูณเวกเตอร์ ดังนี้

$$\hat{w}dA = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) \qquad (2.60)$$

เมื่อ dA คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กๆ ที่ถูกกวาดโดย $\vec{r}$ ในช่วงเวลาน้อยๆ $d\tau$

$d\vec{r}$ คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นของ $\vec{r}$ ในช่วงเวลาสั้นๆ $d\tau$

$\hat{w}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตั้งฉากกับระนาบวงโคจรซึ่งมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์พื้นที่

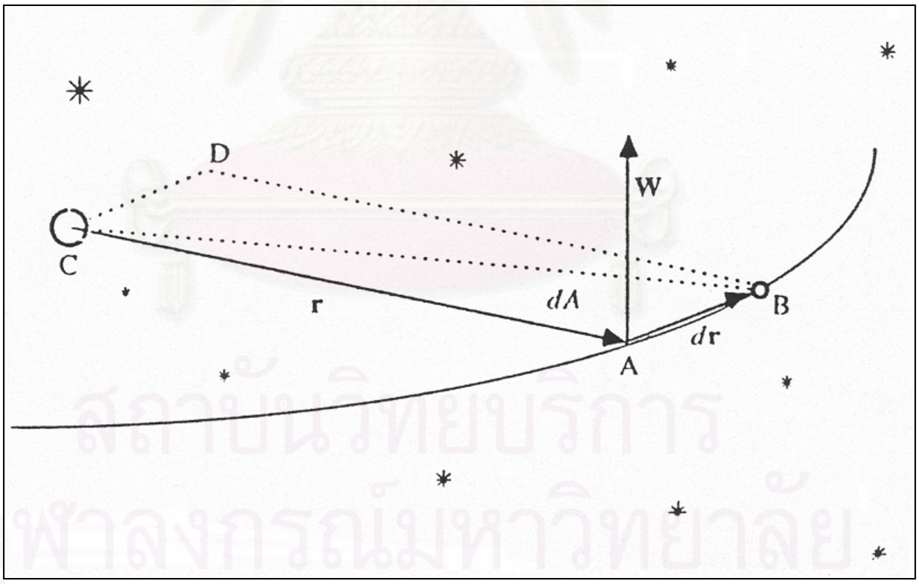
ค่าคงที่ ½ แสดงให้เห็นว่าผลคูณเวกเตอร์นี้มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการ(2.60) ด้วยช่วงเวลาน้อยๆ $d\tau$ ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่กวาดไปเป็นพื้นที่สามเหลี่ยม เราจะได้

$$\hat{w}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau})$$

ซึ่งจะได้

$$\hat{w}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$



รูปที่ 2.9 เวกเตอร์พื้นที่ $\hat{w}dA$

จากสมการ (2.32) เราจะได้

$$\hat{w}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{h} \qquad (2.61)$$

โดยการหาขนาดของสมการ(2.61) ก็จะได้

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{h}{2} \qquad (2.62)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ที่เวกเตอร์รัศมีกวาดไปจะคงที่ หรืออีกอย่างก็คือเวกเตอร์รัศมีจะกวาดให้เกิดพื้นที่ที่เท่ากันในเวลาที่เท่ากัน ซึ่งก็คือกฎข้อที่สองของเคปเลอร์

3. **กฎฮาร์มอนิก** (The Harmonic Law)

จัดสมการ (2.62) ใหม่ โดยแทน $d\tau$ ด้วย kdt จากสมการ (2.12) เราจะได้

$$2(dA) = hk(dt) \qquad (2.63)$$

ในกรณีที่วงโคจรเป็นวงรี การอินทิเกรตพื้นที่ที่ถูกกวาดโดยเวกเตอร์รัศมีในช่วงเวลาหนึ่งคาบของการโคจร จะได้ผลที่ตามมาคือ

$$2(\pi ab) = hk(P) \qquad (2.64)$$

เมื่อ πab คือพื้นที่ของวงรีและ P คือคาบของการโคจร เมื่อย้อนกลับไปที่สมการ (2.53) และสมการ (2.58) คือ

$$h = \sqrt{\mu\wp}$$
$$b = \sqrt{\wp a}$$

สมการ (2.64) ก็จะกลายเป็น

$$P^2 = \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\right]a^3 \qquad (2.65)$$

ซึ่งก็คือรูปแบบทั่วไปของกฎข้อที่สามของเคปเลอร์นั่นเอง

4. **กฎวิส-วีวา** (The Vis-viva Law)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในการโคจรกับตำแหน่ง สามารถที่จะหาได้จากการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น คือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3}$$

เมื่อทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการนี้กับ $2\dot{\vec{r}}$ และใช้สมการ (2.27) เราจะได้ว่า

$$2(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = 2\left(-\frac{\mu\dot{r}}{r^2}\right) \qquad (2.66)$$

เมื่อพิจารณาอนุพันธ์ของ

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}) + (\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})$$

$$= 2(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}) \tag{2.67}$$

และ

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu}{r}\right) = \frac{-\mu\dot{r}}{r^2} \tag{2.68}$$

เมื่อแทนค่าสมการ (2.67) และ (2.68) ลงใน (2.66) จะได้

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}) = 2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu}{r}\right) \tag{2.69}$$

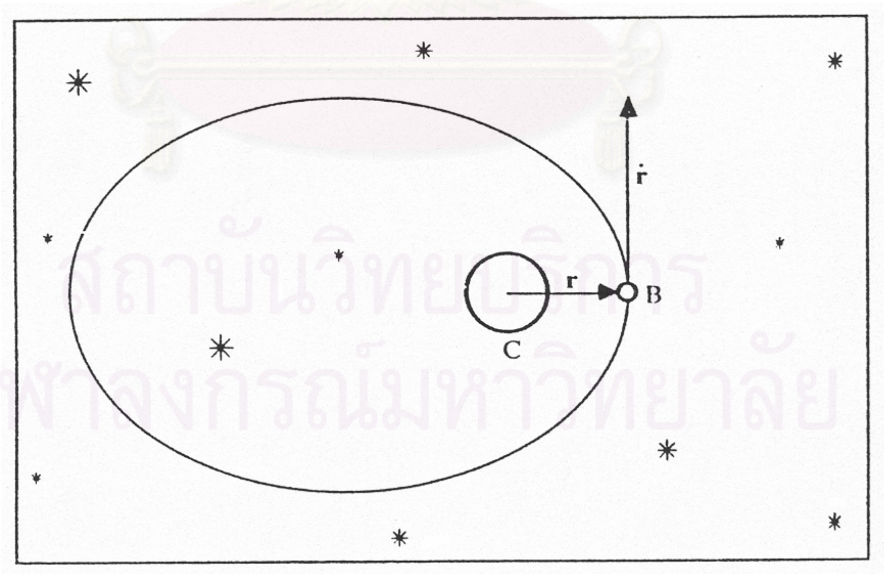
อินทิเกรตสมการ (2.69) จะได้

$$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{2\mu}{r} + \varepsilon$$

ซึ่งก็คือ

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \varepsilon \tag{2.70}$$

โดยที่ ε คือค่าคงที่ใดๆ จากการอินทิเกรต ซึ่งมีนัยสำคัญในทางฟิสิกส์คือมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ต่อหน่วยมวลของวัตถุที่โคจร โดยสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขที่มีอยู่เมื่อวัตถุอยู่ที่จุดใกล้โฟกัส ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 เมื่อวัตถุโคจรมาอยู่ที่จุดใกล้โฟกัส

ที่จุดใกล้โฟกัสนี้เมื่อดูจากรูปที่ 2.7 ทำให้ได้ว่า $r = q$

$$\varepsilon = v^2 - \frac{2\mu}{q} \tag{2.71}$$

เนื่องจาก $\vec{r}$ ตั้งฉากกับ $\dot{\vec{r}}$ ที่จุดใกล้โฟกัส เราจะใช้นิยามของผลคูณเวกเตอร์เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์อย่างง่าย คือ

$$h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = rv \sin 90^\circ$$
$$= qv \qquad \text{(ที่จุดใกล้โฟกัส)} \tag{2.72}$$

เมื่อนำสมการ (2.72) มายกกำลังสองและแทนด้วยสมการ (2.53) และ (2.54) เราจะได้

$$v^2 = \frac{\mu(1+e)}{q} \tag{2.73}$$

นำสมการ (2.73) และ (2.55) ไปแทนลงในสมการ (2.71) จะได้ค่า ε เป็น

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{a} \tag{2.74}$$

ในท้ายที่สุด เมื่อนำค่า ε ที่ได้จากสมการ (2.74) ไปแทนลงในสมการ (2.70) เราก็จะได้

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{2.75}$$

สมการ(2.75) นี้เรียกว่าสมการวิส-วีวา [5] ซึ่งเป็นสมการที่แสดงให้เห็นว่าผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของวัตถุที่ตำแหน่งใดๆบนวงโคจรจะคงที่เสมอ สมการนี้มีประโยชน์อย่างมากโดยเฉพาะในการคำนวณหาค่าครึ่งแกนเอก (a) เมื่อเราทราบตำแหน่งและเวกเตอร์ความเร็วที่จุดใดๆ บนวงโคจร โดยหาได้จากสมการ

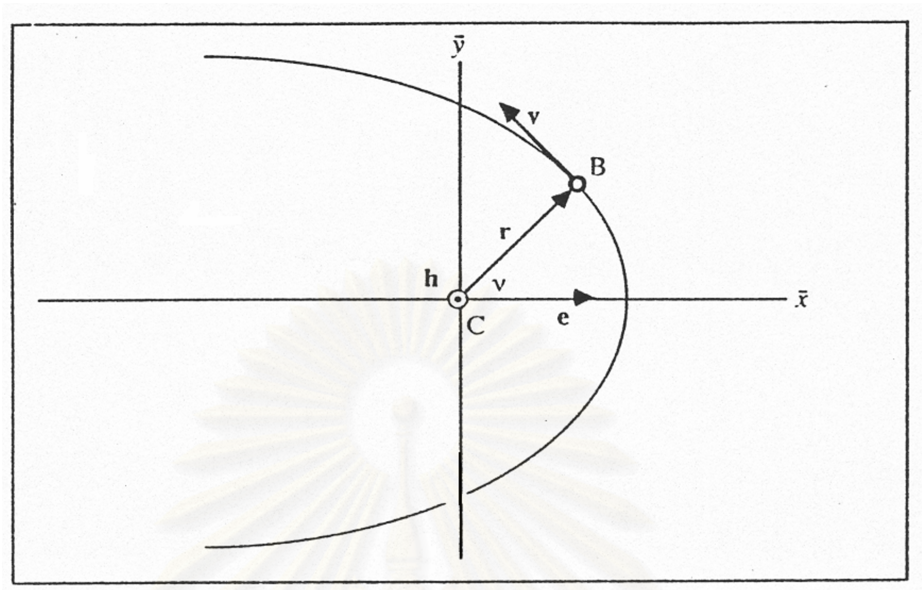
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \tag{2.76}$$

2.2.3 **ความสัมพันธ์ทั่วไปทางเรขาคณิต**

ผลเฉลยของปัญหาวัตถุสองชิ้นจะสามารถบ่งบอกลักษณะได้โดยปริมาณเชิงตัวเลขหกตัว ซึ่งสัมพันธ์กับค่าคงที่ใดๆ ที่ได้จากการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3}$$

ปริมาณพื้นฐานเหล่านี้เป็นปริมาณข้อมูลที่น้อยที่สุดที่จำเป็นสำหรับการกำหนดทางโคจรและตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าในอวกาศ เราเรียกปริมาณนี้ว่าหลักมูลทางโคจร (orbital elements)



รูปที่ 2.11 ระบบพิกัดระนาบวงโคจร

รูปที่ 2.11 แสดงถึงวงโคจรของวัตถุ B รอบจุดศูนย์กลาง C ที่ตั้งอยู่บนจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก โดยที่ระนาบ $\bar{x}\,\bar{y}$ เป็นระนาบวงโคจร และแกน $\bar{x}$ อยู่ในแนวเดียวกับครึ่งแกนยาวของวงโคจร เวกเตอร์ $\vec{v}$ คือความเร็วของวัตถุ B ณ จุดที่เวกเตอร์รัศมีทำมุมกวาดจริง ν กับแกน $\bar{x}$

ย้อนกลับไปสมการ (2.32) เราจะเขียนได้ว่า

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \tag{2.77}$$

ในระบบพิกัดระนาบวงโคจร เราจะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \vec{h} &= \{0, 0, h\} \\ \vec{r} &= \{\bar{x}, \bar{y}, 0\} \\ \vec{v} &= \{\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, 0\} \end{aligned}\right\} \tag{2.78}$$

เมื่อทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.77) กับ $\vec{h}$ เราจะได้

$$\vec{h} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

ซึ่งจะกลายเป็น

$$h^2 = h(\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}})$$

เพราะฉะนั้น

$$h = \bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}} \tag{2.79}$$

โมเมนตัมเชิงมุมและอัตราเร็วเชิงมุม

สมการ(2.79) สามารถนำไปใช้หาความสัมพันธ์ระหว่าง h และอัตราเร็วเชิงมุม $\dot{\nu}$ ได้จากรูปที่ 2.11 เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\bar{x} = r\cos\nu \tag{2.80}$$

$$\bar{y} = r\sin\nu \tag{2.81}$$

หาอนุพันธ์ของสองสมการนี้เทียบกับเวลา τ จะได้

$$\dot{\bar{x}} = \dot{r}\cos\nu - r\dot{\nu}\sin\nu \tag{2.82}$$

$$\dot{\bar{y}} = \dot{r}\sin\nu + r\dot{\nu}\cos\nu \tag{2.83}$$

แทนสมการ (2.80) จนถึง (2.83) ลงในสมการ (2.79) และใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติที่ว่า

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.84}$$

เราจะได้

$$h = r^2\dot{\nu} \tag{2.85}$$

อัตราเร็วเชิงรัศมีและมุมกวาดจริง

เราสามารถใช้สมการ (2.85) เพื่อหาอัตราเร็วเชิงรัศมี $\dot{r}$ จากสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย คือสมการ (2.52) เราทราบว่า

$$\wp = r(1 + e\cos\nu) \tag{2.86}$$

โดยสมการ (2.53) ให้

$$\wp = \frac{h^2}{\mu}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (2.86) เทียบกับ τ จะได้

$$\dot{r}(1+\cos\nu) - re\dot{\nu}\sin\nu = 0$$

เมื่อคูณ r เข้าไปจะได้

$$r\dot{r}(1+\cos\nu) - r^2e\dot{\nu}\sin\nu = 0$$

เมื่อแทนสมการ (2.85) และ (2.86) เข้าไปจะได้

$$\dot{r}\wp - he\sin\nu = 0$$

เนื่องจาก $h = \sqrt{\mu\wp}$ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\wp}}e\sin\nu \tag{2.87}$$

ภาวะเยื้องศูนย์

พิจารณาสมการของเวกเตอร์ภาวะเยื้องศูนย์ $\vec{e}$ ตามสมการ (2.59) คือ

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

เนื่องจาก $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \qquad (2.88)$$

จากคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่ว่า

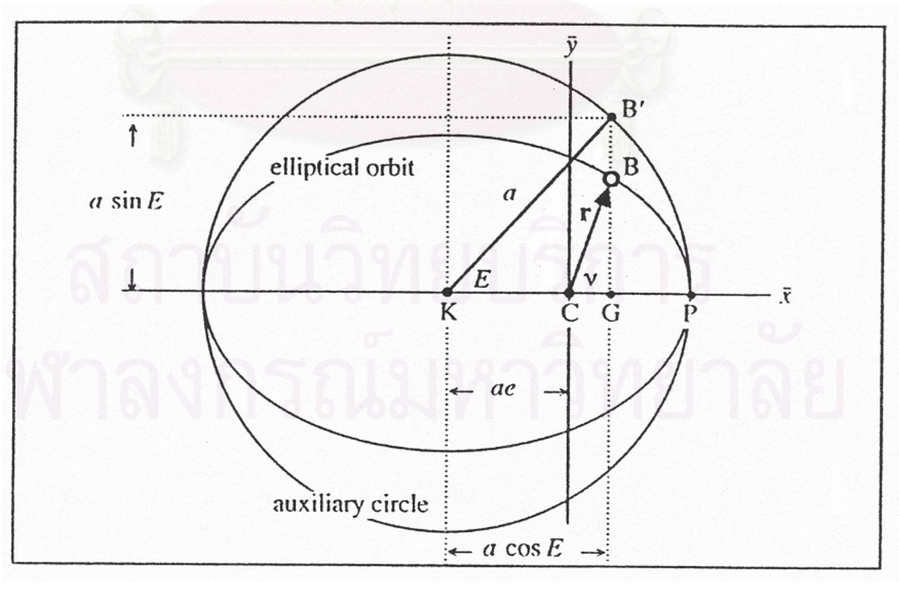
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

ดังนั้นสมการ (2.88) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายโดยใช้สมการ (2.27) ได้

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v} \qquad (2.89)$$

2.2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตกับเวลา

เมื่อนำสมการ (2.79) ไปประยุกต์ใช้กับวงโคจรที่เป็นวงรี ก็จะสามารถหาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างตำแหน่งในระนาบวงโคจรกับเวลาที่ล่วงไปจากเวลาเริ่มต้น (epoch) ซึ่งจะมีลักษณะของฟังก์ชันเป็นไปตามสมการสำหรับวงโคจรวงรีที่ถูกสร้างขึ้นโดยเคปเลอร์



รูปที่ 2.12 ระบบของวงรี

พิจารณาโครงสร้างทางเรขาคณิตของวงโคจรที่เป็นวงรี ในรูปที่ 2.12 ซึ่งประกอบด้วยวงกลมเสริม(auxiliary circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด K ล้อมรอบรูปวงรีของการโคจรรอบจุด C เมื่อวัตถุท้องฟ้า B โคจรไปตามวงรี มันจะถูกตามโดยจุด B′ ซึ่งนิยามโดยการฉายภาพของ B ในทิศทางของแกน y ลงบนวงกลมเสริม มุม E เป็นมุมที่เป็นสัดส่วนกับพื้นที่แรเงา เรียกว่ามุมกวาดเยื้อง(eccentric anomaly) ซึ่งจะวัดในระนาบวงโคจรจากแกน $\bar{x}$ ไปยังเส้น KB′ ระยะจาก B′ ไปยัง K จะมีค่าเท่ากับ a ซึ่งก็คือระยะครึ่งแกนเอกของวงรี และระยะจาก K ไปยัง C มีค่าเท่ากับ ae โดยที่ e คือภาวะเยื้องศูนย์ หรือความรีของวงรี

ประโยชน์ของวงกลมเสริมคือช่วยในการกระจาย $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ในเทอมของมุมกวาดเยื้อง E แทนมุมกวาดจริง ν เพื่อทำให้สมการ (2.79) สามารถที่จะลดรูปลงไปสู่รูปแบบที่ง่ายต่อการอินทิเกรต จากรูปที่ 2.12 เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด $\bar{x}$ ของวัตถุท้องฟ้ากับมุมกวาดเยื้อง E คือ

$$\bar{x} = a(\cos E - e) \tag{2.90}$$

จากสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย คือสมการ (2.86) จะได้

$$\wp = r + e(r\cos\nu) \tag{2.91}$$

เมื่อแทนสมการ (2.80) ลงใน (2.90) เราจะได้

$$r\cos\nu = a\cos E - ae \tag{2.92}$$

ดังนั้น แทนสมการ (2.92) ลงใน (2.91) ก็จะได้

$$\wp = r + ae\cos E - ae^2 \tag{2.93}$$

ย้อนกลับไปสมการ (2.56) คือ

$$\wp = a(1 - e^2)$$

นำสมการ (2.93) มาจัดใหม่ให้อยู่ในรูปของ r ได้

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{2.94}$$

เราจะสร้างสมการของ $\bar{y}$ โดยการแทน $\bar{x}$ และ r ลงในความสัมพันธ์ทั่วไปคือ

$$r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

ซึ่งจะได้

$$\bar{y}^2 = a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E)$$

จากการประยุกต์ใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติของสมการ (2.84) ก็จะได้

$$\bar{y}^2 = a^2(1 - e^2)\sin^2 E$$

เมื่อถอดรากที่สองก็จะกลายเป็น

$$\bar{y} = a\sqrt{1 - e^2}\,\sin E \tag{2.95}$$

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วสามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการสำหรับ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ดังนั้นจากสมการ (2.90) เราจะได้

$$\dot{\bar{x}} = -a\dot{E}\sin E \qquad (2.96)$$

และจากสมการ(2.95) เราก็จะได้

$$\dot{\bar{y}} = a\sqrt{1-e^2}\dot{E}\cos E \qquad (2.97)$$

เมื่อแทนสมการ (2.90), (2.95), (2.96) และ (2.97) ลงในสมการ (2.79) ก็จะได้

$$h = a^2\sqrt{1-e^2}(\cos^2 E - e\cos E + \sin^2 E)\dot{E}$$

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายโดยการใช้สมการ (2.53), (2.57) และ (2.58) จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (1 - e\cos E)\dot{E} \qquad (2.98)$$

เมื่อใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติของสมการ (2.84) และ

$$\dot{E} = \frac{dE}{d\tau}$$

สมการที่ (2.98) ก็จะกลายเป็น

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}d\tau = (1 - e\cos E)dE$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการนี้จะทำให้ได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\tau = E - e\sin E$$

โดยที่ค่าคงที่ใดๆ ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ เนื่องจากเรากำหนดให้ τ เป็นศูนย์เมื่อ E เป็นศูนย์ ให้ T แทนเวลาที่ผ่านจุดใกล้โฟกัส ดังนั้นตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าที่เวลา t ใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$n(t - T) = E - e\sin E$$

โดย n คือการเคลื่อนที่เฉลี่ย(mean motion) ซึ่งหมายถึงอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของวัตถุที่ใช้เคลื่อนที่ในหนึ่งคาบของการโคจร โดยที่

$$n = k\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \qquad (2.99)$$

ให้ M คือมุมกวาดเฉลี่ย(mean anomaly) ได้ว่า

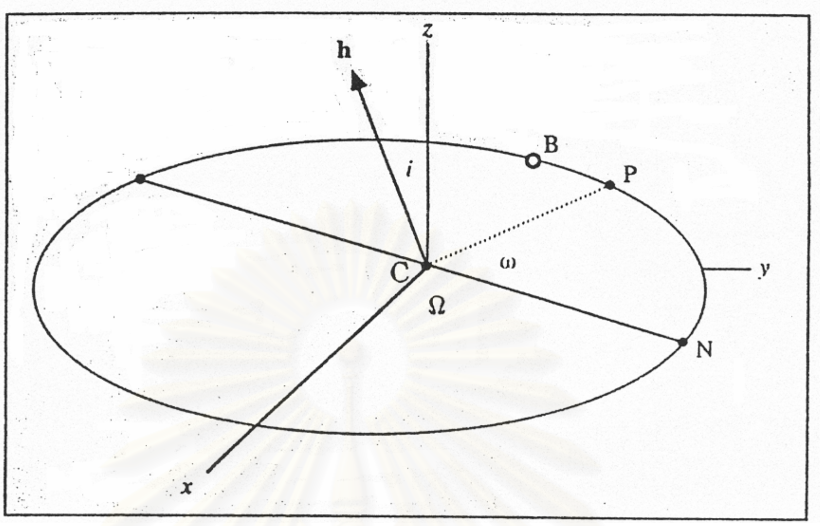
$$M = n(t - T) \qquad (2.100)$$

ในที่สุดเราก็จะได้

$$M = E - e\sin E \qquad (2.101)$$

สมการนี้เรียกว่าสมการเคปเลอร์(Kepler's equation) [6] ซึ่งเป็นสมการสำหรับวงโคจรที่เป็นวงรี แต่สมการนี้ก็สามารถที่จะนำไปใช้กับวงโคจรที่เป็นวงกลมโดยที่ $e = 0$ ได้เช่นเดียวกัน

2.2.5 การหาหลักมูลทางโคจรจากตำแหน่งและความเร็ว



รูปที่ 2.13 ลักษณะทางเรขาคณิตของหลักมูลทางโคจร

ส่วนประกอบของ $\vec{r}$ และ สามารถที่จะบรรยายลักษณะทั่วไปของการเคลื่อนที่ได้ แต่จะไม่สามารถที่จะแสดงให้เห็นถึงขนาด รูปร่าง และทิศทางของวงโคจรในอวกาศได้อย่างชัดเจน ในการที่จะแสดงลักษณะทางเรขาคณิตของวงโคจรซึ่งเป็นสามมิติดังที่แสดงในรูปที่ 2.13 เราจะต้องแปลง $\vec{r}$ และ ไปเป็นหลักมูลทางโคจร(orbital elements) [7] ดังต่อไปนี้

a คือ ครึ่งแกนเอก(semimajor axis)ของวงรี

q คือ ระยะใกล้จุดโฟกัส(perifocal distance)
หรือระยะของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (perihelion distance)

e คือ ภาวะเยื้องศูนย์ (eccentricity) หรือความรี

i คือ ความเอียง(inclination)ของระนาบวงโคจร

Ω คือ ระยะแวงของจุดไต่ขึ้น(longitude of ascending node)

ω คือ ระยะมุมของจุดใกล้โฟกัส(argument of the perifocus)
หรือระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์(argument of perihelion)

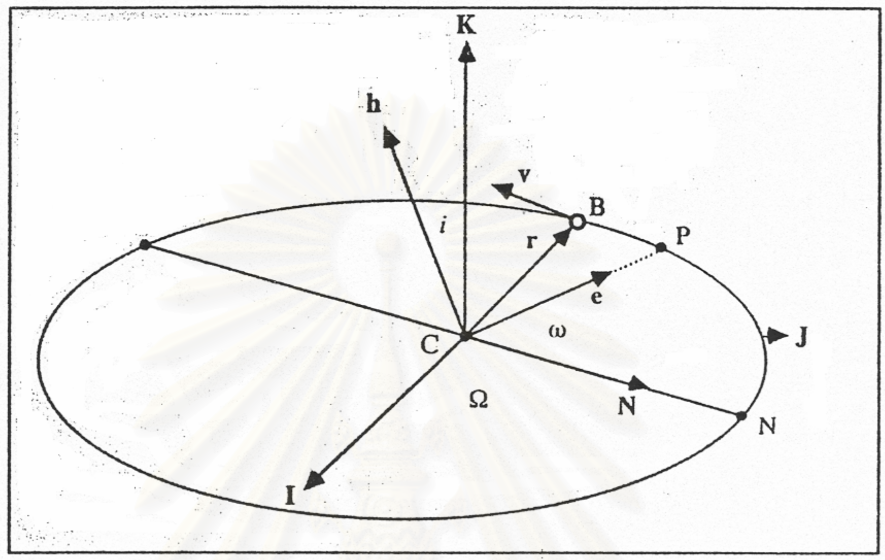
n คือ การเคลื่อนที่เฉลี่ย(mean motion)

M คือ มุมกวาดเฉลี่ย(mean anomaly)

T คือ เวลาที่ผ่านจุดใกล้โฟกัส(time of perifocal passage)
หรือเวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (time of perihelion passage)

1. **เวกเตอร์พื้นฐานสามตัว**

เราเริ่มกระบวนการหาหลักมูลทางโคจรโดยการสร้างเวกเตอร์พื้นฐานสามตัว คือ $\vec{e}$, $\vec{h}$ และ $\vec{N}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2.14 ให้จุดกำเนิดของระบบพิกัดคาร์ทีเซียนอยู่ที่จุดศูนย์กลาง C และ $\hat{I}$, $\hat{J}$ และ $\hat{K}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับแกน x, y และ z ตามลำดับ



รูปที่ 2.14 เวกเตอร์พื้นฐาน คือ $\vec{e}$, $\vec{h}$ และ $\vec{N}$

ระบบพิกัดนี้จะให้แกน +x มีทิศชี้ไปยังจุดวสันตวิษุวัต และระนาบ xy ซ้อนทับกันพอดีกับระนาบสุริยะวิถี โดยให้ดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง ดังนั้นที่เวลา t ใดๆ เราจะมี

$$\vec{r} = \{x , y , z\}$$
$$\vec{v} = \{\dot{x} , \dot{y} , \dot{z}\}$$

และ

$$\left.\begin{aligned} r &= |\vec{r}| \\ v^2 &= \vec{v} \cdot \vec{v} \\ r\dot{r} &= \vec{r} \cdot \vec{v} \end{aligned}\right\} \quad (2.102)$$

จากสมการ (2.89) เวกเตอร์ภาวะเยื้องศูนย์คือ

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v} \quad (2.103)$$

ซึ่ง

$$\vec{e} = \{e_x , e_y , e_z\} \quad (2.104)$$

ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \left(\frac{v^2}{\mu}-\frac{1}{r}\right)x - \left(\frac{r\,\dot{r}}{\mu}\right)\dot{x} \\ e_y &= \left(\frac{v^2}{\mu}-\frac{1}{r}\right)y - \left(\frac{r\,\dot{r}}{\mu}\right)\dot{y} \\ e_z &= \left(\frac{v^2}{\mu}-\frac{1}{r}\right)z - \left(\frac{r\,\dot{r}}{\mu}\right)\dot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (2.105)$$

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมหาได้จากผลคูณเวกเตอร์

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \qquad (2.106)$$

ซึ่ง

$$\vec{h} = \{h_x, h_y, h_z\} \qquad (2.107)$$

ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned} h_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ h_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ h_z &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2.108)$$

และเวกเตอร์ของจุดไต่ขึ้น $\vec{N}$ หาได้จากผลคูณเวกเตอร์ของ $\hat{K}$ และ $\vec{h}$ คือ

$$\vec{N} = \hat{K} \times \vec{h} \qquad (2.109)$$

ซึ่ง

$$\hat{K} = \{0,0,1\}$$
$$\vec{h} = \{h_x, h_y, h_z\}$$

และ

$$\vec{N} = \{N_x, N_y, N_z\} \qquad (2.110)$$

ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned} N_x &= -h_y \\ N_y &= +h_x \\ N_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.111)$$

2. พารามิเตอร์ a, e, q

พารามิเตอร์ของวงรี a, e, q สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ต่างๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว จากสมการวิส-วีวา เราจะได้

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \qquad (2.112)$$

ซึ่งเราจะสามารถหาค่า a ได้ ส่วนภาวะเยื้องศูนย์ e สามารถหาได้จากสมการ (2.103) คือ

$$e = |\vec{e}| \qquad (2.113)$$

เราจะหาระยะของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ q โดยใช้สมการ (2.106) จะได้

$$h = |\vec{h}| \tag{2.114}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.53) คือ

$$\wp = \frac{h^2}{\mu} \tag{2.115}$$

และจากสมการ (2.54) เราก็จะได้

$$q = \frac{\wp}{1+e} \tag{2.116}$$

3. มุมที่ใช้กำหนดทิศทาง

กลับไปดูรูปที่ 2.14 เราจะพบว่ามุม i, Ω, ω สามารถหาได้จากผลคูณสเกลาร์ต่างๆ ระหว่างเวกเตอร์พื้นฐาน $\vec{e}$, $\vec{h}$,$\vec{N}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{I}$, $\hat{J}$, $\hat{K}$ ดังนั้นความเอียง i จะคำนวณได้จากผลคูณสเกลาร์

$$\hat{K} \cdot \vec{h} = |\hat{K}||\vec{h}| \cos i \tag{2.117}$$

โดยที่

$$\hat{K} = \{0,0,1\}$$
$$\vec{h} = \{h_x, h_y, h_z\}$$

ดังนั้นเราจะพบว่า

$$\hat{K} \cdot \vec{h} = h_z$$
$$|\hat{K}| = 1$$
$$|\vec{h}| = h$$

สมการที่ (2.117) ก็จะอยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \tag{2.118}$$

ในกรณีของ Ω เราเริ่มจากผลคูณสเกลาร์

$$\hat{I} \cdot \vec{N} = |\hat{I}||\vec{N}| \cos \Omega \tag{2.119}$$

โดยที่

$$\hat{I} = \{1,0,0\}$$
$$\vec{N} = \{N_X, N_y, N_Z\}$$

ดังนั้น

$$\hat{I} \cdot \vec{N} = N_X$$
$$|\hat{I}| = 1$$

$$| \vec{N} | = N$$

สมการ (2.119) ก็จะลดลงเหลือ

$$cos\ \Omega = \frac{N_X}{N} \qquad (2.120)$$

ถ้า $N_y < 0$ จะได้ $\Omega > 180^{O}$

ในกรณีของ ω ก็สามารถหาได้จากผลคูณสเกลาร์

$$\vec{N} \cdot \vec{e} = |\vec{N}||\vec{e}|\, cos\ \omega \qquad (2.121)$$

โดยที่

$$\vec{N} = \{N_X, N_y, N_Z\}$$

$$\vec{e} = \{e_x, e_y, e_z\}$$

$$| \vec{N} | = N$$

$$| \vec{e} | = e$$

ดังนั้นสมการ (2.121) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$cos\ \omega = \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{N\, e} \qquad (2.122)$$

ถ้า $e_z < 0$ จะได้ $\omega > 180^{O}$

บางครั้ง ω นี้ก็จะถูกแทนด้วยระยะแวงของจุดใกล้ดวงอาทิตย์(longitude of perihelion) $\tilde{\omega}$ ซึ่งหาได้จาก

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega$$

หรือก็คือ

$$\omega = \tilde{\omega} - \Omega$$

4. มุมกวาดเฉลี่ย

จากสมการ (2.80) และ (2.81) ตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าเมื่ออ้างอิงกับระบบพิกัดระนาบวงโคจรคือ

$$\bar{x} = r\, cos\ \nu \qquad (2.123)$$

$$\bar{y} = r\, sin\ \nu \qquad (2.124)$$

เมื่อนำสมการของภาคตัดกรวยคือสมการ (2.52) มาจัดรูปใหม่จะได้

$$r\, cos\ \nu = \frac{\wp - r}{e}$$

ซึ่งจะทำให้เราสามารถเขียนสมการ (2.123) ได้ในรูปของ

$$\bar{x} = \frac{\wp - r}{e} \qquad (2.125)$$

เมื่อย้อนกลับไปที่สมการ(2.87) เรามี

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\wp}}e \sin \nu$$

เมื่อนำ r มาคูณตลอดทั้งสองข้าง จะได้

$$r \sin \nu = \frac{r\dot{r}}{e}\sqrt{\frac{\wp}{\mu}}$$

แทนค่าสมการข้างบนลงในสมการ (2.124) เราจะได้

$$\bar{y} = \frac{r\dot{r}}{e}\sqrt{\frac{\wp}{\mu}} \qquad (2.126)$$

เมื่อวงโคจรเป็นวงรี เราจะใช้สมการ (2.90) และ (2.95) คือ

$$\bar{x} = a(\cos E - e) \qquad (2.127)$$

$$\bar{y} = b \sin E \qquad (2.128)$$

โดยที่

$$b = a\sqrt{1-e^2} \qquad (2.129)$$

ซึ่ง $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ สามารถหาได้จากสมการ (2.125) และ (2.126) ตามลำดับ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\cos E = \frac{\bar{x}}{a} + e \qquad (2.130)$$

$$\sin E = \frac{\bar{y}}{b} \qquad (2.131)$$

ก็จะสามารถหาค่ามุมกวาดเยื้อง E ได้

ดังนั้นมุมกวาดเฉลี่ย M และการเคลื่อนที่เฉลี่ย n ของวงรี ก็จะสามารถหาได้ในหน่วยของเรเดียน (radian) ดังนี้

$$M = E - e \sin E \qquad (2.132)$$

$$n = k\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \qquad (2.133)$$

และคาบของวงโคจรก็สามารถหาได้จากสมการ (2.65)

ในบางครั้งเราจะใช้ระยะแวงเฉลี่ย (mean longitude) L แทนมุมกวาดเฉลี่ย M โดยจะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$L = \tilde{\omega} + M$$

หรือ

$$M = L - \tilde{\omega}$$

ดังนั้น

$$M = L - \omega - \Omega$$

5. เวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์

สามารถหาได้จากสมการของมุมกวาดเฉลี่ย คือ

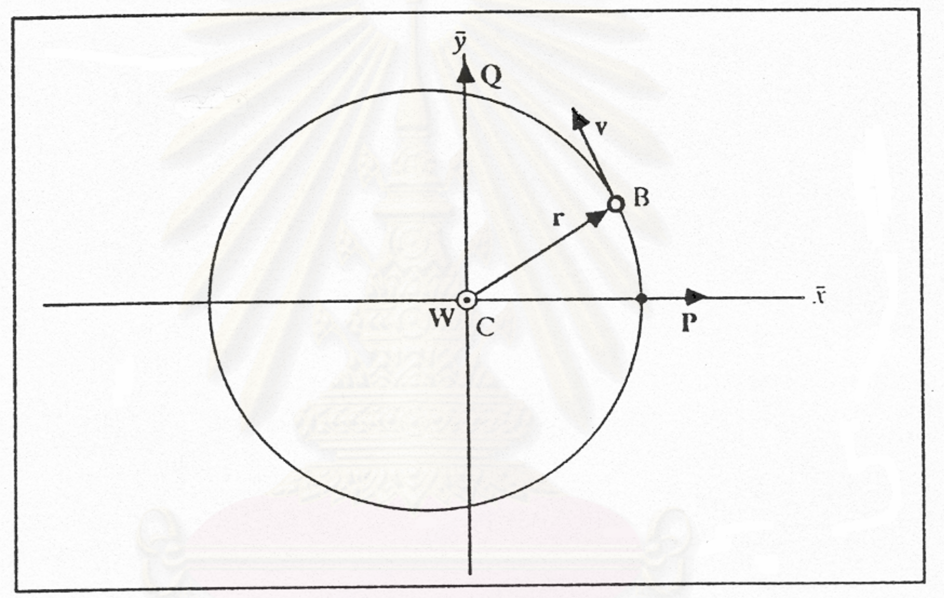
$$M = n(t - T) \qquad (2.134)$$

ซึ่งก็จะได้

$$T = t - \frac{M}{n} \qquad (2.135)$$

ดังนั้นในการหาค่า T เราจะต้องคำนวณหาค่า M และ n ให้ได้ก่อน

2.2.6 การหาตำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจร



รูปที่ 2.15 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$

การแปลงหลักมูลทางโคจรไปเป็นตำแหน่งและความเร็วที่เวลาเริ่มต้นใดๆ สามารถทำให้ง่ายขึ้นโดยการกำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$ ซึ่งตั้งฉากกันในระบบพิกัดระนาบวงโคจร คือระนาบ $\bar{x}\,\bar{y}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2.15

$\hat{P}$ มีทิศทางในแนวแกน $\bar{x}$ ชี้ไปยังจุดใกล้ดวงอาทิตย์ $\hat{Q}$ มีทิศทางในแนวแกน $\bar{y}$ และ $\hat{W}$ มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจร ดังนั้น

$$\hat{W} = \hat{P} \times \hat{Q} \qquad (2.136)$$

ดังนั้นตำแหน่งและความเร็วของวัตถุท้องฟ้า B ที่โคจรรอบจุด C จะเขียนได้ในเทอมของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \bar{x}\hat{P} + \bar{y}\hat{Q} \\ \vec{v} &= \dot{\bar{x}}\hat{P} + \dot{\bar{y}}\hat{Q} \end{aligned}\right\} \quad (2.137)$$

ในวงโคจรที่เป็นวงรี เราจะได้เซตของหลักมูลทางโคจร คือ $\{a, e, i, \Omega, \omega, M\}$ มุมกวาดเฉลี่ย M และมุมกวาดเยื้อง E จะสัมพันธ์กันโดยสมการเคปเลอร์คือ

$$M = E - e \sin E \quad (2.138)$$

เมื่อสมมุติว่ายังไม่ได้ค่าที่ถูกต้องของ M ดังนั้นจึงเขียนสมการ (2.138) ใหม่ได้ว่า

$$f = E - e \sin E - M \quad (2.139)$$

หาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ E ได้

$$\frac{df}{dE} = 1 - e \cos E \quad (2.140)$$

ในการประมาณครั้งแรกของมุมกวาดเยื้อง เราให้ $E = M$ สมการ(2.139) และ (2.140) สามารถแก้หาค่า E ได้อย่างถูกต้องแม่นยำโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทำซ้ำต่อเนื่องกันไปเรื่อยๆ เมื่อได้ค่า E ที่มีความละเอียดตามที่ต้องการแล้ว เราจะใช้สมการ (2.94) คือ

$$r = a(1 - e \cos E)$$

และนำสมการ (2.98) มาเขียนใหม่จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} = a(1 - e \cos E)\dot{E} \quad (2.141)$$

แทนค่าสมการ (2.94) และสมการ (2.141) แล้วจัดใหม่ ในที่สุดเราจะได้

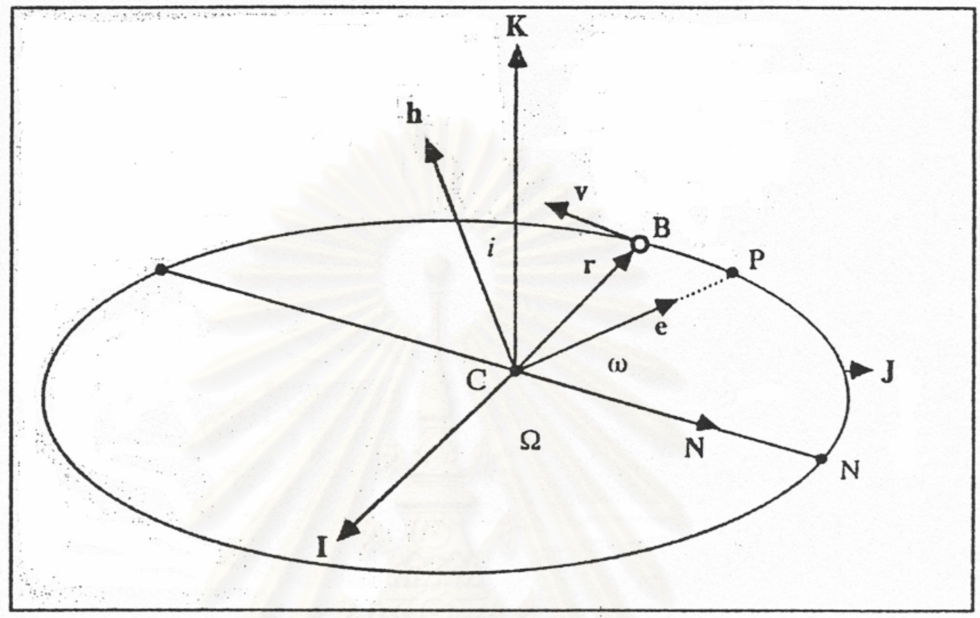
$$\dot{E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.142)$$

และใช้สมการ (2.90), (2.95), (2.96) และ (2.97) เพื่อคำนวณหาส่วนประกอบสเกลาร์ของตำแหน่ง และความเร็วในระบบพิกัดระนาบวงโคจร จะได้

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= a(\cos E - e) \\ \bar{y} &= b \sin E \\ \dot{\bar{x}} &= -a\dot{E} \sin E \\ \dot{\bar{y}} &= b\dot{E} \cos E \end{aligned}\right\} \quad (2.143)$$

โดยที่ $b = a\sqrt{1 - e^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$ ในระบบพิกัดระนาบวงโคจรจะมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ ในระบบพิกัดสุริยะวิถีสุริยะมัธยมผ่านทางมุม i, ω, Ω ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 มุม i, ω, Ω

ซึ่งเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$ กับ $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ จะมีความสัมพันธ์กันดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{I}(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i) \\ &\quad + \hat{J}(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) \\ &\quad + \hat{K}(\sin\omega\sin i)\end{aligned} \tag{2.144}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \hat{I}(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i) \\ &\quad + \hat{J}(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i) \\ &\quad + \hat{K}(\cos\omega\sin i)\end{aligned} \tag{2.145}$$

$$\begin{aligned}\hat{W} &= \hat{I}(\sin\omega\sin i) \\ &\quad + \hat{J}(-\cos\Omega\sin i) \\ &\quad + \hat{K}(\cos i)\end{aligned} \tag{2.146}$$

2.3 **การรบกวนเฉพาะ** (Special Perturbations)

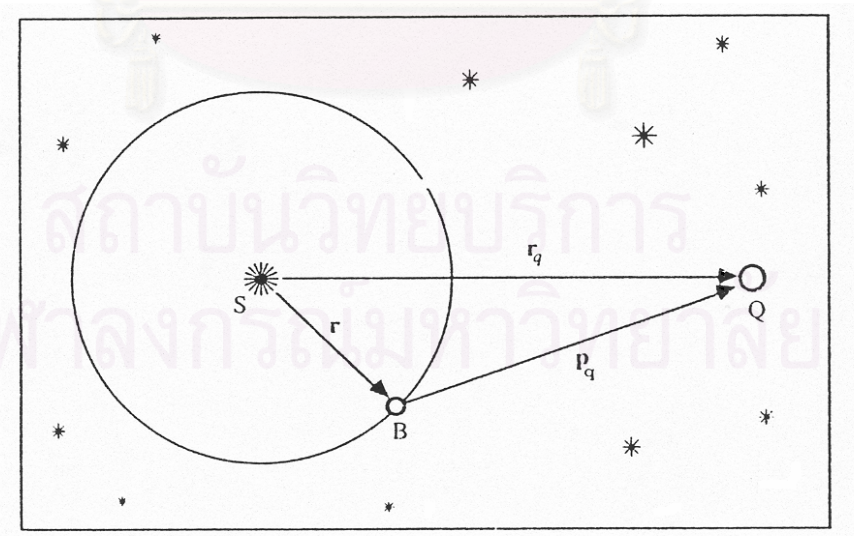
เมื่อวัตถุท้องฟ้าเคลื่อนที่เป็นเวลานานๆ ในการคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุจะต้องคำนึงถึงผลที่เกิดจากการรบกวน และผลต่อตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่าระเบียบวิธีของการรบกวนทั่วไป (general perturbations) [6] ส่วนระเบียบวิธีของการรบกวนเฉพาะนั้น จะใช้คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุที่โคจรในช่วงระยะเวลาที่จำกัดโดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่ายในทางปฏิบัติอย่างยิ่ง โดยหลักการพื้นฐานจะเริ่มต้นจากการพิจารณาสมการ (2.15) คือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{n} m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right) \qquad (2.15)$$

โดยที่เทอมแรกทางขวามือของสมการ แสดงถึงความเร่งของวัตถุสองชิ้น ส่วนเทอมของผลรวม (เทอมที่สอง) แสดงถึงการดึงดูดของมวลรบกวน m_q ที่มีจำนวน n ตัว

วิธีการของการรบกวนเฉพาะนี้จะต้องอาศัยการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งเราจะใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา(Runge-Kutta method) และระเบียบวิธีโคเวลล์(Cowell method) มาใช้ในการแก้ปัญหาในงานวิจัยนี้ ซึ่งขั้นตอนต่างๆ จะกล่าวในบทต่อไป

โดยปกติการรบกวนจากแรงโน้มถ่วงของวัตถุที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ที่มีต่อกันจะมีค่าน้อย แต่ผลกระทบเหล่านี้จะเพิ่มมากขึ้นจนสังเกตเห็นได้ชัดเจนเมื่อติดตามการเคลื่อนที่ของ วัตถุเหล่านี้เป็นเวลาหลายๆ ปี



รูปที่ 2.17 ลักษณะทางเรขาคณิตของการรบกวน

พิจารณาตำแหน่งต่างๆ ที่แสดงในรูปที่ 2.17 ณ จุดที่วงโคจรของวัตถุ B ที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ S ถูกรบกวนด้วยแรงโน้มถ่วงจากวัตถุชิ้นที่สาม Q ซึ่งมีมวล m_q และตำแหน่ง $\vec{r}_q$ จากดวงอาทิตย์ ซึ่งสามารถทราบได้จากตารางข้อมูลทางดาราศาสตร์ อันตรกิริยาระหว่างวัตถุทั้งสามนี้จะแทนได้ด้วยสมการ (2.15) ซึ่งจะลดรูปลงเป็น

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + m_q\left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3}\right) \qquad (2.147)$$

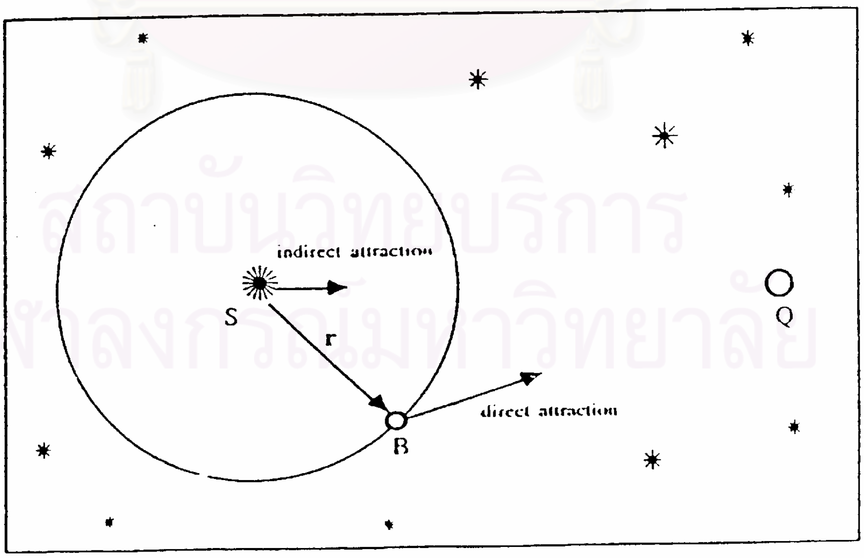
ซึ่งกระจายได้เป็น

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \frac{m_q\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{m_q\vec{r}_q}{r_q^3} \qquad (2.148)$$

เทอมแรกทางขวามือของสมการ(2.148) คือความเร่งสัมพัทธ์ที่เป็นผลจากมวลของดวงอาทิตย์และมวลของวัตถุ B ประกอบกัน เทอมที่สองแสดงถึงกิริยาของ m_q ที่กระทำต่อวัตถุ B และเทอมที่สามแสดงถึงกิริยาของ m_q ที่กระทำต่อดวงอาทิตย์ เทอมที่สองและสามเราเรียกว่าการดึงดูดโดยตรง(direct attractions) และการดึงดูดโดยอ้อม(indirect attractions)ตามลำดับ หรือเขียนได้ว่า

$$\text{การดึงดูดโดยตรง} = \frac{m_q\vec{p}_q}{p_q^3}$$

$$\text{การดึงดูดโดยอ้อม} = \frac{m_q\vec{r}_q}{r_q^3}$$



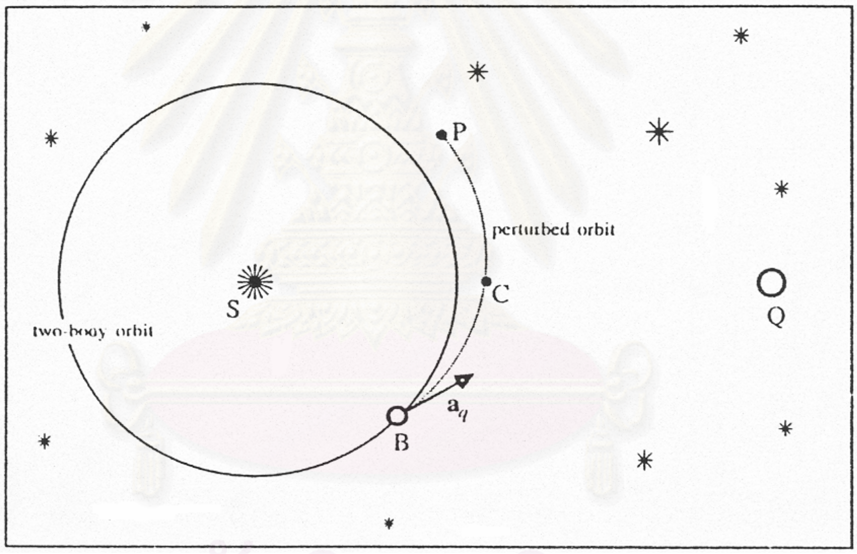
รูปที่ 2.18 การดึงดูดโดยตรงและโดยอ้อม

ดังที่แสดงในรูปที่ 2.18 ซึ่งเป็นกรณีที่แสดงให้เห็นว่าการดึงดูดโดยตรงมีอิทธิพลมากกว่าการดึงดูดโดยอ้อม เพราะวัตถุที่รบกวน Q อยู่ใกล้วัตถุที่โคจร B มากกว่าดวงอาทิตย์ จะเห็นว่าดวงอาทิตย์ที่ตั้งอยู่ที่จุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ก็จะถูกดึงดูดไปยังวัตถุ Q ด้วยเช่นกัน ดังนั้นการรบกวนที่สังเกตเห็นได้ที่เกิดกับ $\vec{r}$ ซึ่งเป็นการรบกวนตำแหน่งจะเป็นผลจากการดึงดูดสุทธิ

$$\vec{a}_q = m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right)$$

ซึ่งก็คือผลต่างระหว่างการดึงดูดโดยตรงและการดึงดูดโดยอ้อมซึ่งเกิดจากมวล m_q นั่นเอง

ต้องเข้าใจว่าการดึงดูดสุทธินี้ในความเป็นจริงคือความเร่ง ไม่ใช่แรงหรือการรบกวน ผลลัพธ์ของการรบกวนเมื่อความเร่งสุทธิกระทำตลอดเวลาทำให้ความเร็วของวัตถุที่โคจรรอบดวงอาทิตย์เปลี่ยนแปลงไป วัตถุนั้นจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วใหม่ที่ได้รับผลของการรบกวนนั้น ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.19



รูปที่ 2.19 ผลของการรบกวนจากความเร่งสุทธิ

จุดที่เกิดการรบกวนต่อวัตถุ B มากที่สุด จะไม่เกิดใกล้กับจุด C ซึ่งเป็นจุดที่วัตถุ B โคจรเข้ามาใกล้วัตถุ Q มากที่สุด แต่จะเกิดที่จุด P ที่ไกลออกไปตามแนวของวงโคจร เนื่องจากความเร่ง $\vec{a}_q$ จากวัตถุ Q ที่มารบกวนวัตถุ B นั้นจะมีขนาดมากที่สุดที่จุด C แต่การที่ความเร่งนี้จะส่งผลกระทบต่อตำแหน่งและความเร็วของวัตถุ B ได้มากที่สุดนั้น จะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งจึงจะสามารถเร่งทำให้ความเร็วของวัตถุ B เปลี่ยนแปลงไปได้มากที่สุดที่จุด P ซึ่งที่จุดนี้เองจะเป็นจุดที่มีผลกระทบต่อวัตถุ B อย่างเต็มที่ [5]

อย่างไรก็ตามการใช้ระเบียบวิธีของการรบกวนเฉพาะนี้จำเป็นที่จะต้องรู้มวล m_q และตำแหน่ง $\vec{r}_q$ ของดาวเคราะห์แต่ละดวงที่มารบกวนในทุกๆ ขั้นตอนของการคำนวณ โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข เมื่อทราบสิ่งต่างๆเหล่านี้ ระยะทาง $\vec{p}_q$ ก็สามารถที่จะหาได้จากความสัมพันธ์

$$\vec{p}_q = \vec{r}_q - \vec{r} \tag{2.149}$$

ซึ่งเป็นไปตามเรขาคณิตดังที่แสดงในรูปที่ 2.17 ซึ่งข้อมูลต่างๆ ที่จำเป็นสามารถค้นได้จากปฏิทินดาราศาสตร์(the astronomical almanac)

บทที่ 3

วิธีการคำนวณ

3.1 การหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่าง ๆ

จากทฤษฎีพื้นฐานและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ในบทที่ 2 เราจะนำมาประยุกต์ในการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ โดยคิดการรบกวนที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ โดยมีข้อมูลหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา, ดาวพฤหัสบดี และ ดาวเสาร์ ที่เวลาใดเวลาหนึ่ง ซึ่งกำหนดให้เป็นเวลาเริ่มต้น ($t_0 = 0$ วัน) โดยข้อมูลหลักมูลทางโคจรเหล่านี้เป็นข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการณ์ทางดาราศาสตร์

เมื่อเราได้หลักมูลทางโคจรทั้งหกตัวคือ a, e, i, ω, Ω และ M ที่เวลาเริ่มต้น t_0 ของดาวเคราะห์ทั้งสามดวงแล้ว เราก็จะคำนวณหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ ได้ โดยแบ่งเป็นขั้นตอนดังนี้ คือ

ขั้นตอนที่ 1 แปลงหลักมูลทางโคจรที่ t_0 ของดาวเคราะห์แต่ละดวงไปเป็น $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ที่ t_0 โดยมีวิธีการแปลงดังนี้

เมื่อมีหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์ใดๆ คือ a, e, i, ω, Ω และ M

หาค่า b ได้จากสมการ (2.57) คือ

$$b = a\sqrt{1-e^2} \qquad (2.57)$$

หาค่า E ได้จากสมการสมการ (2.101) คือ

$$M = E - e\sin E \qquad (2.101)$$

เมื่อได้ค่า E แล้ว เราก็จะสามารถหาค่า r ได้จากสมการ (2.94) คือ

$$r = a(1 - e\cos E) \qquad (2.94)$$

เมื่อได้ค่า r แล้ว เราก็จะสามารถหาค่า $\dot{E}$ ได้จากสมการ (2.142) คือ

$$\dot{E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad (2.142)$$

เมื่อเราได้ค่า $E, \dot{E}$ และ b แล้ว เราก็สามารถคำนวณหาส่วนประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วบนระนาบวงโคจร (ระนาบ $\bar{x}\,\bar{y}$) ได้จากสมการ (2.143) คือ

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= a(\cos E - e) \\ \bar{y} &= b \sin E \\ \dot{\bar{x}} &= -a\dot{E} \sin E \\ \dot{\bar{y}} &= b\dot{E} \cos E \end{aligned}\right\} \qquad (2.143)$$

เราจะหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P}$ และ $\hat{Q}$ จาก i, ω, Ω โดยอาศัยความสัมพันธ์กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ ในระบบพิกัดสุริยะวิถีสุริยะมัธยม ได้จากสมการ (2.144) และ (2.145) คือ

$$\begin{aligned} \hat{P} = \hat{I}&(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) \\ &+ \hat{J}(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \\ &+ \hat{K}(\sin \omega \sin i) \end{aligned} \qquad (2.144)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q} = \hat{I}&(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) \\ &+ \hat{J}(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \\ &+ \hat{K}(\cos \omega \sin i) \end{aligned} \qquad (2.145)$$

ในที่สุดเราก็จะสามารถหา $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวเคราะห์ ได้จากสมการ (2.137) คือ

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \bar{x}\hat{P} + \bar{y}\hat{Q} \\ \vec{v} &= \dot{\bar{x}}\hat{P} + \dot{\bar{y}}\hat{Q} \end{aligned}\right\} \qquad (2.137)$$

ดังนั้นเมื่อจบการคำนวณในขั้นตอนที่ 1 ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวเคราะห์แต่ละดวงที่ t_0 ดังนี้

$\vec{r}_{HO}$, $\vec{v}_{HO}$ คือ $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่ t_0

$\vec{r}_{JO}$, $\vec{v}_{JO}$ คือ $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวพฤหัสบดีที่ t_0

$\vec{r}_{SO}$, $\vec{v}_{SO}$ คือ $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวเสาร์ที่ t_0

ขั้นตอนที่ 2 แก้สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา

จากสมการ (2.15) เราเขียนสมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ฮิลดาได้คือ

$$\ddot{\vec{r}}_H = -\frac{\mu}{r_H^3}\vec{r}_H + m_J\left(\frac{\vec{p}_J}{p_J^3} - \frac{\vec{r}_J}{r_J^3}\right) + m_S\left(\frac{\vec{p}_S}{p_S^3} - \frac{\vec{r}_S}{r_S^3}\right) \qquad (3.1)$$

โดยที่ $\vec{r}_H, \vec{r}_J, \vec{r}_S$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา, ดาวพฤหัสบดี และ ดาวเสาร์ เทียบกับดวงอาทิตย์ตามลำดับ

m_J และ m_s คือ มวลของดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ ในหน่วยมวลของดวงอาทิตย์ตามลำดับ

$\vec{p}_J$ และ $\vec{p}_S$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ สัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อยฮิลดาตามลำดับ

เราใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา และระเบียบวิธีโคเวลล์ แก้สมการ (3.1) โดยใช้ $\vec{r}_{HO}, \vec{v}_{HO}$, $\vec{r}_{JO}, \vec{v}_{JO}$, $\vec{r}_{SO}, \vec{v}_{SO}$ ที่ t_0 เป็นค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อคำนวณหา $\vec{r}_{H1}, \vec{v}_{H1}$, $\vec{r}_{J1}, \vec{v}_{J1}$, $\vec{r}_{S1}, \vec{v}_{S1}$ ที่ t_1 ออกมา

หลังจากนั้นก็นำ $\vec{r}_{H1}, \vec{v}_{H1}$, $\vec{r}_{J1}, \vec{v}_{J1}$, $\vec{r}_{S1}, \vec{v}_{S1}$ ที่ t_1 นี้ไปเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณหา $\vec{r}_{H2}, \vec{v}_{H2}$, $\vec{r}_{J2}, \vec{v}_{J2}$, $\vec{r}_{S2}, \vec{v}_{S2}$ ที่ t_2 ต่อไป

โดยจะทำซ้ำในขั้นตอนนี้ไปเรื่อยๆ ดังนั้นเมื่อจบการคำนวณในขั้นตอนที่ 2 เราก็จะได้ $\vec{r}_H, \vec{v}_H$, $\vec{r}_J, \vec{v}_J$, $\vec{r}_S, \vec{v}_S$ ที่เวลาต่างๆ ออกมา ซึ่งระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา และระเบียบวิธีโคเวลล์ นี้เราจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 นำ $\vec{r}_H$ และ $\vec{v}_H$ ที่เวลาต่างๆ มาแปลงกลับไปเป็นหลักมูลทางโคจร โดยมีวิธีการแปลงดังนี้

เมื่อทราบ $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ ของดาวเคราะห์ใดๆ

หา $r\dot{r}$ ได้จากสมการ (2.102) คือ

$$r\dot{r} = \vec{r} \cdot \vec{v} \tag{2.102}$$

หาค่า a ได้จากสมการ (2.76) คือ

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \tag{2.76}$$

หาค่า e ได้จากสมการ (2.89) คือ

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v} \tag{2.89}$$

โดยที่ $e = |\vec{e}|$

เมื่อได้ค่า a และ e เราก็สามารถหาค่า b ได้จากสมการ (2.57) คือ

$$b = a\sqrt{1-e^2} \tag{2.57}$$

หา $\vec{h}, \vec{N}$ ได้จากสมการ (2.77) และ (2.109) คือ

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \tag{2.77}$$

$$\vec{N} = \hat{K} \times \vec{h} \tag{2.109}$$

ซึ่ง คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน z ของระบบพิกัดสุริยะวิถีสุริยะมัธยม(แกน x,y และ z)

เมื่อได้ $\vec{h}, \vec{N}$ เราก็สามารถหาค่า i, ω, Ω ได้จากสมการ (2.118), (2.122) และ (2.120) คือ

$$cos\ i = \frac{h_z}{h} \tag{2.118}$$

$$cos\ \omega = \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{N\,e} \tag{2.122}$$

$$cos\ \Omega = \frac{N_X}{N} \tag{2.120}$$

หาค่า $\wp$ ได้จากสมการ (2.53) คือ

$$\wp = \frac{h^2}{\mu} \tag{2.53}$$

เมื่อได้ค่า $\wp$ เราก็สามารถหา $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ได้จากสมการ (2.125) และ (2.125) คือ

$$\bar{x} = \frac{\wp - r}{e} \tag{2.125}$$

$$\bar{y} = \frac{r\dot{r}}{e}\sqrt{\frac{\wp}{\mu}} \tag{2.126}$$

เมื่อได้ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ เราก็สามารถหาค่า E และ $\sin E$ ได้จากสมการ (2.130) และ (2.131) คือ

$$cos\ E = \frac{\bar{x}}{a} + e \tag{2.130}$$

$$sin\ E = \frac{\bar{y}}{b} \tag{2.131}$$

เมื่อได้ค่า E และ $\sin E$ เราก็สามารถหาค่า M ได้จากสมการ (2.101) โดย

$$M = E - e\ \sin E \tag{2.101}$$

จากสมการ (2.76), (2.89), (2.118), (2.122), (2.120) และ (2.101) จะได้ค่า a, e, i, ω, Ω และ M ซึ่งเป็นค่าหลักมูลของวงโคจรออกมา

ดังนั้น เมื่อจบการคำนวณในขั้นตอนที่ 3 เราก็จะได้ค่าหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆออกมา

3.2 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นเมื่อไม่มีการรบกวนที่ได้กล่าวมาในบทที่แล้ว คือ สมการ (2.20) เมื่อเราทราบเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $\vec{r}_0$ และ $\dot{\vec{r}}_0$ ที่เวลาเริ่มต้นใดๆ t_0 เราจะได้ความเร่ง $\ddot{\vec{r}}_0$ คือ

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{-\mu \vec{r}_0}{r_0^3}$$

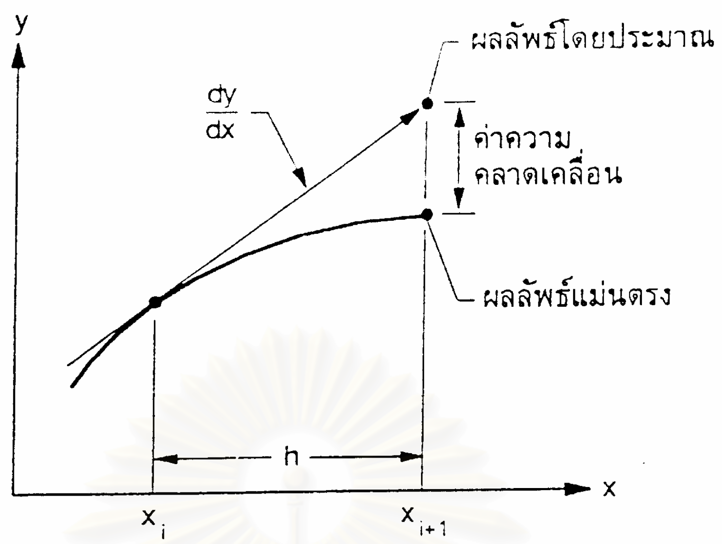
ดังนั้นจากเงื่อนไขเริ่มต้น ก็จะทำให้เราสามารถหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่อไปได้ โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งวิธีการที่เราจะนำมาใช้แก้ปัญหานี้เราเรียกว่าการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้ในการคำนวณหาวงโคจรของวัตถุในวิชากลศาสตร์ท้องฟ้า เมื่อเราคำนวณได้ตำแหน่งและความเร็วที่เวลาถัดมาแล้ว เราก็จะนำค่าที่ได้ไปเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่อๆ ไปได้ ดังนั้นเมื่อเราทำซ้ำไปเรื่อยๆ เราก็จะสามารถคำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุตลอดทั้งคาบการโคจรได้

ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta method) [8] เป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง แนวความคิดที่ใช้ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา นี้ คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูง เพื่อใช้ในการหาผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้ เราจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เป็นจำนวนตามอันดับของสมการ เช่น ถ้าเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง จำเป็นต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นสองเงื่อนไข แต่ถ้าเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเราจะต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเพียงเงื่อนไขเดียว เป็นต้น เมื่อเราพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2}$$

หลักการเบื้องต้นที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ สามารถอธิบายได้โดยรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 หลักการเบื้องต้นของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา

จากรูปที่ 3.1 นี้ เราจะหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณของ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จากผลลัพธ์ y_i ซึ่งเรารู้ค่าที่ x_i โดยใช้ค่าความชันที่ x_i ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \qquad (3.3)$$

โดยที่ $h = x_{i+1} - x_i$ คือช่วงความกว้าง(step size) ที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งแล้วแต่เราจะกำหนด ทำการแทนค่าของความชันที่ x_i จากสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.2) จะได้

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

นั่นคือ

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (3.4)$$

ซึ่งหมายความว่า เราสามารถทำการคำนวณโดยเริ่มจากเงื่อนไขเริ่มต้นของ y_i ที่ x_i และสามารถคำนวณค่า y_{i+1} ใหม่ จากความกว้างช่วง h ที่กำหนดให้ และจากรูปที่ 3.1 เราจะเห็นได้ว่าความเที่ยงตรงของผลลัพธ์โดยประมาณนั้นจะขึ้นอยู่กับค่า h ที่ใช้ในการคำนวณนี้ กล่าวคือ ยิ่งใช้ h มีค่าน้อยเท่าใด ก็จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้นเท่านั้น

ในระเบียบรุงเง-กุตตานั้นสมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์จะอยู่ในรูปแบบดังนี้ คือ

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \qquad (3.5)$$

โดย $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่าฟังก์ชันส่วนเพิ่ม(increment function) ซึ่งมีความหมายของความชันเฉลี่ยตลอดช่วงความกว้าง *h* ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มขึ้นจากผลลัพธ์เดิม ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\phi = a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + \ldots + a_n K_n \tag{3.6}$$

โดยที่ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่

และ

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} K_1 h) \\ K_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} K_1 h + q_{22} K_2 h) \\ &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ K_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} K_1 h + q_{n-1,2} K_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} K_{n-1} h) \end{aligned} \tag{3.7}$$

โดยตัวห้อย *n* บ่งถึงอันดับที่ของระเบียบรุงเง-กุตตา ที่เลือกใช้ ค่า $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$ ในสมการ (3.7) ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่จะนำมาแก้ปัญหา ซึ่งเราจำเป็นต้องรู้ค่า K_1 ก่อนทำการคำนวณหาค่า K_2 และต้องรู้ค่า K_2 ก่อนทำการคำนวณหาค่า K_3 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ ส่วนค่า *p* และ *q* ต่างๆ นั้นเป็นค่าคงที่ซึ่งจะแตกต่างกันไปตามอันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่เราเลือกใช้

3.2.1 ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา อันดับห้า

ในงานวิจัยนี้เราเลือกใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า(RK5) ในการแก้สมการการเคลื่อนที่ของระบบวัตถุสองชิ้น เนื่องจากวิธีการนี้ให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงมาก โดยเราจะนำระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา อันดับห้าของบุทเชอร์ (Butcher's fifth-order Runge-Kutta method) [9] มาใช้ โดยมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7K_1 + 32K_3 + 12K_4 + 32K_5 + 7K_6)h \tag{3.8}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}K_1 h) \\ K_3 &= f(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}K_1 h + \frac{1}{8}K_2 h) \\ K_4 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}K_2 h + K_3 h) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$K_5 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}K_1h + \frac{9}{16}K_4h)$$
$$K_6 = f(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}K_1h + \frac{2}{7}K_2h + \frac{12}{7}K_3h - \frac{12}{7}K_4h + \frac{8}{7}K_5h)$$

เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้คือ

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3.10}$$

เมื่อเราใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา อันดับห้า ซึ่งมีช่วงความกว้าง h สามารถแสดงได้ดังนี้

$$x = x_0 + \delta x \tag{3.11}$$

ซึ่งเลขศูนย์แสดงถึงค่าของตัวแปรในขั้นเริ่มต้น และ δx คือฟังก์ชันส่วนเพิ่ม โดยที่

$$\delta x = \frac{1}{90}(7F_1 + 32F_3 + 12F_4 + 32F_5 + 7F_6) \tag{3.12}$$

โดย

$$\begin{aligned}
F_1 &= hf(t_0, x_0) \\
F_2 &= hf(t_0 + \frac{1}{4}h, x_0 + \frac{1}{4}F_1) \\
F_3 &= hf(t_0 + \frac{1}{4}h, x_0 + \frac{1}{8}F_1 + \frac{1}{8}F_2) \\
F_4 &= hf(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 - \frac{1}{2}F_2 + F_3) \\
F_5 &= hf(t_0 + \frac{3}{4}h, x_0 + \frac{3}{16}F_1 + \frac{9}{16}F_4) \\
F_6 &= hf(t_0 + h, x_0 - \frac{3}{7}F_1 + \frac{2}{7}F_2 + \frac{12}{7}F_3 - \frac{12}{7}F_4 + \frac{8}{7}F_5)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

พิจารณาปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นเมื่อไม่มีการรบกวนโดยทราบเงื่อนไขเริ่มต้น คือ ตำแหน่ง $\vec{r}_0$, ความเร็ว $\vec{v}_0$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 ถ้าเราให้

$$f(\vec{v}) = \vec{v} \tag{3.14}$$
$$g(\vec{r}) = \frac{-\mu\vec{r}}{r^3} \tag{3.15}$$

ดังนั้นจากข้อมูลที่ได้สามารถนำไปใช้เขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งสองสมการพร้อมกันดังนี้คือ

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = f(\vec{v}) \tag{3.16}$$
$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = g(\vec{r}) \tag{3.17}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีความคล้ายคลึงกับรูปแบบของสมการ (3.10) เราสามารถอินทิเกรตโดยการใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า โดยการประยุกต์ใช้สมการ (3.13) กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้นี้ ดังนั้นเราจะได้เวกเตอร์

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= h\,f(\vec{v}_0) \\
\vec{G}_1 &= h\,g(\vec{r}_0) \\
\vec{F}_2 &= h\,f(\vec{v}_0 + \tfrac{1}{4}\vec{G}_1) \\
\vec{G}_2 &= h\,g(\vec{r}_0 + \tfrac{1}{4}\vec{F}_1) \\
\vec{F}_3 &= h\,f(\vec{v}_0 + \tfrac{1}{8}\vec{G}_1 + \tfrac{1}{8}\vec{G}_2) \\
\vec{G}_3 &= h\,g(\vec{r}_0 + \tfrac{1}{8}\vec{F}_1 + \tfrac{1}{8}\vec{F}_2) \\
\vec{F}_4 &= h\,f(\vec{v}_0 - \tfrac{1}{2}\vec{G}_2 + \vec{G}_3) \\
\vec{G}_4 &= h\,g(\vec{r}_0 - \tfrac{1}{2}\vec{F}_2 + \vec{F}_3) \\
\vec{F}_5 &= h\,f(\vec{v}_0 + \tfrac{3}{16}\vec{G}_1 + \tfrac{9}{16}\vec{G}_4) \\
\vec{G}_5 &= h\,g(\vec{r}_0 + \tfrac{3}{16}\vec{F}_1 + \tfrac{9}{16}\vec{F}_4) \\
\vec{F}_6 &= h\,f(\vec{v}_0 - \tfrac{3}{7}\vec{G}_1 + \tfrac{2}{7}\vec{G}_2 + \tfrac{12}{7}\vec{G}_3 - \tfrac{12}{7}\vec{G}_4 + \tfrac{8}{7}\vec{G}_5) \\
\vec{G}_6 &= h\,g(\vec{r}_0 - \tfrac{3}{7}\vec{F}_1 + \tfrac{2}{7}\vec{F}_2 + \tfrac{12}{7}\vec{F}_3 - \tfrac{12}{7}\vec{F}_4 + \tfrac{8}{7}\vec{F}_5)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

เมื่อ $h = k(t - t_0)$

ดังนั้นจากสมการ (3.12) จะได้เวกเตอร์ส่วนเพิ่มคือ

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{90}(7\vec{F}_1 + 32\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6) \tag{3.19}$$

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{90}(7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6) \tag{3.20}$$

เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์ทั่วไปตามสมการ (3.11) จะได้เวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วในขั้นเวลาถัดไป คือ

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \tag{3.21}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \tag{3.22}$$

ซึ่งค่าที่ได้นี้จะกลายเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณขั้นต่อไป

3.3 ระเบียบวิธีโคเวลล์

ระเบียบวิธีโคเวลล์(Cowell Method) นี้จะนำมาใช้ในการคำนวณการเคลื่อนที่ของวงโคจร โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของทุกเทอมที่อยู่ทางขวาของสมการ(2.15)โดยตรง โดยตำแหน่งและความเร็วที่ถูกรบกวนจะหาได้ในแต่ละขั้นเวลาซึ่งจะเป็นค่าเริ่มต้นสำหรับการคำนวณในขั้นเวลาต่อไป วิธีการภายในการคำนวณจะใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้า ดังที่ได้อธิบายไปในส่วนที่แล้ว

พิจารณาวัตถุท้องฟ้าที่ทราบตำแหน่ง $\vec{r}_0$ และความเร็ว $\vec{v}_0$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยวัตถุที่มารบกวนมีมวล m_q อยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_q$ และ $\vec{v}_q$ ทั้งหมด n ชิ้น เราจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ในรูป

$$\ddot{\vec{r}} = -(1+m)\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_t \qquad (3.23)$$

โดยที่ m เป็นมวลของวัตถุที่เราสนใจ, $\vec{a}_t$ เป็นเทอมแรงดึงดูดรบกวนทั้งหมด โดยที่

$$\vec{a}_t = \sum_{q=1}^{n} m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \right) \qquad (3.24)$$

เมื่อ

$$\vec{p}_q = \vec{r}_q - \vec{r} \qquad (3.25)$$

ตำแหน่ง $\vec{r}_q$ และความเร็ว $\vec{v}_q$ ของมวลที่มารบกวนที่เวลา t ใดๆสามารถหาได้โดยวิธีการเชิงวิเคราะห์ โดยเราต้องทราบค่าเริ่มต้นของเทอมทางขวามือในสมการ (3.23)

ขั้นต่อไปเราจะประยุกต์ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาเข้ากับสมการ (3.23) โดยเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองได้ในสองส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนี้ คือ

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = f(\vec{v}) \qquad (3.26)$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = g(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t) \qquad (3.27)$$

เมื่อ

$$f(\vec{v}) = \vec{v}$$

$$g(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t) = -(1+m)\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{a}_t$$

เราสามารถอินทิเกรตสมการ (3.26) และ (3.27) ซึ่งจะเป็นผลทำให้มวลที่มารบกวนมีการเคลื่อนที่ไปตามแนววงโคจรของตัวเองในแต่ละขั้นเวลาของการอินทิเกรตซึ่งจะมีผลต่อเทอมของแรงดึงดูด โดยเราสามารถคำนวณปริมาณเหล่านี้ได้ในหกขั้นของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา ซึ่งรวมถึงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเฉพาะความเร่งของวัตถุสองชิ้น ดังนั้นในวัตถุแต่ละชิ้นที่มารบกวนเราจะได้

$$\frac{d\vec{r}_q}{d\tau} = \vec{v}_q \tag{3.28}$$

$$\frac{d\vec{v}_q}{d\tau} = -(1 + m_q)\frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \tag{3.29}$$

ใช้วิธีการของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาสำหรับการรบกวนเฉพาะ อินทิเกรตฟังก์ชันจากสมการ (3.26) ถึง (3.29) โดยการหาค่ากึ่งกลางของเวกเตอร์เสริม ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$\vec{F}_j = hf(\vec{v})_j \tag{3.30}$$

$$\vec{G}_j = hg(m, \vec{r}, r, \vec{a}_t)_j \tag{3.31}$$

เมื่อ h คือขั้นเวลา(step time) และ j มีค่าเท่ากับ1 ถึง 6 สุดท้ายก็จะสามารถหาค่าส่วนที่เพิ่มขึ้นของเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วของวัตถุได้จาก

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{90}(7\vec{F}_1 + 32\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6) \tag{3.32}$$

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{90}(7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6) \tag{3.33}$$

ดังนั้นเราจะได้เวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วใหม่ของวัตถุคือ

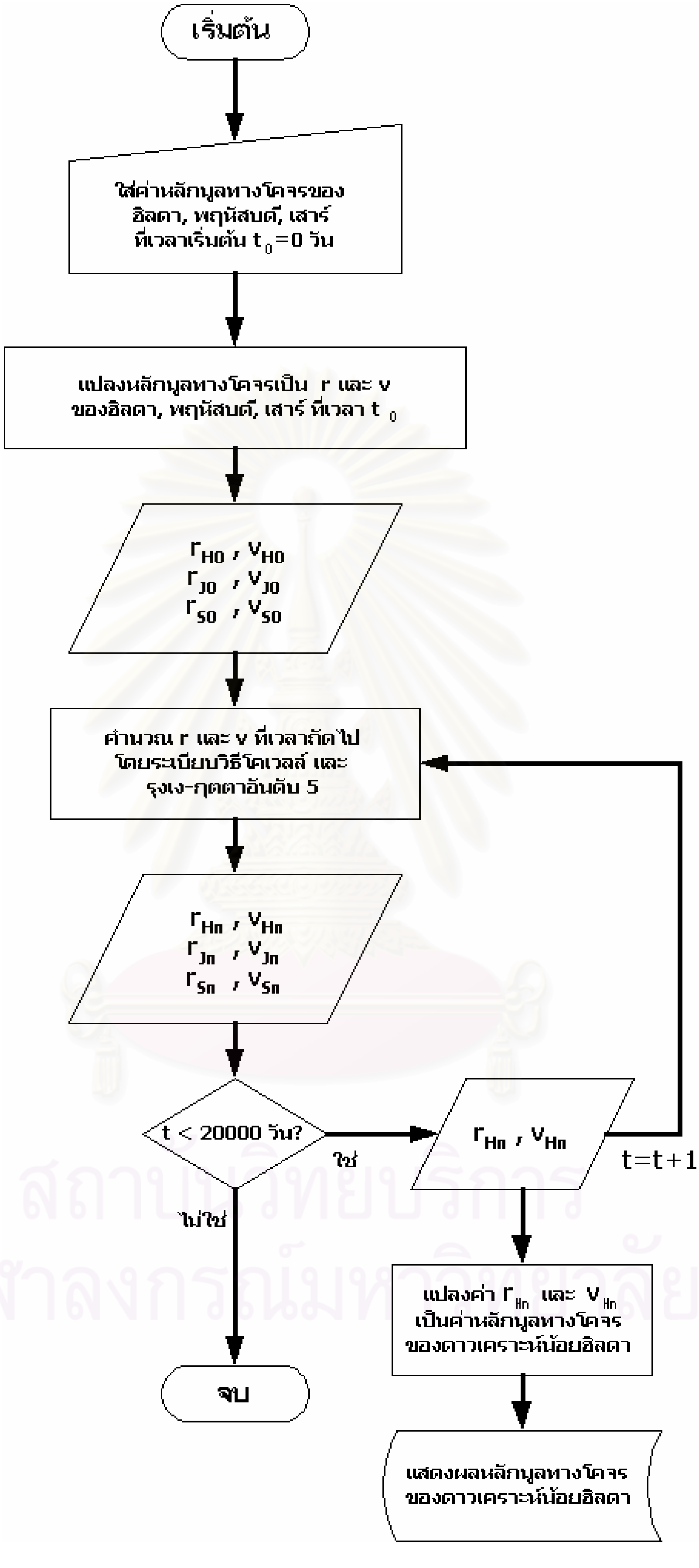
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \tag{3.34}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \tag{3.35}$$

ซึ่งค่าที่ได้นี้จะกลายเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณขั้นต่อไป

3.4 ขั้นตอนการคำนวณ

ในงานวิจัยนี้เราประยุกต์ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้าและระเบียบวิธีโคเวลล์ ในการแก้สมการ (3.1) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์โดยทราบเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา t_0 เพื่อหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ เป็นเวลา 20,000 วัน โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แผนภาพขั้นตอนการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยอิลดา

บทที่ 4

ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

ในการคำนวณนี้เราจะใช้ค่าหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา, ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ ณ วันที่ 13 กันยายน ค.ศ. 2000 เวลา 24.00 น.ตามเวลาสากล (UT) [4] เป็นหลักมูลทางโคจรเริ่มต้นในการคำนวณ โดยตรงกับวันจูเลียน(Julian day) ที่ 2451800.50 (JD 2451800.50) ซึ่งเรากำหนดให้เป็นเวลาเริ่มต้น(epoch) โดยอ้างอิงจุดวสันตวิษุวัต ปี ค.ศ. 2000 ดังนี้

หลักมูลทางโคจร	ฮิลดา	ดาวพฤหัสบดี	ดาวเสาร์
a (เอยู)	3.9730	5.2026	9.5549
e	0.1420	0.0485	0.0555
i (องศา)	7.8	1.303	2.489
ω (องศา)	43.0	273.865	339.396
Ω (องศา)	228.4	100.467	113.664
M (องศา)	45.7	41.251	325.562

ตารางที่ 4.1 หลักมูลทางโคจรเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณ

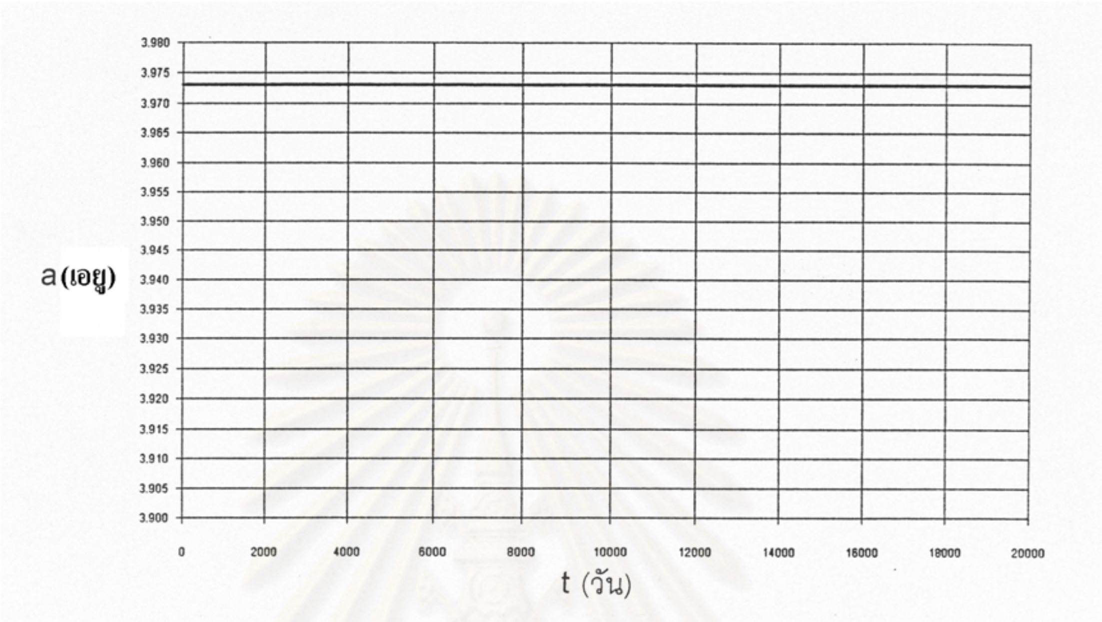
โดยการคำนวณนี้เราจะกำหนดให้ขั้นเวลาในแต่ละช่วง(step time) $\Delta t = 1$ วัน โดยเริ่มจาก JD 2451800.50 จนถึง JD 2471800.50 ซึ่งตรงกับวันที่ 17 มิถุนายน ค.ศ.2055 เวลา 24.00 น. UT เป็นเวลาทั้งหมด 20,000 วัน หรือประมาณ 54.76 ปี โดยเราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็นสามกรณี คือ

- กรณีที่ 1 เมื่อไม่คิดการรบกวนใดๆ
- กรณีที่ 2 เมื่อคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดี
- กรณีที่ 3 เมื่อคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์

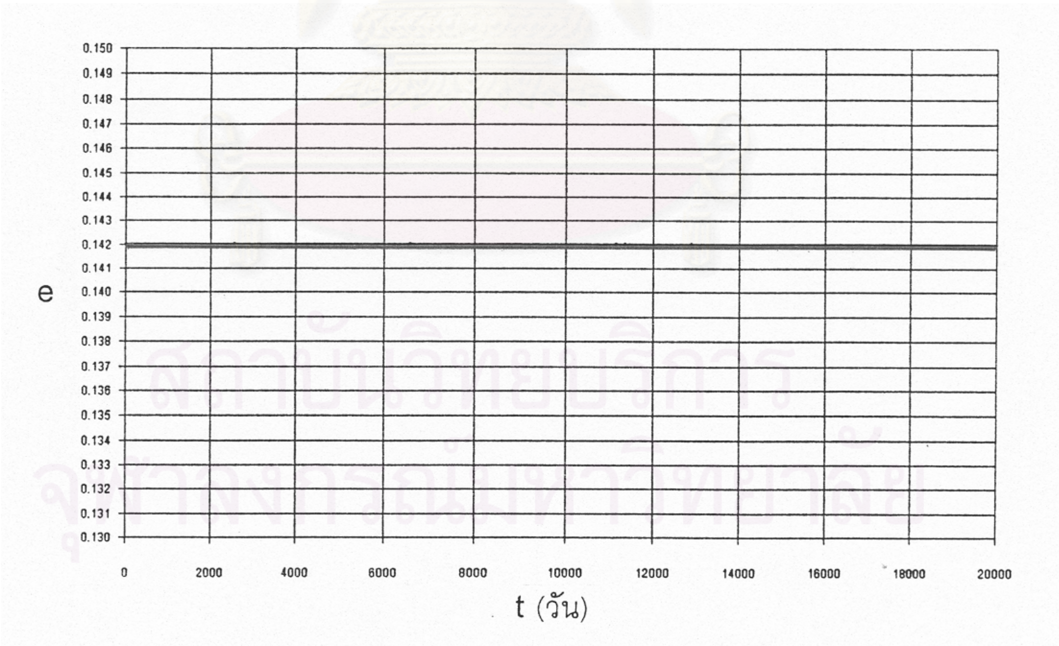
ซึ่งผลการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ ในแต่ละกรณีจะแสดงไว้ในรูปที่ 4.1 - 4.20

4.1 กรณีที่ 1 เมื่อไม่คิดการรบกวนใดๆ

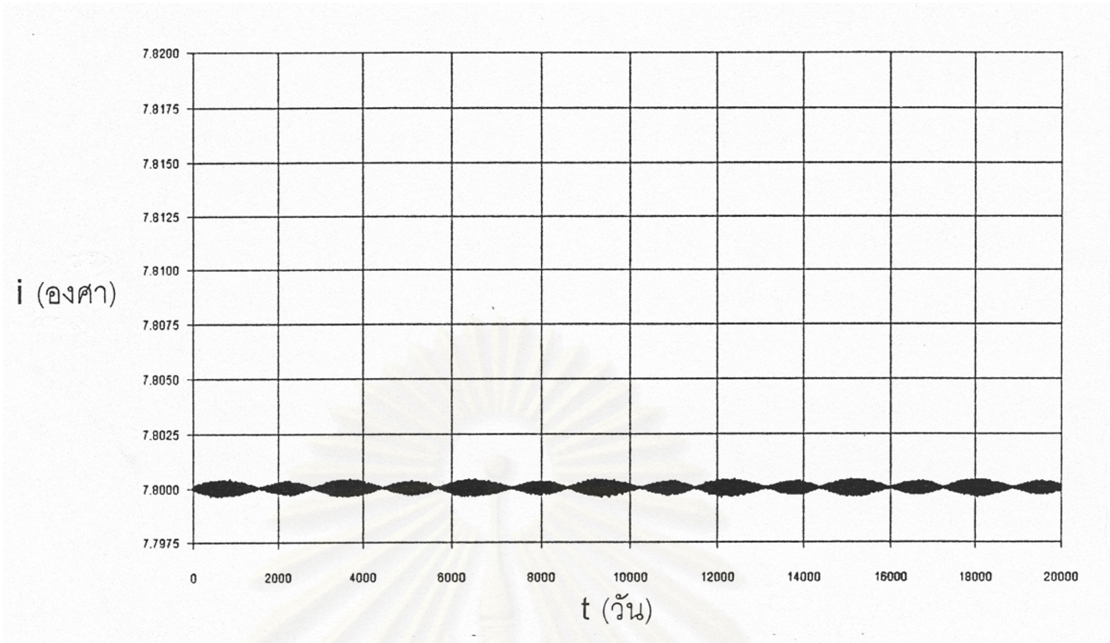
ผลของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ เมื่อไม่คิดการรบกวนใดๆ แสดงไว้ในรูปที่ 4.1 - 4.6



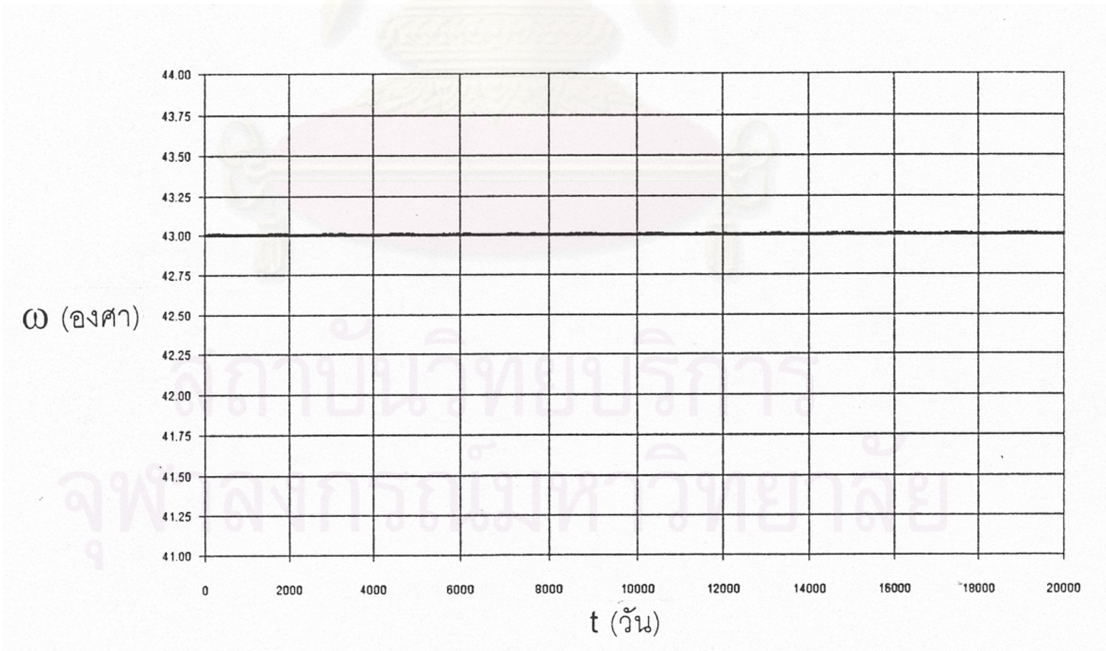
รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณค่า a ในกรณีที่ 1



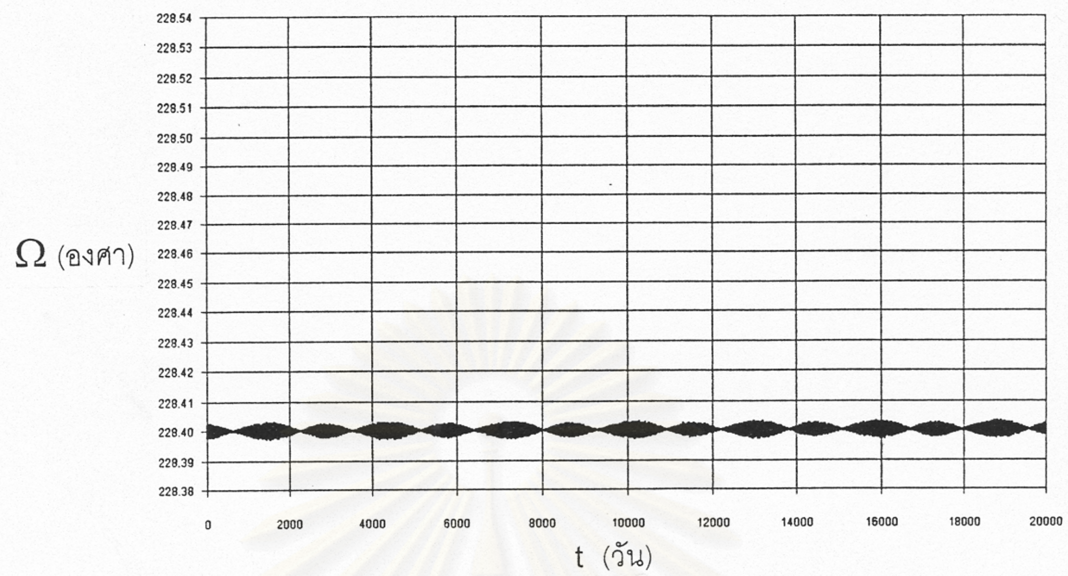
รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณค่า e ในกรณีที่ 1



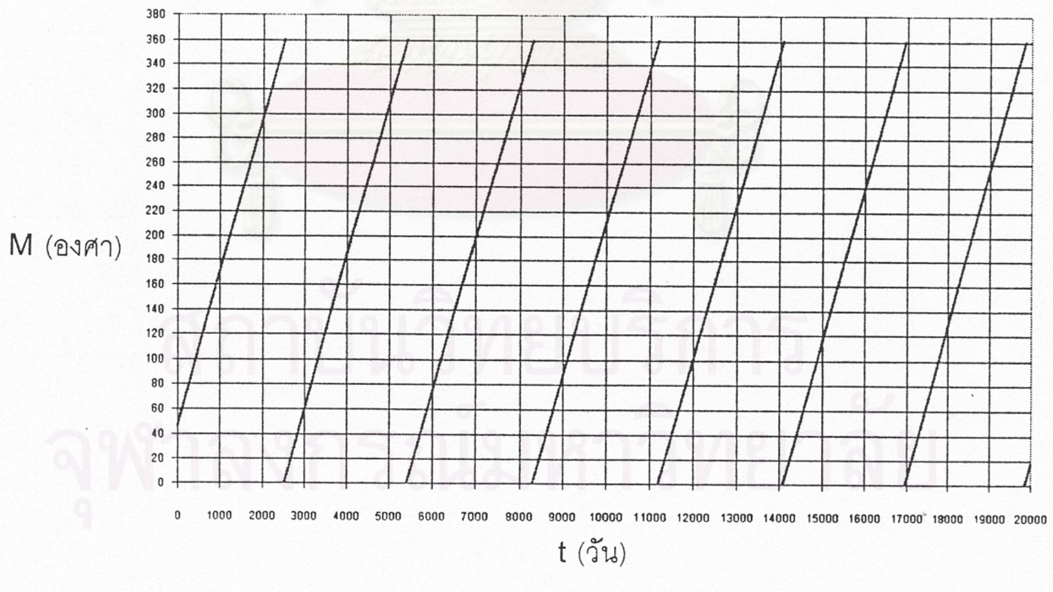
รูปที่ 4.3 ผลการคำนวณค่า i ในกรณีที่ 1



รูปที่ 4.4 ผลการคำนวณค่า ω ในกรณีที่ 1



รูปที่ 4.5 ผลการคำนวณค่า Ω ในกรณีที่ 1

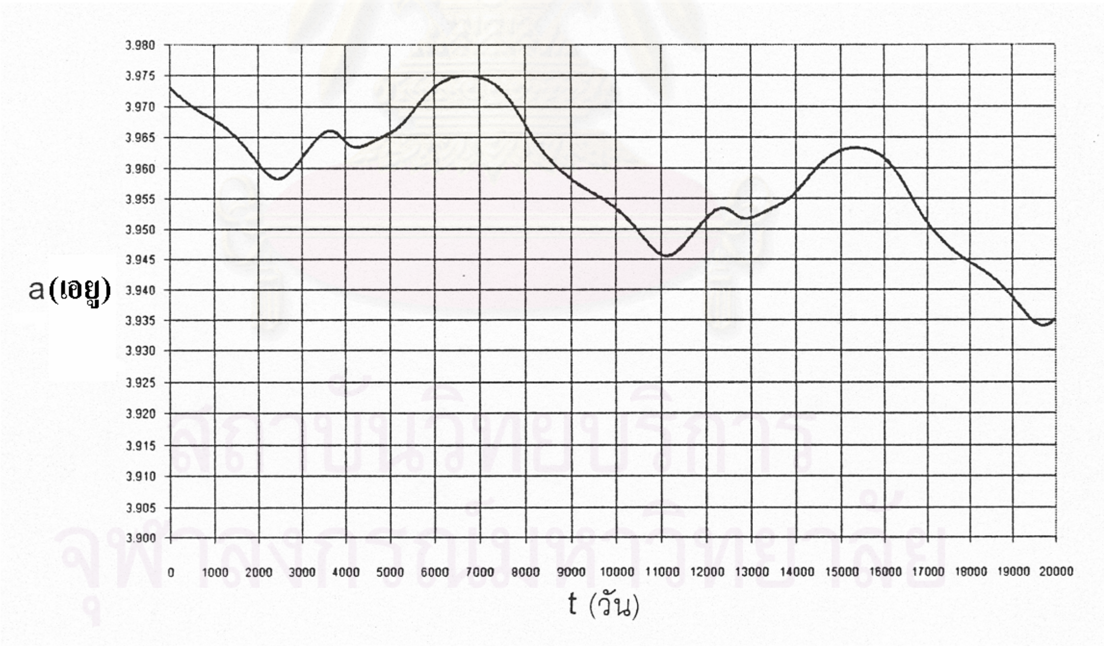


รูปที่ 4.6 ผลการคำนวณค่า M ในกรณีที่ 1

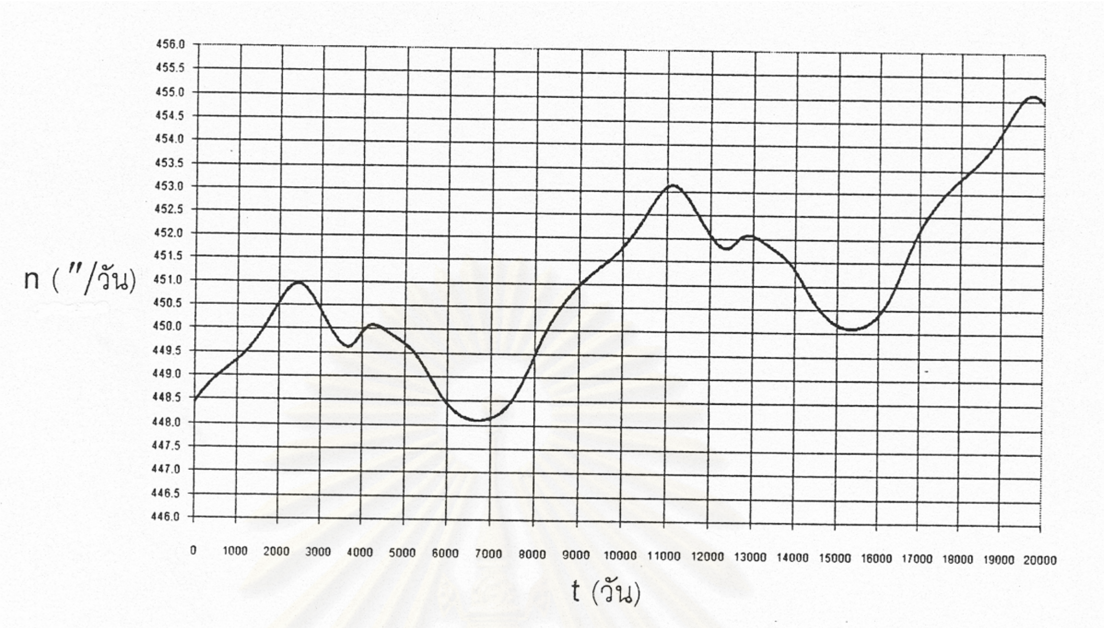
ในรูปที่ 4.3 และ 4.5 กราฟของ i และ Ω จะปรากฏแถบสีดำเป็นช่วงๆ เนื่องจากการแกว่งกวัดของค่า i และ Ω ซึ่งจากผลการคำนวณที่ได้ในกรณีที่ 1 แสดงให้เห็นว่าเมื่อไม่คิดการรบกวนใดๆ หลักมูลทางโคจรจะมีค่าคงที่โดยจะมีค่าเท่ากับหลักมูลทางโคจรที่เวลาเริ่มต้น JD 2451800.50 คือ a = 3.9730 เอยู , e = 0.1420, i = 7.8 องศา, ω = 43.0 องศา, Ω = 228.4 องศา ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากรณีนี้เป็นกรณีของปัญหาวัตถุสองชิ้นระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์น้อยฮิลดาอย่างชัดเจน โดยที่สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะเป็นไปตามสมการ (2.20)

4.2 กรณีที่ 2 เมื่อคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดี

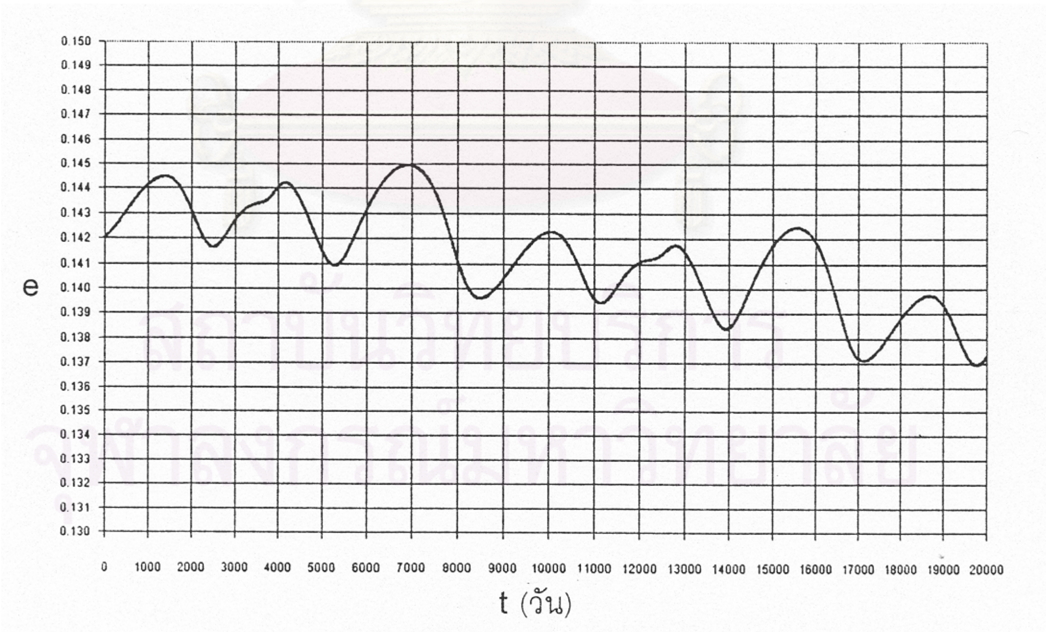
ผลของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ ในกรณีที่คิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีเพียงดวงเดียว แสดงไว้ในรูปที่ 4.7 - 4.13



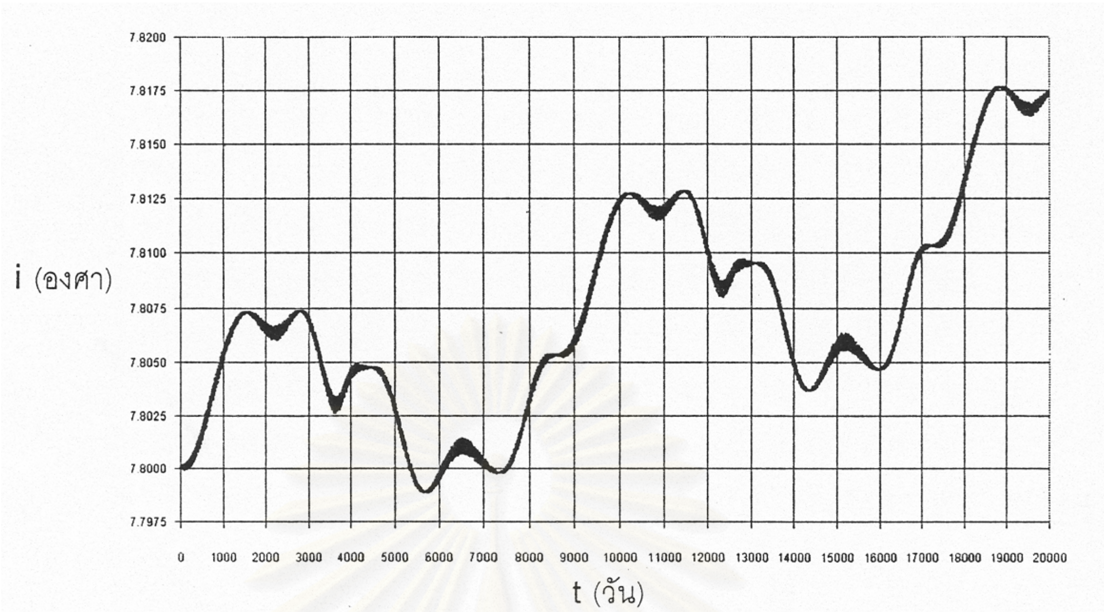
รูปที่ 4.7 ผลการคำนวณค่า a ในกรณีที่ 2



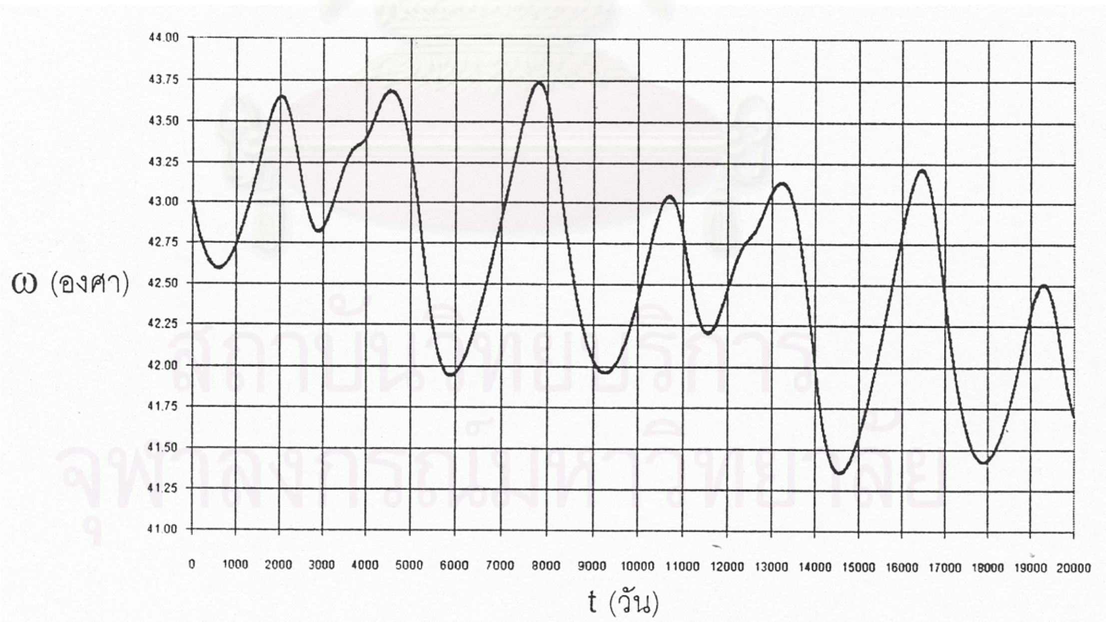
รูปที่ 4.8 ผลการคำนวณค่า **n** ในกรณีที่ 2



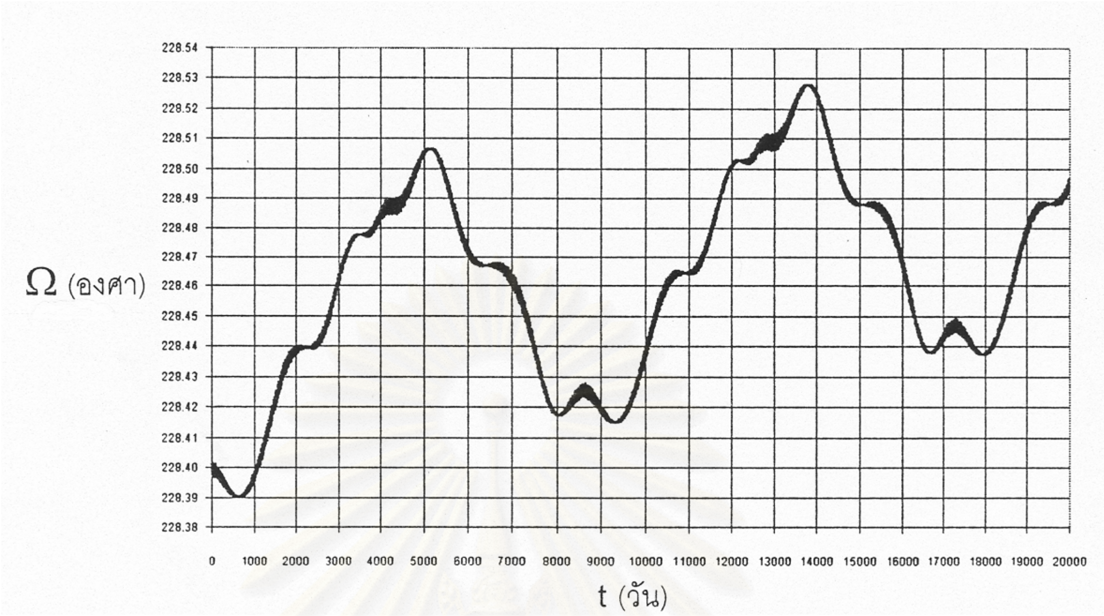
รูปที่ 4.9 ผลการคำนวณค่า **e** ในกรณีที่ 2



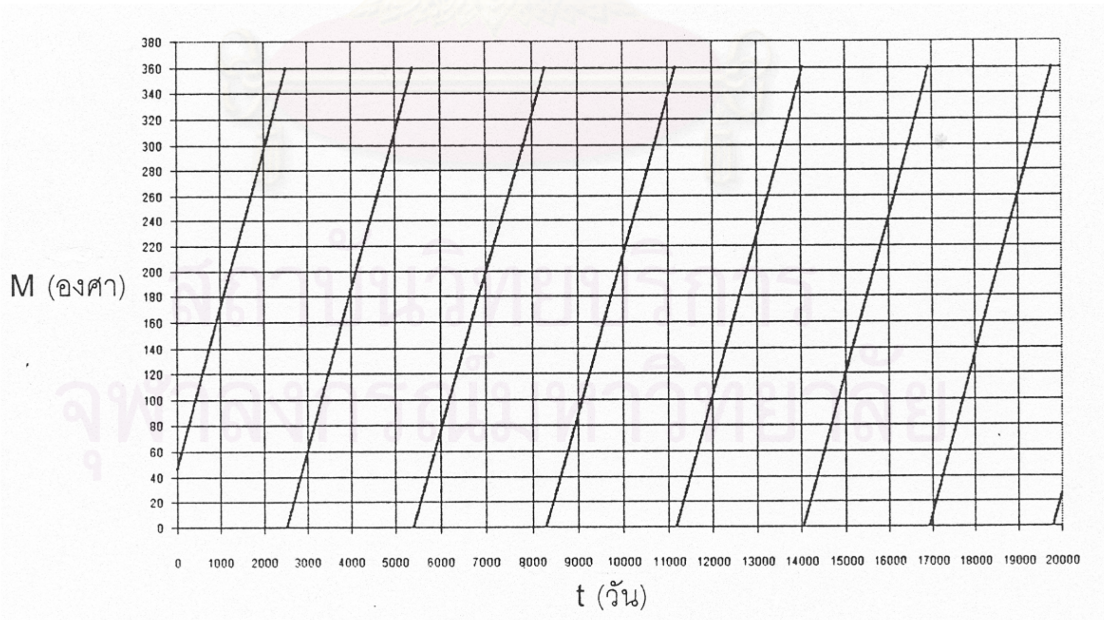
รูปที่ 4.10 ผลการคำนวณค่า i ในกรณีที่ 2



รูปที่ 4.11 ผลการคำนวณค่า ω ในกรณีที่ 2



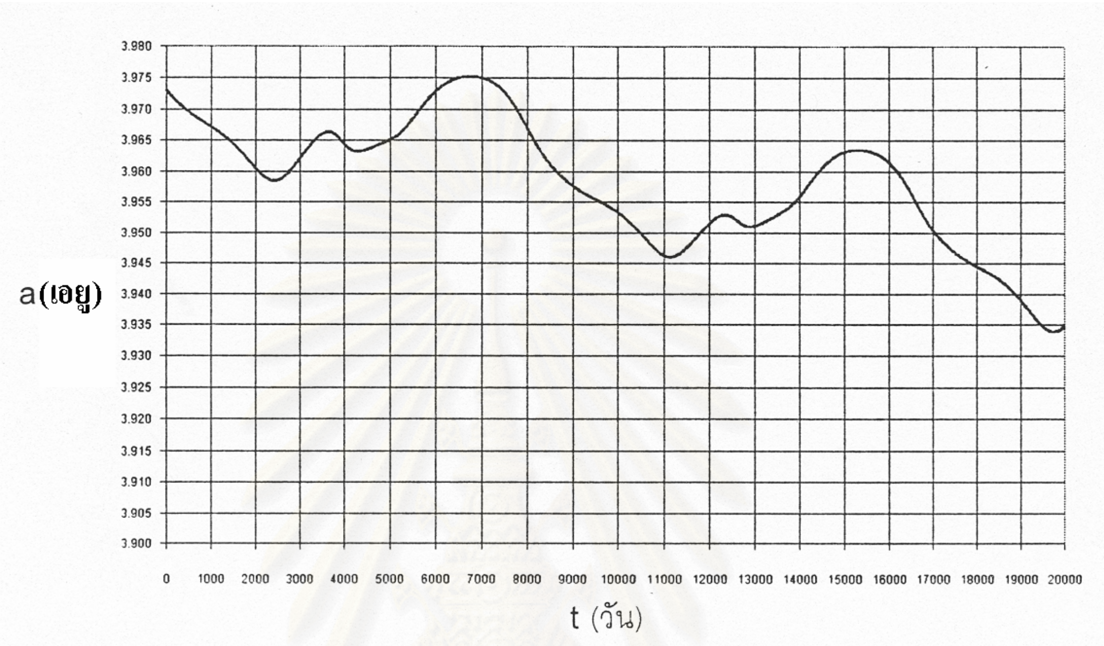
รูปที่ 4.12 ผลการคำนวณค่า Ω ในกรณีที่ 2



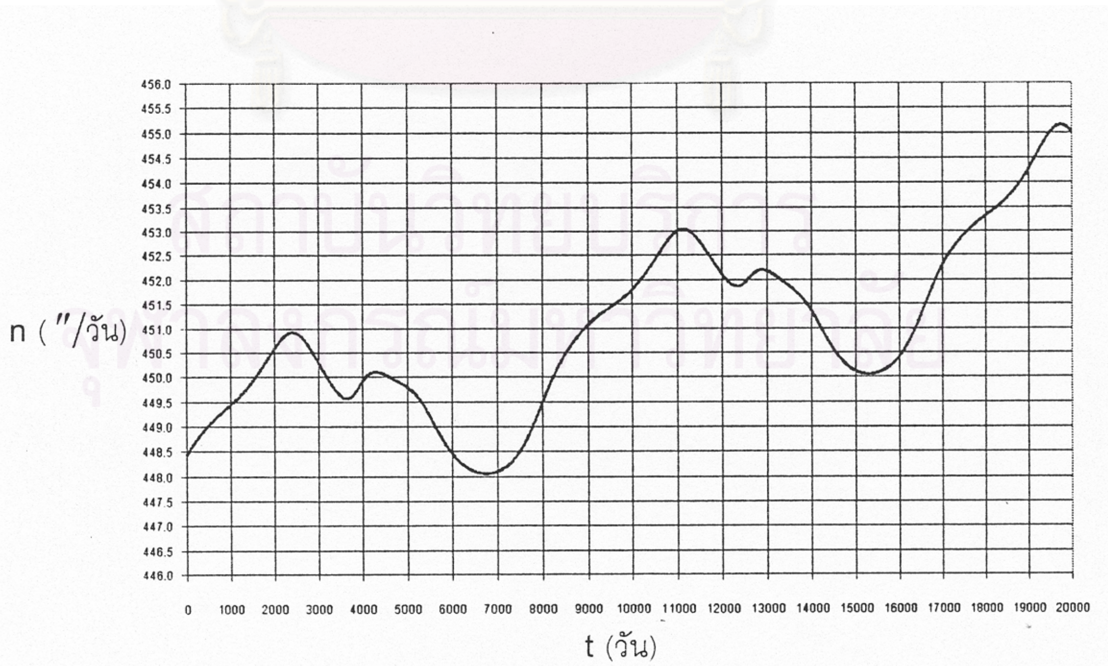
รูปที่ 4.13 ผลการคำนวณค่า M ในกรณีที่ 2

4.3 กรณีที่ 3 เมื่อคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์

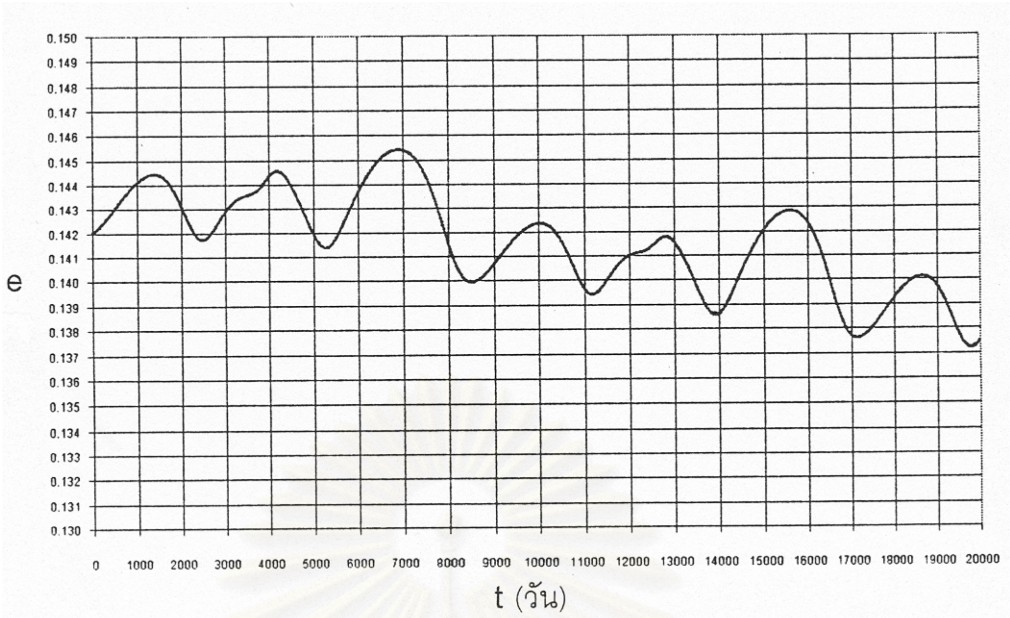
ผลของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ ในกรณีที่คิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ แสดงไว้ในรูปที่ 4.14 - 4.20



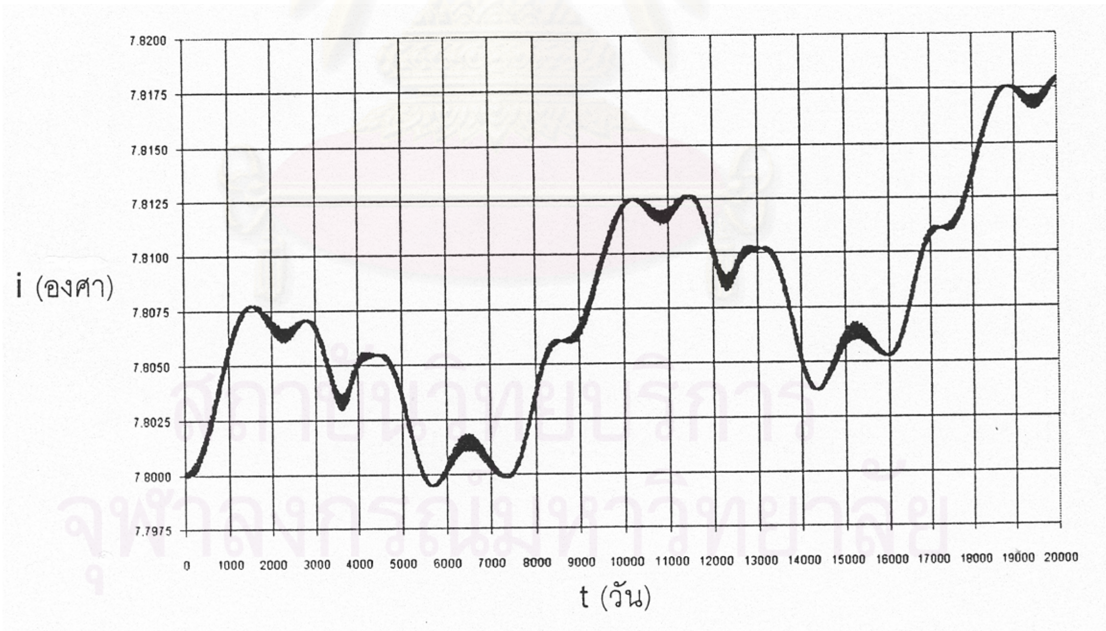
รูปที่ 4.14 ผลการคำนวณค่า a ในกรณีที่ 3



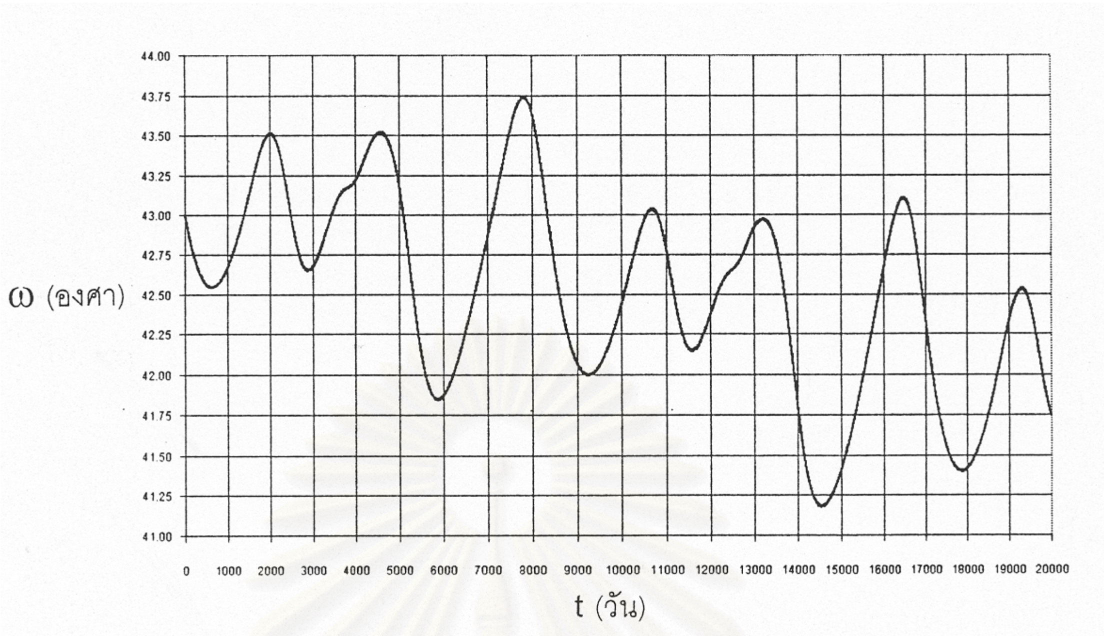
รูปที่ 4.15 ผลการคำนวณค่า n ในกรณีที่ 3



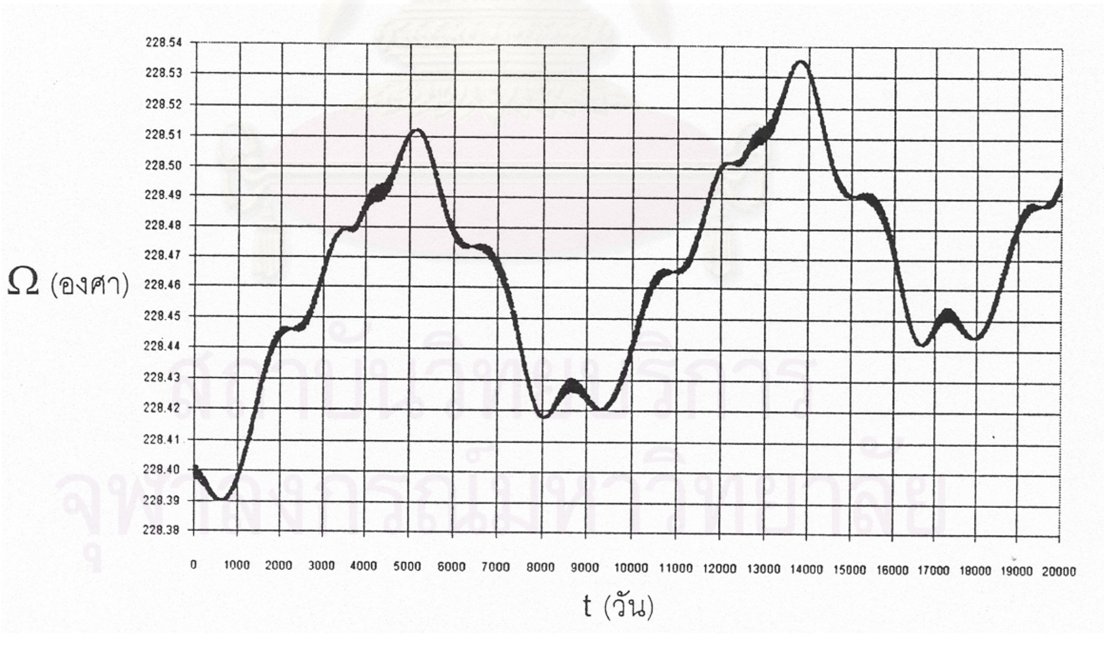
รูปที่ 4.16 ผลการคำนวณค่า e ในกรณีที่ 3



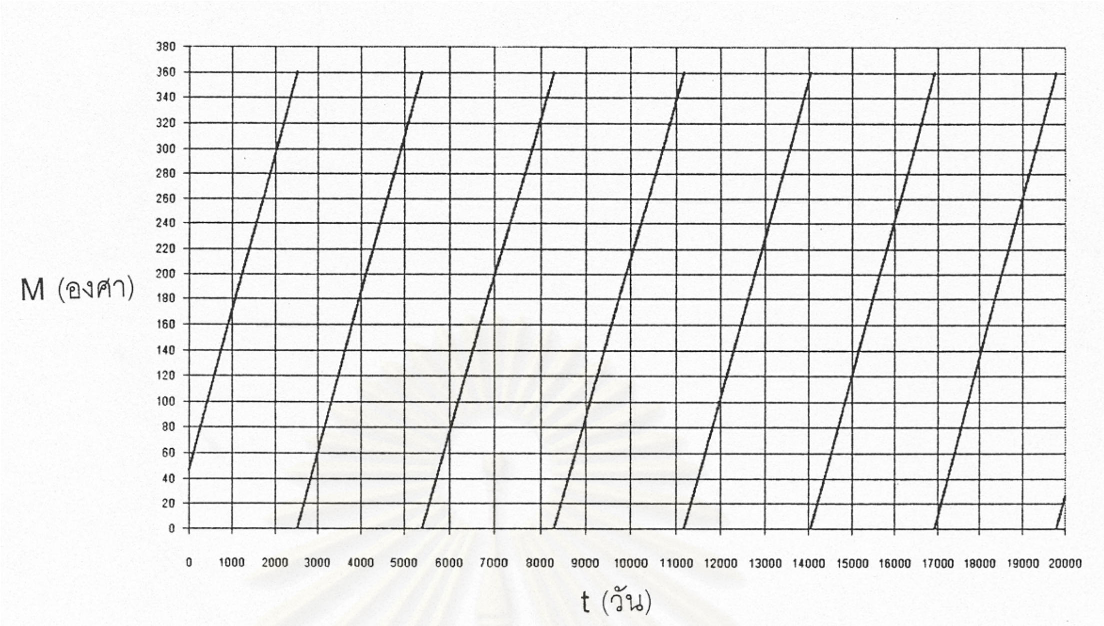
รูปที่ 4.17 ผลการคำนวณค่า i ในกรณีที่ 3



รูปที่ 4.18 ผลการคำนวณค่า ω ในกรณีที่ 3



รูปที่ 4.19 ผลการคำนวณค่า Ω ในกรณีที่ 3

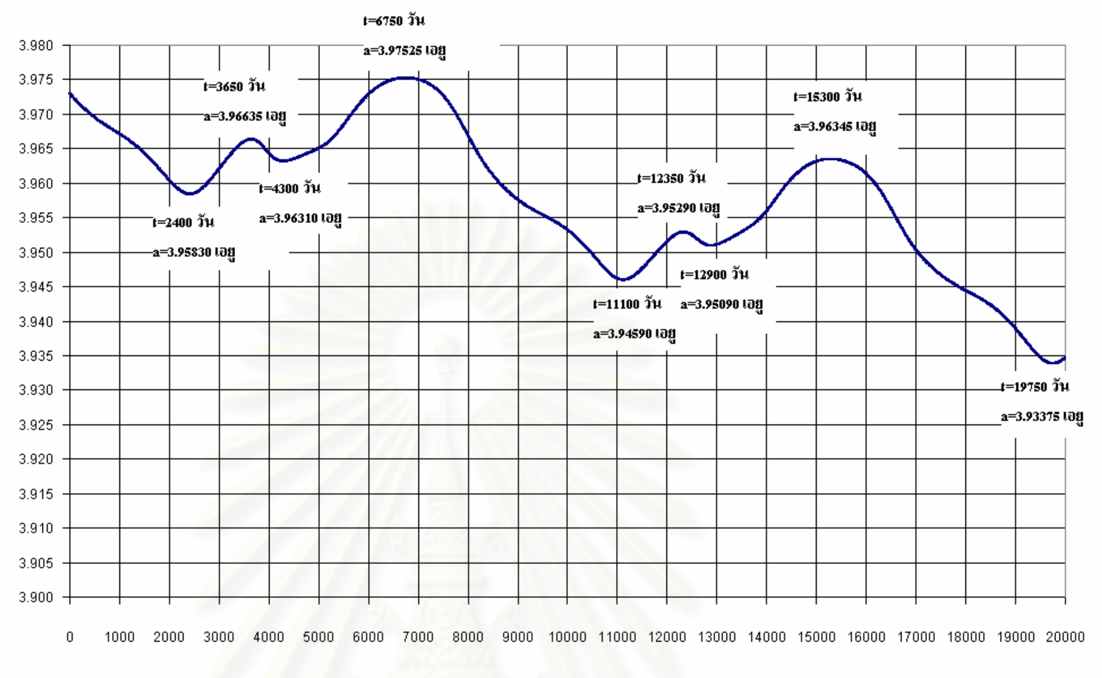


รูปที่ 4.20 ผลการคำนวณค่า M ในกรณีที่ 3

จากผลการคำนวณที่ได้จากกรณีที่ 2 และ 3 จะได้ว่าหลักมูลทางโคจรต่างๆ ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดานั้นมีการแปรผันอย่างเห็นได้ชัด และลักษณะการแปรผันของทั้งสองกรณีก็คล้ายคลึงกันมาก ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อเราคิดการรบกวนจากดาวเสาร์เพิ่มเข้าไปจะมีผลต่อการแปรผันเพียงเล็กน้อย ดังนั้นดาวเคราะห์ที่มีอิทธิพลต่อการรบกวนดาวเคราะห์น้อยฮิลดามากที่สุดก็คือดาวพฤหัสบดี เนื่องจากมวลของดาวพฤหัสบดีมีค่ามากกว่ามวลของดาวเสาร์ประมาณ 3.34 เท่า และดาวพฤหัสบดียังมีวงโคจรอยู่ใกล้กับวงโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดามากกว่าดาวเสาร์อีกด้วย

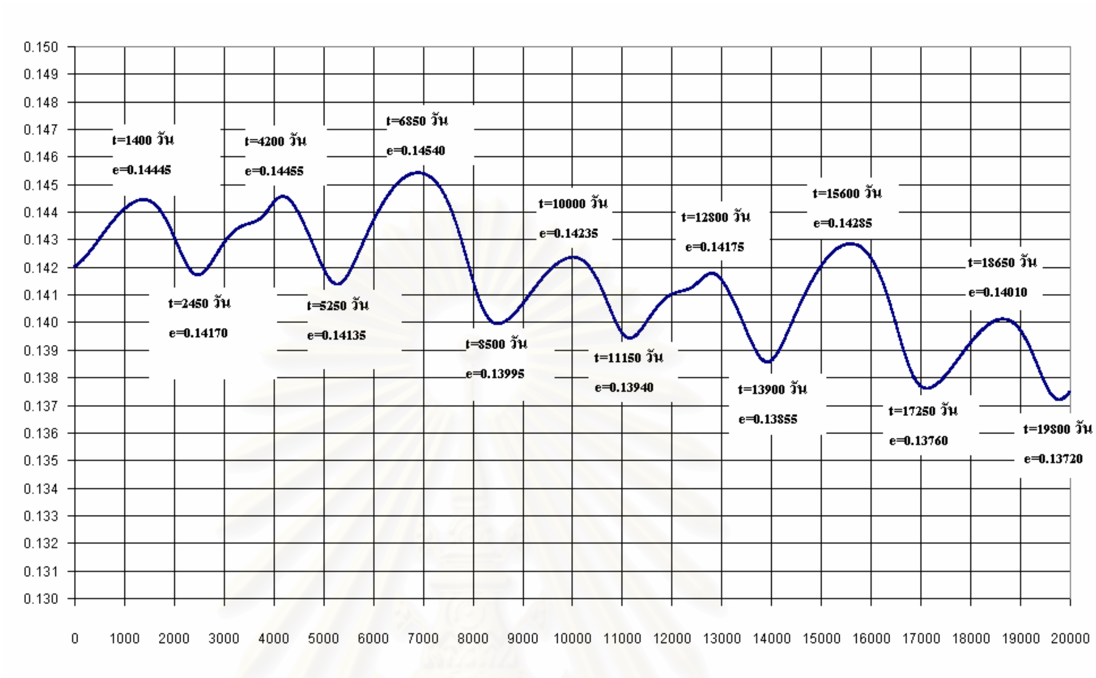
ดังนั้นเราจะนำผลการคำนวณที่ได้จากกรณีที่ 3 มาวิเคราะห์ โดยจะวิเคราะห์เปรียบเทียบกับการโคจรของดาวพฤหัสบดีเท่านั้นและจะวิเคราะห์เฉพาะค่า a และ e ซึ่งเป็นหลักมูลทางโคจรที่มีความสำคัญ เพราะเป็นค่าที่จะบ่งบอกถึงลักษณะรูปร่างของวงโคจรและอิทธิพลของการรบกวนที่เกิดขึ้น

รายละเอียดการแปรผันของค่า a จากรูปที่ 4.14 ในกรณีที่ 3 โดยประมาณจะแสดงไว้ในรูปที่ 4.21 ดังนี้



รูปที่ 4.21 ค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดของ a ที่เวลาต่างๆ
(โดยที่เวลาเริ่มต้น t=0 วัน , a=3.97300 เอยู)

รายละเอียดการแปรผันของค่า e จากรูปที่ 4.16 ในกรณีที่ 3 โดยประมาณจะแสดงไว้ในรูปที่ 4.22 ดังนี้



รูปที่ 4.22 ค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดของ e ที่เวลาต่างๆ
(โดยที่เวลาเริ่มต้น t=0 วัน , e=0.14200)

จากลักษณะการแปรผันของ a และ e ดังรูปที่ 4.21 และ 4.22 ตามลำดับ เมื่อเราสังเกตดูจะพบว่ามีลักษณะเป็นคาบ จากรูปที่ 4.21 เราจะเห็นว่าเมื่อ a มีค่าลดลงต่ำสุดครั้งแรกที่ t= 2,400 วัน หลังจากนั้น a ก็จะมีค่าลดลงต่ำสุดในลักษณะรูปแบบเดียวกันกับครั้งแรกอีกครั้งที่ t=11,100 วัน และ t=19,750 วัน ดังนั้นคาบของ a โดยประมาณจะมีค่าเท่ากับ $\frac{19,750 - 2,400}{2}$ = 8,675 วัน หรือประมาณ 23.75 ปี

จากรูปที่ 4.22 เราจะเห็นว่า e มีค่าลดลงต่ำสุดครั้งแรกที่ t = 2,450 วัน หลังจากนั้น e ก็จะมีค่าลดลงต่ำสุดในลักษณะรูปแบบเดียวกันกับครั้งแรกอีกครั้งที่ t=11,150วัน และ t=19,800 วัน ดังนั้นคาบของ e โดยประมาณจะมีค่าเท่ากับ $\frac{19,800 - 2,450}{2}$ = 8,675 วัน หรือประมาณ 23.75 ปี ซึ่งจากรูปที่ 4.17 ถึง 4.19 เราจะเห็นว่าลักษณะการแปรผันของหลักมูลทางโคจรอื่นๆ ก็เป็นคาบเช่นเดียวกัน ดังนั้นเราจึงได้ว่าคาบของหลักมูลทางโคจรโดยประมาณมีค่าเท่ากับ 23.75 ปี

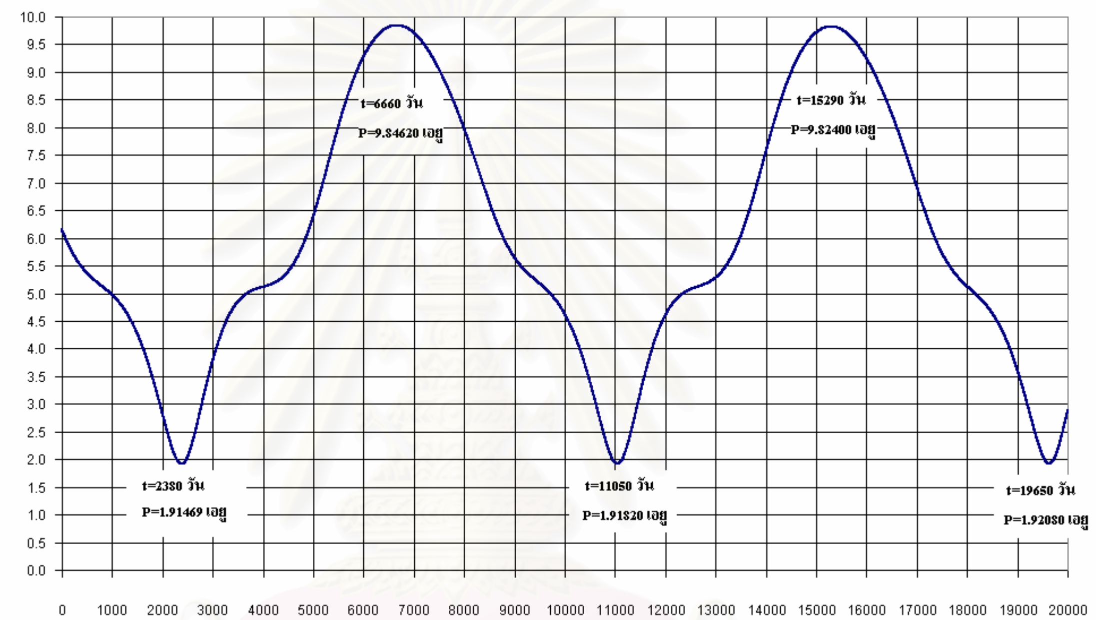
จากกรณีที่ 3 เมื่อเราคำนวณหาระยะห่างระหว่างดาวเคราะห์น้อยฮิลดากับดาวพฤหัสบดี (P) ที่เวลาต่างๆ ก็จะได้ผลออกมาดังที่แสดงในรูปที่ 4.23

โดยที่ $$P = |\vec{P}| = |\vec{R}_J - \vec{R}_H|$$

เมื่อ $\vec{P}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีสัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา

$\vec{R}_J$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีเทียบกับดวงอาทิตย์

$\vec{R}_H$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาเทียบกับดวงอาทิตย์



รูปที่ 4.23 ผลการคำนวณค่า P ในกรณีที่ 3

จากผลของค่า P ที่ได้จะเห็นได้ว่ากราฟของ P มีลักษณะเป็นคาบอย่างชัดเจน ซึ่งเราจะพบว่าดาวเคราะห์น้อยฮิลดากับดาวพฤหัสบดีจะเข้าใกล้กันมากที่สุดครั้งแรกที่ t = 2,380 วัน โดยมีระยะห่างน้อยที่สุด P_{min} = 1.91469 เอยู, ครั้งที่สองที่ t = 11,050 วัน โดยมี P_{min} = 1.91820 เอยู และครั้งที่สามที่ t=19,650 วัน โดยมี P_{min}=1.92080 เอยู

และจะอยู่ห่างกันมากที่สุดครั้งแรกที่ t = 6,660 วัน โดยมีระยะห่างมากที่สุด P_{max} = 9.84620 เอยู และครั้งที่สองที่ t = 15,290 วัน โดยมี P_{max} = 9.82400 เอยู ดังนั้นคาบของ P โดยประมาณจะเท่ากับ $\frac{19,650 - 2,380}{2}$ =8,635 วัน หรือประมาณ 23.64 ปี ซึ่งหมายความว่าทุกๆ 23.64 ปี ดาวเคราะห์น้อยฮิลดากับดาวพฤหัสบดีจะโคจรกลับมาพบกันในลักษณะเดิม เราเรียกว่าคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (T_R)

จากข้อมูลทางดาราศาสตร์ [6] เราทราบว่าคาบการโคจรของดาวพฤหัสบดี(T_J)และดาวเคราะห์น้อยฮิลดา(T_H) เท่ากับ 11.86 และ 7.9 ปี ตามลำดับ ดังนั้นเราจะคำนวณหา T_R ได้อีกวิธีคือ

$$\frac{1}{T_R} = \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_J} = \frac{1}{7.9} - \frac{1}{11.86} = \frac{3.960}{93.694} = \frac{1}{23.660}$$

ดังนั้น T_R = 23.66 ปี ซึ่งจะเห็นว่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากผลการคำนวณของเรา และเราจะพบว่าคาบของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็คือ T_R นั่นเอง

จากทฤษฎีการรบกวนในบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.3 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการรบกวนจะเกิดขึ้นมากที่สุด เมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาเคลื่อนที่ผ่านจุดที่ใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเพียงเล็กน้อย ดังนั้นเราจะวิเคราะห์รูปแบบของการรบกวนโดยพิจารณาจากการแปรผันของ a เป็นหลักโดยเมื่อพิจารณาจากกราฟของ a และ P ในรูปที่ 4.21 และ 4.23 ตามลำดับ จะพบว่ามีความสัมพันธ์กันดังนี้

- ที่เวลาเริ่มต้น t=0 วัน , P = 6.14940 เอยู และ a = 3.97300 เอยู
- เมื่อเวลาผ่านไปดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากขึ้น(P น้อยลง) เป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงเรื่อยๆ
- จนกระทั่งเมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุด(P_{min} = 1.91469 เอยู) ครั้งแรกที่ t=2,380 วัน ก็จะเป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงจนเท่ากับ 3.95830 เอยู ที่ t=2,400 วัน ซึ่งที่ t=2,400 วัน จะเป็นจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดครั้งที่หนึ่ง
- หลังจากนั้นดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากขึ้น(P มากขึ้น) เป็นผลทำให้ a มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ
- จนกระทั่งเมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามายังตำแหน่งที่มีระยะห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุด(P_{max} = 9.84620 เอยู) ครั้งแรกที่ t=6,660 วัน ก็จะเป็นผลทำให้ a มีค่าเพิ่มขึ้นจนเท่ากับ 3.97525 เอยู ที่ t=6,750 วัน ซึ่งที่ t=6,750 วัน จะเป็นจุดที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดครั้งที่หนึ่ง
- หลังจากนั้นดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะโคจรกลับเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากขึ้น(P น้อยลง) อีกครั้ง เป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงเรื่อยๆ
- จนกระทั่งเมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุด(P_{min} = 1.91820 เอยู) ครั้งที่สองที่ t=11,050 วัน ก็จะเป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงจนเท่ากับ

3.94590 เอยู ที่ t=11,100 วัน ซึ่งที่ t=11,100 วัน จะเป็นจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดเป็นครั้งที่สอง

- หลังจากนั้นดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากขึ้น(P มากขึ้น)อีกครั้ง เป็นผลทำให้ a มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ
- จนกระทั่งเมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามายังตำแหน่งที่มีระยะห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุด(P_{max} = 9.82400 เอยู) ครั้งที่สองที่ t=15,290 วัน ก็จะเป็นผลทำให้ a มีค่าเพิ่มขึ้นจนเท่ากับ 3.96345 เอยู ที่ t=15,300 วัน ซึ่งที่ t=15,300 วัน จะเป็นจุดที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดเป็นครั้งที่สอง
- หลังจากนั้นดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะโคจรกลับเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากขึ้น(P น้อยลง)อีกครั้งหนึ่ง เป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงเรื่อยๆ
- จนกระทั่งเมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุด(P_{min} = 1.92080 เอยู) ครั้งที่สามที่ t=19,650 วัน ก็จะเป็นผลทำให้ a มีค่าลดลงจนเท่ากับ 3.93375 เอยู ที่ t=19,750 วัน ซึ่งที่ t=19,750 วัน จะเป็นจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดเป็นครั้งที่สาม

เมื่อพิจารณากราฟของ a ในรูปที่ 4.21 เราจะสังเกตเห็นว่า จากจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดครั้งแรกที่ t =2,400 วัน และครั้งที่สองที่ t=11,100 วัน ไปยังจุดที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดครั้งแรกที่ t=6,750 วัน และครั้งที่สองที่ t=15,300 วัน ตามลำดับนั้น จะมีอยู่สองช่วงสั้นๆ ที่ a มีค่าลดลงเล็กน้อยก่อนที่จะกลับมามีค่าเพิ่มขึ้นเหมือนเดิมคือช่วงที่หนึ่ง t=3,650 วัน ถึง t=4,300 วัน และช่วงที่สอง t=12,350 วัน ถึง t=12,900 วัน ซึ่งทั้งสองช่วงนี้จะเป็นช่วงที่มีการรบกวนย่อยๆ เกิดขึ้น เราจะเรียกทั้งสองช่วงนี้ว่าช่วงการรบกวนย่อยครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สอง

ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาจากกราฟของ P ในรูปที่ 4.23 เราจะพบว่าในช่วงเวลาทั้งสองช่วงที่ a มีค่าลดลงเล็กน้อยนั้น กราฟของ P กลับมีค่าเพิ่มขึ้น แต่มีอัตราการเพิ่ม(ความชันของเส้นกราฟ) ที่น้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับอัตราการเพิ่มของ P ในช่วงเวลาก่อนและหลังของช่วงการรบกวนย่อยครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สองนี้ จากความชันของเส้นกราฟ P ที่น้อยลงในสองช่วงนี้แสดงให้เห็นว่าดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีในอัตราที่น้อยลง ซึ่งจะส่งผลทำให้การรบกวนวงโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีมีค่ามากขึ้น ดังนั้นจึงทำให้ a มีค่าลดลงในช่วงเวลาสั้นๆ ทั้งสองช่วงนี้

จากผลต่างๆที่ได้ เราจึงอธิบายได้ว่าปัจจัยหลักที่มีผลต่อการแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็คือ P นั่นเอง และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.21 และ 4.23 จะพบว่า จุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดจะอยู่ถัดจากจุดที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเพียงเล็กน้อย ส่วนจุดที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดก็จะอยู่ถัดจากจุดที่ดาวเคราะห์น้อย

ฮิลดาโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเพียงเล็กน้อยเช่นกัน ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีของการรบกวนดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.18 ในบทที่ 2

เมื่อเรานำส่วนประกอบ X,Y ของเวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดีที่เวลาต่างๆ มาแสดงบนระนาบ X-Y เดียวกัน ทุกๆ 300 วัน โดยเริ่มที่เวลาเริ่มต้น t=0 วัน จนถึง t=8,700 วัน เพื่อให้ครบหนึ่งคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโดยประมาณ ซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงผลการคำนวณวงโคจรและและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดีที่เวลาต่างๆ โดยจะแสดงไว้ในภาคผนวก ค และเราจะนำผลที่ได้จากภาคผนวก ค มาวิเคราะห์ โดยจะวิเคราะห์ที่เวลาดังต่อไปนี้ คือ ที่ t=0 วัน ซึ่งเป็นเวลาเริ่มต้น, ที่ t=2,400 วัน ซึ่งเป็นจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุด, ที่ t=3,600 วัน, t=3,900 วัน และ t=4,200 วัน ซึ่งเป็นช่วงที่เกิดการรบกวนย่อย, ที่ t=6,600 วัน และ t=6,900 วัน ซึ่งเป็นช่วงที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุด และ ที่ t=8,700 วัน ซึ่งเป็นเวลาที่ครบรอบหนึ่งคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโดยประมาณ โดยจะแสดงไว้ในรูปที่ 4.24 ถึง 4.31 ตามลำดับ

กำหนดตัวแปรในรูปที่ 4.24 - 4.31 ดังนี้ คือ

R_J เป็นระยะห่างระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวพฤหัสบดี (เอยู)

R_H เป็นระยะห่างระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู)

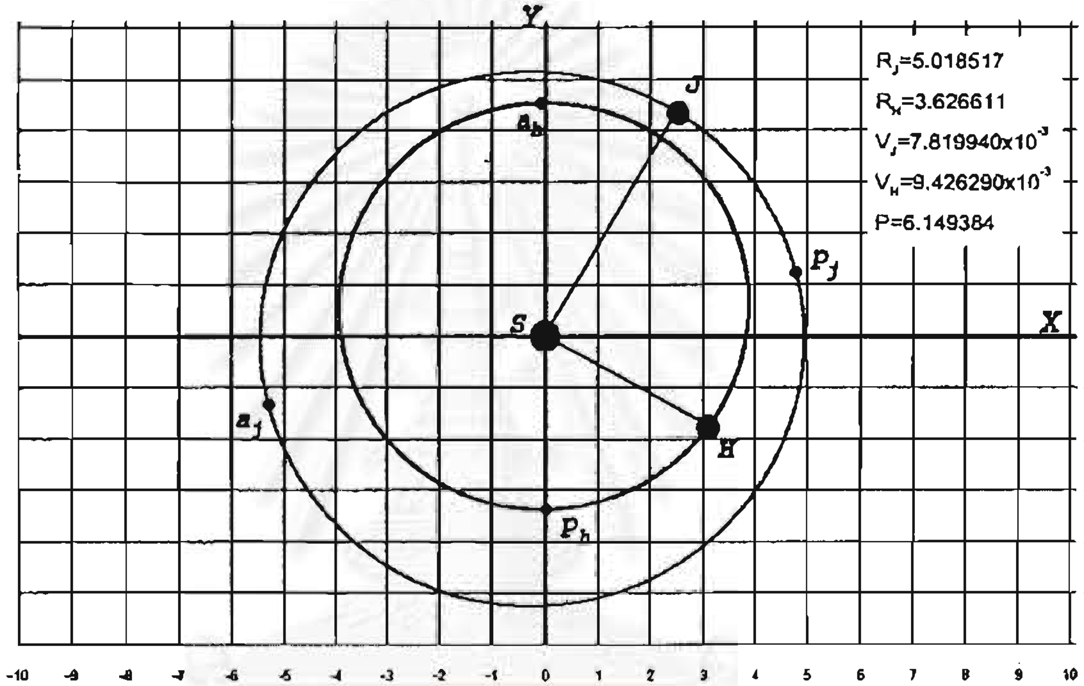
P เป็นระยะห่างระหว่างดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู)

V_J เป็นอัตราเร็วของดาวพฤหัสบดี (เอยู/วัน)

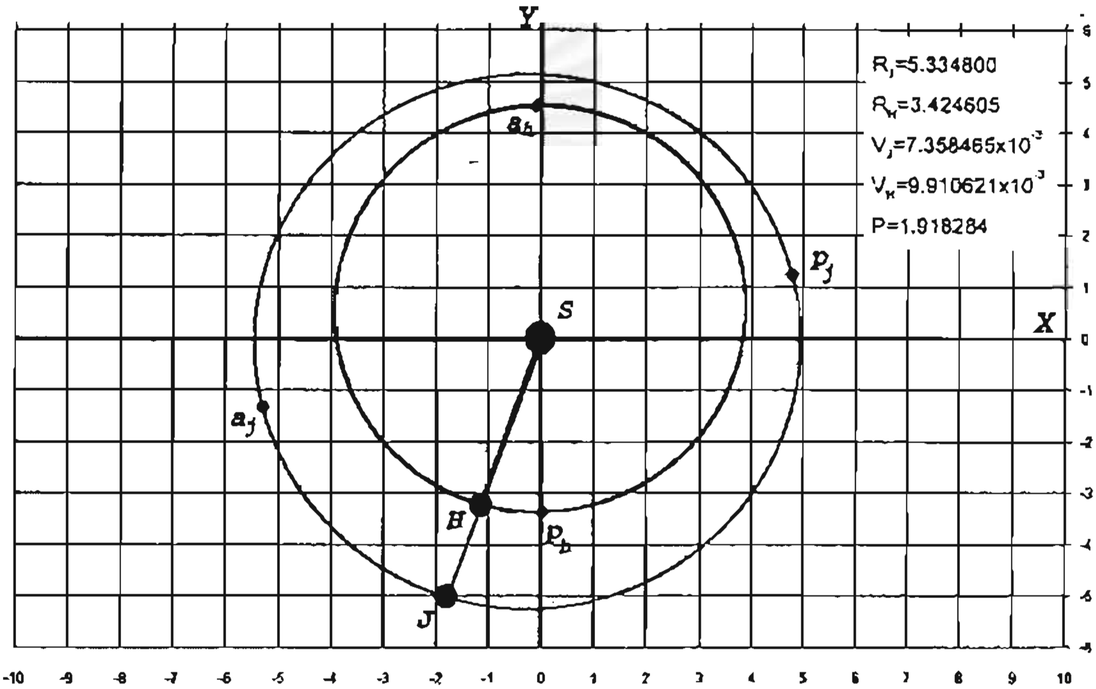
V_H เป็นอัตราเร็วของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู/วัน)

p_h, a_h เป็นจุดใกล้และจุดไกลดวงอาทิตย์ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาตามลำดับ

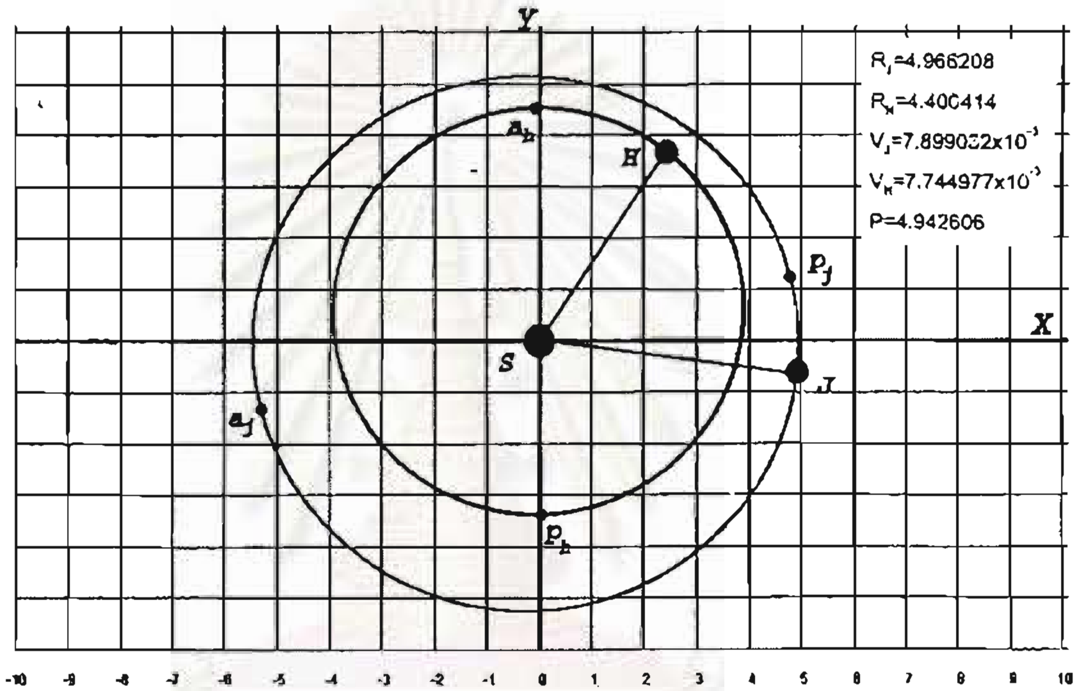
p_J , a_J เป็นจุดใกล้และจุดไกลดวงอาทิตย์ของดาวพฤหัสบดีตามลำดับ



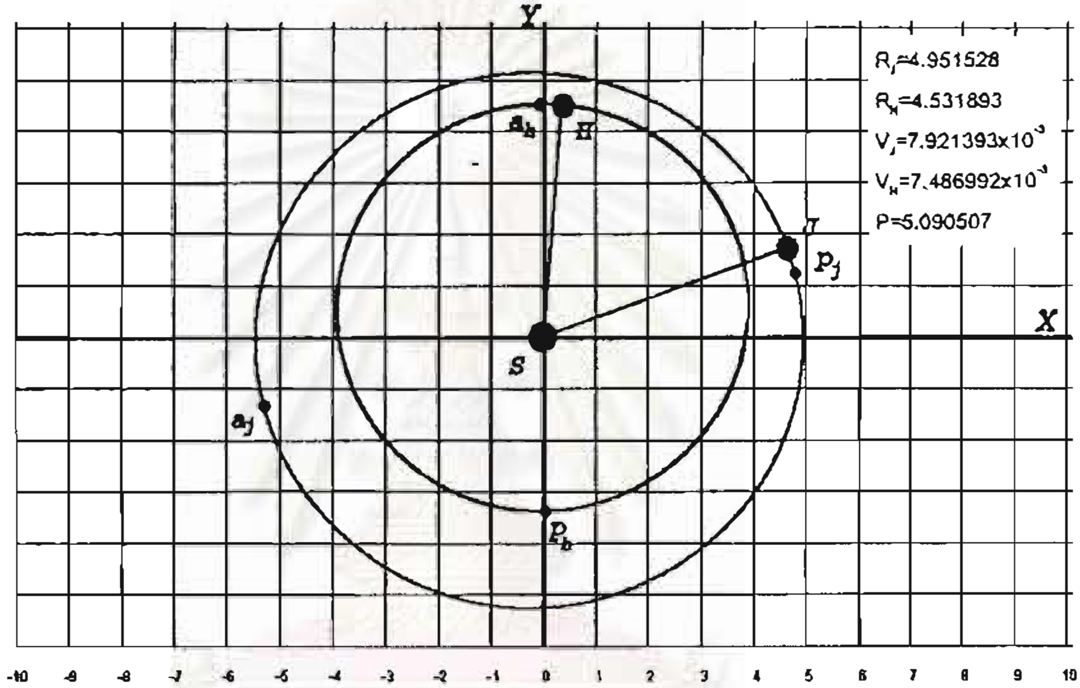
รูปที่ 4.24 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=0 วัน



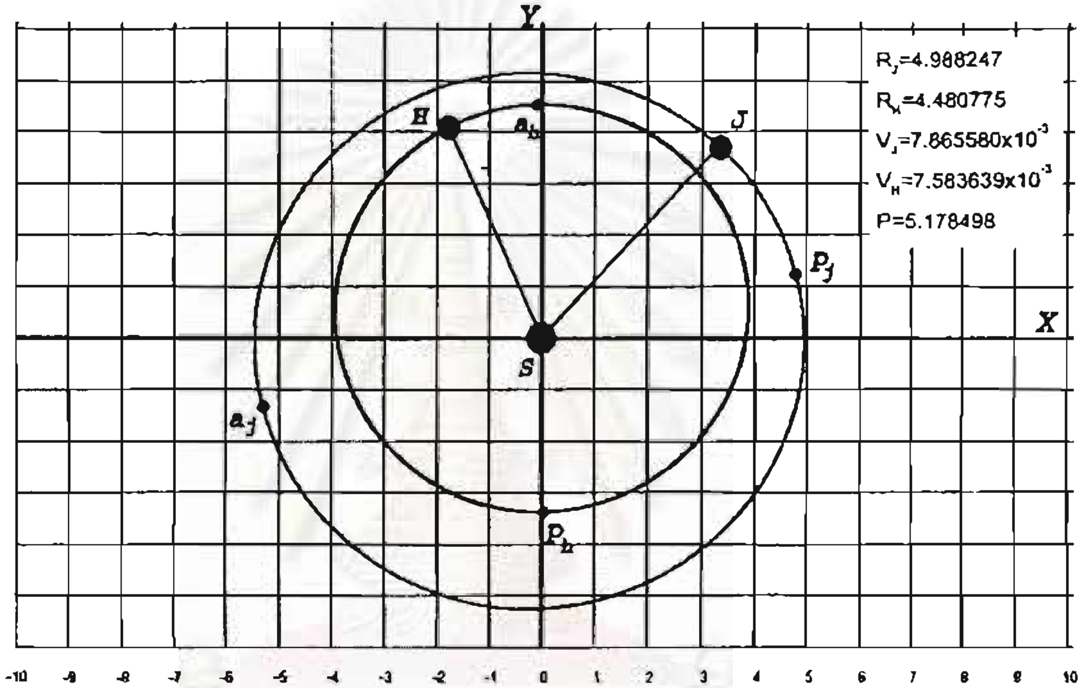
รูปที่ 4.25 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=2,400 วัน



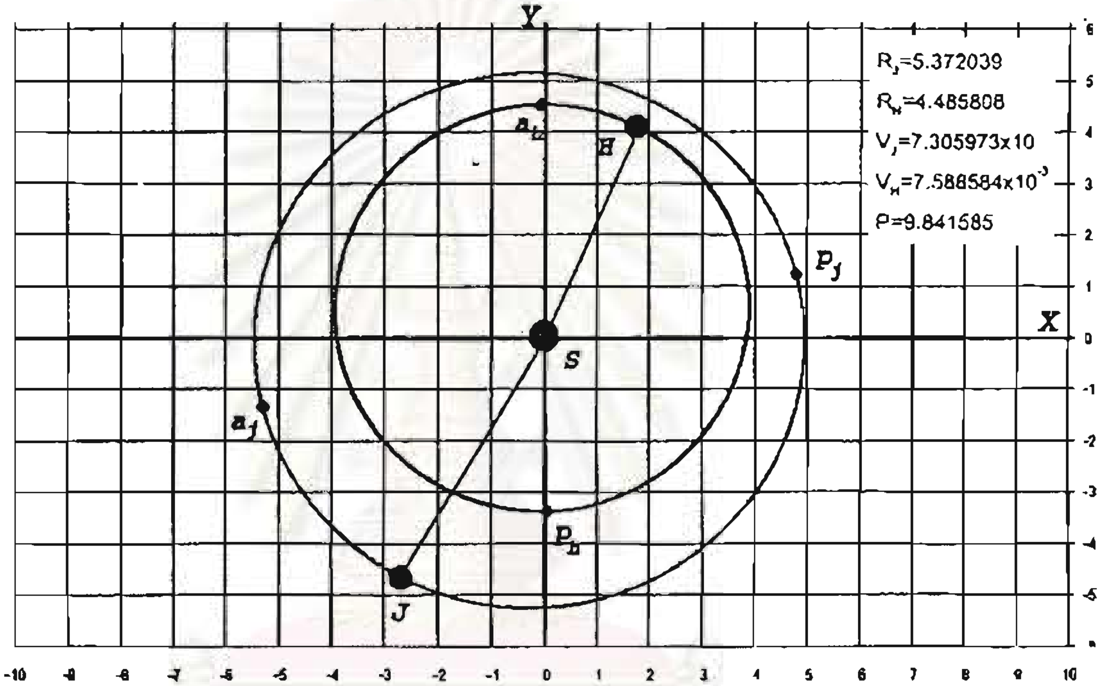
รูปที่ 4.26 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,600 วัน



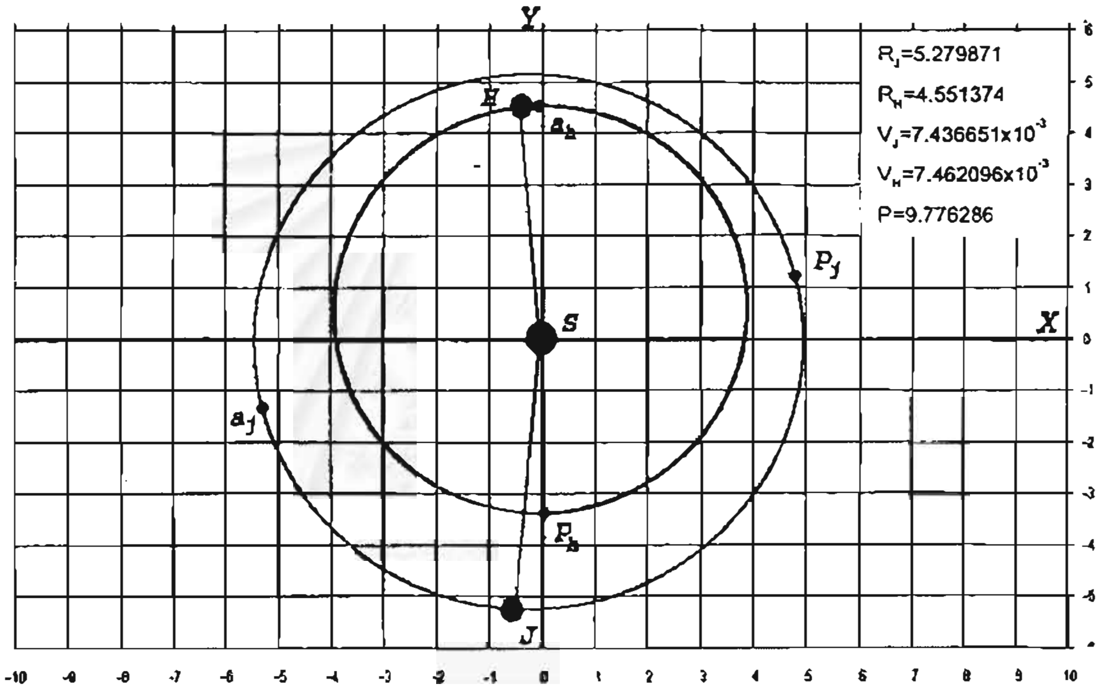
รูปที่ 4.27 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,900 วัน



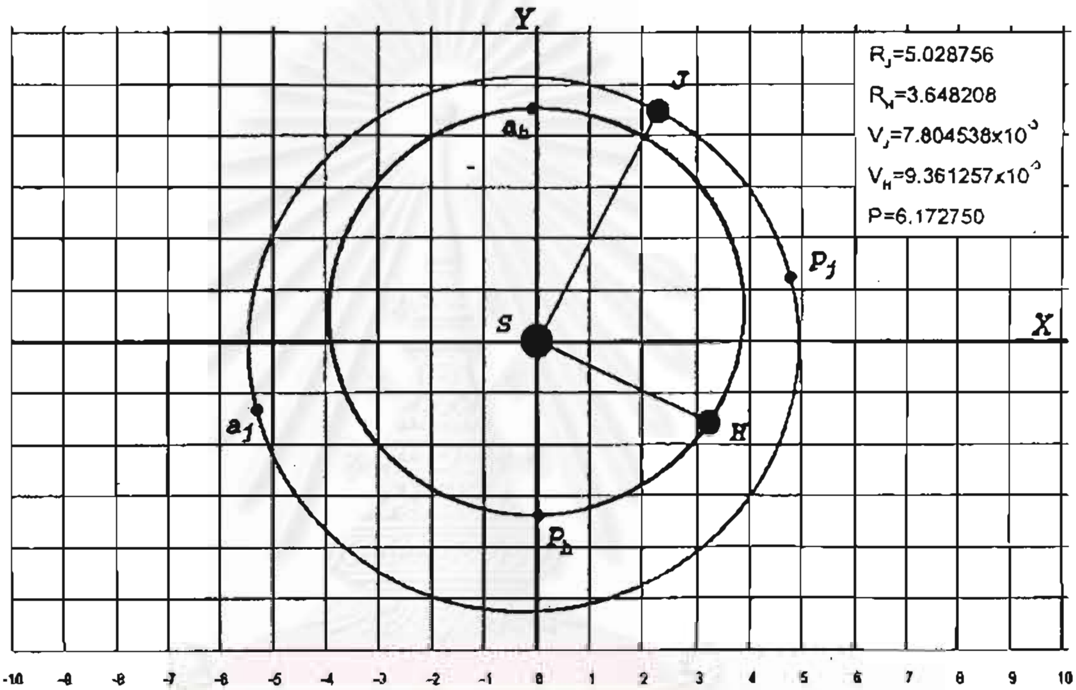
รูปที่ 4.28 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=4,200 วัน



รูปที่ 4.29 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,600 วัน



รูปที่ 4.30 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,900 วัน



รูปที่ 4.31 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=8,700 วัน

จะเห็นได้ว่าเมื่อครบรอบหนึ่งคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโดยประมาณคือ 8,700 วัน ดาวเคราะห์ทั้งสองดวงจะโคจรกับมาอยู่ในลักษณะเดิม ดังรูปที่ 4.24 และ 4.31 จากการวิเคราะห์ที่ผ่านมาเราทราบว่าจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดอยู่ที่ t=2,400 วัน ซึ่งตำแหน่งของดาวเคราะห์ทั้งสองดวงที่เวลานี้จะเป็นดังรูปที่ 4.25 เราจะเห็นได้ว่าเป็นจุดที่ดาวเคราะห์ทั้งสองดวงโคจรเข้ามาใกล้กันมาก ซึ่งดาวเคราะห์น้อยฮิลดากำลังเคลื่อนที่แซงดาวพฤหัสบดีพอดี และเป็นตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะโคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดใกล้ดวงอาทิตย์นั่นเอง ส่วนจุดที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดอยู่ที่ t=6,750 วัน ซึ่งตำแหน่งของดาวเคราะห์ทั้งสองดวงที่เวลานี้จะอยู่ระหว่างรูปที่ 4.29 และ 4.30 เราจะเห็นได้ว่าเป็นช่วงที่ดาวเคราะห์ทั้งสองดวงโคจรออกห่างกันมาก และเป็นตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะโคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดไกลดวงอาทิตย์นั่นเอง

ส่วนช่วงเวลาที่เกิดการรบกวนย่อย คือช่วงที่ t=3,650 วัน ถึง t=4,300 วันนั้น เมื่อเราพิจารณาจากรูปที่ 4.26, 4.27 และ 4.28 ซึ่งเป็นตำแหน่งของดาวเคราะห์ทั้งสองดวงที่ t = 3,600 วัน, t=3,900 วัน และ t=4,200 วัน เราจะเห็นได้ชัดเจนว่าระยะห่างระหว่างดาวเคราะห์ทั้งสองดวง (ค่า **P**) นั้นค่อนข้างจะคงที่ เนื่องจากเป็นช่วงที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาในบริเวณจุดไกลดวงอาทิตย์ ซึ่งตามกฎวิส-วีวา คือสมการ (2.75) ในบทที่ 2 แล้ว จะทำให้ช่วงนี้ดาวเคราะห์น้อยฮิลดามีอัตราเร็ว (V_H) น้อยกว่าในช่วงอื่นๆ ในขณะที่ดาวพฤหัสบดีก็โคจรเข้ามาในบริเวณจุดใกล้ดวงอาทิตย์พอดี ซึ่งตามกฎวิส-วีวาแล้ว จะทำให้ช่วงนี้ดาวพฤหัสบดีมีอัตราเร็ว (V_J) มากกว่าในช่วงอื่นๆ ดังนั้นดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะไม่สามารถเคลื่อนที่หนีห่างจากดาวพฤหัสบดีได้มากนัก ทำให้แรงโน้มถ่วงจากดาวพฤหัสบดีสามารถส่งผลรบกวนต่อหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาได้มากขึ้น แต่เมื่อผ่านพ้นช่วงนี้ไปแล้วดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็จะมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้นและเคลื่อนที่ทิ้งห่างจากดาวพฤหัสบดีออกไป เป็นผลทำให้การรบกวนที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีมีค่าลดลง

4.4 การวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการคำนวณ

จากฐานข้อมูลขององค์การบริหารการบินและอวกาศแห่งชาติสหรัฐอเมริกา (นาซ่า) ดังที่แสดงในภาคผนวก ข เราจะได้ข้อมูลหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจากการสังเกตการณ์ที่ JD 2452200 ซึ่งตรงกับวันที่ 17ตุลาคม ค.ศ. 2001 เวลา 12.00 น. UT ดังนี้

$a = 3.971018$ เอยู

$e = 0.141795$

$i = 7.837810$ องศา

$\omega = 42.896800$ องศา

$\Omega = 228.430580$ องศา

$M = 95.611134$ องศา

ซึ่งจากผลการคำนวณของเราไม่มีข้อมูลหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่ JD 2452200 (t=399.50 วัน) โดยตรง ดังนั้นเราจะใช้ข้อมูลที่ t=399 วัน และ t=400 วัน มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยแทน ดังตารางที่ 4.2

หลักมูลทางโคจร	399 วัน	400 วัน	399.50 วัน
a (เอยู)	3.970076	3.970072	3.970074
e	0.142769	0.142769	0.142769
i (องศา)	7.801300	7.801047	7.801174
ω (องศา)	42.598274	42.597022	42.597648
Ω (องศา)	228.391389	228.392290	228.391840
M (องศา)	95.729281	95.854410	95.791846

ตารางที่ 4.2 การหาหลักมูลทางโคจรที่ JD 2452200 โดยการเฉลี่ย

เมื่อนำผลการคำนวณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการณ์ของนาซ่า เพื่อหาความคาดเคลื่อน โดยหาได้จากสมการ

$$\text{ความคลาดเคลื่อน} = \frac{\left|\text{ข้อมูลจากนาซ่า} - \text{ผลการคำนวณที่ได้}\right|}{\text{ข้อมูลจากนาซ่า}} \times 100\,\%$$

ซึ่งจะได้ผลดังตารางที่ 4.3

หลักมูลทางโคจร	ข้อมูลจากนาซ่า	ผลการคำนวณที่ได้	ความคลาดเคลื่อน (%)
a (เอยู)	3.971018	3.970074	0.023772
e	0.141795	0.142769	0.686907
i (องศา)	7.837810	7.801174	0.467426
ω (องศา)	42.896800	42.597648	0.697376
Ω (องศา)	228.430580	228.391840	0.000074
M (องศา)	95.611134	95.791846	0.189007

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบผลการคำนวณและความคลาดเคลื่อน

จากตารางที่ 4.3 จะเห็นได้ว่าหลักมูลการโคจรที่ได้จากการคำนวณของเราเมื่อเปรียบเทียบกับหลักมูลทางโคจรที่ได้จากฐานข้อมูลของนาซ่า จะมีความคาดเคลื่อนอยู่ในช่วง 0.000074 % ถึง 0.697376 % ซึ่งถือได้ว่ามีความใกล้เคียงกันมาก แสดงให้เห็นว่าเราสามารถนำผลที่คำนวณได้นี้ไปใช้ในการอ้างอิงกำหนดหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาใดๆ ได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

จากผลการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาเป็นเวลา 20,000 วัน หรือประมาณ 54.76 ปี นับตั้งแต่วันที่ 13 กันยายน ค.ศ. 2000 เวลา 24.00 น. UT (JD 2451800.50) จนถึงวันที่ 17 มิถุนายน ค.ศ. 2055 เวลา 24.00 น. UT (JD 2471800.50) และการวิเคราะห์ในบทที่แล้วเราสามารถนำมาสรุปได้ดังนี้ คือ

- เมื่อเราคำนวณโดยคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ จะพบว่าผลของหลักมูลทางโคจรที่ได้ มีลักษณะการแปรผันคล้ายคลึงกับในกรณีที่คำนวณโดยคิดการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีเพียงดวงเดียวมาก ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปได้ว่าปัจจัยหลักที่มีผลต่อการแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็คือการรบกวนที่เกิดจากอิทธิพลของดาวพฤหัสบดี ส่วนการรบกวนที่เกิดจากอิทธิพลของดาวเสาร์นั้นมีค่าเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

- การแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะมีลักษณะเป็นคาบ ซึ่งจะค่าเท่ากับคาบการนัดพบของดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา คือประมาณ 23.7 ปี

- ปัจจัยหลักที่มีผลต่อการรบกวนดาวเคราะห์น้อยฮิลดาก็คือ ระยะห่างระหว่างดาวเคราะห์น้อยฮิลดากับดาวพฤหัสบดี (P) โดยที่เมื่อดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากขึ้น (P ลดลง) ก็จะทำให้การรบกวนมีค่าเพิ่มมากขึ้น และเมื่อ ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรออกห่างจากดาวพฤหัสบดีมากขึ้น (P เพิ่มมากขึ้น) ก็จะทำให้การรบกวนมีค่าลดลง

- เมื่อวิเคราะห์จากการแปรผันของ a เปรียบเทียบกับ P เราจะสามารถสรุปความสัมพันธ์ที่เกี่ยวโยงกันได้ดังนี้

  1. a จะมีค่าลดลง ก็ต่อเมื่อ
     - P มีค่าลดลง หรือ
     - P มีค่าเพิ่มขึ้นโดยมีอัตราการเพิ่ม(ความชันของเส้นกราฟ)น้อย
  2. a จะมีค่าเพิ่มขึ้น ก็ต่อเมื่อ P มีค่าเพิ่มขึ้นโดยมีอัตราการเพิ่ม(ความชันของเส้นกราฟ)สูง

- ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปรูปแบบของการรบกวนหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจากการวิเคราะห์การแปรผันของ a เปรียบเทียบกับ P ได้ดังนี้ คือ

1. ตำแหน่งที่เกิดการรบกวนมากที่สุดจะอยู่ในบริเวณที่ถัดจากจุดที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาใกล้ดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเล็กน้อย ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดใกล้ดวงอาทิตย์และแซงดาวพฤหัสบดีพอดี ดังรูปที่ 4.25

2. ตำแหน่งที่เกิดการรบกวนน้อยที่สุดจะอยู่ในบริเวณที่ถัดจากจุดที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาอยู่ห่างจากดาวพฤหัสบดีมากที่สุดไปเล็กน้อย ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดไกลดวงอาทิตย์ ดังรูปที่ 4.29 และ 4.30

3. จากจุดที่เกิดการรบกวนมากที่สุดไปยังจุดเกิดการรบกวนน้อยที่สุดนั้น จะมีช่วงเวลาสั้นๆ ช่วงหนึ่งที่การรบกวนดาวเคราะห์น้อยฮิลดามีค่าเพิ่มขึ้น คือช่วงเวลาประมาณ 1,250 วัน (3.422 ปี) ถึง 1,900 วัน (5.202 ปี) หลังจากที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งที่เกิดการรบกวนมากที่สุดไปแล้ว เนื่องจากว่าช่วงเวลานี้เป็นช่วงเวลาที่ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดไกลดวงอาทิตย์ ซึ่งตามกฎวิส-วีวาแล้ว จะทำให้ช่วงนี้ดาวเคราะห์น้อยฮิลดามีอัตราเร็วน้อยกว่าช่วงเวลาอื่นๆ ในขณะที่ดาวพฤหัสบดีก็โคจรเข้ามาอยู่ในบริเวณจุดใกล้ดวงอาทิตย์พอดี ซึ่งจะทำให้ช่วงนี้ดาวพฤหัสบดีมีอัตราเร็วมากกว่าช่วงเวลาอื่นๆ ตามกฎวิส-วีวาเช่นเดียวกัน ดังรูปที่ 4.26, 4.27 และ 4.28 ดังนั้นในช่วงเวลานี้จะทำให้ดาวเคราะห์น้อยฮิลดาเคลื่อนที่ออกห่างจากดาวพฤหัสบดีในอัตราที่น้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับช่วงเวลาอื่นๆ ดังรูปที่ 4.23 ซึ่งจะเห็นได้ว่าอัตราการเพิ่มของ P ในช่วงเวลานี้มีค่าน้อย จึงทำให้การรบกวนดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีมีค่าเพิ่มมากขึ้น แต่เมื่อผ่านช่วงเวลานี้ไปแล้วอัตราการเพิ่มของ P ก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้น เพราะดาวเคราะห์น้อยฮิลดาจะเคลื่อนที่ทิ้งห่างจากดาวพฤหัสบดีไป ทำให้การรบกวนดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เกิดจากดาวพฤหัสบดีมีค่าลดลงอีกครั้งหนึ่ง

ข้อเสนอแนะ

การนำผลการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่ได้จากงานวิจัยนี้ไปใช้อ้างอิงในการกำหนดหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาที่เวลาต่างๆ นั้น จะพบว่ามีความคาดเคลื่อนน้อยมากเมื่อเปรียบกับข้อมูลที่ได้จากนาซ่า ทั้งนี้เป็นเพราะเรานำข้อมูลที่ได้ไปใช้อ้างอิงในช่วงระยะเวลาที่ไม่ห่างจากเวลาเริ่มต้นที่เรากำหนดมากนัก แต่ถ้าเรานำไปใช้อ้างอิงในช่วงระยะเวลาที่ห่างจากเวลาเริ่มต้นมากขึ้น ความคลาดเคลื่อนก็จะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย เนื่องจากในการคำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาโดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น จะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นในทุกๆ ขั้นเวลาของการคำนวณ ดังนั้นถ้าเราต้องการข้อมูลที่มีความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้นเพื่อนำไปใช้อ้างอิงในการกำหนดหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาต่อไปในอนาคต เราจะต้องปรับเปลี่ยนค่าหลักมูลทางโคจรเริ่มต้นที่จะนำไปใช้

ในการคำนวณให้เป็นปัจจุบันมากที่สุด โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการณ์ล่าสุดตามแหล่งข้อมูลทางดาราศาสตร์ต่างๆ มาเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณ

รายการอ้างอิง

[1] Illingworth, V. The Facts on File Dictionary of Astronomy. 3rd ed. New York : Facts on File, 1994.

[2] Binzel, R.P., Gehrels, T., and Matthew, M.S. Asteroids II. USA : University of Arizona Press, 1989.

[3] Peebles, C. Asteroids a History. USA : Smithsonian Institute Press, 2000.

[4] Rika Nempyoo Heisei Kyu Nen (Chronological Scientific Table 2000). Tokyo : Maruzen National Astronomical Observatory, 2001.

[5] Boulet, D.L. Method of Orbit Determination for the Microcomputer. USA : Willmann-Bell, 1991.

[6] Roy, A.E. Orbital Motion. Bristol : Adam Hilger, 1980.

[7] พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ. กลศาสตร์ท้องฟ้าทั่วไป. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2533.

[8] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

[9] Chapra, S.C., and Canale, R.P. Numerical Methods for Engineers. 3rd ed. USA : McGraw-Hill Book, 1998.

[10] พิสิทฐ์ วรสิงห์ และ ไพเสริฐ ธรรมมานุธรรม. ดาราศาสตร์เชิงปฏิบัติกับเครื่องคิดเลขของท่าน. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2531.

[11] Jet Propulsion Laboratory. Solar System Dynamics[Online]. 2002. Available from : http://ssd.jpl.nasa.gov/data/ELEMENTS.NUMBR[2002, March 27]

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ค่าคงที่ทางดาราศาสตร์และวันจูเลียน

ค่าคงที่ทางดาราศาสตร์ [5]

1 หน่วยดาราศาสตร์ (เอยู) = $1.49597870 \times 10^{11}$ เมตร

1 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์ = 1.9891×10^{30} กิโลกรัม

1 วัน = 86,400 วินาที

1 ปี = 365.2425 วัน

ค่าคงที่แรงโน้มถ่วงของเกาส์ (k) = 0.01720209895

มวลของโลก = 0.000003003 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

มวลของดาวพฤหัสบดี = 0.000954791 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

มวลของดาวเสาร์ = 0.000285878 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

วันจูเลียน [10]

บางครั้งมีความจำเป็นที่จะต้องหาจำนวนวันและส่วนของวันหลังจากจุดเริ่มยุค(epoch)ที่กำหนดให้จุดหนึ่ง นักดาราศาสตร์ได้กำหนดจุดเริ่มยุคที่เวลาเที่ยงวันตามเวลาเฉลี่ยกรีนิช (GMT) ของวันที่ 1 มกราคม 4,713 ปี ก่อนคริสตกาล โดยจำนวนของวันที่ล่วงไปนับตั้งแต่วันนี้เรียกว่าวันจูเลียน(Julian date, JD) สิ่งสำคัญพึงสังเกตว่าแต่ละวันจูเลียนใหม่ เริ่มต้นที่ 12 ชั่วโมง 00 นาที GMT (UT) ครึ่งวันหลังจากวันตามปฏิทิน

การเปลี่ยนวันที่ปฏิทินเป็นจำนวนวันจูเลียน

1. ให้ y = ปี, m = เดือน, d = วัน
2. ถ้า m =1 หรือ 2 ให้ลบ 1 จาก y และบวก 12 เข้ากับ m นอกจากนี้ให้ y’=y และ m’=m
3. ถ้าวันที่นั้นเป็นวันหลังจากวันที่ 15 ตุลาคม ค.ศ. 1582 (นั่นคือ ปฏิทินเกรกอเรียน) ให้คำนวณ
   3.1 A = ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ (y’/100)
   3.2 B = 2-A+ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ(A/4)
   นอกเหนือจากกรณีนี้ให้ B=0
4. คำนวณ C = ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [(365.25)*(y’)]
5. คำนวณ D = ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [(m’+1)*(30.6001)]
6. หา JD=B+C+D+d+1720994.50 นี่คือจำนวนวันจูเลียน

การเปลี่ยนจำนวนวันจูเลียนเป็นวันที่ปฏิทิน

1. บวก 0.5 เข้ากับ JD ให้ I=ส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม และ F=ส่วนที่เป็นทศนิยม
2. ถ้า I มากกว่า 2299160 ให้คำนวณดังนี้
   2.1 A=ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [(I-1867216.25)/(36524.25)]
   2.2 B=I+1+A-ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ (A/4)
   นอกเหนือจากกรณีนี้ให้ A= I
3. คำนวณ C=B+1524
4. คำนวณ D=ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [(C-112.1)/(365.25)]
5. คำนวณ E=ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [D*(365.25)]
6. คำนวณ G=ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ [(C-E)/(30.6001)]

7. คำนวณ d=C-E+F-ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ[G*(30.6001)] นี่คือวันของเดือน(รวมทั้งทศนิยมของวัน)
8. คำนวณ m=G-1 ถ้า G น้อยกว่า 13.5   หรือ   m=G-13 ถ้า G มากกว่า 13.5   นี่คือจำนวนที่บอกเดือน
9. คำนวณ y=D-4715 ถ้า m น้อยกว่า 2.5   หรือ   y=G-4716 ถ้า m มากกว่า 2.5 นี่คือจำนวนที่บอกปี (ค.ศ.)

ภาคผนวก ข

หลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อย จากฐานข้อมูลนาซ่า

No	*Name*	*Epoch*	*a*	*E*	*i*	*w*	Ω	*M*
152	Atala	52200	3.143548	0.071151	12.131040	55.341880	40.149560	181.315409
153	**Hilda**	**52200**	**3.971018**	**0.141795**	**7.837810**	**42.896800**	**228.430580**	**95.611134**
154	Bertha	52200	3.192921	0.085456	21.033180	152.983090	37.069970	278.875946
155	Scylla	52200	2.760436	0.273590	11.392290	45.735260	41.133540	151.508591
156	Xanthippe	52200	2.730338	0.223623	9.755940	337.929900	242.281830	163.669493
157	Dejanira	52200	2.581792	0.194593	12.154640	46.584770	62.159970	108.505260
158	Koronis	52200	2.868611	0.055269	1.004970	146.202880	278.674900	355.657896
159	Aemilia	52200	3.100368	0.111743	6.123940	336.833500	134.363320	315.944970
160	Una	52200	2.728786	0.067981	3.823020	50.994830	8.894240	44.888989
161	Athor	52200	2.379217	0.138474	9.048500	293.848780	18.839930	339.821125
162	Laurentia	52200	3.024367	0.173271	6.085500	111.918800	36.481580	11.696953
163	Erigone	52200	2.367392	0.190605	4.804450	297.684170	160.378010	259.460972
164	Eva	52200	2.635274	0.343561	24.486920	283.721620	77.237510	53.914590
165	Loreley	52200	3.125343	0.081733	11.237360	351.394750	302.678000	238.828401
166	Rhodope	52200	2.683916	0.213114	12.012670	264.200290	129.128160	106.290746
167	Urda	52200	2.853429	0.036339	2.207970	125.332110	166.464140	21.290326
168	Sibylla	52200	3.378859	0.060306	4.614680	165.068430	207.128900	42.703537
169	Zelia	52200	2.357337	0.132105	5.507420	334.645190	354.862380	220.125968
170	Maria	52200	2.553090	0.063850	14.411930	158.362750	301.507860	224.411429
171	Ophelia	52200	3.134712	0.126907	2.544890	58.226200	100.616910	129.552433
172	Baucis	52200	2.379546	0.114888	10.036920	359.616800	332.142460	165.080706

ตารางที่ ข.1 หลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยที่ JD 2452200 จากฐานข้อมูลของนาซ่า [11]

ภาคผนวก ค

วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดีที่เวลาต่าง ๆ

ในรูปที่ ค.1 ถึง ค.30 กำหนดให้

R_J เป็นระยะห่างระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวพฤหัสบดี (เอยู)

R_H เป็นระยะห่างระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู)

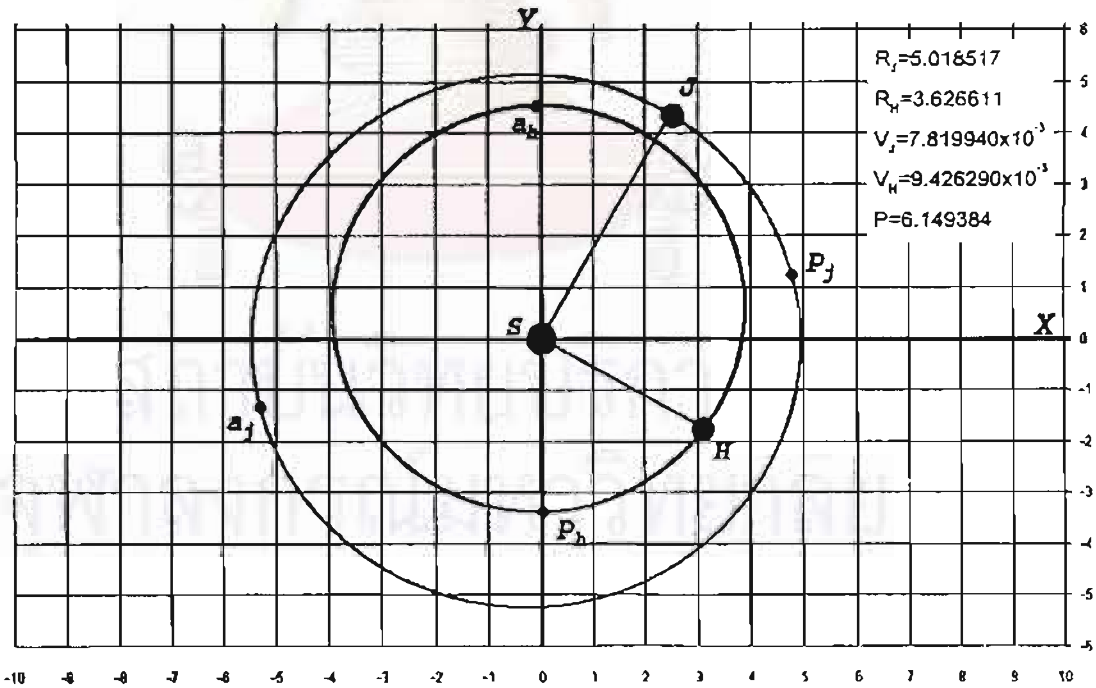
P เป็นระยะห่างระหว่างดาวพฤหัสบดีกับดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู)

V_J เป็นอัตราเร็วของดาวพฤหัสบดี (เอยู/วัน)

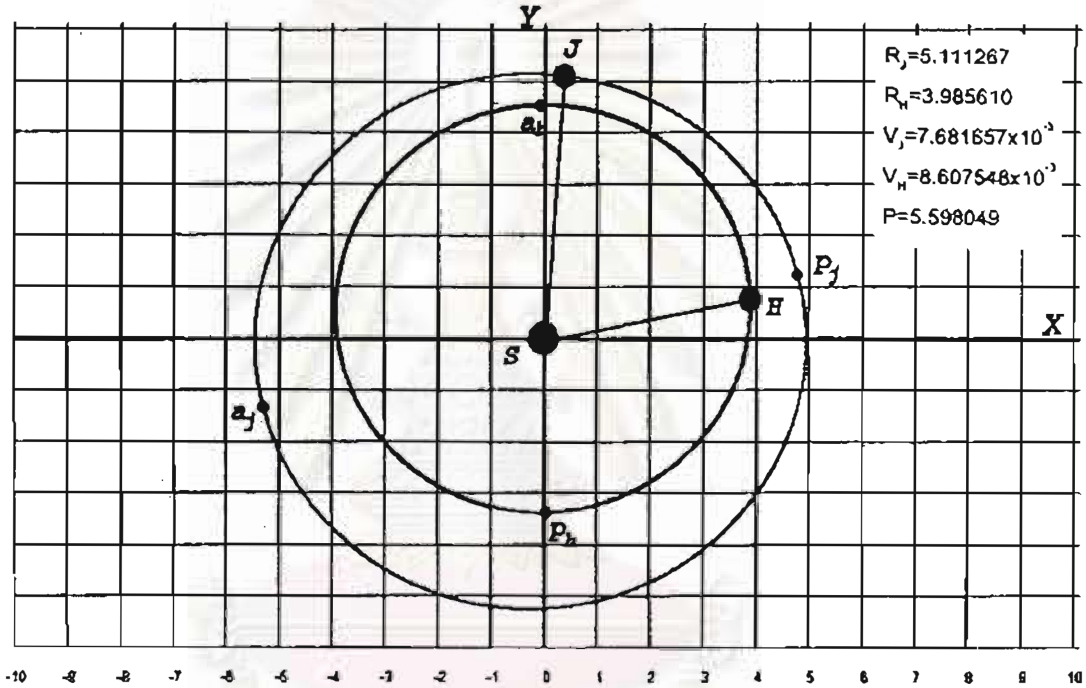
V_H เป็นอัตราเร็วของดาวเคราะห์น้อยฮิลดา (เอยู/วัน)

p_h, a_h เป็นจุดใกล้และจุดไกลดวงอาทิตย์ของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาตามลำดับ

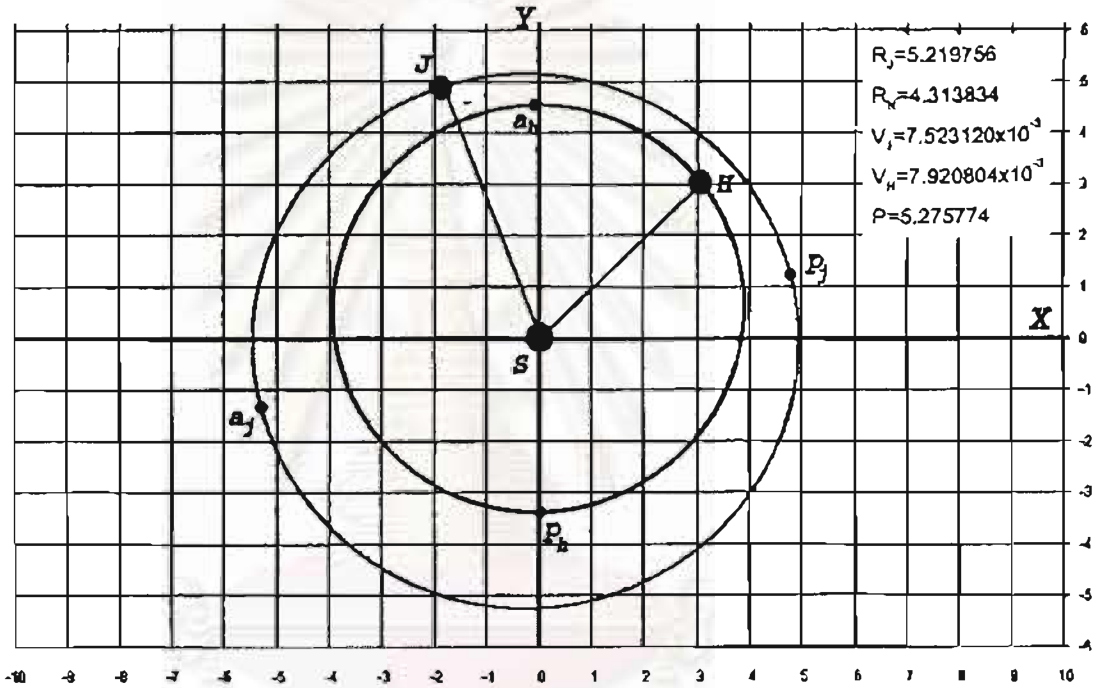
p_J, a_J เป็นจุดใกล้และจุดไกลดวงอาทิตย์ของดาวพฤหัสบดีตามลำดับ



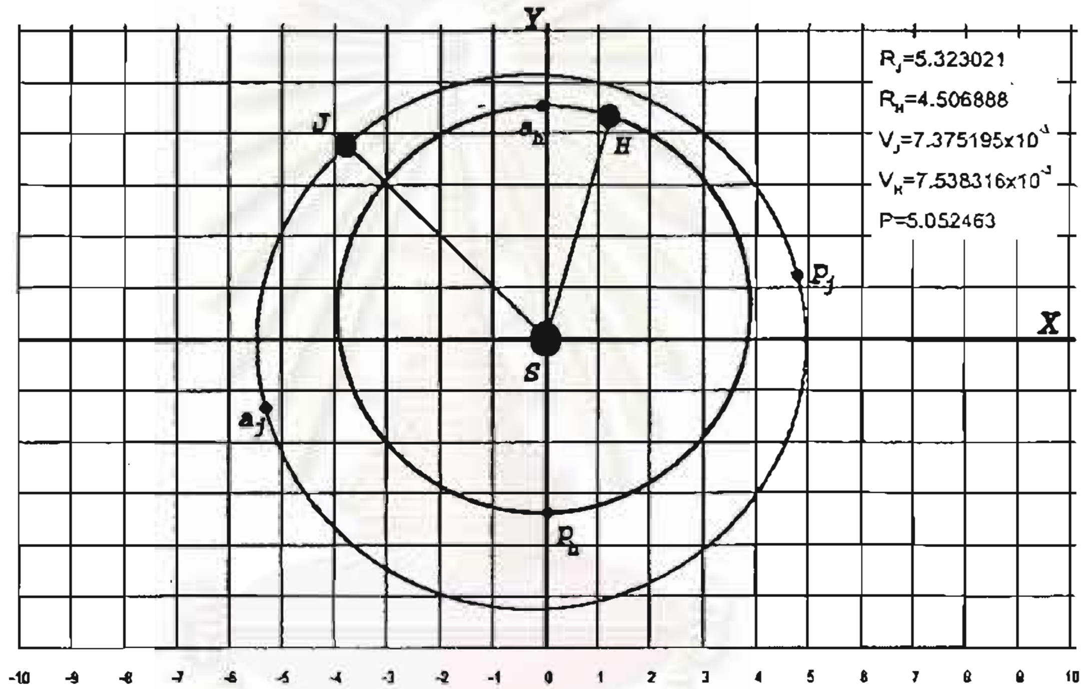
รูปที่ ค.1 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=0 วัน



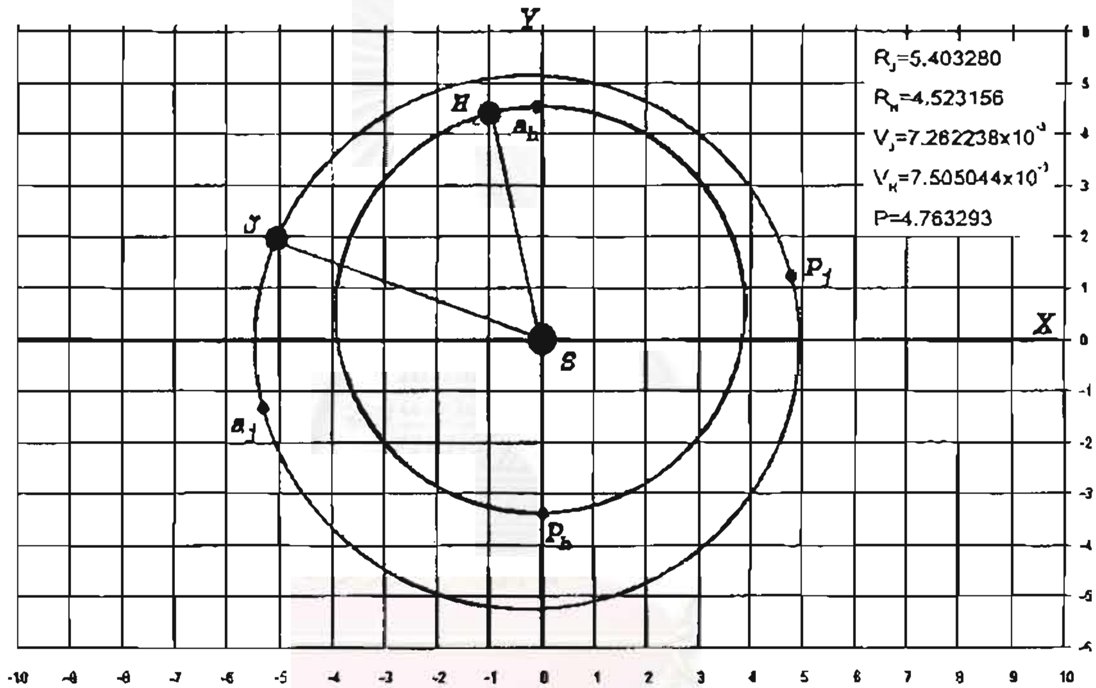
รูปที่ ค.2 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=300 วัน



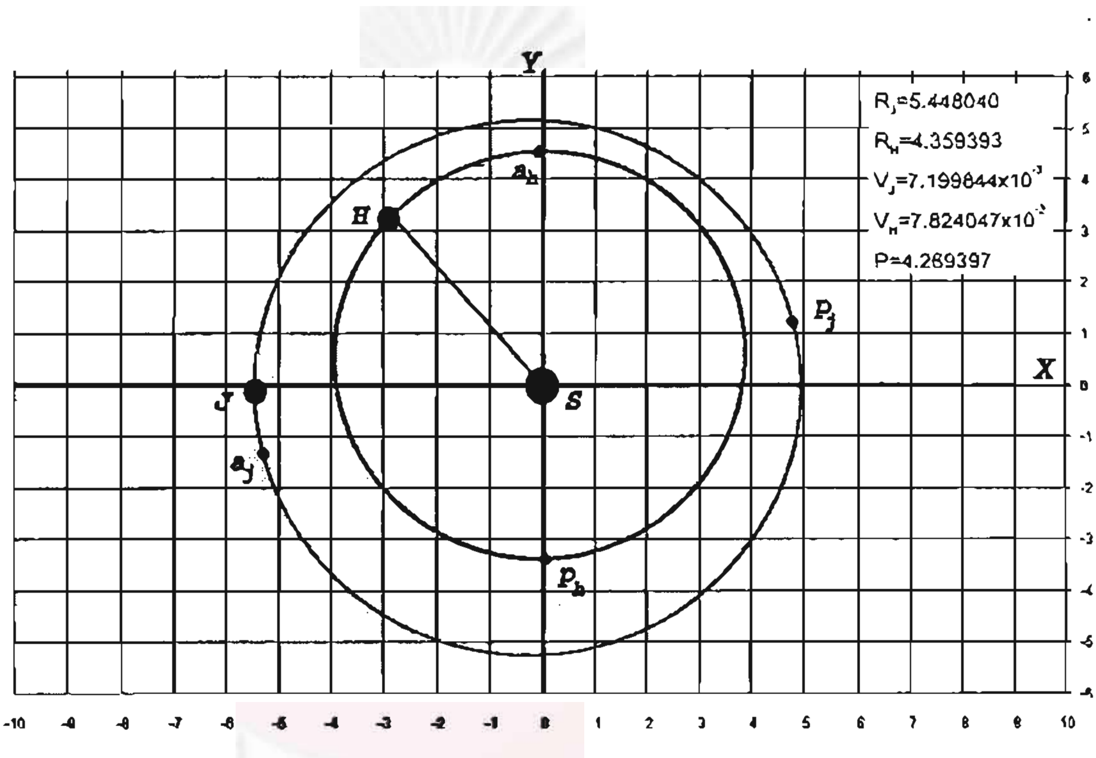
รูปที่ ค.3 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=600 วัน



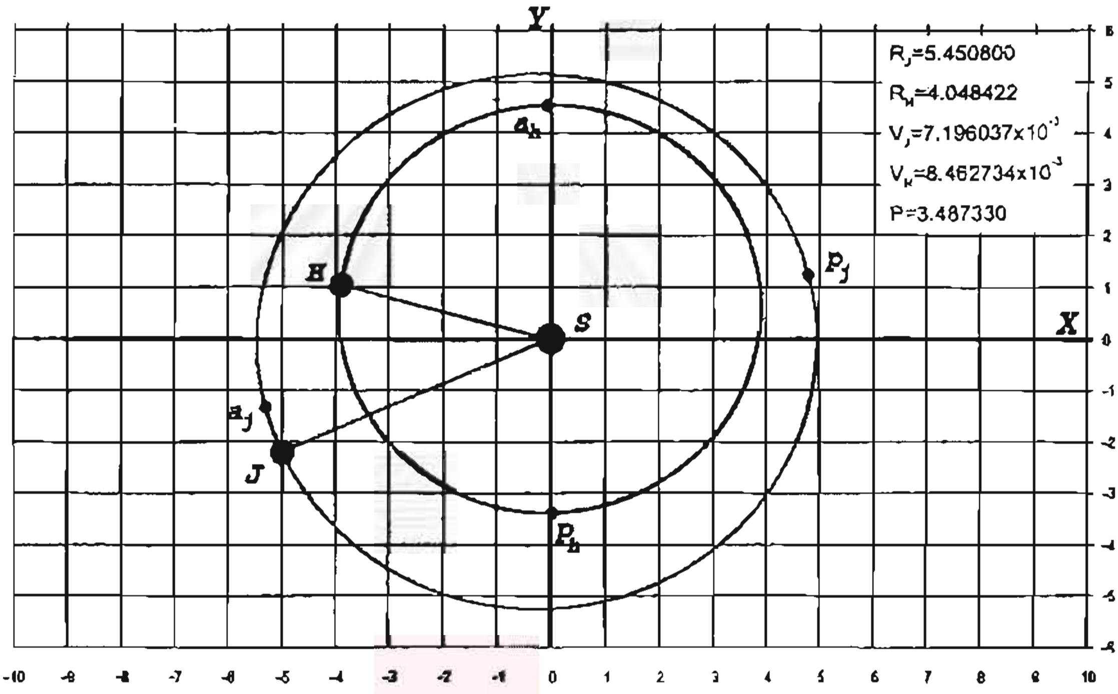
รูปที่ ค.4 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=900 วัน



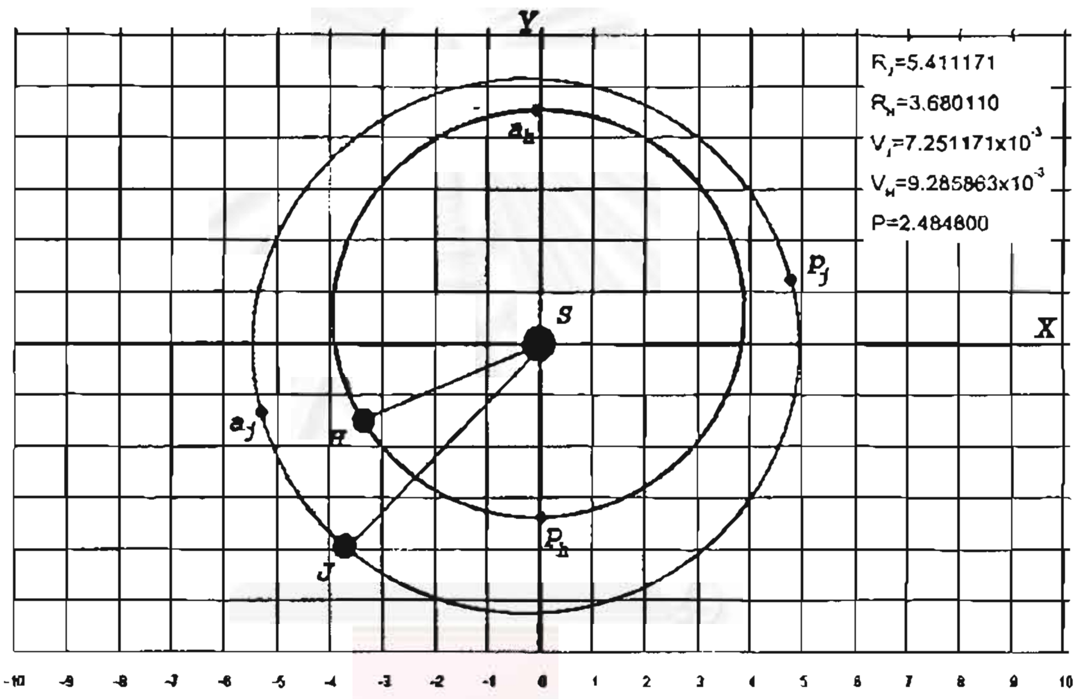
รูปที่ ค.5 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=1,200 วัน



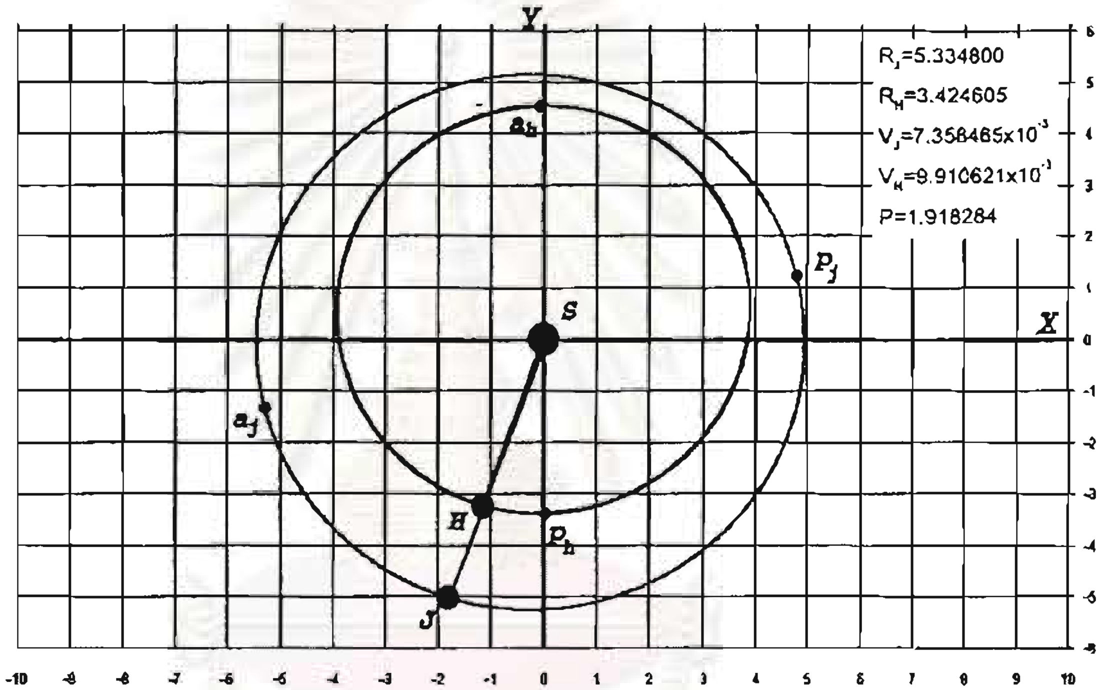
รูปที่ ค.6 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=1,500 วัน



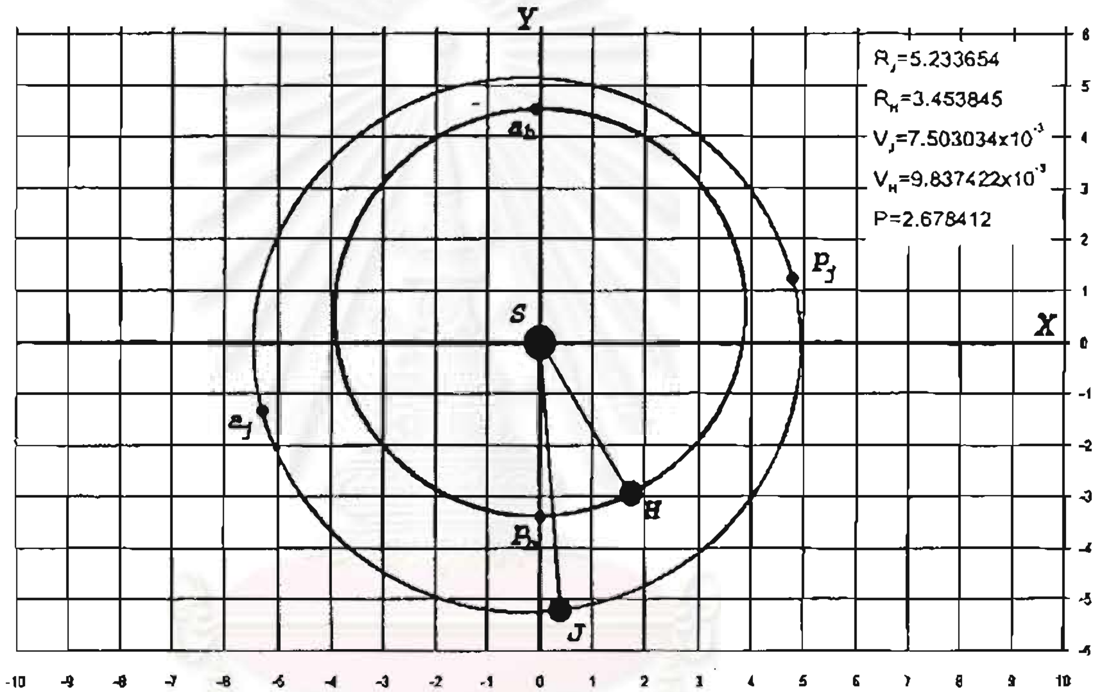
รูปที่ ค.7 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=1,800 วัน



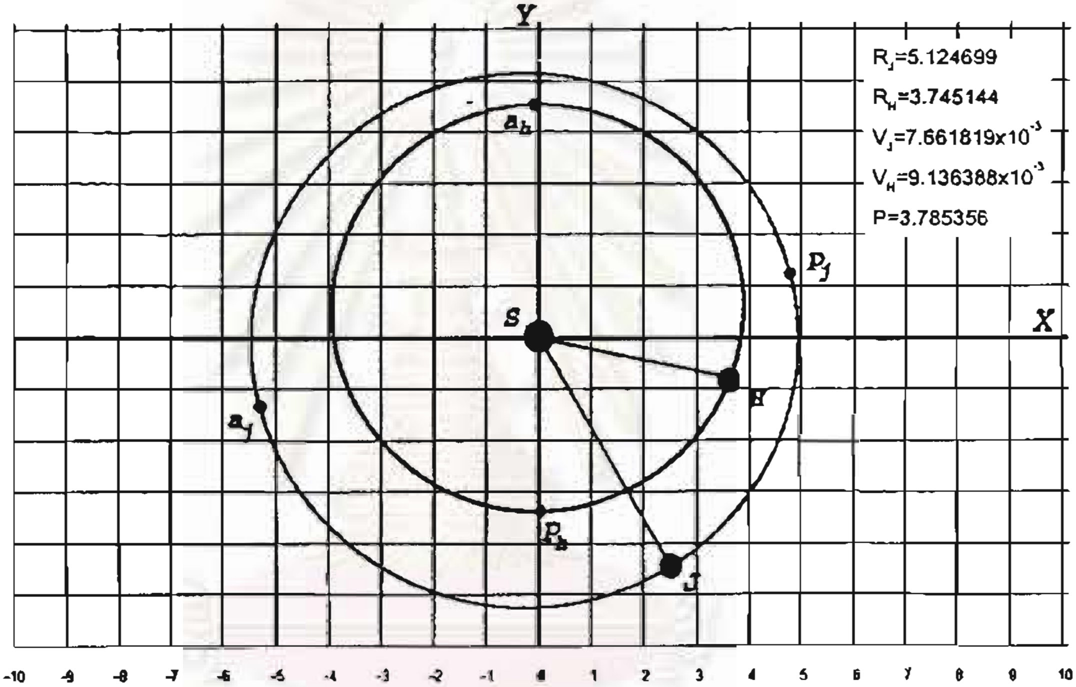
รูปที่ ค.8 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=2,100 วัน



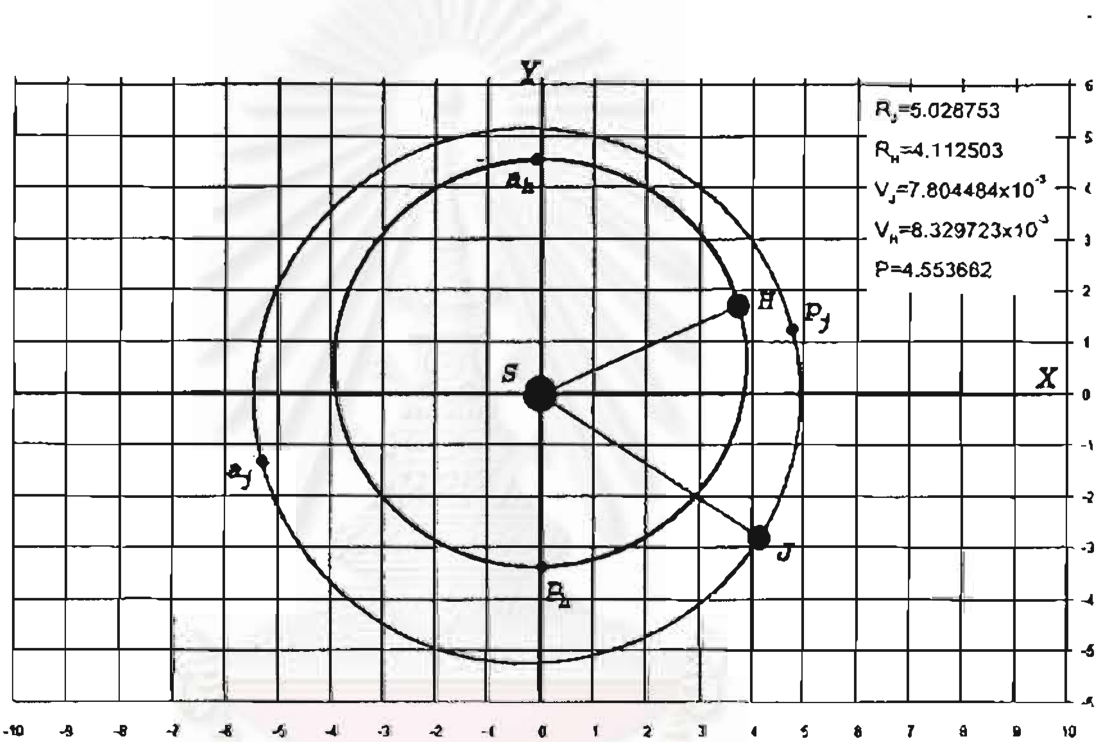
รูปที่ ค.9 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=2,400 วัน



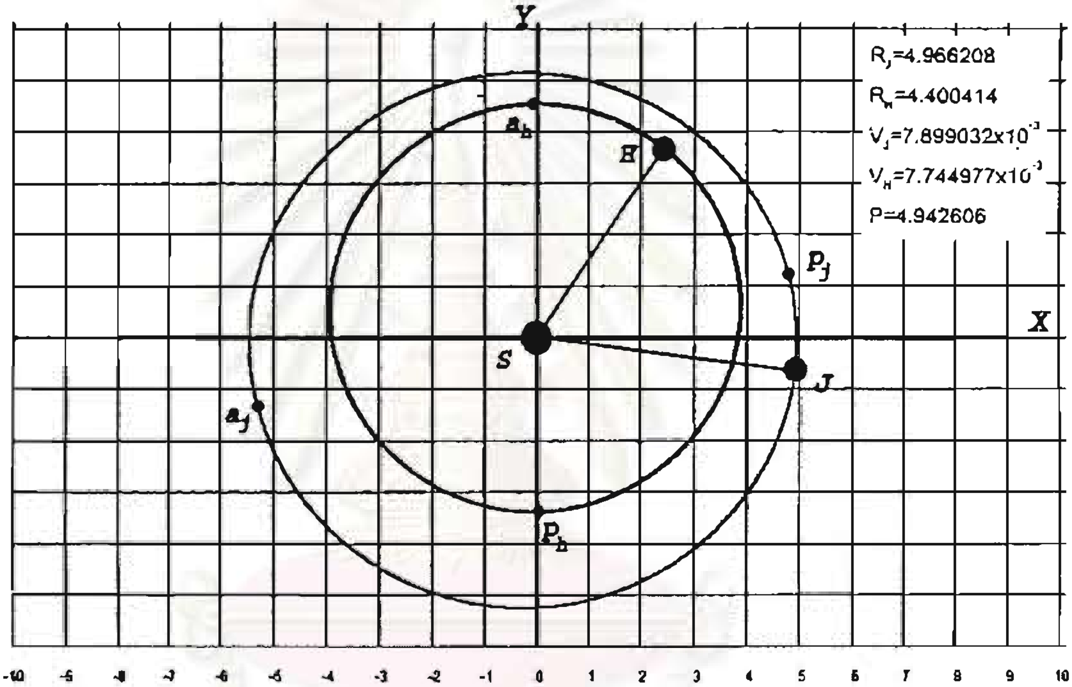
รูปที่ ค.10 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=2,700 วัน



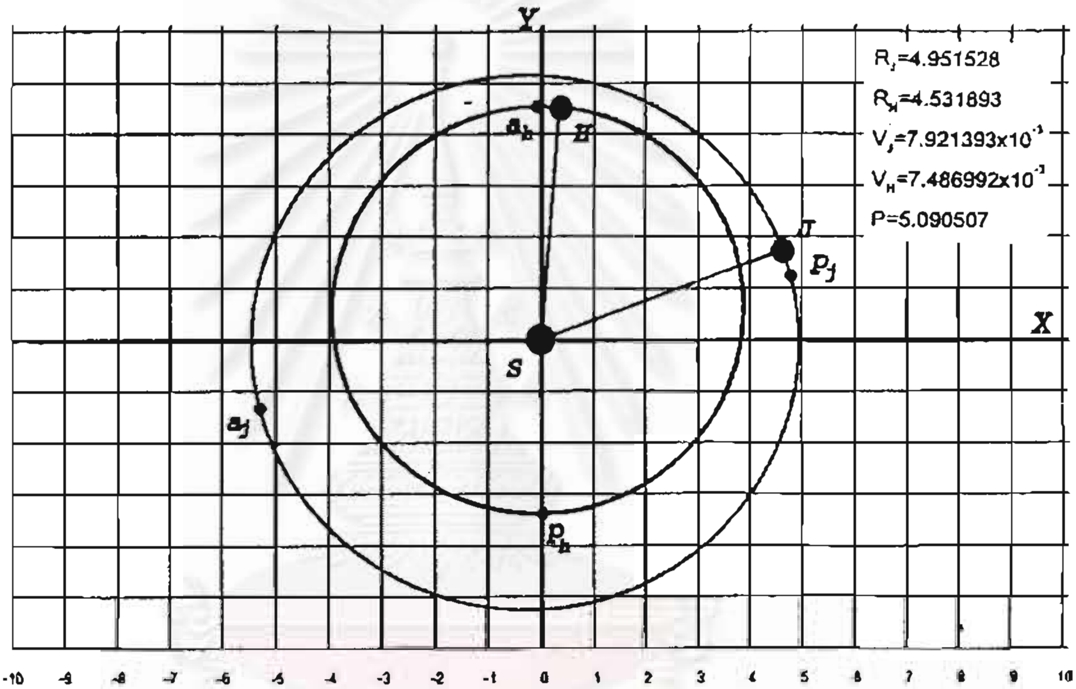
รูปที่ ค.11 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,000 วัน



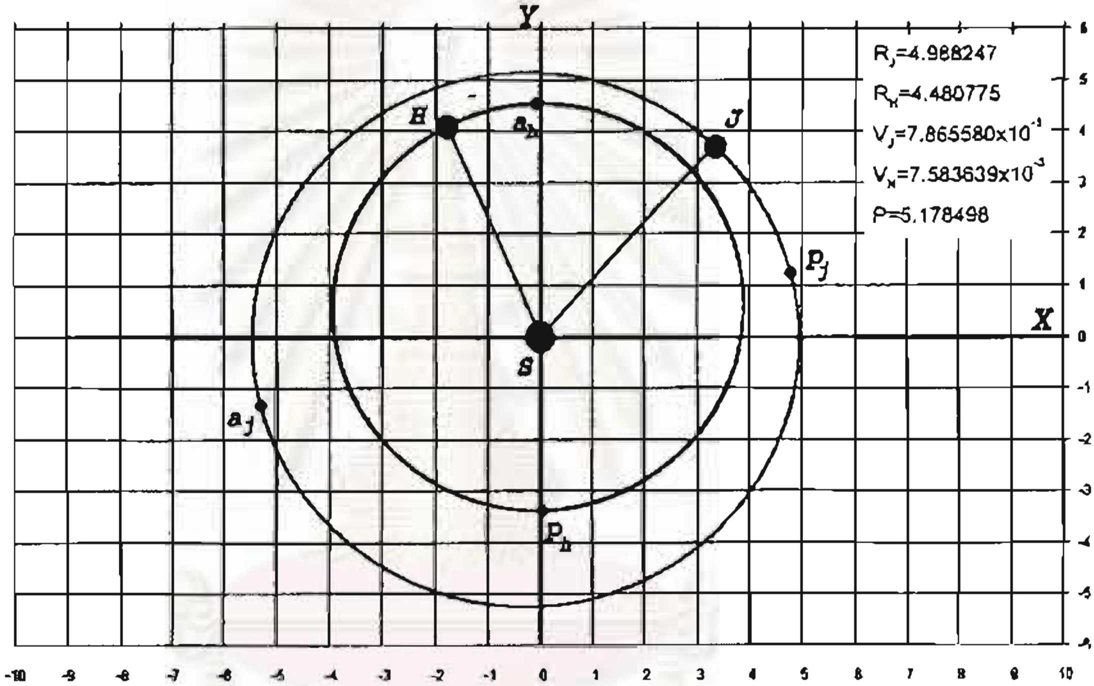
รูปที่ ค.12 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,300 วัน



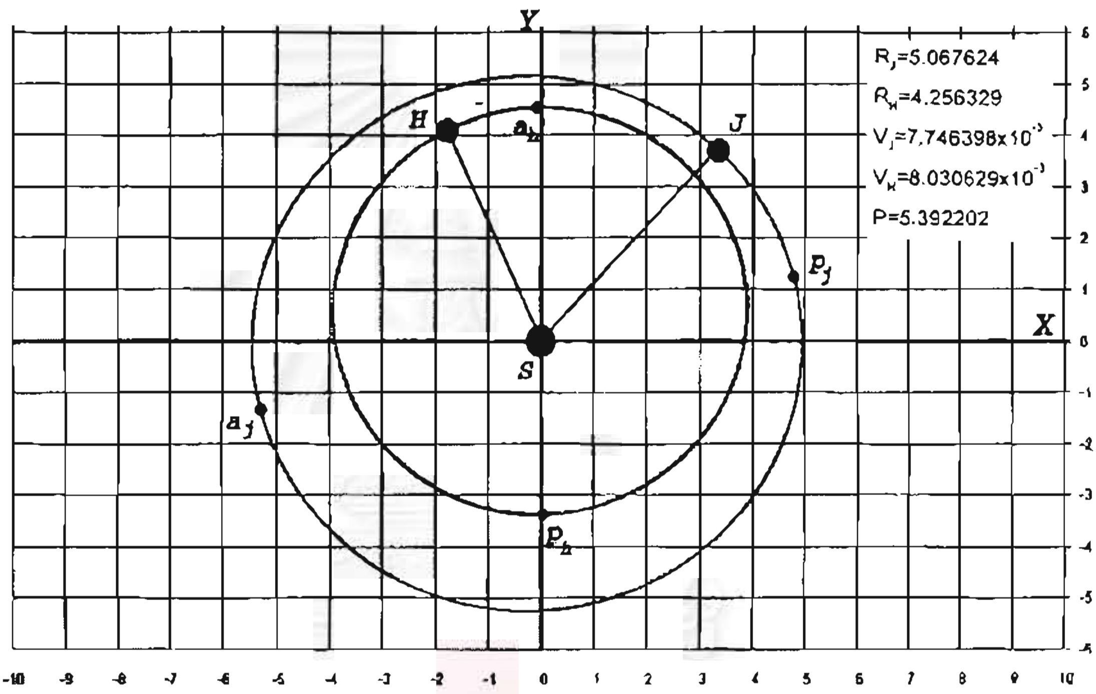
รูปที่ ค.13 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,600 วัน



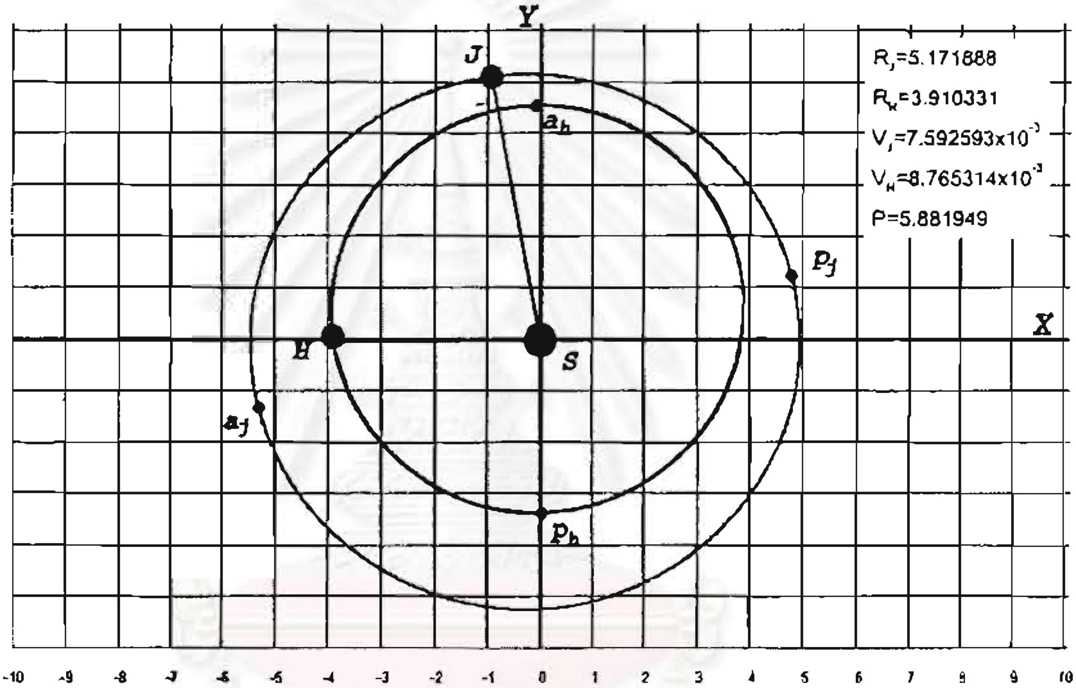
รูปที่ ค.14 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=3,900 วัน



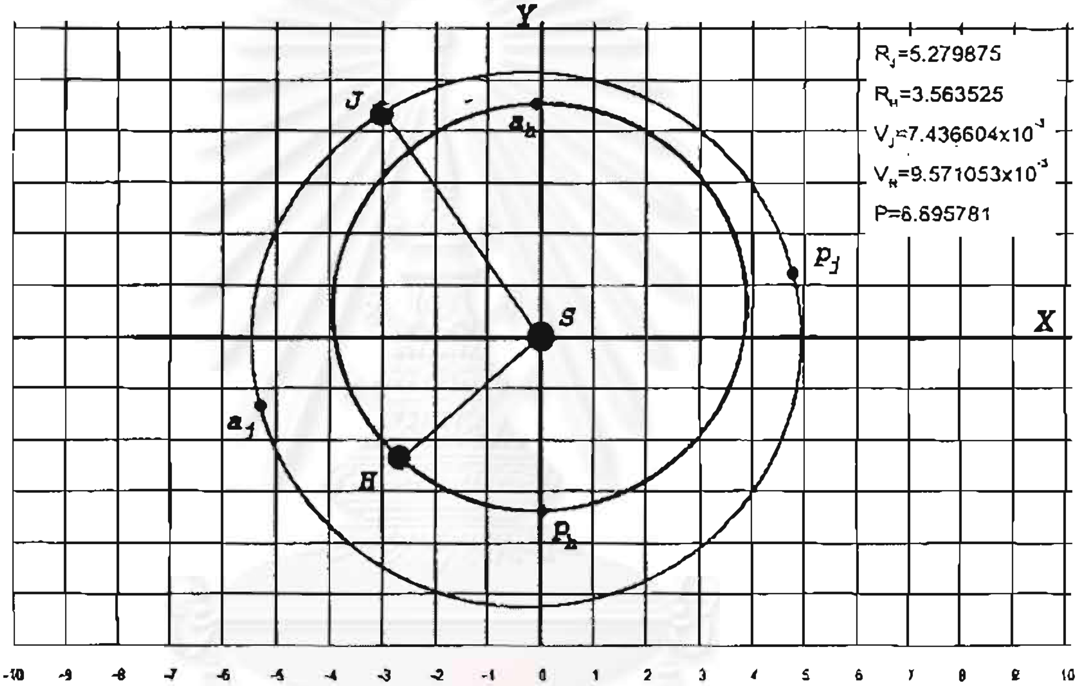
รูปที่ ค.15 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=4,200 วัน



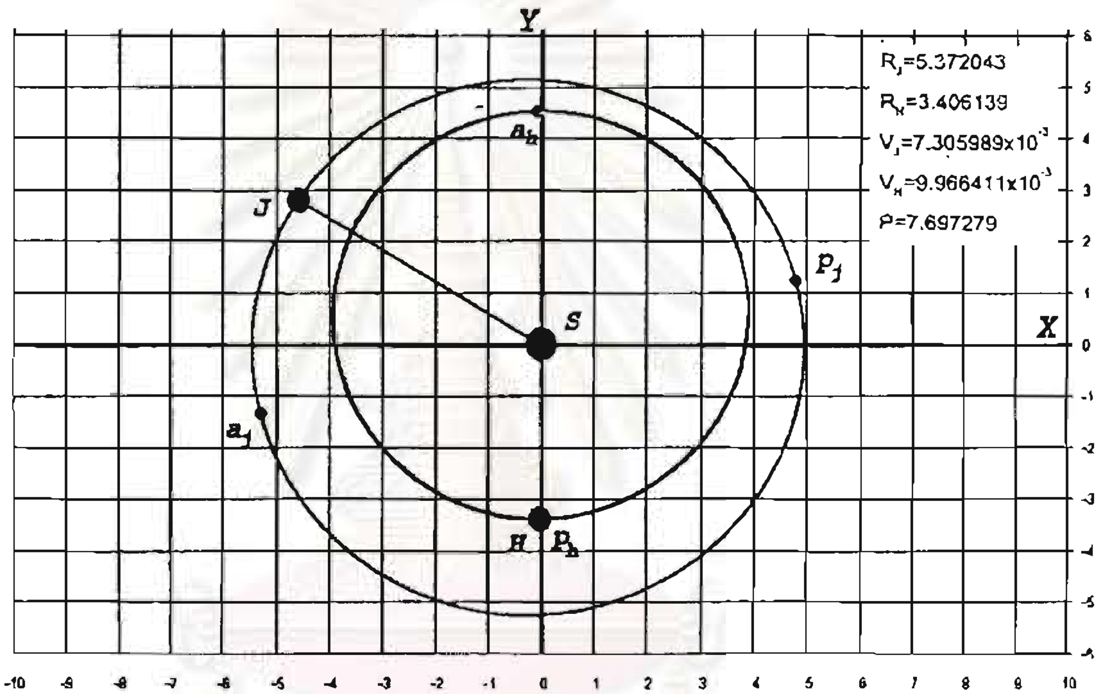
รูปที่ ค.16 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=4,500 วัน



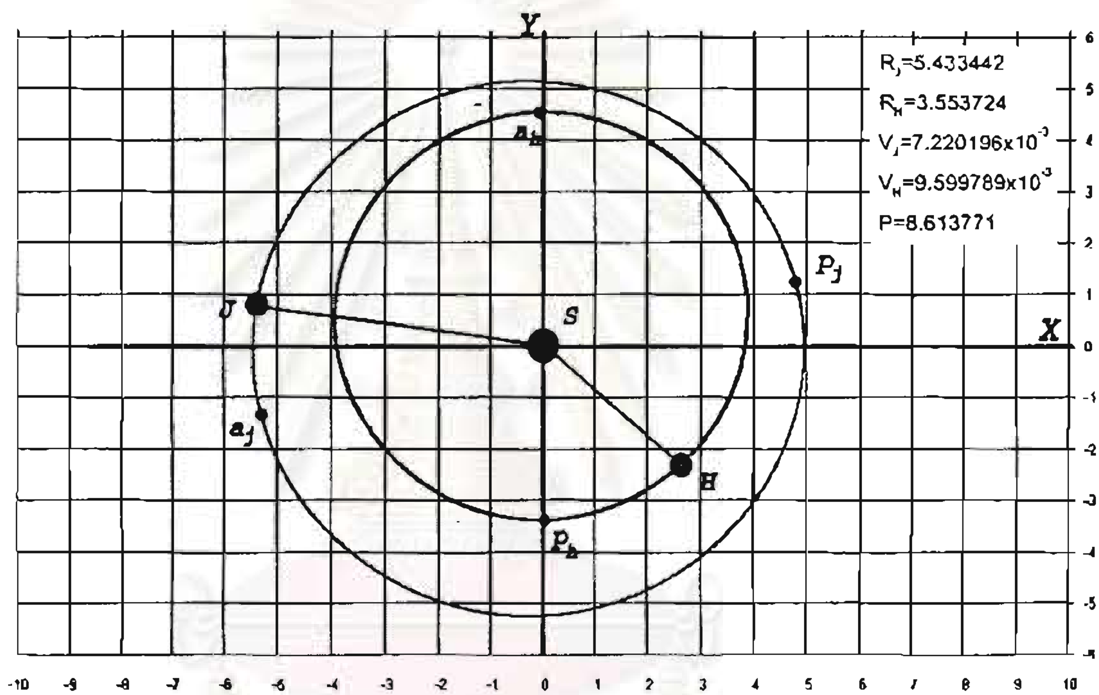
รูปที่ ค.17 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=4,800 วัน



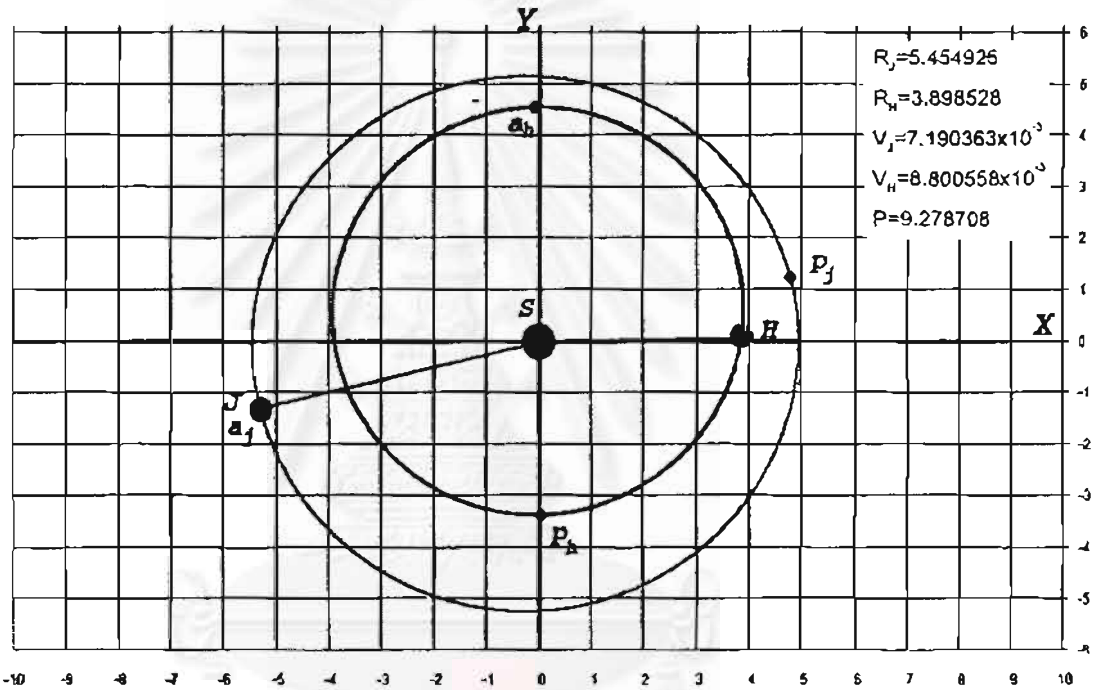
รูปที่ ค.18 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=5.100 วัน



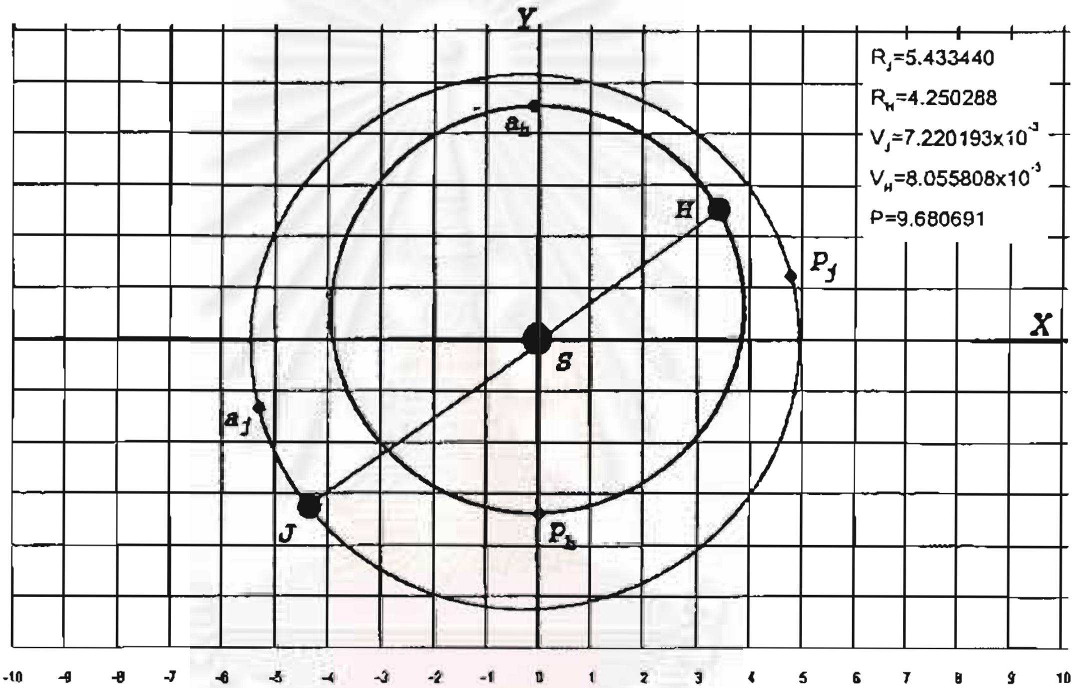
รูปที่ ค.19 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=5,400 วัน



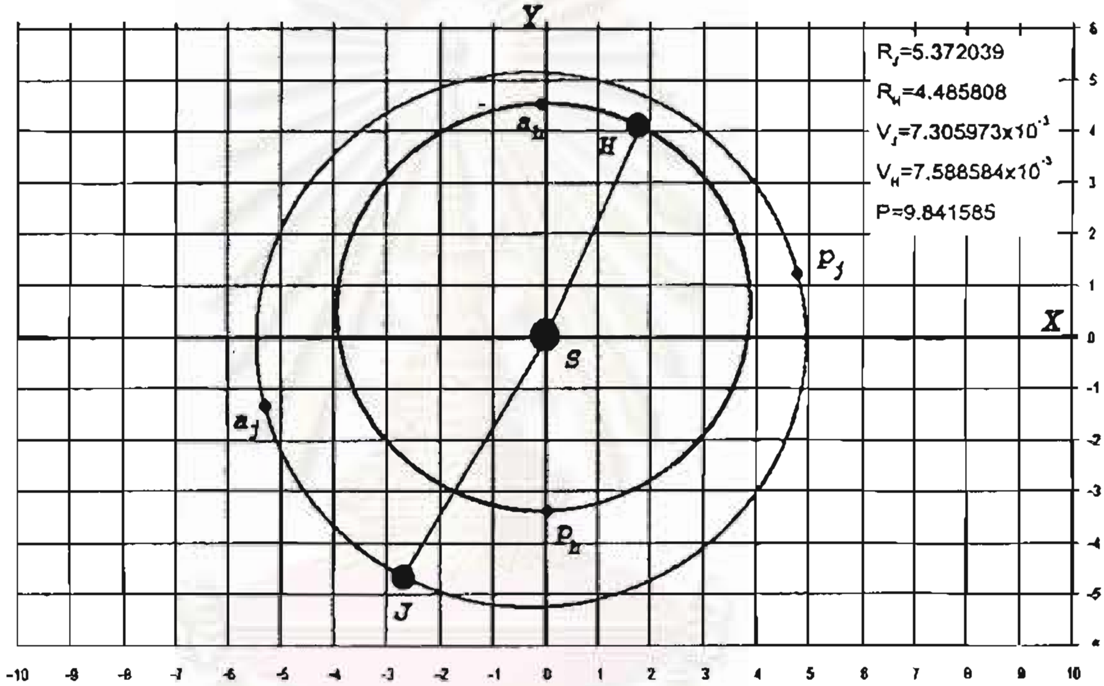
รูปที่ ค.20 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=5,700 วัน



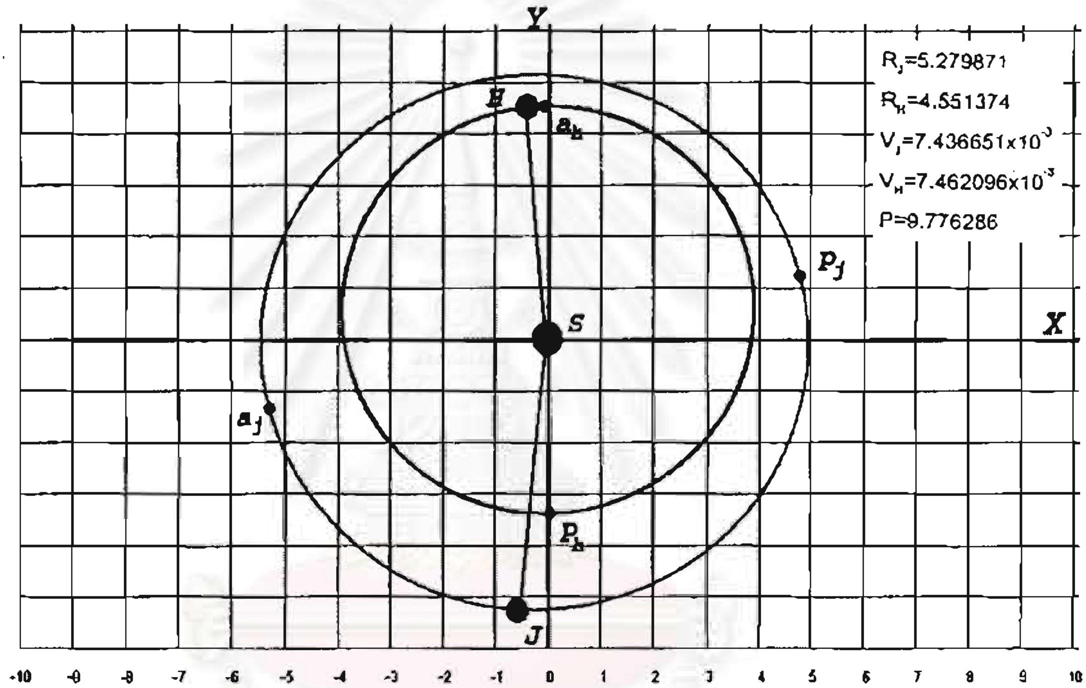
รูปที่ ค.21 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,000 วัน



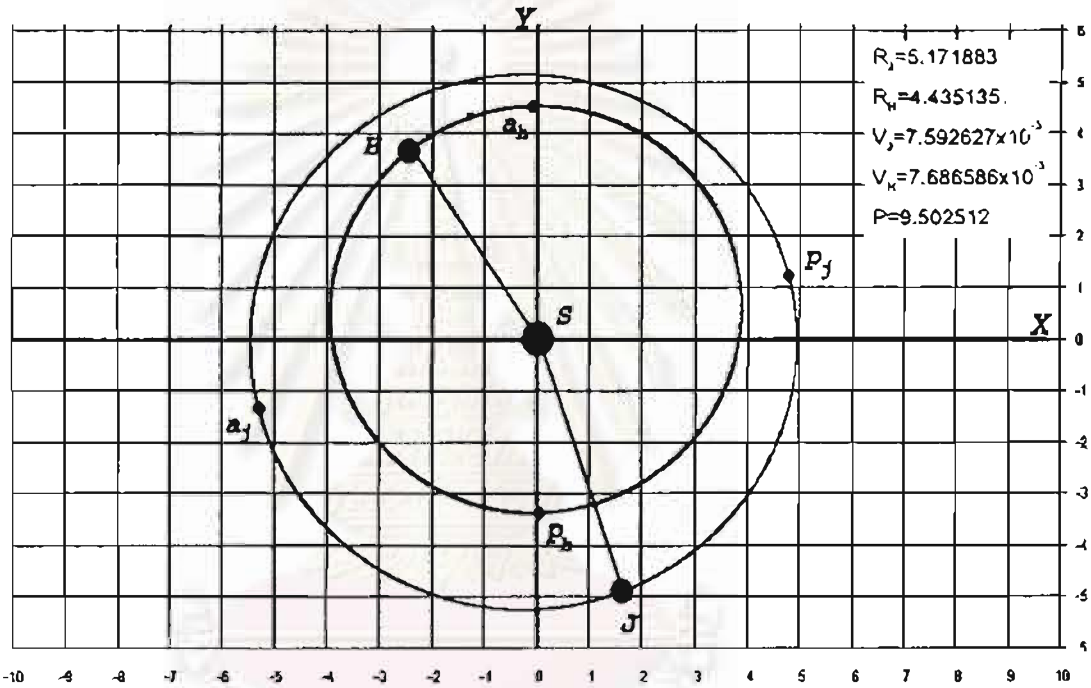
รูปที่ ค.22 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,300 วัน



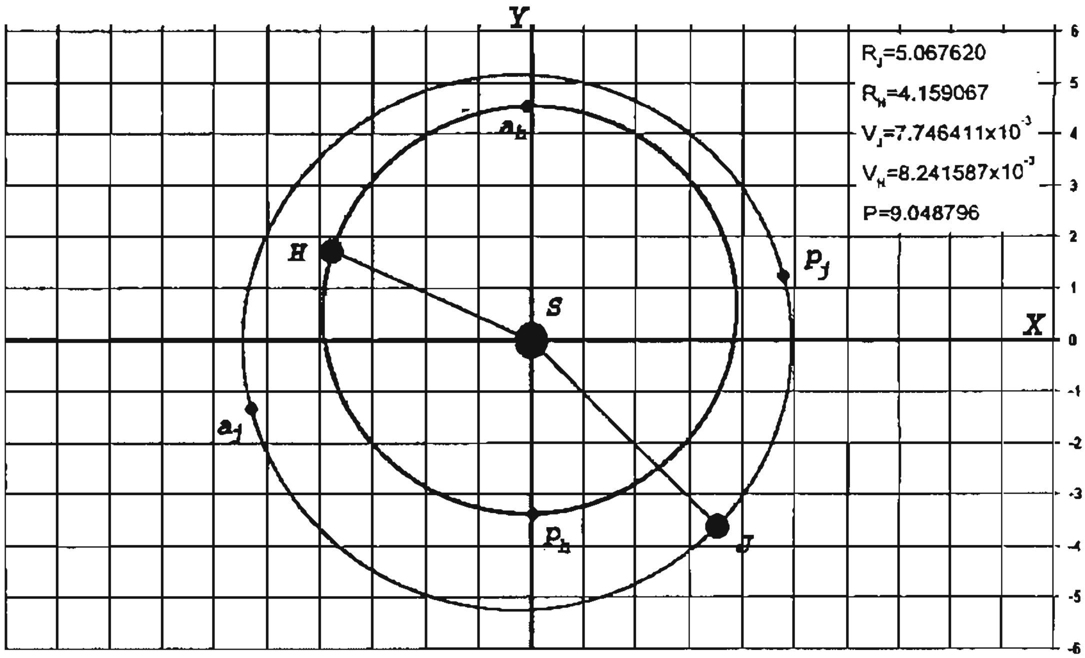
รูปที่ ค.23 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,600 วัน



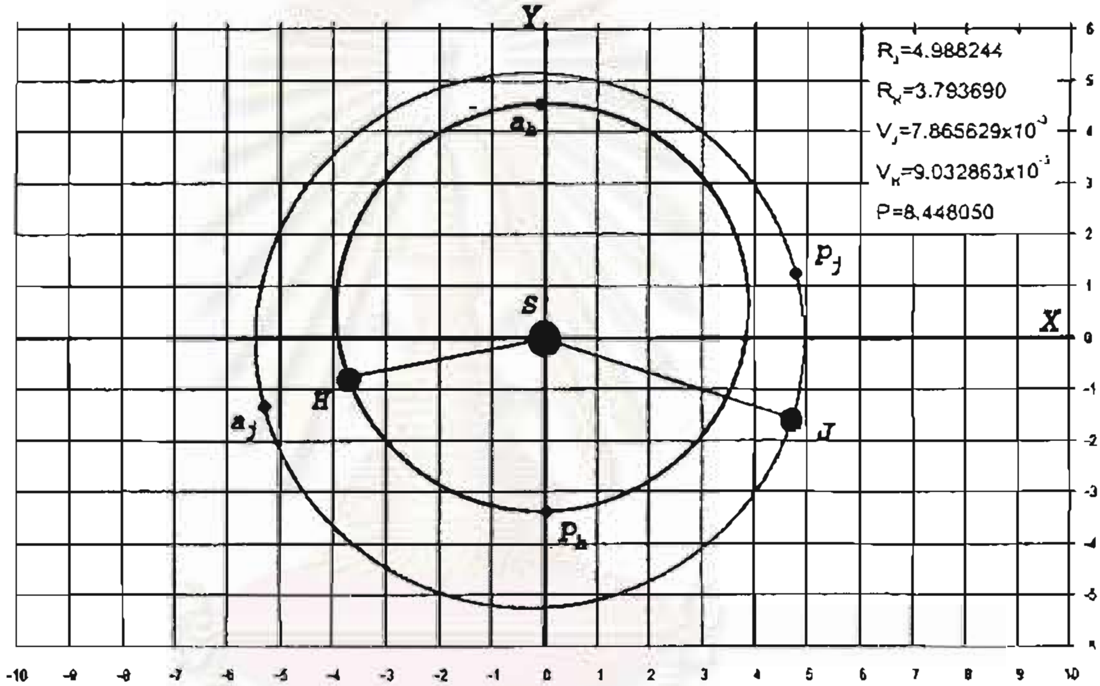
รูปที่ ค.24 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=6,900 วัน



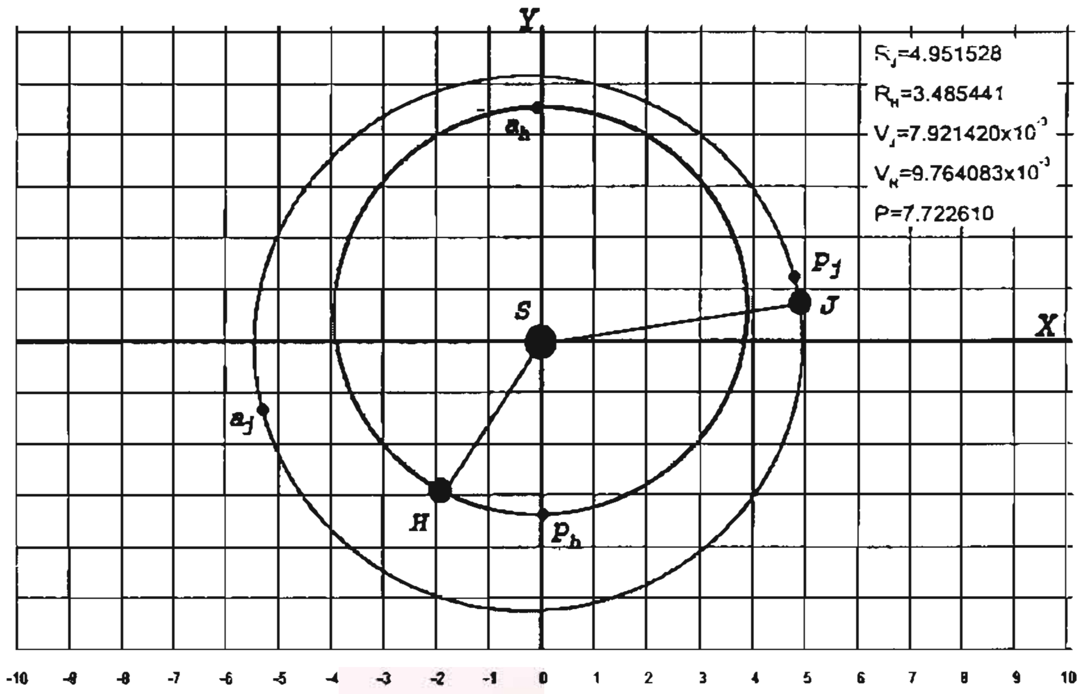
รูปที่ ค.25 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=7,200 วัน



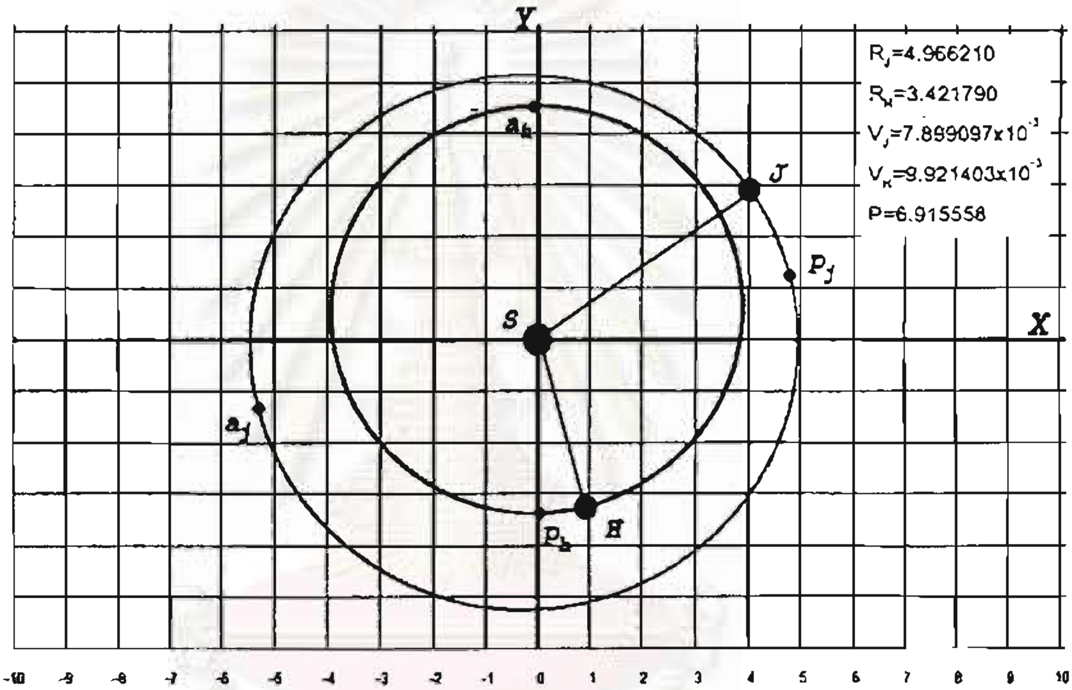
รูปที่ ค.26 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=7,500 วัน



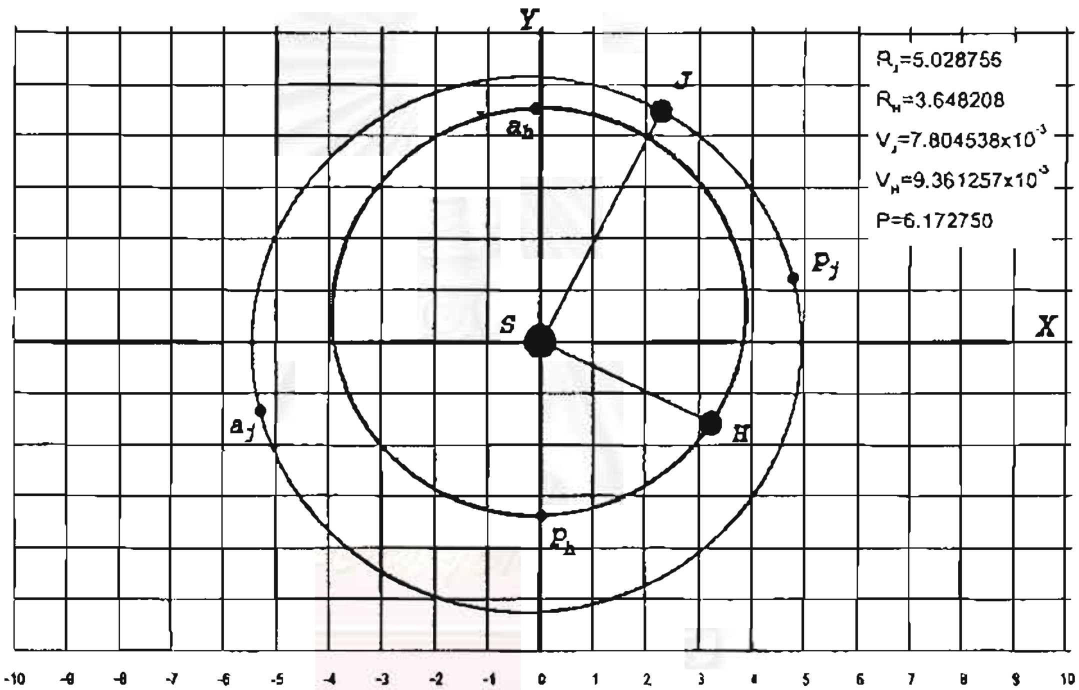
รูปที่ ค.27 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=7,800 วัน



รูปที่ ค.28 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=8,100 วัน



รูปที่ ค.29 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=8,400 วัน



รูปที่ ค.30 วงโคจรและตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยฮิลดาและดาวพฤหัสบดี ที่ t=8,700 วัน

ภาคผนวก ง

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณวงโคจร

ง.1 โปรแกรมแปลงหลักมูลทางโคจรเป็นตำแหน่งและความเร็ว (POSVEL CODE)

```
/*   Position and Velocity from Orbital Element   */

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
main()
 {
   FILE   *fn,*fp;
   double i,O,W,M,E,Ff,e,DFf,Ra,a,EP,Rr,Bb,XB,YB,YP,XP,mu,Pi;
   double PP[4],QQ[4],r[4],v[4];
   int    n;

   clrscr();
   Pi=4.0*atan(1.0);       mu=0.0002964;

 /* input orbital element value  */
 a=5.2026;
 e=0.0485;
 i=1.303;
 O=100.467;
 W=273.865;
 M=42.74749;

 i=i*Pi/180.0;
 O=O*Pi/180.0;
 W=W*Pi/180.0;
```

```
M=M*Pi/180.0;



E=M;
 do
 {
   Ff=E-e*sin(E)-M;
   DFf=1.0-e*cos(E);
   E=E-(Ff/DFf);
 }while(fabs(Ff)>=1.0e-9);

Rr=a*(1.0-e*cos(E));
EP=sqrt(mu/a)/Rr;
Bb=a*sqrt(1.0-e*e);
XB=a*(cos(E)-e);
YB=Bb*sin(E);
XP=-a*EP*sin(E);
YP=+Bb*EP*cos(E);

PP[1]=+cos(W)*cos(O)-sin(W)*sin(O)*cos(i);
PP[2]=+cos(W)*sin(O)+sin(W)*cos(O)*cos(i);
PP[3]=+sin(W)*sin(i);
QQ[1]=-sin(W)*cos(O)-cos(W)*sin(O)*cos(i);
QQ[2]=-sin(W)*sin(O)+cos(W)*cos(O)*cos(i);
QQ[3]=+cos(W)*sin(i);
  for(n=1;n<=3;n++)
 {
  r[n]=XB*PP[n]+YB*QQ[n];
  v[n]=XP*PP[n]+YP*QQ[n];
 }
 printf("------------------------------------------------------------------------\n");
 printf("To recompute the position and velocity elements from the classical elements.\n");
 printf("x = %.7lf\t y = %.7lf\t z = %.7lf\n",r[1],r[2],r[3]);
 printf("Vx= %.7lf\t Vy= %.7lf\t Vz= %.7lf\n",v[1],v[2],v[3]);
```

```
  fp=fopen("outJupiter.dat","w");


  fprintf(fp,"-----------------------------------------------------------------------\n");
  fprintf(fp,"To recompute the position and velocity elements from the classical elements.\n");
  fprintf(fp,"x = %.7lf\t y = %.7lf\t z = %.7lf\n",r[1],r[2],r[3]);
  fprintf(fp,"Vx= %.7lf\t Vy= %.7lf\t Vz= %.7lf\n",v[1],v[2],v[3]);


  getch();
  return(0);
 fclose(fp);
}
```

ง.2 โปรแกรมคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีโคเวลล์ (COWELL CODE)

```
/* ============== Program Description ============= */
/*   program name : HILDA Orbital                    */
/*   Solve N-Body Problem by THE METHOD OF COWELL     */
/* ====================================================== */

#include<stdio.h>
#include<graphics.h>
#include<math.h>

#define  K      0.01720209895   /* Gaussian Gravitational Constant */
#define  M      0.00000000000   /*  Hilda  Mass      */
#define  N      1000           /*  NUMBER of Position   */

double MG(double X, double Y, double Z)
{    return  fabs(X*X)+fabs(Y*Y)+fabs(Z*Z);   }



double F(double Vk)
{   return  Vk;   }

double G(double Rk, double R, double ak)
{   return  -(1.+M)*Rk/sqrt(R*R*R) + ak;    }

double Ak(double Mq, double Rqk, double Rq, double Rk, double R)
{   return  Mq*((Rqk-Rk)/(fabs(Rq-R)*fabs(Rq-R)*fabs(Rq-R)) - Rqk/sqrt(Rq*Rq*Rq));     }

double Gq(double Mq, double Rk, double R)
{   return  -(1.+Mq)*Rk/sqrt(R*R*R);    }
```

```
main()

{   double  x[N+2],y[N+2],z[N+2],R[N+2];
    double  vx[N+2],vy[N+2],vz[N+2];
    double  t, dt, h;

    double  MJ,xJ,yJ,zJ,RJ;
    double  VxJ,VyJ,VzJ;

    double  MS,xS,yS,zS,RS;
    double  VxS,VyS,VzS;

    double   Perturb_X, Perturb_Y, Perturb_Z;

    double  Fx1,Fy1,Fz1,Fx2,Fy2,Fz2,Fx3,Fy3,Fz3,Fx4,Fy4,Fz4,Fx5,Fy5,Fz5,Fx6,Fy6,Fz6;
    double  Gx1,Gy1,Gz1,Gx2,Gy2,Gz2,Gx3,Gy3,Gz3,Gx4,Gy4,Gz4,Gx5,Gy5,Gz5,Gx6,Gy6,Gz6;

    int     i;
    FILE    *fp;

    fp=fopen("result.dat","w");

    printf("\n  ******  Solve COWELL METHOD for Hilda Orbit by RK5 ****** \n");

    t=2451800.50;           /*  intial epoch time (JD)   */
    dt=1.0;                 /*  time  step       (Days) */

    h=K*dt;

    /* initial Position of Celestial Body */
      x[0]=3.12451860;     y[0]=-1.7769875;    z[0]=0.4816729;

    /* initial Velocity of Celestial Body */
      vx[0]=0.0055728/K;  vy[0]=0.00760160/K;  vz[0]=-0.00012050/K;
```

```
/* PERTURBATING BODIES */
      /* Jupiter */
       MJ=0.000954791;
      xJ=2.5523219;     yJ=4.3203644;    zJ=-0.0749404;
  VxJ=-0.00659510/K;  VyJ=0.00419990/K;  VzJ=0.00013020/K;

      /* Saturn */
       MS=0.000285878;
      xS=5.2532725;     yS=7.4566575;    zS=-0.3392483;
  VxS=-0.00486520/K;  VyS=0.00319930/K;  VzS=0.0001379/K;


 for (i=0;i<=N;i++) {

      R[i]=MG(x[i],y[i],z[i]);
      RJ=MG(xJ,yJ,zJ);
      RS=MG(xS,yS,zS);

   Perturb_X=Ak(MJ,xJ,RJ,x[i],R[i])+Ak(MS,xS,RS,x[i],R[i]);
   Perturb_Y=Ak(MJ,yJ,RJ,y[i],R[i])+Ak(MS,yS,RS,y[i],R[i]);
   Perturb_Z=Ak(MJ,zJ,RJ,z[i],R[i])+Ak(MS,zS,RS,z[i],R[i]);

printf("\nT[%d]=%.2lf:  x=%.7lf  y=%.7lf  z=%.7lf   R=%.7lf",
        i,t,x[i],y[i],z[i],sqrt(R[i]));
printf("\n             vx=%.7lf  vy=%.7lf  vz=%.7lf   V=%.7lf",
        vx[i],vy[i],vz[i],sqrt(MG(vx[i],vy[i],vz[i])));
fprintf(fp,"\nT[%d]=%.2lf:  x=%.7lf  y=%.7lf  z=%.7lf   R=%.7lf",
        i,t,x[i],y[i],z[i],sqrt(R[i]));
fprintf(fp,"\n             vx=%.7lf  vy=%.7lf  vz=%.7lf   V=%.7lf",
        vx[i],vy[i],vz[i],sqrt(MG(vx[i],vy[i],vz[i])));

  /*  STEP 1  */
        Fx1=h*F(vx[i]);
        Fy1=h*F(vy[i]);
        Fz1=h*F(vz[i]);
```

```
        Gx1=h*G(x[i],R[i],Perturb_X);
        Gy1=h*G(y[i],R[i],Perturb_Y);
        Gz1=h*G(z[i],R[i],Perturb_Z);

/*   STEP 2   */
        Fx2=h*F(vx[i]+Gx1/4.);
        Fy2=h*F(vy[i]+Gy1/4.);
        Fz2=h*F(vz[i]+Gz1/4.);

        Gx2=h*G(x[i]+Fx1/4.,R[i],Perturb_X);
        Gy2=h*G(y[i]+Fy1/4.,R[i],Perturb_Y);
        Gz2=h*G(z[i]+Fz1/4.,R[i],Perturb_Z);

     /*   STEP 3   */
        Fx3=h*F(vx[i]+Gx1/8.+Gx2/8.);
        Fy3=h*F(vy[i]+Gy1/8.+Gy2/8.);
        Fz3=h*F(vz[i]+Gz1/8.+Gz2/8.);

        Gx3=h*G(x[i]+Fx1/8.+Fx2/8.,R[i],Perturb_X);
        Gy3=h*G(y[i]+Fy1/8.+Fy2/8.,R[i],Perturb_Y);
        Gz3=h*G(z[i]+Fz1/8.+Fz2/8.,R[i],Perturb_Z);

      /*   STEP 4   */
        Fx4=h*F(vx[i]-Gx2/2.+Gx3);
        Fy4=h*F(vy[i]-Gy2/2.+Gy3);
        Fz4=h*F(vz[i]-Gz2/2.+Gz3);

        Gx4=h*G(x[i]-Fx2/2.+Fx3,R[i],Perturb_X);
        Gy4=h*G(y[i]-Fy2/2.+Fy3,R[i],Perturb_Y);
        Gz4=h*G(z[i]-Fz2/2.+Fz3,R[i],Perturb_Z);

      /*   STEP 5   */
        Fx5=h*F(vx[i]+3.*Gx1/16.+9.*Gx4/16.);
        Fy5=h*F(vy[i]+3.*Gy1/16.+9.*Gy4/16.);
```

```
    Fz5=h*F(vz[i]+3.*Gz1/16.+9.*Gz4/16.);

    Gx5=h*G(x[i]+3.*Fx1/16.+9.*Fx4/16.,R[i],Perturb_X);
    Gy5=h*G(y[i]+3.*Fy1/16.+9.*Fy4/16.,R[i],Perturb_Y);
    Gz5=h*G(z[i]+3.*Fz1/16.+9.*Fz4/16.,R[i],Perturb_Z);

  /*   STEP 6    */
    Fx6=h*F(vx[i]-(3.*Gx1-2.*Gx2-12.*Gx3+12.*Gx4-8.*Gx5)/7.);
    Fy6=h*F(vy[i]-(3.*Gy1-2.*Gy2-12.*Gy3+12.*Gy4-8.*Gy5)/7.);
    Fz6=h*F(vz[i]-(3.*Gz1-2.*Gz2-12.*Gz3+12.*Gz4-8.*Gz5)/7.);

    Gx6=h*G(x[i]-(3.*Fx1-2.*Fx2-12.*Fx3+12.*Fx4-8.*Fx5)/7.,R[i],Perturb_X);
    Gy6=h*G(y[i]-(3.*Fy1-2.*Fy2-12.*Fy3+12.*Fy4-8.*Fy5)/7.,R[i],Perturb_Y);
    Gz6=h*G(z[i]-(3.*Fz1-2.*Fz2-12.*Fz3+12.*Fz4-8.*Fz5)/7.,R[i],Perturb_Z);


  /*    Solution    */

   x[i+1]=x[i]+(7.*Fx1+32.*Fx3+12.*Fx4+32.*Fx5+7.*Fx6)/90.;
   y[i+1]=y[i]+(7.*Fy1+32.*Fy3+12.*Fy4+32.*Fy5+7.*Fy6)/90.;
   z[i+1]=z[i]+(7.*Fz1+32.*Fz3+12.*Fz4+32.*Fz5+7.*Fz6)/90.;

   vx[i+1]=vx[i]+(7.*Gx1+32.*Gx3+12.*Gx4+32.*Gx5+7.*Gx6)/90.;
   vy[i+1]=vy[i]+(7.*Gy1+32.*Gy3+12.*Gy4+32.*Gy5+7.*Gy6)/90.;
   vz[i+1]=vz[i]+(7.*Gz1+32.*Gz3+12.*Gz4+32.*Gz5+7.*Gz6)/90.;

  /* ------------------------------------------------------- */

   t+=dt;

/*  Calculation of Perturbation Body (Jupiter)  */
  /*     STEP 1   */
    Fx1=h*F(VxJ);
    Fy1=h*F(VyJ);
    Fz1=h*F(VzJ);
```

```
    Gx1=h*Gq(MJ,xJ,RJ);
    Gy1=h*Gq(MJ,yJ,RJ);
    Gz1=h*Gq(MJ,zJ,RJ);

/*    STEP 2   */
    Fx2=h*F(VxJ+Gx1/4.);
    Fy2=h*F(VyJ+Gy1/4.);
    Fz2=h*F(VzJ+Gz1/4.);

    Gx2=h*Gq(MJ,xJ+Fx1/4.,RJ);
    Gy2=h*Gq(MJ,yJ+Fy1/4.,RJ);
    Gz2=h*Gq(MJ,zJ+Fz1/4.,RJ);

/*   STEP 3   */
    Fx3=h*F(VxJ+Gx1/8.+Gx2/8.);
    Fy3=h*F(VyJ+Gy1/8.+Gy2/8.);
    Fz3=h*F(VzJ+Gz1/8.+Gz2/8.);

    Gx3=h*Gq(MJ,xJ+Fx1/8.+Fx2/8.,RJ);
    Gy3=h*Gq(MJ,yJ+Fy1/8.+Fy2/8.,RJ);
    Gz3=h*Gq(MJ,zJ+Fz1/8.+Fz2/8.,RJ);

 /*   STEP 4   */
    Fx4=h*F(VxJ-Gx2/2.+Gx3);
    Fy4=h*F(VyJ-Gy2/2.+Gy3);
    Fz4=h*F(VzJ-Gz2/2.+Gz3);

    Gx4=h*Gq(MJ,xJ-Fx2/2.+Fx3,RJ);
    Gy4=h*Gq(MJ,yJ-Fy2/2.+Fy3,RJ);
    Gz4=h*Gq(MJ,zJ-Fz2/2.+Fz3,RJ);

 /*   STEP 5   */
    Fx5=h*F(VxJ+3.*Gx1/16.+9.*Gx4/16.);
    Fy5=h*F(VyJ+3.*Gy1/16.+9.*Gy4/16.);
```

```
            Fz5=h*F(VzJ+3.*Gz1/16.+9.*Gz4/16.);

            Gx5=h*Gq(MJ,xJ+3.*Fx1/16.+9.*Fx4/16.,RJ);
            Gy5=h*Gq(MJ,yJ+3.*Fy1/16.+9.*Fy4/16.,RJ);
            Gz5=h*Gq(MJ,zJ+3.*Fz1/16.+9.*Fz4/16.,RJ);

          /*   STEP 6    */
           Fx6=h*F(VxJ-(3.*Gx1-2.*Gx2-12.*Gx3+12.*Gx4-8.*Gx5)/7.);
           Fy6=h*F(VyJ-(3.*Gy1-2.*Gy2-12.*Gy3+12.*Gy4-8.*Gy5)/7.);
           Fz6=h*F(VzJ-(3.*Gz1-2.*Gz2-12.*Gz3+12.*Gz4-8.*Gz5)/7.);

           Gx6=h*Gq(MJ,xJ-(3.*Fx1-2.*Fx2-12.*Fx3+12.*Fx4-8.*Fx5)/7.,RJ);
           Gy6=h*Gq(MJ,yJ-(3.*Fy1-2.*Fy2-12.*Fy3+12.*Fy4-8.*Fy5)/7.,RJ);
           Gz6=h*Gq(MJ,zJ-(3.*Fz1-2.*Fz2-12.*Fz3+12.*Fz4-8.*Fz5)/7.,RJ);

         /*   Solution  of Jupiter Orbit  */

          xJ=xJ+(7.*Fx1+32.*Fx3+12.*Fx4+32.*Fx5+7.*Fx6)/90.;
          yJ=yJ+(7.*Fy1+32.*Fy3+12.*Fy4+32.*Fy5+7.*Fy6)/90.;
          zJ=zJ+(7.*Fz1+32.*Fz3+12.*Fz4+32.*Fz5+7.*Fz6)/90.;

          VxJ=VxJ+(7.*Gx1+32.*Gx3+12.*Gx4+32.*Gx5+7.*Gx6)/90.;
          VyJ=VyJ+(7.*Gy1+32.*Gy3+12.*Gy4+32.*Gy5+7.*Gy6)/90.;
          VzJ=VzJ+(7.*Gz1+32.*Gz3+12.*Gz4+32.*Gz5+7.*Gz6)/90.;

printf("\n              xJ=%.7lf  yJ=%.7lf  zJ=%.7lf   RJ=%.7lf",xJ,yJ,zJ,sqrt(MG(xJ,yJ,zJ)));
fprintf(fp,"\n              xJ=%.7lf  yJ=%.7lf  zJ=%.7lf   RJ=%.7lf",xJ,yJ,zJ,sqrt(MG(xJ,yJ,zJ)));
  /* ------------------ End of Jupiter orbit Routine ------------------- */


    /*  Calculation of Perturbation Body (Saturn)  */
         /*     STEP 1   */
            Fx1=h*F(VxS);
            Fy1=h*F(VyS);
            Fz1=h*F(VzS);
```

```
        Gx1=h*Gq(MS,xS,RS);
        Gy1=h*Gq(MS,yS,RS);
        Gz1=h*Gq(MS,zS,RS);

/*   STEP 2   */
        Fx2=h*F(VxS+Gx1/4.);
        Fy2=h*F(VyS+Gy1/4.);
        Fz2=h*F(VzS+Gz1/4.);

        Gx2=h*Gq(MS,xS+Fx1/4.,RS);
        Gy2=h*Gq(MS,yS+Fy1/4.,RS);
        Gz2=h*Gq(MS,zS+Fz1/4.,RS);

    /*   STEP 3   */
        Fx3=h*F(VxS+Gx1/8.+Gx2/8.);
        Fy3=h*F(VyS+Gy1/8.+Gy2/8.);
        Fz3=h*F(VzS+Gz1/8.+Gz2/8.);

        Gx3=h*Gq(MS,xS+Fx1/8.+Fx2/8.,RS);
        Gy3=h*Gq(MS,yS+Fy1/8.+Fy2/8.,RS);
        Gz3=h*Gq(MS,zS+Fz1/8.+Fz2/8.,RS);

     /*   STEP 4   */
        Fx4=h*F(VxS-Gx2/2.+Gx3);
        Fy4=h*F(VyS-Gy2/2.+Gy3);
        Fz4=h*F(VzS-Gz2/2.+Gz3);

        Gx4=h*Gq(MS,xS-Fx2/2.+Fx3,RS);
        Gy4=h*Gq(MS,yS-Fy2/2.+Fy3,RS);
        Gz4=h*Gq(MS,zS-Fz2/2.+Fz3,RS);

     /*   STEP 5   */
        Fx5=h*F(VxS+3.*Gx1/16.+9.*Gx4/16.);
        Fy5=h*F(VyS+3.*Gy1/16.+9.*Gy4/16.);
```

```
        Fz5=h*F(VzS+3.*Gz1/16.+9.*Gz4/16.);

        Gx5=h*Gq(MS,xS+3.*Fx1/16.+9.*Fx4/16.,RS);
        Gy5=h*Gq(MS,yS+3.*Fy1/16.+9.*Fy4/16.,RS);
        Gz5=h*Gq(MS,zS+3.*Fz1/16.+9.*Fz4/16.,RS);

      /*   STEP 6    */
        Fx6=h*F(VxS-(3.*Gx1-2.*Gx2-12.*Gx3+12.*Gx4-8.*Gx5)/7.);
        Fy6=h*F(VyS-(3.*Gy1-2.*Gy2-12.*Gy3+12.*Gy4-8.*Gy5)/7.);
        Fz6=h*F(VzS-(3.*Gz1-2.*Gz2-12.*Gz3+12.*Gz4-8.*Gz5)/7.);

        Gx6=h*Gq(MS,xS-(3.*Fx1-2.*Fx2-12.*Fx3+12.*Fx4-8.*Fx5)/7.,RS);
        Gy6=h*Gq(MS,yS-(3.*Fy1-2.*Fy2-12.*Fy3+12.*Fy4-8.*Fy5)/7.,RS);
        Gz6=h*Gq(MS,zS-(3.*Fz1-2.*Fz2-12.*Fz3+12.*Fz4-8.*Fz5)/7.,RS);

      /*   Solution  of Saturn Orbit  */

       xS=xS+(7.*Fx1+32.*Fx3+12.*Fx4+32.*Fx5+7.*Fx6)/90.;
       yS=yS+(7.*Fy1+32.*Fy3+12.*Fy4+32.*Fy5+7.*Fy6)/90.;
       zS=zS+(7.*Fz1+32.*Fz3+12.*Fz4+32.*Fz5+7.*Fz6)/90.;

       VxS=VxS+(7.*Gx1+32.*Gx3+12.*Gx4+32.*Gx5+7.*Gx6)/90.;
       VyS=VyS+(7.*Gy1+32.*Gy3+12.*Gy4+32.*Gy5+7.*Gy6)/90.;
       VzS=VzS+(7.*Gz1+32.*Gz3+12.*Gz4+32.*Gz5+7.*Gz6)/90.;

printf("\n              xS=%.7lf  yS=%.7lf  zS=%.7lf   RS=%.7lf",xS,yS,zS,sqrt(MG(xS,yS,zS)));
fprintf(fp,"\n              xS=%.7lf  yS=%.7lf  zS=%.7lf   RS=%.7lf",xS,yS,zS,sqrt(MG(xS,yS,zS)));
  /* ------------------End of Saturn orbit loop ------------------- */
 }

   getch();
   return(0);
}
```

ง.3 โปรแกรมแปลงตำแหน่งและความเร็วเป็นหลักมูลทางโคจร (CLASSEL CODE)

```
/*  Orbital Element from Position and Velocity */

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

#define   k     0.01720209895
#define   Q1    0.01745329252    /*  Convert Degree to Radian (PI/180)   */
#define   mu    0.0002964

double Dot(double a[4],double b[4])
{   return  a[1]*b[1]+a[2]*b[2]+a[3]*b[3];  }

main()
{
  FILE   *fp;
  double h[4],r[4],v[4],N[4],hh,NN,HH,srr,rv,V;
  double ee,tt,T,er[4],P,O,qq,nn,TT,fbt;
  double W,I,a,e,xb,yb,b,cx,sx,X,M,E;
  int i;

  /*  input  position   x,y,z    */
  //r[1]=2.432658;
  //r[2]=4.394313;
  //r[3]=-0.07256947;
  /*  input  velocity  vx,vy,vz  */
  //v[1]=-0.00670014;
  //v[2]=0.004016218;
  //v[3]=0.0001332668;

   fp=fopen("data.dat","r");
   fscanf(fp,"  %lf %lf %lf %lf %lf %lf",
```

```
 &r[1],&r[2],&r[3],&v[1],&v[2],&v[3]);

//tt=2451818.5;

h[1]=r[2]*v[3]-r[3]*v[2];
h[2]=r[3]*v[1]-r[1]*v[3];
h[3]=r[1]*v[2]-r[2]*v[1];
hh=Dot(h,h);
HH=sqrt(hh);

N[1]=-h[2];     N[2]=h[1];     N[3]=0.0;
NN=sqrt(Dot(N,N));

srr=sqrt(Dot(r,r));
//V=Dot(v,v);
a=1.0/((2.0/srr)-(Dot(v,v)/mu));
for(i=1;i<=3;i++)  {
   er[i]=((Dot(v,v)/mu - 1.0/srr)*r[i])-((Dot(r,v)/mu)*v[i]);
 }
e=sqrt(Dot(er,er));
O=acos(N[1]/NN)/Q1;   if(N[2]<0.0)  O=360.0-O;
I=acos(h[3]/HH)/Q1;
W=acos(Dot(N,er)/(NN*e))/Q1;  if(er[3]<0.0)   W=360.0-W;


/* Modify in Orbital Plane for find E & M   */
P=hh/mu;
xb=(P-srr)/e;
yb=Dot(r,v)*sqrt(P/mu)/e;
b=a*sqrt(1.0-e*e);
cx=xb/a+e;
sx=yb/b;
 if(fabs(sx)<=0.707107)   X=asin(fabs(sx));
 if(fabs(cx)<=0.707107)   X=acos(fabs(cx));
 if(cx>=0.0 && sx>=0.0)   X=X;
```

```
  if(cx<0.0 && sx>=0.0)    X=180.0*Q1-X;
  if(cx<0.0 && sx<0.0)     X=180.0*Q1+X;
  if(cx>=0.0 && sx<0.0)    X=360.0*Q1-X;

 M=(X-e*sx)/Q1;
 //E=acos((xb/a)+e)/Q1;
 nn=k*sqrt(mu/(a*a*a));
 qq=a*(1+e);

 TT=tt-(M*Q1/nn);
 fbt=tt-TT;

 printf("The classical elements of orbit: \n");
 printf("a= %.7lf\n",a);
 printf("e= %.7lf\n",e);
 printf("i= %.7lf\n",I);
 printf("O= %.7lf\n",O);
 printf("w= %.7lf\n",W);
 printf("M= %.7lf\n",M);
 //printf("E= %.7lf\n",E);
 //printf("T= %.7lf\n",TT);
 //printf("qq= %.7lf\n",qq);
 //printf("Time elapse= %.7lf\n",fbt);

getch();
return(0);
}
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสาม ศรีสุโร เกิดเมื่อวันที่ 27 มีนาคม พ.ศ..2517 ที่จังหวัดนครราชสีมา สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ จากภาควิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2538 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ ที่ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2541