

การพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดินชั้นสูงสำหรับปัญหาสองมิติ



นาย นบปนม แก้วหานาม

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2699-6

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

THE DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT METHOD WITH AN ADVANCED SOIL MODEL  
FOR TWO DIMENSIONAL PROBLEMS

Mr. Nopanom Kaewhanam

สถาบันวิทยบริการ

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974-17-2699-6

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนาระเบียงวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดินชั้นสูง สำหรับปัญหาสองมิติ
โดย	นาย นบปนม แก้วหานาม
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย อุกฤษฏ์ชน

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวี ณะเจริญกิจ)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย อุกฤษฏ์ชน)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรฉัตร สัมพันธ์รักษ์)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

นบปนม แก้วทานาม : การพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดินชั้นสูง  
สำหรับปัญหาสองมิติ. (THE DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT METHOD WITH AN  
ADVANCED SOIL MODEL FOR TWO DIMENSIONAL PROBLEMS อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วย  
ศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย อุกฤษฏาชน, 34 หน้า. ISBN 974-17-2699-6.

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของดินในงานวิศวกรรมปฐพี ชี้ความสามารถต่างๆของโปรแกรมประกอบด้วย 1) แบบจำลองดินของ MIT 2) สามารถวิเคราะห์แบบ Couple Displacement-Pore Pressure และ 3) การหาคำตอบแบบกึ่งอัตโนมัติ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมีพื้นฐานมาจาก Finite Element Code ของโปรแกรม SNAC (Abbo and Sloan, 1997) ซึ่งเขียนขึ้นโดยใช้ภาษา FORTRAN แบบจำลองดิน MIT (MIT-E3, Whittle, 1987) เป็นแบบจำลองหน่วยแรงประสิทธิผลของดินร่วมกับหลักการของ Critical State Soil Mechanic โดยสามารถจำลองพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงของดินเหนียวแบบ Normally Consolidate และ Overconsolidate ซึ่งได้แก่ Small Strain Nonlinearity, Strain Softening และ Anisotropic Strength ได้ สมการ Governing Equation ของปัญหา Coupled Displacement-Pore Pressure อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในแบบของ backward Euler และ Thomas and Gladwell ซึ่งผลเฉลยของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์แบบ Elasto-Plastic นั้นได้จากการหาคำตอบแบบกึ่งอัตโนมัติและมีการควบคุมค่าคลาดเคลื่อนด้วย

โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นถูกตรวจสอบเชิงตัวเลขโดยการวิเคราะห์กับปัญหาการทดลองแรงอัดสามแกนแบบไม่ระบายน้ำ การตรวจสอบได้กระทำในส่วน Stress-Strain Integration และการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การวิเคราะห์ของทั้งสองส่วนให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกันมาก ซึ่งพิสูจน์ได้ว่ารหัสโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องเชิงตัวเลขและมีความละเอียดสูง นอกจากนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นยังแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพที่มีมากกว่าเมื่อเปรียบเทียบความเร็วในการคำนวณกับโปรแกรมที่ได้มาจาก MIT หลังจากนั้นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นได้ประยุกต์กับปัญหาแบบสองมิติในงานวิศวกรรมปฐพีคือ ปัญหาแบบ Plane Strain หรือปัญหาฐานรากตื้นแบบแถบยาว ในการวิเคราะห์ได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของฐานรากเป็นแบบยึดหยุ่นและผิวหยาบ ผลการวิเคราะห์ได้แสดงให้เห็นว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถวิเคราะห์ปัญหาที่เลือกไว้ได้อย่างละเอียดและมีประสิทธิภาพ ซึ่งทำให้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเป็นเครื่องมือที่เหมาะสมในการวิเคราะห์และการออกแบบสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นได้จริงในทางปฏิบัติ

ภาควิชา ..... วิศวกรรมโยธา .....ลายมือชื่อนิสิต.....  
สาขาวิชา ..... วิศวกรรมโยธา .....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....  
ปีการศึกษา ..... 2545

# # 4270368821 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: FINITE ELEMENT METHOD, COUPLED CONSOLIDATION, MIT-E3, SOIL MODEL  
 NOPANOM KAEWHANAM : THE DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT METHOD WITH  
 AN ADVANCED SOIL MODEL FOR TWO DIMENSIONAL PROBLEMS THESIS ADVISOR  
 : ASSIST.PROF.BOONCHAI UKRITCHON, Sc.D. 34 PP. ISBN 974-17-2699-6.

The objective of this thesis is to develop a finite element program for analyzing ground movement problems in geotechnical engineering. The distinct features of the program include: 1) the MIT soil model; 2) coupled displacement-pore pressure and consolidation analysis; and 3) automatic time-stepping algorithm.

The computer program is developed from the basis of the finite element code of program SNAC (Abbo and Sloan, 1997) and written in the FORTRAN language. The MIT model (MIT-E3, Whittle, 1987) is an effective stress model with the critical state soil mechanics, which can capture most real behaviors of natural normally and over-consolidated clay, including small-strain non-linearity, strain softening, and anisotropic strength. The governing equations for coupled consolidation are treated as a system of first-order differential equations and solved by the backward Euler and Thomas and Gladwell scheme. The elasto-plastic finite element solutions are obtained by using the automatic time-stepping algorithm with error control.

The developed program is verified numerically by analyzing a problem of triaxial undrained compression test. The verifications are carried out at the stress-strain relationship integration, and at the finite element discretization. The results of these two verifications match each other very well, indicating that the written code is numerically correct and accurate. In addition, the program shows a higher efficiency, compared to the original MIT one in terms of superior computational speed. Then, the developed program is also applied to analyze two-dimensional problem in geotechnical engineering, namely; Plane Strain problem, strip footing. The analysis also consider the boundary conditions of footing as flexible and rough. The analysis results have shown that the developed program can analyze selected problems accurately and efficiently, thus providing a suitable analysis and design tool for geotechnical problems in practice.

Department Civil Engineering.....Student's signature.....  
 Field of study Civil Engineering.....Advisor's signature.....  
 Academic year 2002

## กิตติกรรมประกาศ

การทำวิจัยในวิทยานิพนธ์หัวข้อ "การพัฒนาระเบียงวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดินชั้นสูงสำหรับปัญหาสองมิติในชั้นดินเหนียว" ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชัย อุกฤษชน อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ให้โอกาสในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และขอกราบขอบพระคุณสำหรับ ความเอาใจใส่ คำปรึกษาและคำแนะนำที่มีค่า ตลอดจนความช่วยเหลือ และความเข้าใจในปัญหาทั้งหมดที่เกิดขึ้นตลอดระยะเวลาของการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้รวมถึงผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวี ธนะเจริญกิจ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรฉัตร สัมพันธ์รักษ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ เตชวรสินสกุล ที่ได้ให้คำชี้แนะและร่วมเป็นกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

ขอขอบคุณเพื่อนๆ และน้องๆ ที่จุฬาฯ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจและความช่วยเหลือในทุกๆ ด้านทำให้การทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ลงได้

ขอขอบคุณ พญาบาสสุวณี สูญพันธ์ และเภสัชกรปฐม จุจันทร์ สำหรับความช่วยเหลือ กำลังใจ และคำปรึกษาตลอดระยะเวลาที่เข้าโรงพยาบาล

สุดท้ายนี้ ขอรำลึกถึงพระคุณบิดา มารดา ที่ได้อบรมสั่งสอน มอบพลังสติปัญญา และกำลังใจ รวมถึงพี่ชายและพี่สาวทั้งสองคนที่คอยให้ความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

นบปนม แก้วหานาม

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฐ
<b>บทที่</b>	
<b>บทที่ 1 บทนำ.....</b>	<b>1</b>
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
<b>บทที่ 2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....</b>	<b>5</b>
2.1 บทนำ.....	5
2.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็ง.....	5
2.2.1 สันฐานของปัญหา Plane Strain.....	6
2.2.2 หลักการของวิธีงานเสมือน.....	8
2.2.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็ง.....	8
2.3 เมตริกซ์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	12
2.4 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข.....	13
2.5 การหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่เชิงเส้น.....	14
<b>บทที่ 3 ทฤษฎีพลาสติกสำหรับดิน.....</b>	<b>15</b>
3.1 บทนำ.....	15
3.2 พลาสติกส่วนเพิ่มเชิงเส้น.....	15
3.2.1 ความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติก.....	16
3.2.2 ความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก.....	17
3.2.3 Yield Function.....	18

## สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
3.2.4 Elastic Unloading และ Plastic Loading.....	19
บทที่ 4 แบบจำลองดิน.....	20
4.1 บทนำ.....	20
4.2 แบบจำลองดิน MIT-E3.....	20
4.2.1 ข้อดีของแบบจำลองดิน MIT-E3.....	20
4.2.2 สูตรและเงื่อนไขของแบบจำลองดิน MIT-E3.....	21
4.2.3 พารามิเตอร์ของแบบจำลองดิน MIT-E3.....	25
บทที่ 5 การตรวจสอบและการประยุกต์.....	26
5.1 บทนำ.....	26
5.2 การตรวจสอบโปรแกรม.....	26
5.2.1 การตรวจสอบโปรแกรมส่วน Stress-Strain Relation Integration.....	26
5.2.2 การตรวจสอบความถูกต้องของ Coupled Consolidation.....	28
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	35
6.1 สรุปการวิจัย.....	35
6.2 ข้อเสนอแนะและข้อควรระวังในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	36
รายการอ้างอิง.....	38
บรรณานุกรม.....	40
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก Element Type, Shape Functions and Derivatives of Shape Function.....	42
ภาคผนวก ข Coordinates and Weighted Factors of Gauss (Integration) Points	46
ภาคผนวก ค Published Data for Parameters of MIT-E3 Soil Model.....	49



## สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก ง Stability of Elements for Predicting Collapse Loads Accurately.....	51
ภาคผนวก จ Biot's Consolidation Formulation and Automatic Solution implemented in Finite Element Method.....	53
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	59



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
2.1 มวลของแข็งสำหรับปัญหา Plane Strain ภายใต้แรงกระทำภายนอก $t, f^B, R_C^i$ .....	6
2.2 Element Assembly ที่ใช้แทนของแข็งในปัญหา Plane Strain ในระบบพิกัดรวม $x,y$ .....	8
2.3 Global และ Local Coordinate System สำหรับเอลิเมนต์ในปัญหาสองมิติ.....	9
2.4 วิธีการหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่เชิงเส้นแบบ Newton-Ralphson.....	14
3.1 Plastic Potential Surface $g$ and Plastic Strain Increment Direction.....	17
3.2 Yield Surface สำหรับ Plastic Model.....	18
4.1 Conceptual Model of Unload-Reloaded used by MIT-E3.....	23
4.2 Bounding Surface และ Critical State Cone สำหรับแบบจำลองดิน MIT-E3.....	24
4.3 Stress Path ของ Undrained Triaxial Compression Test (BBC).....	26
4.4 Stress-Strain Relationship ของ Undrained Compression Test (BBC).....	26
5.1 ผลการเปรียบเทียบความถูกต้องของ Stress-Strain Integration.....	28
5.2 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ Stress-Strain Integration.....	29
5.3 ปัญหาการทดลองแรงอัดสามแกนแบบไม่ระบายน้ำในการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม.....	30
5.4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์จากไฟไนต์เอลิเมนต์กับ Stress-Strain Relationship Integration.....	29
5.5 ปัญหา Flexible Rough Strip Footing.....	30
5.6 Load-Displacement Curves ของปัญหา Footing.....	32
5.7 การเสียรูปของดินเมื่อสิ้นสุดการ Loading.....	32
5.8 เวกเตอร์การเคลื่อนตัวของดิน (ขยาย 10 เท่า).....	33
5.9 Horizontal Displacement Contour.....	33
5.10 Vertical Displacement Countour.....	34
ก-1 6 Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis.....	43
ก-2 15 Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis (1 ใน 2).....	44
ก-2 15 Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis (2 ใน 2).....	45
ข-1 Coordinates of Gauss Points and Weighted Factors for 6-Noded Element.....	47
ข-2 Coordinates of Gauss Points and Weighted Factors for 15 Noded Element.....	48
ค-1 Input Parameters for MIT-E3 Soil Model.....	50
ง-1 Suitable Element for Predicting Collapse Loads..	52

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในงานวิศวกรรมปฐพีมักจะต้องเกี่ยวข้องกับการคาดคะเนการเคลื่อนตัวของดิน(Ground Movement Prediction) อยู่เสมอ เช่น การคำนวณระยะทรุดตัวของฐานรากตื้นหรือฐานรากเสาเข็ม การคำนวณระยะการทรุดตัวเนื่องจากการอัดตัวคาน้ำใต้ดิน การคำนวณระยะโก่งตัวด้านข้างของกำแพงกันดิน การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวต่างๆไป มักจะใช้สูตรเอ็มพีริคัล (Empirical) สูตรกึ่งเอ็มพีริคัล (Semi-empirical) หรือกราฟช่วยออกแบบ (Design Chart) ซึ่งวิธีที่กล่าวมานี้ส่วนใหญ่ตั้งอยู่บนสมมติฐานหลายอย่าง มีข้อจำกัดค่อนข้างมาก ใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่มีความซับซ้อนทางเรขาคณิต (Geometry) และความซับซ้อนของน้ำหนักบรรทุก(Loading)ไม่มาก อีกทั้งในบางปัญหายังไม่สามารถวิเคราะห์การเคลื่อนตัวได้ทุกจุดที่ต้องการ

การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวอีกวิธีหนึ่งที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางว่าสามารถให้ผลเฉลยทั่วทั้งมวลดินภายในขอบเขตของปัญหาได้ มีความแม่นยำ (Accuracy) สูง และสามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนทั้งทางเรขาคณิตและน้ำหนักบรรทุกได้คือ การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ซึ่งในการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีส่วนประกอบที่สำคัญสองอย่างคือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จำลองพฤติกรรมของดิน (Soil Model)

แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวในงานวิศวกรรมปฐพีที่มีใช้กันในขณะนี้ มีทั้งแบบจำลองที่ไม่ได้ถูกคิดค้นขึ้นมาสำหรับดินโดยเฉพาะ เช่น แบบจำลอง Linear Isotropic Elastic (เช่น Heyman,1982) แบบจำลอง Anisotropic Elastic (เช่น Heyman,1982 ; Love,1927) และแบบจำลองที่ถูกคิดค้นขึ้นมาสำหรับดินโดยเฉพาะคือ แบบจำลอง Cam Clay (Roscoe and Schofield,1963) แบบจำลอง Modified Cam Clay (Roscoe and Burland,1968) แบบจำลอง Clay and Sand Model (Yu,1998) แบบจำลองเหล่านี้เป็นแบบจำลองที่ง่ายต่อการนำไปใช้ เนื่องจากไม่ค่อยมีความซับซ้อนมากนัก อีกทั้งยังใช้พารามิเตอร์(Parameter) จำนวนไม่มาก อย่างไรก็ตามแบบจำลองเหล่านี้ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมที่สำคัญของดินได้เท่าที่ควร

ในปัจจุบันแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงของดิน(Advanced Soil Model) ได้ถูกพัฒนาขึ้นจากนักวิจัยทั่วโลก หนึ่งในแบบจำลองที่น่าสนใจเหล่านี้ สามารถที่จะอธิบายพฤติกรรมที่สำคัญของดินเหนียว เช่น Stress History, Small Strain Nonlinearity, Hysteretic Stress-Strain Response, Coupling of Volumetric and Shear Deformation, Anisotropy, Kinematic Plasticity, Strain Softening during Undrained Loading ได้เป็นอย่างดีคือ แบบจำลอง MIT-E3 (Whittle, 1987) ซึ่งได้รับการพัฒนาและตรวจสอบผลการคาดคะเนการเคลื่อนตัวของดินกับผลการทดสอบดินในห้องปฏิบัติการจากดินหลาย ๆ แห่งแล้วทำให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3 ขึ้นมาจึงมีความสำคัญอย่างมากในงานวิศวกรรมปฐพี

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่สามารถให้ผลเฉลยทั่วทั้งขอบเขตของปัญหาได้ และมีความแม่นยำสูง นอกจากนี้ยังสามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีทั้งความซับซ้อนทางเรขาคณิตและความซับซ้อนของน้ำหนักบรรทุกมากได้ และแบบจำลองดินขั้นสูง MIT-E3 เป็นแบบจำลองดินที่อธิบายพฤติกรรมของดินเหนียวที่สำคัญหลาย ๆ อย่างได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้การประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ก็สามารถกระทำได้อย่างรวดเร็ว และมีประสิทธิภาพสูง

ดังนั้นวัตถุประสงค์หลักในการทำวิจัยคือ

1. พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้สามารถนำมาใช้ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3 ในปัญหาการเคลื่อนตัวทางวิศวกรรมปฐพีแบบสองมิติในชั้นดินเหนียวที่เกิดขึ้นได้จริง
2. รวบรวมผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคต่างๆในการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ตีพิมพ์ขึ้นมาใหม่ ๆ และนำมาประยุกต์ใช้ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น เพื่อเพิ่มความเร็ว และประสิทธิภาพของโปรแกรม
3. พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนรับข้อมูล และส่วนแสดงผลจากการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3 ให้สามารถใช้งานได้อย่างสะดวก

3.1 ประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาแก้ปัญหาสองมิติที่น่าสนใจซึ่งพบได้บ่อยในทางปฏิบัติ

### 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ขอบเขตการทำวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบด้วย 3 หัวข้อหลักคือ

1. การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์
  - 1.1 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3 สำหรับปัญหาสองมิติ โดยเลือกใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ชั้นสูงที่มีความเร็วสูง (FORTRAN)
  - 1.2 การรวบรวมผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคต่างๆที่ทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความเร็ว และประสิทธิภาพสูง และนำมาประยุกต์ใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น
  - 1.3 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนรับข้อมูลและส่วนแสดงผลจากการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
2. การตรวจสอบการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์
  - 2.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองดินในโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยอ้างอิงจากเอกสารของ Whittle (1993) ที่แสดงผลการทำนายด้วยแบบจำลองดิน MIT-E3
  - 2.2 การตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยอ้างอิงจากเอกสารของ Whittle(1993) ที่แสดงผลการทำนายด้วยแบบจำลองดิน MIT-E3 ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
3. การประยุกต์ใช้
  - 3.1 ประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาแก้ปัญหา Footing

### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัยนี้แบ่งออกเป็นสองหัวข้อดังนี้

1. ประโยชน์ทางวิชาการ

- 1.1 การพัฒนาองค์ความรู้ด้าน แบบจำลองดินชั้นสูงที่เหมาะสม(MIT-E3 Soil Model) ให้สามารถนำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้
- 1.2 การพัฒนาระบบการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ให้มีประสิทธิภาพสูงด้วยเทคนิคที่มีการตีพิมพ์ขึ้นใหม่ ๆ
2. ประโยชน์ทางการประยุกต์ใช้
  - 2.1.1 การประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาแก้ปัญหาสองมิติที่น่าสนใจซึ่งพบได้บ่อยในทางปฏิบัติ
  - 2.2 นอกจากการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาแก้ปัญหาสองมิติที่น่าสนใจดังได้กล่าวมาแล้ว โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นยังสามารถวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของปัญหา Boundary Value Problem ประเภทอื่นที่มีความใกล้เคียงกับปัญหาทั้งสามข้างต้นได้

## บทที่ 2

### ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 2.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) วิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximated Solution) ของปัญหาเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Value Problem) ในงานวิศวกรรม เช่น ปัญหาการถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) ปัญหาการไหลของของไหล (Fluid Flows) ปัญหาของแข็ง (Solid) ปัญหาโครงสร้าง (Structure) เป็นต้น ปัญหาที่เกิดขึ้นได้จริงทางปฏิบัติในงานวิศวกรรมปฐพีสามารถทำการวิเคราะห์ได้ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งโดยทั่วไปปัญหาในงานวิศวกรรมปฐพีที่จะทำการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะอยู่ในรูปแบบของปัญหาของแข็ง

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาเงื่อนไขขอบเขตทั่วไปเริ่มจากการแบ่ง (Discretization) มวล (Body) ที่อยู่ภายในขอบเขตของปัญหา (Boundary) ที่จะทำการวิเคราะห์ออกเป็นส่วนย่อยหลายๆส่วน แต่ละส่วนจะเรียกว่าเอลิเมนต์ (Element) ซึ่งเอลิเมนต์ย่อยเหล่านี้อาจจะมีขนาดและรูปร่างที่ต่างกันได้ เอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันจะไม่เชื่อมต่อกัน (Discrete) ที่ขอบแต่จะเชื่อมต่อกันที่ Node ซึ่งเป็นจุดมุมและจุดบนด้านของเอลิเมนต์เท่านั้น นอกจาก Node จะเป็นจุดที่เชื่อมต่อกันของเอลิเมนต์แล้วยังเป็นจุดที่จะหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า (Unknown Variable) ของปัญหา เช่น ปริมาณการเคลื่อนตัว (Displacement) และความเค้น (Stress) ด้วย เมื่อมวลถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆแล้วก็ทำการสร้างสมการทางกายภาพ (Physical Equation) ที่สอดคล้องกับปัญหาของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยนี้ โดยสมการที่สร้างขึ้นจะอยู่ในรูปของตัวแปรต่างๆที่กำหนดขึ้นที่ Node ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการของแต่ละเอลิเมนต์แล้ว จึงนำสมการของทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันก่อให้เกิดเป็นระบบสมการรวม (Simultaneous Equations) จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตของปัญหา แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนั้น ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าที่ Node ที่กำหนดขึ้นทั้งหมด

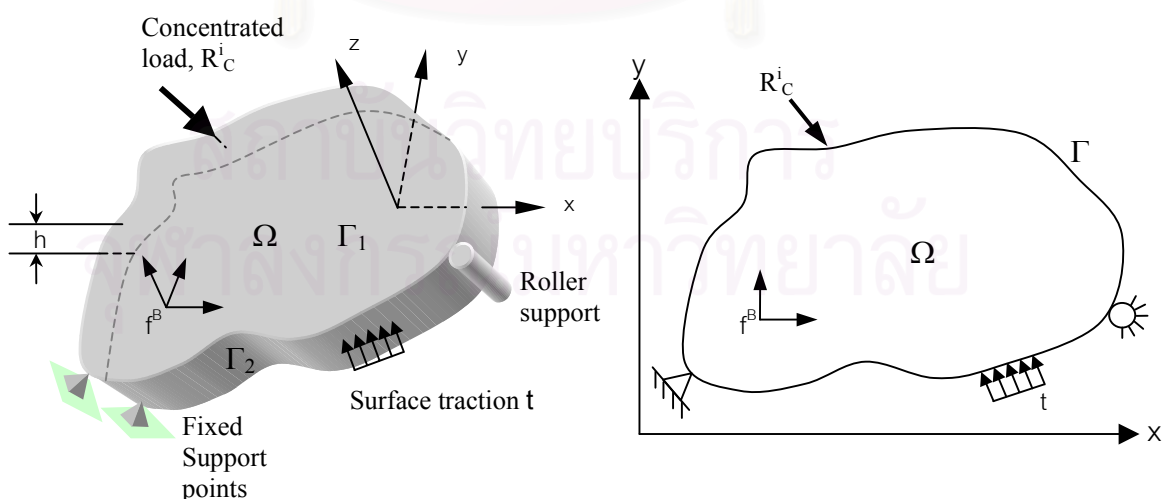
#### 2.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็ง

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Equation Formulation) สำหรับปัญหาทางด้านของแข็งมีอยู่หลายวิธีด้วยกันคือ Displacement Method, Force Method และ Mixed Method

สำหรับ Displacement Method จะกำหนดให้ปริมาณการเคลื่อนตัวของ Node เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า เมื่อสร้างสมการสำหรับทุกเอลิเมนต์เสร็จ ก็ทำการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยของปริมาณการเคลื่อนตัวของ Node นั้น และเมื่อทราบปริมาณการเคลื่อนตัวแล้ว ตัวแปรอื่นๆที่สนใจ เช่น ความเค้น ความเครียด ก็จะสามารถคำนวณได้โดยตรงจากปริมาณการเคลื่อนตัว ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างสมการด้วยวิธีการเช่นนี้เรียกว่า Displacement-Based Finite Element Method ส่วนใน Force Method จะกำหนดให้ความเค้นเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า และใน Mixed Method จะกำหนดให้ทั้งปริมาณการเคลื่อนตัวและความเค้นเป็นตัวแปรไม่ทราบค่าไปพร้อมๆกัน ในทั้งสามวิธีใช้หลักการของวิธีงานเสมือน (Virtual Work Principle) สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรไม่ทราบค่าต่างๆขึ้นมาได้ สำหรับงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ Displacement Method สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งแบบ Plane Strain เท่านั้น

## 2.2.1 พื้นฐานของปัญหา Plane Strain

ของแข็งซึ่งอยู่ในสภาพสมดุลสถิตที่จะวิเคราะห์แบบ Plane Strain ดังแสดงในรูปที่ 2.1 มวลของแข็ง  $\Omega$  มีพื้นผิว  $\Gamma$  ซึ่งประกอบด้วยพื้นผิวของสองระนาบที่ขนานกัน  $\Gamma_1$  และพื้นผิวตามความหนา  $\Gamma_2$  อีกส่วนหนึ่ง โดยที่  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  และ  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$  มวล  $\Omega$  มีความหนาสม่ำเสมอ  $h$  โดยที่  $h$  มีค่าสูงมากเมื่อเทียบกับขนาดของมวล แรงกระทำภายนอกต่อ  $\Omega$  เหมือนกับปัญหาสามมิติทั่วไปคือ แรงแบบแผ่กระจาย (Traction)  $t$  แรงกระทำแบบจุด (Concentrated Load)  $R_c^i$  และแรงวัตถุหรือแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (Body Load)  $f^B$



รูปที่ 2.1 มวลของแข็งสำหรับปัญหา Plane Strain ภายใต้แรงกระทำภายนอก  $t$ ,  $f^B$  และ  $R_c^i$



แรงทั้งหมดที่กระทำต่อมวลเป็นไปตามสมมติฐานของ Plane Strain คือ

- 1) ไม่มีแรงกระทำที่พื้นผิวของมวลที่อยู่บน  $\Gamma_1$
- 2) แรงภายนอกที่กระทำตามความหนาที่มีค่าคงที่ในทิศของแกน z
- 3) แรงวัตถุ  $f^B$  ไม่มี Component ตามทิศทางของแกน z

สมมติฐานทั้งสามข้อทำให้ปัญหา Plane Strain มีความง่ายขึ้นกว่าปัญหาสามมิติทั่วไปคือ สามารถลดมิติของปัญหาแบบสามมิติบนระบบพิกัด x,y,z เป็นปัญหาสองมิติบนระนาบ x,y ได้ ดังนั้นแรงทั้งสามแบบที่กระทำต่อมวลจะประกอบด้วย 2 Component ตามทิศทางของแกน x,y ดังนี้

$$f^B = \begin{bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \end{bmatrix}; \quad t = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \end{bmatrix}; \quad R_C^i = \begin{bmatrix} R_{CX}^i \\ R_{CY}^i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ปริมาณการเคลื่อนตัวของมวลที่จุดใดๆในมวล  $U(x,y)$  วัดจากตอนที่ยังไม่มีแรงมากระทำถึงขณะใดขณะหนึ่งที่แรงกระทำอยู่มี 2 Component เหมือนกันคือ

$$U(x,y) = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ปริมาณความเครียด (Strain) ที่เกิดขึ้นที่จุดใดๆภายในมวลอันเนื่องมาจากมวลเกิดการเสียรูปหรือมีปริมาณการเคลื่อนตัวที่ผิว U เมื่อมีแรงภายนอกกระทำคือ

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{XX} \quad \varepsilon_{YY} \quad \gamma_{XY} \quad \varepsilon_{ZZ}] \quad (2.3)$$

สำหรับปัญหาที่ถือว่ามีปริมาณการเคลื่อนตัวและปริมาณความเครียดน้อยมาก (Small strain and small displacement problem) นั้นจะได้ว่า

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial U}{\partial X}; \varepsilon_{YY} = \frac{\partial V}{\partial Y}; \varepsilon_{ZZ} = \frac{\partial W}{\partial Z}; \gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad (2.4)$$

และความเค้น (Stress) ที่จุดใดๆภายในมวลเมื่อมีปริมาณความเครียด  $\varepsilon$  เกิดขึ้นคือ

$$\sigma^T = [\sigma_{XX} \quad \sigma_{YY} \quad \tau_{XY} \quad \sigma_{ZZ}] \quad (2.5)$$

โดยที่

$$\sigma = C\varepsilon + \sigma^I \quad (2.6)$$

ในสมการ (2.6) C คือเมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-Strain Transformed Matrix) ของวัสดุที่เป็นมวลของปัญหา และ  $\sigma^I$  คือเวกเตอร์ความเค้นเริ่มต้น (Initial Stress) ในมวลก่อนที่จะมีแรงภายนอกมากระทำ

## 2.2.2 หลักการของวิธีงานเสมือน

หลักการพื้นฐานของวิธีงานเสมือนซึ่งกล่าวไว้ว่า งานเสมือนรวมภายใน (Internal Virtual Work) ซึ่งเกิดจากความเค้นจริงภายในมวลเคลื่อนผ่านความเครียดเสมือนภายในที่สอดคล้องกับการเคลื่อนตัวเสมือนที่ผิว มีค่าเท่ากับงานเสมือนรวมภายนอก (External Virtual Work) ซึ่งเกิดจากแรงภายนอกเคลื่อนผ่านปริมาณการเคลื่อนตัวเสมือนที่ผิว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

งานเสมือนรวมภายใน = งานเสมือนรวมภายนอก

$$\int_{\Omega} \bar{\epsilon}^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \bar{U}^T f^B d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{U}^{\Gamma T} t d\Gamma + \sum_i \bar{U}^{iT} R_C^i \quad (2.7)$$

โดยที่  $\bar{\epsilon}^T$  คือ ความเครียดเสมือนที่เป็นผลเนื่องมาจากการเคลื่อนตัวเสมือนที่ผิว

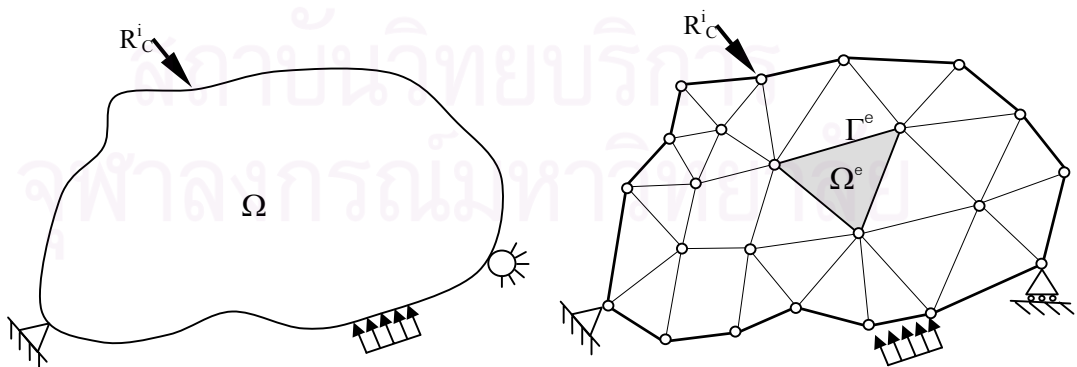
$\sigma$  คือ ความเค้นที่เกิดขึ้นในมวลที่อยู่ในสภาวะสมดุลเนื่องจากแรงกระทำภายนอก

$\bar{U}^T, \bar{U}^{\Gamma T}, \bar{U}^{iT}$  คือ การเคลื่อนตัวเสมือนที่มีทิศทางสอดคล้องกับแรง  $f^B, t, R_C^i$

$f^B, t, R_C^i$  คือ แรงกระทำภายนอก

## 2.2.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็ง

ดังได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นด้วยการแบ่งมวลที่อยู่ในขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ที่เชื่อมต่อกันที่ Node ของเอลิเมนต์เท่านั้น หรืออาจกล่าวได้ว่าเราแทนของแข็งในปัญหาจริงด้วยโครงข่ายเอลิเมนต์ (Element Assembly) ที่เชื่อมต่อกันเฉพาะที่ Node ของเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 2.2

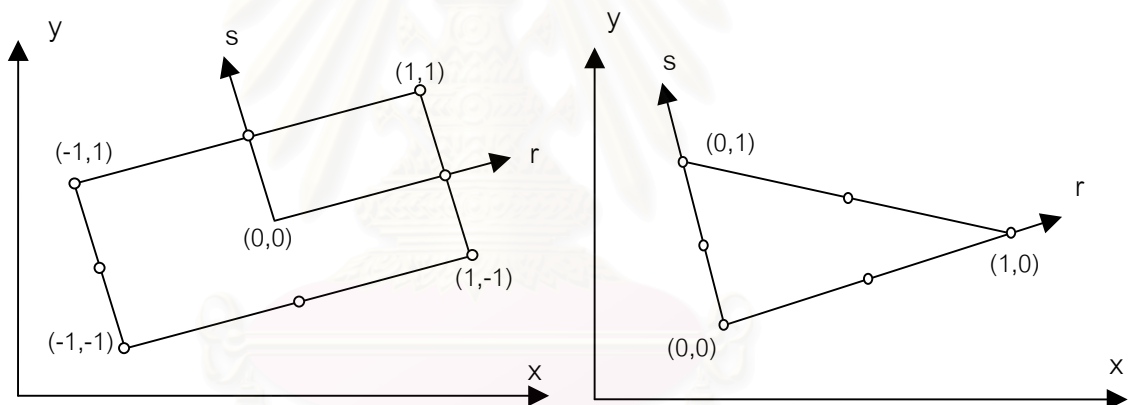


รูปที่ 2.2 Element Assembly ที่ใช้แทนของแข็งในปัญหา Plane Strain ในระบบพิกัดรวม x,y

อินทิกรัลทั่วทั้งปริมาตร  $\Omega$  และพื้นผิว  $\Gamma$  ของ Element Assembly ในสมการที่ (2.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของอินทิกรัลทั่วทั้งปริมาตร  $\Omega^e$  และพื้นที่ผิว  $\Gamma^e$  ที่มาจากทุกๆเอลิเมนต์ภายใน Element Assembly ได้ดังนี้

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \bar{\epsilon}^{(e)T} \sigma d\Omega^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega^e} \bar{U}^{(e)T} f^{B(e)} d\Omega^{(e)} + \sum_e \int_{\Gamma_1^{(e)}, \dots, \Gamma_q^{(e)}} \bar{U}^{\Gamma_f T} f^{\Gamma(e)} d\Gamma^{(e)} + \sum_i \bar{U}^{iT} R_C^i \quad (2.8)$$

อินทิกรัลต่างๆในสมการที่ (2.8) สามารถหาค่าได้โดยทำการอินทิเกรตทีละเอลิเมนต์แยกอิสระจากกัน เพื่อให้การอินทิเกรตสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ง่ายขึ้นการอินทิเกรตจะกระทำในระบบพิกัดเฉพาะ (Local Coordinate System)  $r,s$  ของแต่ละเอลิเมนต์นั้นแทนระบบพิกัดรวมของปัญหา (Global Coordinate System)  $x,y$



Local Coordinates -  $(r,s)$

Global Coordinates -  $(x,y)$

รูปที่ 2.3 Global และ Local Coordinate System สำหรับเอลิเมนต์ปัญหา 2 มิติ

สำหรับเอลิเมนต์หนึ่งๆ Local coordinate  $r$  และ  $s$  จะมีค่าอยู่ระหว่างค่าต่ำสุดและสูงสุดคือ  $-1$  และ  $1$  ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 2.3 Local Coordinate ของจุดใดๆภายในเอลิเมนต์สามารถหาได้โดยการประมาณได้จากพิกัดของ Node โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณ (Interpolation Function) ดังนี้

$$r = \sum_{i=1}^N h_i^{(e)} r_i \quad ; \quad s = \sum_{i=1}^N h_i^{(e)} s_i \quad (2.9)$$

เมื่อ  $h_i$  คือ ฟังก์ชันการประมาณ และ  $r_i, s_i$  คือ Local coordinates สำหรับ Node  $i$  ตามลำดับ

สำหรับเอลิเมนต์แบบ Isoparametric<sup>1</sup> แล้วปริมาณการเคลื่อนตัวของจุดใดๆภายในเอลิเมนต์สามารถประมาณได้จากปริมาณการเคลื่อนตัวที่ Node ได้โดยใช้ฟังก์ชันประมาณเช่นเดียวกันกับการหา Local Coordinate ดังนั้นสำหรับเอลิเมนต์ e ใดๆที่มี จำนวน Node เท่ากับ N แล้ว เวกเตอร์ของปริมาณการเคลื่อนตัวของจุด (r,s) บนเอลิเมนต์ ( $u^{(e)}(r,s)$ ) คือ

$$u^{(e)}(r,s) = \sum_{i=1}^N h_i^{(e)}(r,s) \hat{u}_i = H^{(e)}(r,s) \hat{U} \quad (2.10)$$

โดยที่

$h_i^{(e)}(r,s)$  คือ ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ e (Displacement Interpolation Function) วัตในระบบพิกัดฉากเฉพาะของเอลิเมนต์ r,s

$\hat{u}_i(r,s)$  คือ ปริมาณการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ e ที่ Node i วัตในระบบพิกัดฉากเฉพาะของเอลิเมนต์ r,s

$H^{(e)}$  คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันประมาณการเคลื่อนตัว (Displacement Interpolation Matrix)

$\hat{U}$  คือ เวกเตอร์ของปริมาณการเคลื่อนตัวที่ Node ของเอลิเมนต์ e วัตในระบบพิกัดฉากรวม ของปัญหา x,y

นอกจากนี้ปริมาณความเครียดของจุดใดๆภายในเอลิเมนต์ e ( $\varepsilon^{(e)}$ ) ยังสามารถประมาณได้จากปริมาณการเคลื่อนตัวจากทุกๆ Node ของเอลิเมนต์ได้ในลักษณะเดียวกันดังนี้

$$\varepsilon^{(e)}(r,s) = B^{(e)}(r,s) \hat{U} \quad (2.11)$$

โดยที่  $B^{(e)}$  คือ เมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและปริมาณการเคลื่อนตัว (Strain - Displacement Transformation Matrix)

จากสมการที่ (2.6) จะได้ว่าความเค้น ณ จุดใดๆภายในเอลิเมนต์ e ( $\sigma^{(e)}$ ) คือ

<sup>1</sup> เอลิเมนต์ที่ใช้การประมาณตำแหน่งและปริมาณการเคลื่อนตัวเป็น  $x = \sum_{i=1}^m h_i \hat{x}_i$   $u = \sum_{i=1}^n h_i' \hat{u}_i$  แบ่งเป็น 3 แบบดังนี้

- 1) isoparametric element เมื่อ  $m=n$  (จำนวน Geometry Node เท่ากับ จำนวน Displacement Node) และ  $h_i = h_i'$
- 2) subparametric element เมื่อ  $m < n$  (จำนวน Geometry Node น้อยกว่า จำนวน Displacement Node) และ order ของ  $h_i$  ต่ำกว่า  $h_i'$
- 3) superparametric element เมื่อ  $m > n$  (จำนวน Geometry Node มากกว่า จำนวน Displacement Node) และ order ของ  $h_i$  สูงกว่า  $h_i'$

$$\sigma^{(e)} = C^{(e)} \varepsilon^{(e)} + \sigma^{I(e)} \quad (2.12)$$

โดยที่  $C^{(e)}$  คือ เมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress - Strain Matrix) ของเอลิเมนต์  $e$

ในสมการที่ (2.10) และ (2.11) เป็นสมการที่แสดงการประมาณค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าที่จะเกิดขึ้นจริงคือปริมาณการเคลื่อนตัว  $u$  และความเครียด  $\varepsilon$  ซึ่งในการใช้หลักการของวิธีงานเสมือนในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เราจะใช้วิธีการประมาณเช่นเดียวกันนี้กับปริมาณการเคลื่อนตัวเสมือนและความเครียดเสมือนด้วย คือ

$$\bar{u}^{(e)}(r,s) = \sum_{i=1}^N h_i^{(e)}(r,s) \bar{u}_i = H^{(e)}(r,s) \bar{U} \quad (2.13)$$

$$\bar{\varepsilon}^{(e)}(r,s) = B^{(e)}(r,s) \bar{U} \quad (2.14)$$

แทนค่า  $u, \varepsilon, \sigma, \bar{u}, \bar{\varepsilon}$  จากสมการ (2.9) ถึง (2.13) ในสมการ (2.8) จะได้

$$\begin{aligned} \bar{U}^T \left[ \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} C^{(e)} B^{(e)} d\Omega^{(e)} \right] \bar{U} = \bar{U}^T \left[ \left\{ \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} H^{(e)T} f^{B(e)} d\Omega^{(e)} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \sum_e \int_{\Gamma_1^{(e)} \dots \Gamma_q^{(e)}} H^{S(e)T} t^{(e)} dS^{(e)} \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} \sigma^{I(e)} d\Omega^{(e)} \right\} + R_C \right] \quad (2.15) \end{aligned}$$

หลังจากนั้นก็ใช้หลักการของวิธีงานเสมือนกับสมการ (2.14) เพื่อให้ได้สมการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการใส่ปริมาณการเคลื่อนตัวหนึ่งหน่วยในแต่ละ Component ของ  $\bar{U}$  เป็นจำนวน  $n$  ครั้ง เมื่อ  $n$  คือจำนวน Degree of freedom ทั้งหมดใน  $\bar{U}$  หรือจำนวนสมการทั้งหมด ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ Simultaneous Equations ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนี้

$$K \bar{U} = R \quad (2.16)$$

โดยที่  $K$  คือเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งของ Element Assembly ซึ่งได้มาจากการนำเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์ ( $K^{(e)}$ ) มาประกอบกันด้วยวิธี Direct Stiffness Method คือ

$$K = \sum_e K^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} C^{(e)} B^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (2.17)$$

$\hat{U}$  คือ เวกเตอร์ของปริมาณการเคลื่อนตัวซึ่งเป็นตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา และ  $R$  เป็น เวกเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำซึ่งเป็นผลมาจากแรงที่กระทำต่อมวลแบบต่างๆดังนี้

$$R = R_B + R_S - R_I + R_C \quad (2.18)$$

$R_B$  คือ เวกเตอร์แรงภายนอกเนื่องจาก แรงวัตถุหรือ Body Force

$$R_B = \sum_e R_B^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} H^{(e)} f^{B(e)} d\Omega^{(e)} \quad (2.19)$$

$R_S$  คือ เวกเตอร์แรงภายนอกเนื่องจากแรงแบบแผ่กระจายที่ผิวหรือ Surface Traction

$$R_S = \sum_e R_S^{(e)} = \sum_e \int_{\Gamma_1^{(e)} \dots \Gamma_q^{(e)}} H^{S(e)T} t^{(e)} d\Gamma^{(e)} \quad (2.20)$$

$R_I$  คือ เวกเตอร์แรงภายในซึ่งเกิดจากความเค้นในมวลของแข็งที่มีอยู่แล้วก่อนมีแรงภายนอกกระทำ

$$R_I = \sum_e R_I^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} B^{(e)T} \sigma^{I(e)} d\Omega^{(e)} \quad (2.21)$$

และ  $R_C$  คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอกแบบจุดที่ผิวหรือ Concentrated Load

### 2.3 เมตริกซ์ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการ (2.15) เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปริมาณการเคลื่อนตัว  $U$  สำหรับ ปัญหาของแข็งที่อยู่ในสภาวะสมดุลสถิต (Static Equilibrium) ในการหาค่าเมตริกซ์ความแข็งเกร็ง  $K$  ต้องคำนวณเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด  $B$  ก่อน จากนั้นตามของ ความเครียดในสมการ (2.4) เมตริกซ์  $B$  สามารถคำนวณได้จากตัวดำเนินการอนุพันธ์  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  แต่ ในการหาค่าอินทิกรัลของเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์  $K^{(e)}$  ตามสมการ (2.16) จะใช้ ระบบพิกัดเฉพาะของแต่ละเอลิเมนต์ ทำให้เมตริกซ์  $B$  จะอยู่ในรูปของตัวดำเนินการอนุพันธ์  $\partial/\partial r$ ,  $\partial/\partial s$  ดังนั้นในการคำนวณเมตริกซ์  $B$  จึงต้องมีการแปลงตัวดำเนินการอนุพันธ์  $\partial/\partial r$ ,  $\partial/\partial s$  ให้เป็นตัว ดำเนินการอนุพันธ์  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.22)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

โดยที่  $J$  คือ Jacobian Matrix หรือเมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ใน Local Coordinate และอนุพันธ์ใน Global Coordinate ซึ่งหาได้โดยแทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ 2.10

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial r} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{bmatrix}$$

และอนุพันธ์ใน Global Coordinate สามารถหาได้โดย

$$\frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.25)$$

## 2.4 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข

เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง  $K$  และเวกเตอร์แรงกระทำ  $R$  ในสมการ (2.16) ถึง (2.20) อยู่ในรูปของอินทิกรัล การหาค่าอินทิกรัลดังกล่าวสามารถกระทำด้วยวิธีการเชิงตัวเลขได้

การอินทิเกรตเมตริกซ์และเวกเตอร์เชิงตัวเลขนั้นกระทำได้โดย กำหนด Sampling Point ในโดเมนที่ต้องการอินทิเกรตขึ้นมาจำนวนหนึ่ง แต่ละ Sampling Point จะมีค่าถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor) ต่างกัน แล้วค่าของอินทิกรัลทั่วทั้งโดเมนที่ต้องการมีค่าเท่ากับผลรวมของผลคูณระหว่างเมตริกซ์หรือเวกเตอร์ที่ Sampling Point นั้นกับค่าถ่วงน้ำหนักของ Sampling Point นั้น เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\int_{\Pi} F d\Pi = \sum_i \alpha_i F_i \quad (2.21)$$

เมื่อ  $F$  คือ เมตริกซ์หรือเวกเตอร์ที่ต้องการอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งโดเมน  $\Pi$   $F_i$  คือ เมตริกซ์หรือเวกเตอร์ที่ Sampling Point  $i$  ใน  $\Pi$  และ  $\alpha_i$  คือ ค่าถ่วงน้ำหนักของ Sampling Point  $i$  การอินทิเกรตเชิงตัวเลขนี้สามารถกระทำได้นบนโดเมนทั้งแบบ หนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ

ด้วยหลักการนี้สามารถเขียนเป็นสมการสำหรับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์  $K^{(e)}$  และเวกเตอร์แรงกระทำของเอลิเมนต์  $R_B^{(e)}$ ,  $R_S^{(e)}$  และ  $R_l^{(e)}$  ได้ดังนี้

$$K^{(e)} = \sum_i \alpha_i K_i^{(e)} = \sum_i \alpha_i B_i^{(e)T} C_i^{(e)} B_i^{(e)} \tag{2.22}$$

$$R_B^{(e)} = \sum_j \alpha_j R_{Bj}^{(e)} = \sum_j \alpha_j H_j^{(e)} f^{(e)} \tag{2.23}$$

$$R_S^{(e)} = \sum_j \alpha_j R_{Sj}^{(e)} = \sum_j \alpha_j H_j^{S(e)T} f_j^{S(e)} \tag{2.24}$$

$$R_I^{(e)} = \sum_j \alpha_j R_{Ij}^{(e)} = \sum_j \alpha_j B_j^{(e)T} \sigma_j^{I(e)} \tag{2.25}$$

การกำหนดตำแหน่งและค่าถ่วงน้ำหนักสำหรับแต่ละ Sampling Point ในการอินทิเกรตเชิงตัวเลขนั้นมีอยู่หลายวิธี เช่น Newton-Cotes Formulas, Gauss Formulas ซึ่งในทั้งสองวิธีนี้ต่างใช้ตำแหน่งในระบบพิกัดเฉพาะของเอลิเมนต์

### 2.5 การหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่เชิงเส้น

การหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่เชิงเส้น โดยทั่วไปจะใช้วิธีการของ Newton-Raphson ดังนี้

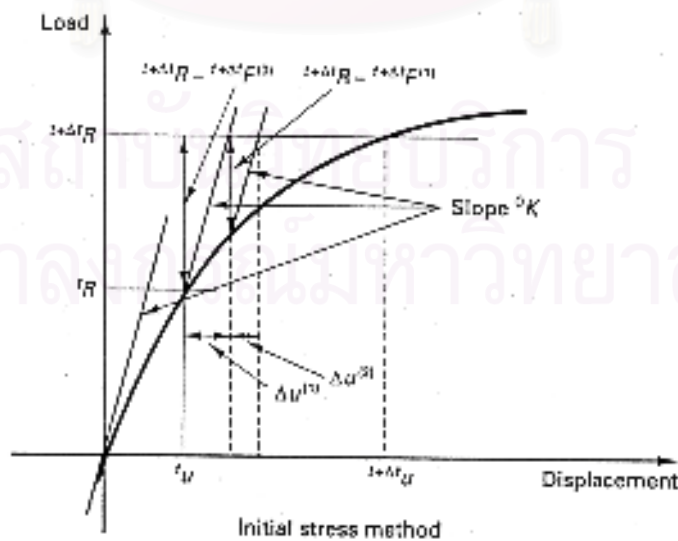
$$\Delta R^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \tag{2.26}$$

$${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} \tag{2.27}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \tag{2.28}$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^tU ; \quad {}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF \tag{2.29}$$

ซึ่งแสดงด้วยภาพในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 วิธีหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่เชิงเส้น แบบ Newton-Raphson



## บทที่ 3

### ทฤษฎีพลาสติกสำหรับดิน

#### 3.1 บทนำ

ในการวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตต่างๆในงานวิศวกรรมปฐพี เช่น Shallow Foundation, Retaining Wall, Earth Dam, Underground Opening และปัญหาอื่นๆในงานวิศวกรรมปฐพีได้อย่างถูกต้องนั้นจะต้องใช้ Constitutive Laws หรือสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Stress-Strain ที่อธิบายพฤติกรรมดินได้อย่างถูกต้องด้วย

เป็นระยะเวลาอันยาวนานแล้วที่การวิเคราะห์ปัญหาในงานวิศวกรรมปฐพีตั้งอยู่บนพื้นฐานของ Hook's Law หรือ Elastic Model แต่ต่อมาได้มีการพัฒนาทฤษฎีพลาสติกขึ้นมาเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพหรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการวิบัติของวัสดุ เช่น Ultimate Bearing Capacity, Slope Stability เป็นต้น

ทฤษฎีพลาสติกแรกพัฒนาสำหรับวัสดุแบบโลหะ และได้มีการประยุกต์ใช้สำหรับดินครั้งแรกโดย Druker and Prager (1952) ซึ่งเป็น Elastic-Perfectly Plastic Material ซึ่ง Yield Function หรือ Yield Surface ไม่มีการเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนแปลงขนาดในขณะที่เกิด Plastic Strain ต่อมา Chen (1982) ได้พัฒนา Hardening Plasticity

#### 3.2 พลาสติกส่วนเพิ่มเชิงเส้น

เป็นที่ทราบกันดีว่า ดินไม่ใช่ Elastic Material (เช่น Hardin, 1972) ซึ่งหมายความว่าถ้ามีหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่ม (Effective Stress Increment) กระทำต่อมวลดินจนเกิดความเครียดส่วนเพิ่มขึ้นมาปริมาณหนึ่ง แล้วนำหน่วยแรงส่วนเพิ่มดังกล่าวออกไป ไม่ว่าจะหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มนั้นจะมีค่ามากหรือน้อยมากแค่ไหนก็ตาม ความเครียดส่วนเพิ่มที่เกิดขึ้นนั้นจะไม่สามารถคืนตัวได้ทั้งหมด ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าปริมาณความเครียดส่วนเพิ่มที่เกิดขึ้นทั้งหมดสามารถแบ่งได้เป็นสองส่วนคือ

- 1) ความเครียดส่วนเพิ่มที่สามารถคืนตัวได้เมื่อนำหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มออก และเรียกความเครียดส่วนเพิ่มนี้ว่า ความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติก (Elastic Strain Increment)

- 2) ความเครียดส่วนเพิ่มที่ไม่สามารถคืนตัวได้เมื่อนำหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มออกและเรียกความเครียดส่วนเพิ่มนี้ว่า ความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก (Plastic Strain Increment)

ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (3.1)$$

เมื่อ

$\dot{\epsilon}$  คือเวกเตอร์ของความเครียดส่วนเพิ่มทั้งหมดหรือความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสโต-พลาสติก (Elasto-Plastic Strain Increment)

$\dot{\epsilon}^e$  คือเวกเตอร์ของความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติก

$\dot{\epsilon}^p$  คือเวกเตอร์ของความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก

การแบ่งความเครียดส่วนเพิ่มออกเป็นแบบอีลาสติกและแบบพลาสติกนี้มีประโยชน์มากทำให้สามารถศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติกและความสัมพันธ์ของหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติกแยกทีละส่วนได้ ซึ่งง่ายกว่าการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มทั้งหมดโดยตรง

### 3.2.1 ความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติก

โดยทั่วไปความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติกจะมีค่าน้อยกว่าความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก มาก ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติกจึงเป็นแบบง่าย ๆ และมักจะเป็น Isotropic Model (เช่น Roscoe and Burland, 1968) และเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์สองตัวที่เป็นอิสระต่อกันดังนี้

$$\dot{\sigma} = K \dot{\epsilon}^e \quad (3.2)$$

$$\dot{s} = 2G \dot{\epsilon}^e \quad (3.3)$$

โดยที่

K คือ โมดูลัสยืดหยุ่นเชิงปริมาตร (Elastic Bulk Modulus)

G คือ โมดูลัสยืดหยุ่นแรงเฉือน (Elastic Shear Modulus)

$\dot{\sigma}$  คือ หน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มเชิงปริมาตร (Effective Volumetric Stress Increment)

$\dot{s}$  คือ เวกเตอร์ของหน่วยแรงเบี่ยงเบนส่วนเพิ่ม (Deviatoric Stress Increment)

และ 
$$K = \frac{1+e_0}{\kappa} \bar{\sigma} \quad (3.4)$$

โดยที่  $e_0$  คือ Initial Void Ratio และ  $K$  คือ ความชันของ Swelling Line ในไดอะแกรม  $e-\ln(p')$  และ อัตราส่วนของ  $G/K$  เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้โดยตรงจากอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) ดังนี้

$$\frac{2G}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{(1+\nu)} \quad (3.5)$$

จากสมการ (3.4) และ (3.5) จะได้ว่า  $K$  และ  $G$  ขึ้นอยู่กับค่า  $\bar{\sigma}$  ซึ่งหมายความว่า ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มแบบอีลาสติกไม่เป็นเส้นตรง (Non-Linear Elastic)

### 3.2.2 ความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก

รูปทั่วไปสำหรับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงประสิทธิผลส่วนเพิ่มกับความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติกคือ

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\Lambda} P \quad (3.6)$$

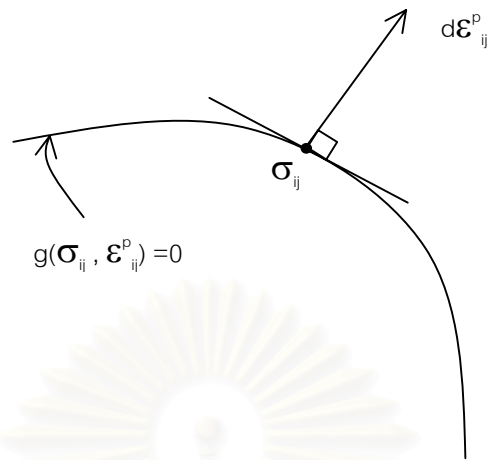
$$\dot{q}_\alpha = \dot{\Lambda} h_\alpha \quad (3.7)$$

โดยที่  $\dot{\Lambda}$  คือ ตัวคูณพลาสติก (Plastic Multiplier) หรือปริมาณสเกลาร์ที่ควบคุมขนาดของความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก และ  $P$  คือ เวกเตอร์ที่กำหนดทิศทางของความเครียดส่วนเพิ่มแบบพลาสติก ซึ่งหาได้จาก Gradient ของ Plastic Potential Function ดังแสดงในรูปที่ 3.1

$$P = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \quad (3.8)$$

$$P' = \frac{\partial g}{\partial s} \quad (3.9)$$

สมการ (3.7) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\dot{q}_\alpha$  ซึ่งเป็นตัวแปรภายในต่างๆ ที่เกี่ยวกับ In-Elastic ของดินอยู่ในรูปของตัวคูณพลาสติกและ hardening parameter  $h_\alpha$



รูปที่ 3.1 Plastic Potential Surface  $g$  and Plastic strain increment direction

จากสมการ (3.1) (3.2) (3.6) และ (3.7) สามารถที่จะหาขนาดของตัวคูณพลาสติกได้ดังนี้

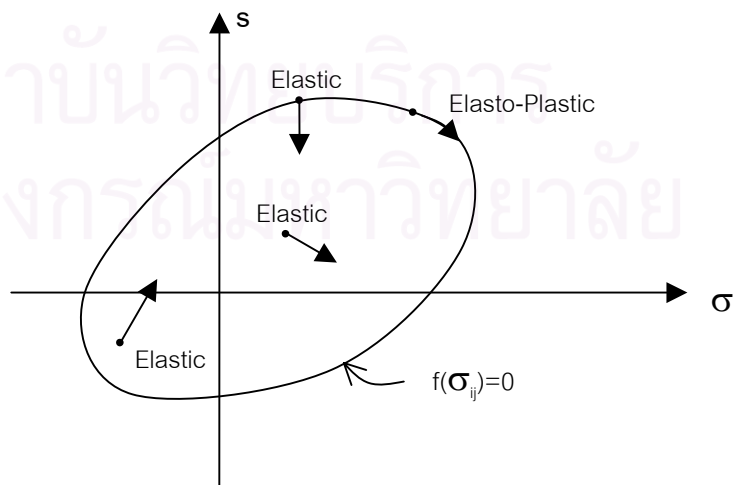
$$\dot{\sigma} = K(\dot{\epsilon} - \dot{\Lambda}P) \tag{3.9}$$

$$\dot{s} = 2G(\dot{\epsilon} - \dot{\Lambda}P') \tag{3.10}$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{2G(Q': \dot{\epsilon}) + KQ\dot{\epsilon}}{H + 2G(Q': P') + KQP} \tag{3.11}$$

### 3.2.3 Yield Function

Plastic Model ต่างๆ ต้องประกอบด้วย Yield function ซึ่งเป็น function ใน Stress Space ใช้กำหนดขอบเขตของ Elastic Region ของดินดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 Yield Surface สำหรับ Plastic Model

Stress Point ที่อยู่ภายใน Yield Surface จะทำให้  $f(\text{Stress State}) < 0$  และจะอยู่ในสถานะ Elastic ส่วน Stress Point ที่อยู่บน Yield Surface จะทำให้  $f(\text{Stress State}) = 0$  และจะอยู่ในสถานะ Elasto-Plastic

Second Order Q ในสมการ (3.11) สามารถหาได้จาก Gradient ของ Yield Function เทียบกับ Stress State ซึ่งแสดงโดย

$$Q = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.12)$$

$$Q' = \frac{\partial f}{\partial s} \quad (3.13)$$

### 3.2.4 Elastic Unloading และ Plastic Loading

สำหรับ Stress Increment หนึ่งๆที่เริ่มต้นที่ Elasto-Plastic State (อยู่บน Yield Surface) แล้วสามารถทำให้เกิด Elastic Strain หรือ Plastic Strain ก็ได้ ขึ้นอยู่กับ Stress State และ Strain Increment สำหรับ Elastic Unloading จะได้ว่า

$$Q : \dot{\sigma} < 0 \quad (3.14ก)$$

หรือ  $(Q' : \dot{s}) + Q \dot{\sigma} < 0 \quad (3.14ข)$

หรือ  $2G(Q' : \dot{e}) + KQ\dot{\epsilon} < 0 \quad (3.14ค)$

และสำหรับ Plastic Loading จะได้ว่า

$$2G(Q' : \dot{e}) + KQ\dot{\epsilon} \geq 0 \quad (3.15)$$

## บทที่ 4

### แบบจำลองดิน

#### 4.1 บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าแบบจำลองดินมีความสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นการเลือกใช้แบบจำลองดินสำหรับปัญหาหนึ่งๆจึงต้องเลือกให้เหมาะสมกับปัญหา

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตในชั้นดินเหนียว แบบจำลองที่มีการใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีอยู่หลายแบบจำลองด้วยกันเช่น Linear Isotropic Elastic Model (LIE Model), Rigidly Perfectly Plastic Model (RPP Model), Elastic Perfectly Plastic Model (EPP Model) เช่น Mohr-Colomb Model, Von Mises Model หรือ Tresca Model, และแบบจำลองดินที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสำหรับดินเหนียวคือ Critical State Soil Model เช่น MCC Model, CASM Model, MIT-E1 Model หรือ MIT-E3 Model

สำหรับงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้แบบจำลองดิน MIT-E3

#### 4.2 แบบจำลองดิน MIT-E3

แบบจำลองดิน MIT-E3 เป็น Effective Stress Model สำหรับ Overconsolidated clays ภายใต้ Cyclic Loading ซึ่งพัฒนาขึ้นโดย Whittle (1987)

##### 4.2.1 ข้อดีของแบบจำลองดิน MIT-E3

แบบจำลองดิน MIT-E3 ได้รวมพฤติกรรมที่สำคัญต่างๆของดินไว้ดังนี้

- 1) Anisotropy
- 2) Small Strain Nonrinality
- 3) Strain Softening Behavior
- 4) Undrained Cyclic Loading
- 5) Coupled Volumetric – Shear Behavior

- 6) Shear Induced Pore Pressure
- 7) Bounding Surface Plasticity

#### 4.2.2 พอร์มูเลชันของแบบจำลองดิน MIT-E3

แบบจำลองดิน MIT-E3 ถูกคิดค้นขึ้นโดยตั้งอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีพลาสติกแบบ Incrementally, Linearized Theory of Rate Independent, Elasto-Plasticity ดังได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 3.2 หลักการของแบบจำลองดิน MIT-E3 สำหรับ Unload-Reload ใน Hydrostatic Compression แสดงในรูปที่ 4.1 และ Bounding Surface และ Critical State Cone แสดงในรูปที่ 4.2

สมการของ Bounding Surface ของแบบจำลองดิน MIT-E3 (Kavvas, 1982) คือ

$$f = (s - \sigma' b) : (s - \sigma' b) - c^2 \sigma' (2\alpha' - \sigma') = 0 \quad (4.1)$$

โดยที่

$s$  คือ Deviatoric Stress tensor

$\sigma'$  คือ Volumetric Stress

$\alpha'$  คือ ตัวแปรที่ควบคุมขนาดของ Bounding Surface

$b$  คือ Second order tensor ที่อธิบายการวางตัว (Orientation) ของ Bounding Surface

$c$  คือ ตัวแปรที่ควบคุมรูปร่างวงรีของ Bounding Surface

สมการของ Critical State Envelop ในแบบจำลองดิน MIT-E3 คือ

$$h = (s - \sigma' \xi) : (s - \sigma' \xi) - k^2 \sigma'^2 = 0 \quad (4.2)$$

หรือ

$$h = (s_1 - \sigma' \xi_1) : (s_1 - \sigma' \xi_1) - k^2 \sigma'^2 = 0 \quad (4.3)$$

โดยที่

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(C_c - C_e) \quad (4.4)$$

$$k = \frac{1}{2}(C_c + C_e) \quad (4.5)$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{6 \sin \phi'_{TC}}{3 - \sin \phi'_{TC}} \quad (4.6)$$

$$C_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{6 \sin \phi'_{TC}}{3 + \sin \phi'_{TC}} \quad (4.7)$$

สมการของ Hardening Rule สำหรับแบบจำลองดิน MIT-E3 คือ

$$\dot{\alpha}' = \alpha' \zeta \dot{\epsilon}^p \quad (4.8)$$

และ

$$\dot{b} = \psi_0 \langle rx \rangle \frac{1}{\alpha'} (s - \sigma' b) \dot{\epsilon}^p \quad (4.9)$$

สมการ Flow Rule คือ

$$P_I = 2c^2 \alpha' rc \quad (4.10ก)$$

$$P_I' = c^2 x (Q' + \langle rc \rangle s) \quad (4.10ข)$$

$$P = P_I + P_0 g_1 \quad (4.10ค)$$

$$H = H_I + H_0 g_2 \quad (4.10ง)$$

โดยที่

$$g_1 = \{(\alpha' - \alpha'_0) / (\alpha' - \alpha'_{0i})\}^r \quad (4.10จ)$$

$$g_1 = \{(\alpha' - \alpha'_0) / (\alpha'_0 - \alpha'_{0i})\} \quad (4.10ฉ)$$

$$H_0 = \frac{1}{\kappa_0} (1 + e) \{(\alpha' - \alpha'_0) h | Q_I || P_I |\} \quad (4.10ช)$$

$$P_0 = -\{2c^2 \alpha' rc + (\eta_I : Q_I')\} \quad (4.10ซ)$$

$$P'_0 = 0 \quad (4.10 ฌ)$$

และ

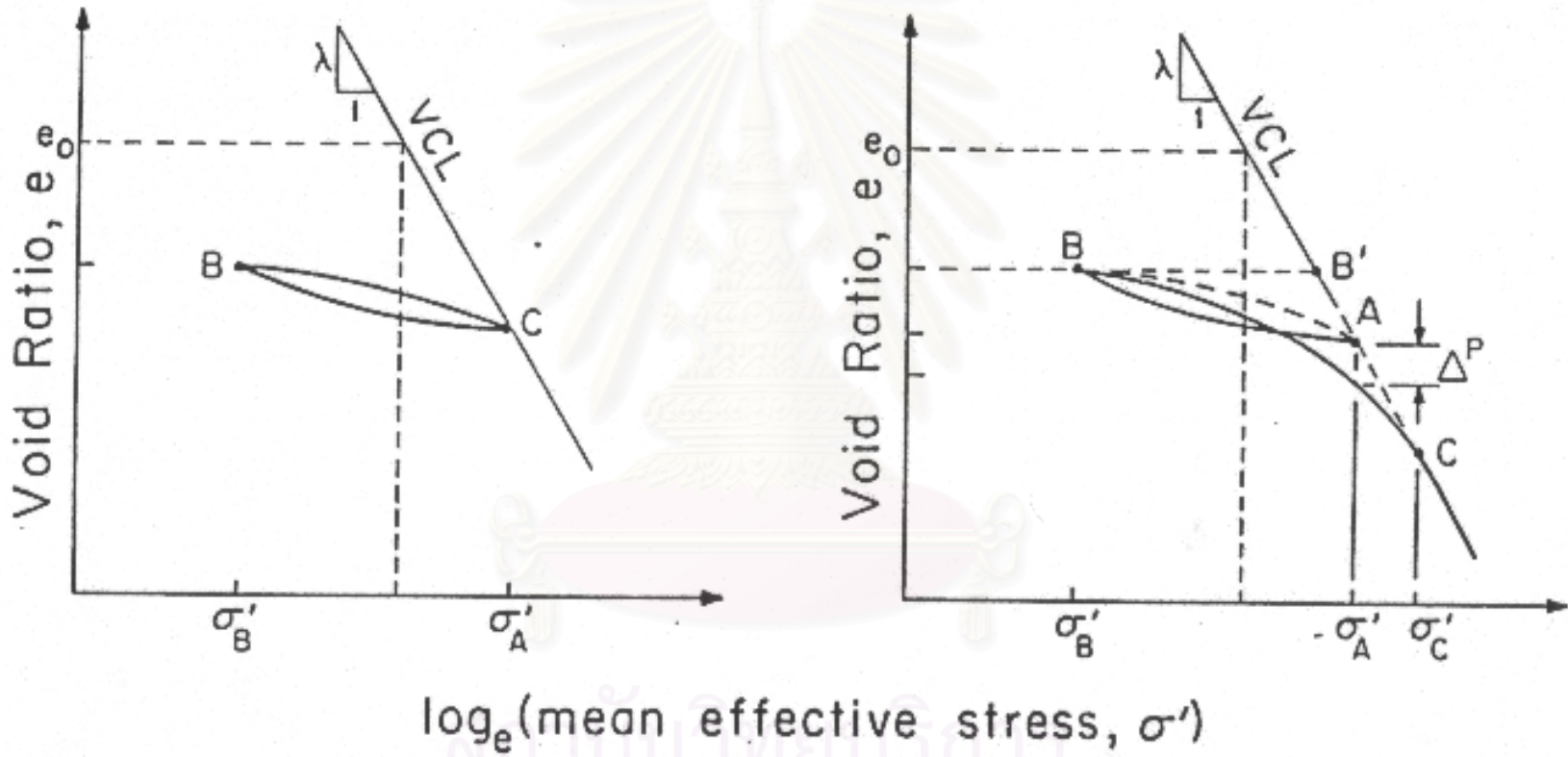
$$\eta = \frac{s}{\sigma'} \quad (4.11)$$

$$\xi = \begin{cases} \frac{\sigma'}{\sigma'_{rev}} & \text{for } \sigma' > \sigma'_{rev} \\ \frac{\sigma'_{rev}}{\sigma'} & \text{for } \sigma'_{rev} > \sigma' \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\xi_s = \{(\eta - \eta_{rev}) : (\eta - \eta_{rev})\}^{1/2} \quad (4.13)$$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

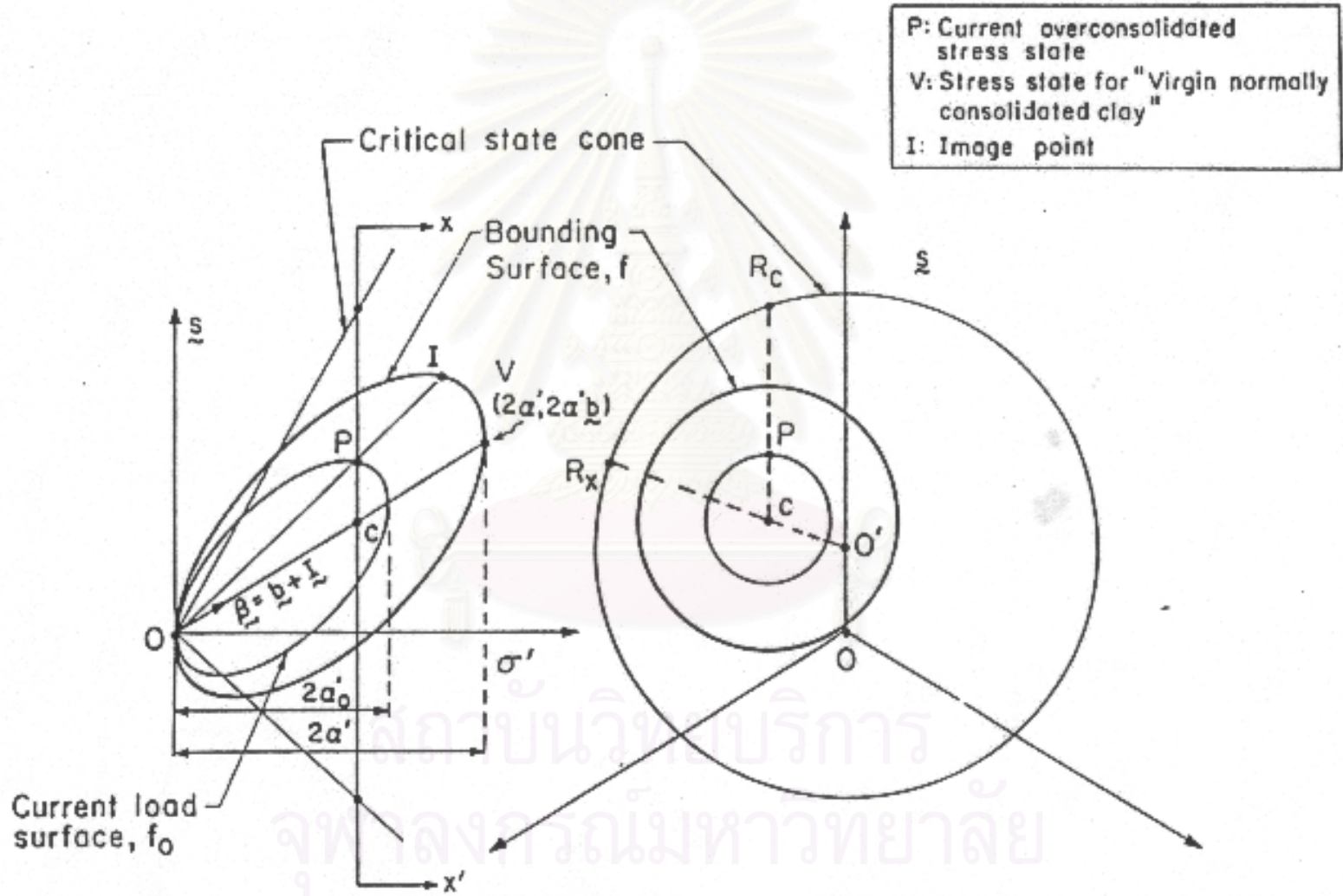




a) 'Perfect Hysteresis'

b) Hysteresis and Bounding Surface Plasticity

รูปที่ 4.2 Bounding Surface และ Critical State Cone สำหรับแบบจำลองดิน MIT-E3

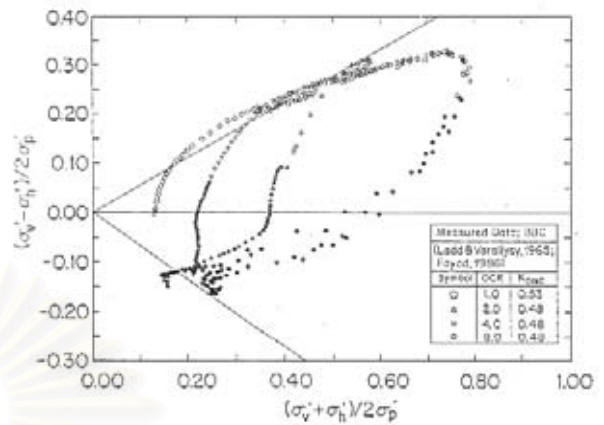
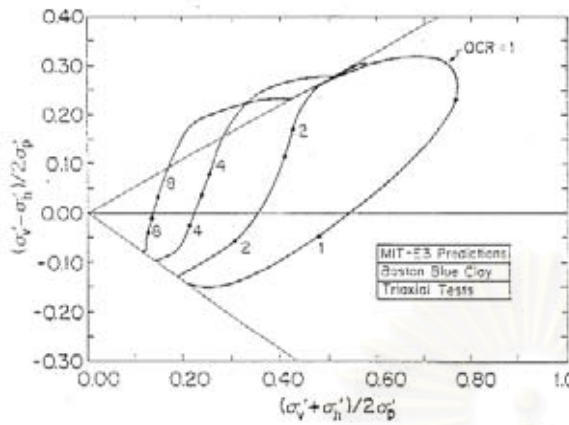


### 4.2.3 พารามิเตอร์สำหรับแบบจำลองดิน MIT-E3

แบบจำลองดิน MIT-E3 มีพารามิเตอร์ทั้งหมด 15 ตัว ซึ่งสามารถหาได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการทั่วไป พารามิเตอร์ทั้ง 15 ตัวประกอบด้วย

- 1) Initial Void Ratio , $e_0$
- 2) Slope of Virgin Compression Line in Oedometer Test,  $\lambda$
- 3) Nonlinear Volumetric Swelling Behaviour, C
- 4) n
- 5) Irrecoverable plastic strain, h
- 6)  $K_{onc}$
- 7)  $2G/K$
- 8)  $\phi'_{TC}$
- 9)  $\phi'_{TE}$
- 10) Undrained Shear Strength, c
- 11) Amount of Post-Peak Strain Softening, St
- 12) Nonlinearity at Small Strains in Undrained Shear,  $\omega$
- 13) Shear Induced Pore Pressure for OC Clay,  $\gamma$
- 14) Small Strain Compressibility at Load Reversal,  $\kappa_0$
- 15) Rate of Evolution of Anisotropy,  $\psi_0$

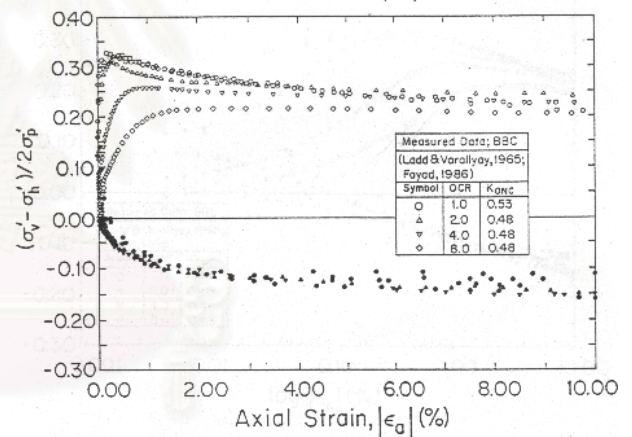
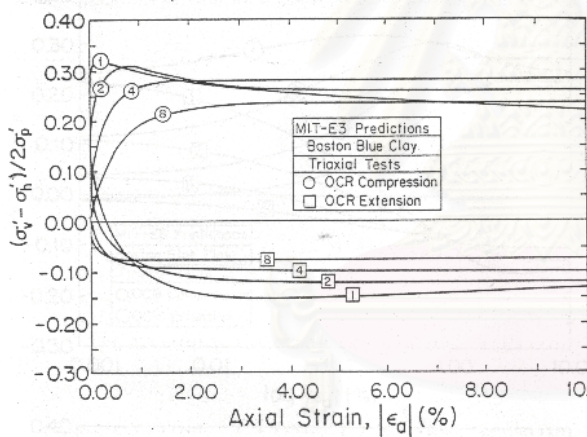
การทดลองเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดนี้ได้ตีพิมพ์ในเอกสารของ Whittle (1987)



ก) Model Prediction

ข) Laboratory Test

รูปที่ 4.3 Stress Path ของ Undrained Triaxial Compression Test (BBC)



1) Model Prediction

ข) Laboratory Test

รูปที่ 4.4 Stress-Strain Relation ของ Undrained Compression Test (BBC)

## บทที่ 5

### การตรวจสอบโปรแกรมและการประยุกต์

#### 5.1 บทนำ

ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณทั่วไป ความถูกต้องและประสิทธิภาพของการคำนวณเป็นเรื่องสำคัญมาก การตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณเบื้องต้นซึ่งได้แก่การตรวจสอบความถูกต้องของรหัสโปรแกรมและความถูกต้องของการทำงานของโปรแกรมย่อยส่วนใหญ่จะอยู่ในขั้นตอนการเขียนโปรแกรมซึ่งเรียกว่า Debug ส่วนการตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีที่ใช้ในการคำนวณของการพัฒนาโปรแกรมก็จะเป็นขั้นตอนท้ายสุดคือ การตรวจสอบความถูกต้องผลการคำนวณและประสิทธิภาพของโปรแกรมและการประยุกต์ใช้โปรแกรมกับปัญหาต่างๆ

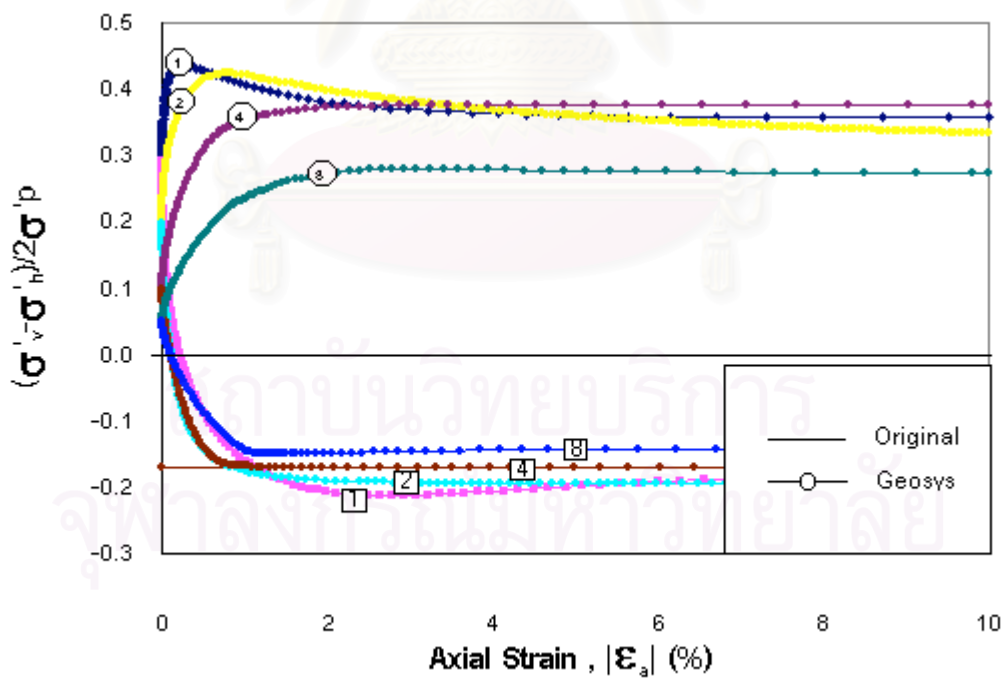
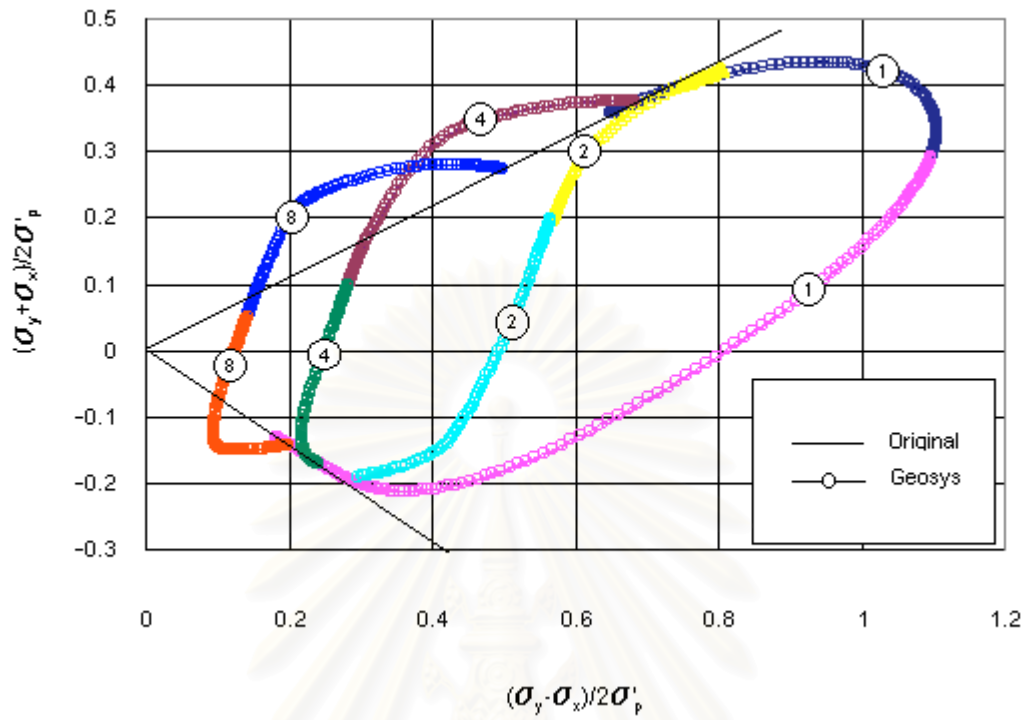
#### 5.2 การตรวจสอบโปรแกรม

การตรวจสอบความถูกต้องและประสิทธิภาพของการคำนวณของโปรแกรมในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ

- 1) การตรวจสอบความถูกต้องในการ คำนวณส่วน Stress-Strain Relationship Integration หรือการตรวจสอบการคำนวณเกี่ยวกับแบบจำลองดินอย่างเดี่ยวซึ่งไม่เกี่ยวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 2) การตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Coupled Consolidation ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3

##### 5.2.1 การตรวจสอบโปรแกรมส่วน Stress-Strain Relation Integration

โปรแกรมในวิทยานิพนธ์ได้ใช้วิธี Explicit Integration with Automatic Error Control สำหรับ แบบจำลองดิน MIT-E3 ซึ่งเสนอโดย Sloan et al (2001) เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากโปรแกรม Stress-Strain Integration ซึ่งพัฒนาโดย Whittle (1987) ผลการเปรียบเทียบแสดงในรูปที่ 5.1 และ 5.2



รูปที่ 5.1 ผลการเปรียบเทียบความถูกต้องของ Stress-Strain Integration

	Success inc.	Failed inc.	Total inc.	Tolerance	Used time(s)
MIT subroutine (Comp.)	-	-	10000	1.0d-6*	162.53
MIT subroutine (Ext.)	-	-	10000	1.0d-6*	162.53
New algorithm (Comp.)	102	7	109	0.001	0.05
New algorithm (Ext.)	131	10	141	0.001	0.10

\* Tolerance of strain increment size(max. strain increment size)

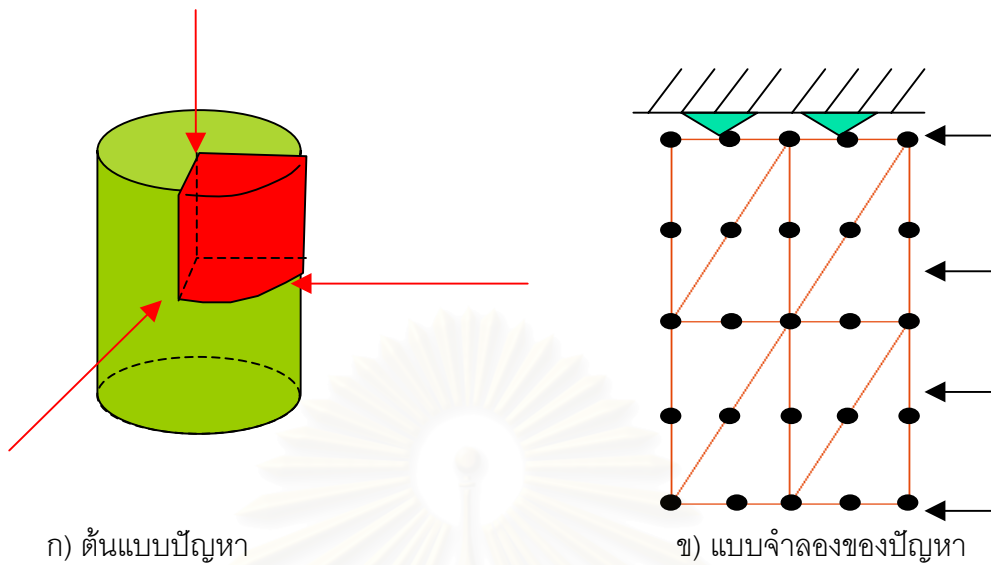
### รูปที่ 5.2 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ Stress-Strain Integration

จากผลการตรวจสอบในรูปที่ 5.1 แสดงให้เห็นว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นคำนวณได้ถูกต้อง และจากผลการเปรียบเทียบในรูปที่ 5.2 จะได้ว่า โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความเร็วสูงกว่า โปรแกรมของ Whittle ประมาณ 1600 เท่า ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีประสิทธิภาพสูงกว่า

#### 5.2.2 การตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Coupled Consolidation ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3

ตัวอย่างปัญหาที่ง่ายและเหมาะสมในการตรวจสอบการการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Coupled ร่วมกับแบบจำลองดิน MIT-E3 ของโปรแกรมคือปัญหาการทดลองแรงอัดสามแกนแบบไม่ระบายน้ำ โดยตัวอย่างดินในปัญหาและแบบจำลองที่ใช้แทนปัญหาในการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 5.3

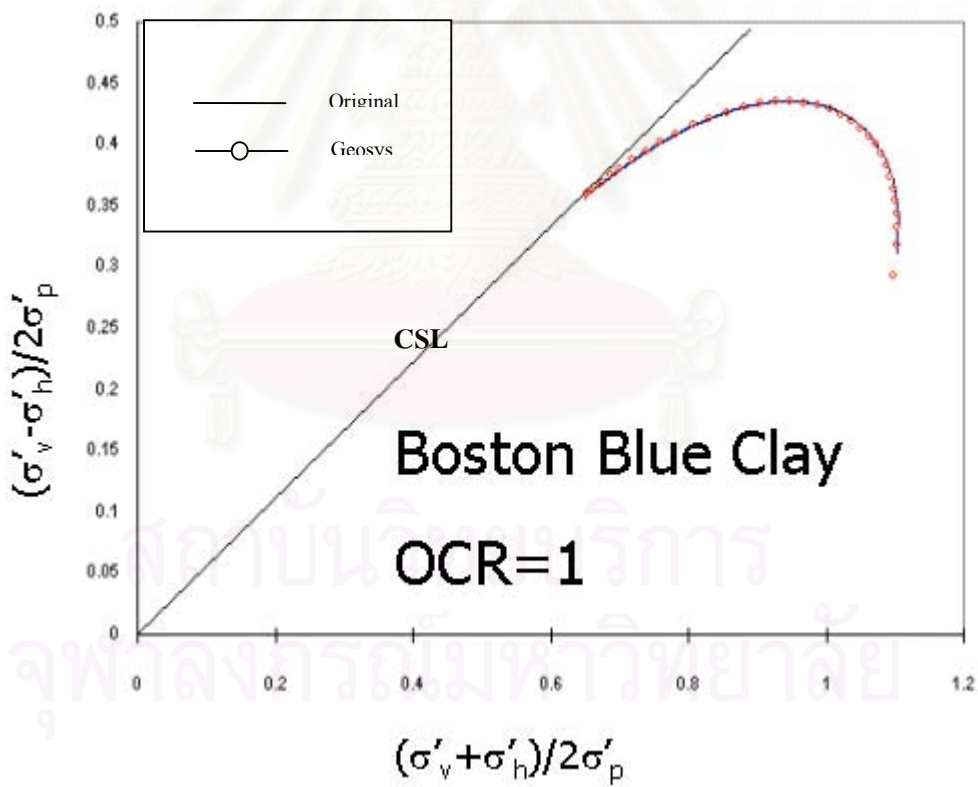
การวิเคราะห์ในตัวอย่างนี้ใช้พารามิเตอร์ของดินเหนียว Boston Blue Clay (พารามิเตอร์แสดงไว้ในภาคผนวก) ผลการวิเคราะห์แสดงในรูปที่ 5.4 ซึ่งแสดงการเปรียบเทียบกับการผลการคำนวณในตัวอย่างของ Stress-Strain Relationship Integration



ก) ต้นแบบปัญหา

ข) แบบจำลองของปัญหา

รูปที่ 5.3 ปัญหาการทดสอบแรงอัดสามแกนแบบไม่ระบายน้ำในการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม



รูปที่ 5.4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ จากไฟไนต์เอลิเมนต์กับ Stress-Strain Relationship

Integration

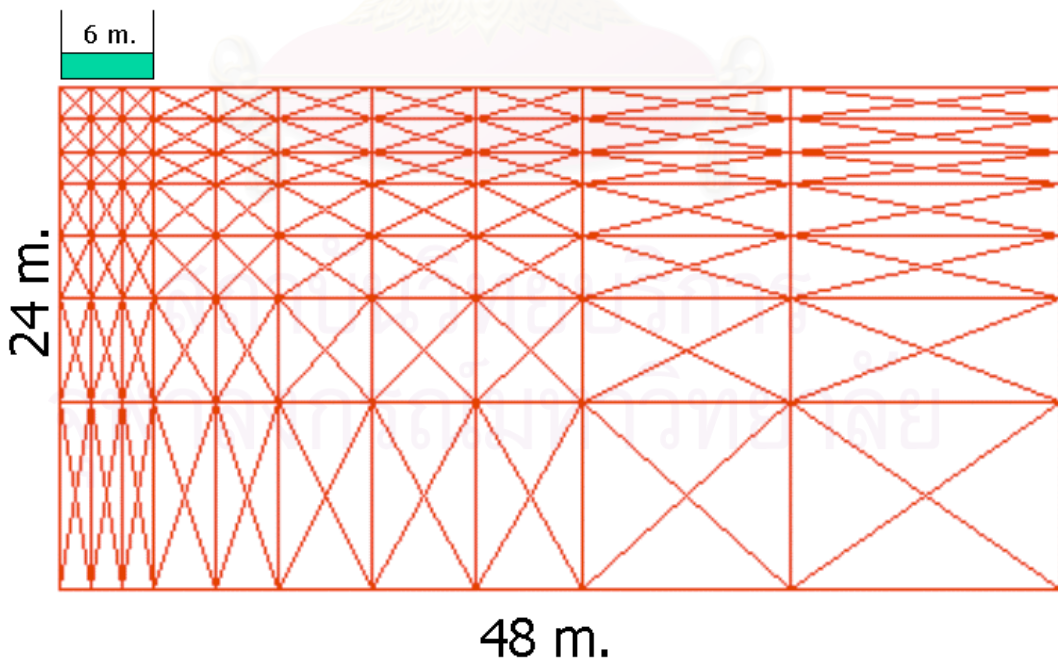


### 5.3 การประยุกต์ใช้โปรแกรมในการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติ

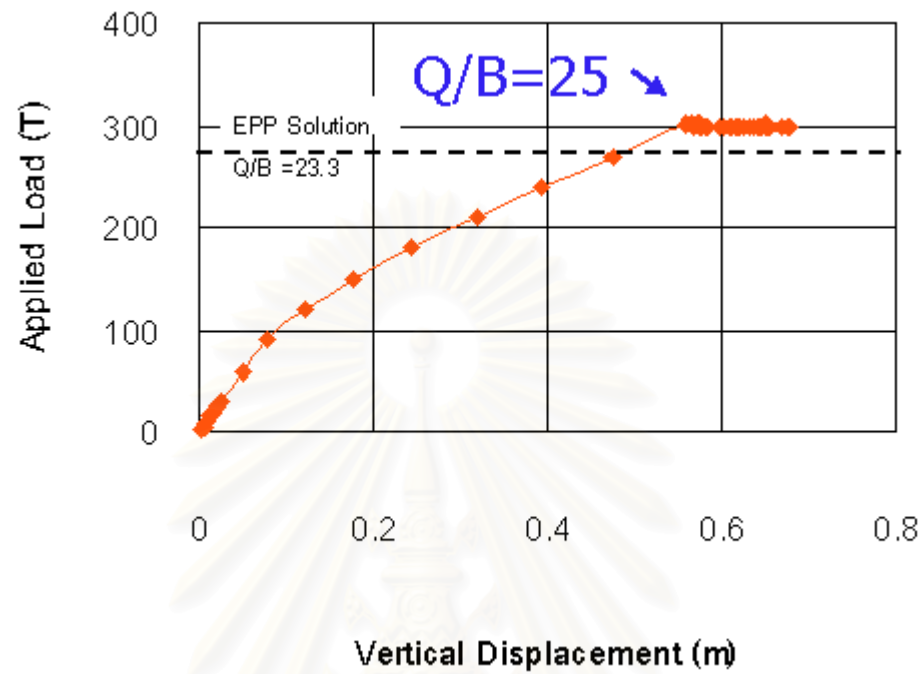
ปัญหาแบบสองมิติที่สำคัญและพบเห็นได้บ่อยซึ่งได้แก่ การวิเคราะห์ Undrained Bearing Capacity ของ Footing รูปแบบของปัญหาที่จะประยุกต์นี้คือ Flexible Rough Strip Footing แสดงในรูปที่ 5.5 ซึ่งมวลดินถูกแทนด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 Node จำนวนทั้งหมด 280 เอลิเมนต์ ความลึกและความกว้างของดินเท่ากับ 24 เมตร และ 48 เมตร ตามลำดับ ขนาดของครึ่งหนึ่งของ Footing เท่ากับ 6 เมตร Footing

การวิเคราะห์แบ่งออกเป็นสองช่วงคือ

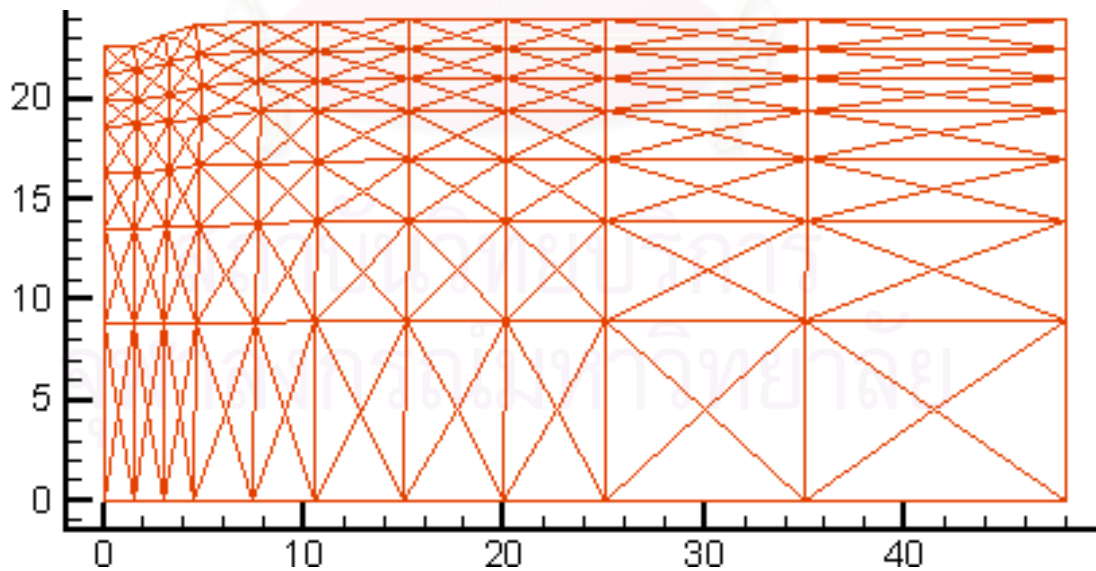
- 1) Initial Stress เป็นการหาค่าหน่วยแรงเริ่มต้นในมวลดินโดยใช้น้ำหนักของมวลดินเป็นแรงภายนอก กระทำในช่วงระยะเวลา  $t = 1.0D10$  วัน การวิเคราะห์ในช่วงนี้ถูกกำหนดให้เป็นแบบ Nonlinear Elastic ซึ่งสามารถทำได้โดยกำหนดให้  $P'_o$  มีค่าสูงมาก ซึ่งในตัวอย่างนี้กำหนดให้เท่ากับ  $50000.0 \text{ T/m}^2$
- 2) Footing Loading เป็นการวิเคราะห์หลังจากสิ้นสุดการวิเคราะห์ Initial Stress โดยที่  $P'_o$  ได้เปลี่ยนให้เป็นไปตามหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจริงในมวลดินและค่าของ Overconsolidation Ratio (OCR) ในตัวอย่างนี้  $OCR=1.0$  แรง Footing ทั้งหมดกระทำสิ้นสุดในช่วงระยะเวลา 0.01 วันเพื่อจำลองการเกิด Undrained Loading



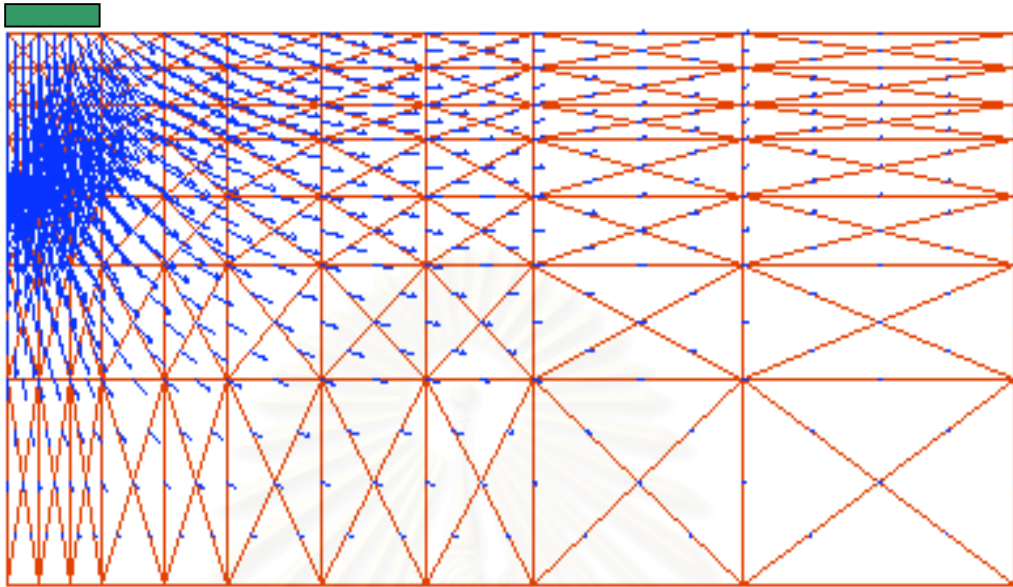
รูปที่ 5.5 ปัญหา Flexible Rough Strip Footing



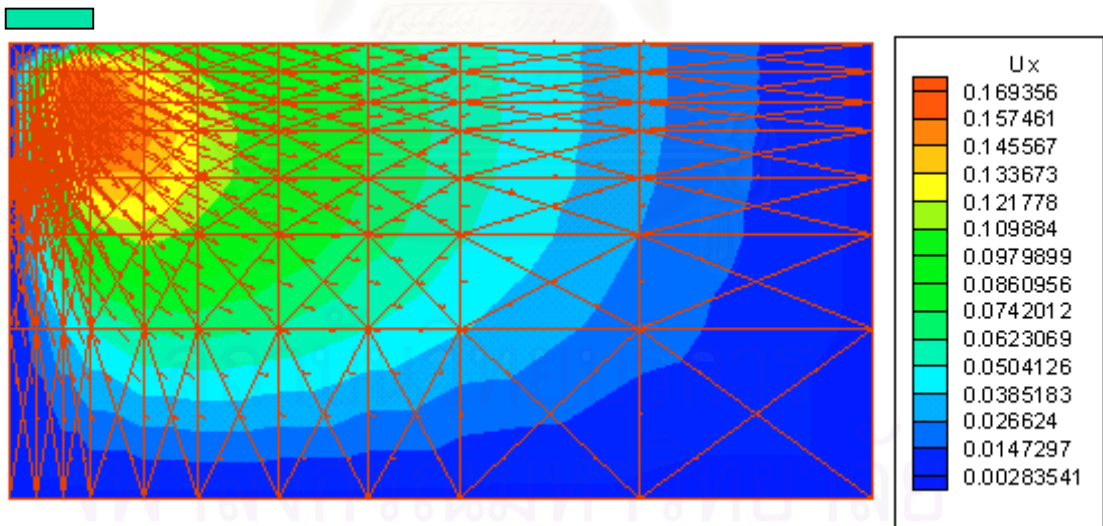
รูปที่ 5.6 Load-Displacement Curve ของปัญหา Footing



รูปที่ 5.7 การเสียรูปของดินเมื่อสิ้นสุดการ Loading



รูปที่ 5.8 เวกเตอร์การเคลื่อนตัวของดิน (ขยาย 10 เท่า)



รูปที่ 5.9 Horizontal Displacement Contour



รูปที่ 5.10 Vertical Displacement Countour

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 6

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 สรุปการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของดินในงานวิศวกรรมปฐพี ชี้วัดความสามารถต่างๆของโปรแกรมประกอบด้วย 1) แบบจำลองดินของ MIT 2) สามารถวิเคราะห์แบบ Couple Displacement-Pore Pressure และ 3) การหาคำตอบแบบกึ่งอัตโนมัติ โดยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาปรับปรุงเพิ่มเติมจาก Finite Element Code ของโปรแกรม SNAC (Abbo and Sloan, 1997) การทดสอบความถูกต้องและประสิทธิภาพของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมากระทำโดยการวิเคราะห์ปัญหาการทดลองแรงอัดสามแกนแบบไม่ระบายน้ำ ซึ่งแบ่งการวิเคราะห์เป็นสองแบบคือ การวิเคราะห์ด้วยการอินทิเกรตสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของแบบจำลองดิน MIT-E3 โดยใช้วิธีแบบกึ่งอัตโนมัติและควบคุมค่าคลาดเคลื่อน และการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลการวิเคราะห์การอินทิเกรตสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดโดยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ ซึ่งอยู่ในรูป Stress Paths และ Stress-Strain Curves เปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์การอินทิเกรตสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดจากโปรแกรมที่จาก MIT แสดงให้เห็นว่าเส้นกราฟที่มาจากทั้งสองโปรแกรมทับเป็นเส้นเดียวกันทุกกรณี ซึ่งหมายถึงการคำนวณเชิงตัวเลขของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่มีความถูกต้องและมีความละเอียดสูง นอกจากนี้แล้วโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่มีความเร็วในการคำนวณสูงกว่าโปรแกรมจาก MIT เป็นอย่างมาก โดยที่อัตราส่วนความเร็วของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาต่อความเร็วของโปรแกรมจาก MIT มีค่าประมาณ 1600-3200 เท่า ซึ่งแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมามีประสิทธิภาพสูง

ผลการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาเดียวกัน เปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์จากการอินทิเกรตสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด ให้เส้นกราฟที่ทับกันสนิท ซึ่งพิสูจน์ว่าการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความถูกต้องและมีความละเอียดสูง

การประยุกต์ใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาแก้ปัญหาสองมิติในทางวิศวกรรมปฐพี โดยเลือกปัญหา Undrained Bearing Capacity กับ Strip Footing และเลือกใช้พารามิเตอร์สำหรับแบบจำลอง

ดิน MIT-E3 ของดินเหนียว Boston Blue Clay ลักษณะของ Footing กำหนดให้เป็นแบบ Flexible และ Rough หน่วยแรงเริ่มต้นในมวลดินที่ Gauss Point กำหนดโดยการวิเคราะห์ปัญหาแบบ Elastic โดยใช้น้ำหนักดินเป็นแรงภายนอก สำหรับ OCR = 1 ได้ค่า Undrained Bearing Capacity  $q=Q/B = 25.0 \text{ T/m}^2$  และเมื่อเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบ Uncoupled ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของโปรแกรม SNAC ร่วมกับแบบจำลองดินแบบ Elastic Perfectly Plastic (EPP) โดย Yield Criteria ของ Mohr-Coulomb ได้  $q=Q/B = 23.3 \text{ T/m}^2$  ซึ่งมีค่าน้อยกว่าการวิเคราะห์แบบ Coupled ด้วยแบบจำลองดิน MIT-E3 4.6%

## 6.2 ข้อเสนอแนะและข้อควรระวังในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์ปัญหาแบบ Coupled นั้นมีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาแบบ Uncoupled มาก การหาคำตอบของปัญหา Coupled ด้วยวิธีของ backward Euler และ Thomas and Gladwell ซึ่ง Governing Equations อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้น ใช้ได้ดีในกรณีวิเคราะห์ปัญหาแบบ Elastic แต่มักมีปัญหาในการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองดินแบบ Elasto-Plastic ปัจจัยที่มีผลถึงการหาคำตอบไม่ได้ประการหนึ่งคือ Fluid Boundary Conditions

ถึงแม้ว่าการหาคำตอบไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีกัวออตโนมิตีและควบคุมค่าคลาดเคลื่อนจะทำให้ผลการวิเคราะห์มีความละเอียดสูงและมีประสิทธิภาพสูง แต่มักมีปัญหาเกิดขึ้นเสมอสำหรับ Input ที่ไม่ระมัดระวังหรือในปัญหาที่มีความซับซ้อนสูง ซึ่งทำให้เกิดการไม่ Converge ของคำตอบภายใต้ Tolerance ที่กำหนดเอง ทำให้ต้องทดลองสุ่มเปลี่ยนค่า Input หรือ Tolerance จนกว่าจะได้คำตอบที่น่าพอใจซึ่งทำให้เสียเวลามากหรือบางทีอาจจะหาค่าที่เหมาะสมไม่ได้เลย ดังนั้นการใช้วิธีหาคำตอบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบกัวออตโนมิตีนั้นจึงควรมีการศึกษาเพิ่มเติมถึงค่า Input ที่เหมาะสมในแต่ละกรณีสำหรับปัญหาหลายๆแบบด้วย

พารามิเตอร์ที่มักมีปัญหาทำให้การหาคำตอบแบบกัวออตโนมิตีไม่ได้คำตอบซึ่งได้แก่

- 1) Rate of Loading
- 2) Tolerance
- 3) ความละเอียดของ Mesh
- 4) Fluid Boundary conditions

นอกจากการหาคำตอบด้วยวิธีกัวออตโนมิตีแล้ว โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นยังสามารถหาคำตอบแบบไม่กัวออตโนมิตีได้ด้วย (รายละเอียดดูได้จากคู่มือของโปรแกรม SNAC) ซึ่งเป็นความสามารถที่

ฐานเดิมของโปรแกรม SNAC และควรมีการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีก้าวอัตโนมัติ  
เปรียบเทียบกับวิธีไม่ก้าวอัตโนมัติด้วย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## รายการอ้างอิง

### ภาษาอังกฤษ

- Booker, J.R. (1974) The consolidation of a finite layer subject to surface loading, Int. J. Solids Struct., 10, pp.1053-1065.
- Booker, J.R. and Small, J.C. (1982a) Finite layer analysis of consolidation. I, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 6, pp.151-171.
- Booker, J.R. and Small, J.C. (1982b) Finite layer analysis of consolidation. II, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 6, pp.173-194.
- Davis, E.H. and Booker, J.R. (1973) The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays, Geotechnique, 23, 4, pp.551-563.
- Drucker, D.C. and Prager, W. (1952) Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Q. Appl. Math. 10 (2): pp.157-175
- Hardin, B.O. (1972). Effects of Strain Amplitude on the Shear Modulus of Soils, Technical Report No. AFWL-TR-72-201, Air Force Base, New Mexico, 63p.
- Manoharan, N. and Dasgupta, S.P. (1995) Consolidation analysis of elastoplastic soil, Comput. Struct., 54, pp.1005-1021.
- Roscoe, K.H. and Burland, J.B. (1968) On the generalized stress-strain behavior of “wet” clay. Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp.535-609.
- Sandhu, R.S. and Wilson, E.L. (1969) Finite element analysis of seepage in elastic media, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 95(EM3), pp.641-652.
- Sheng, D., Sloan, S.W. and Yu, S.H. (2000) Aspects of finite element implementation of critical state models, Computational Mechanics, 26, pp.185-196.
- Sloan, S.W., Abbo, A.J. (1999) Biot consolidation analysis with automatic time stepping and error control. Part 1: Theory and implementation, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 23, pp.467-492.
- Sloan, S.W., Abbo, A.J. and Sheng, D. (2000) Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control, Engineering computations, 18, 1/2, pp.121-154.
- Sloan, S.W. and Randolph, M.F. (1982) Numerical prediction of collapse loads using finite element methods, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 6, pp.47-76.



Terzaghi, K (1960) Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrokynamischen Spannungsercheinungen, Originally published in 1923 and reprinted in From Theory to Practice in Soil Mechanics, Wiley, New York, pp. 133-146

Whittle, A.J. (1987) A constitutive model for overconsolidated clays with application to the cyclic loading of friction piles, Massachusetts Institute of Technology, PhD. Thesis



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บรรณานุกรม

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,  
2542

สุรฉัตร สัมพันธ์รักษ์. วิศวกรรมปฐพี. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย,  
2540




สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



# ภาคผนวก

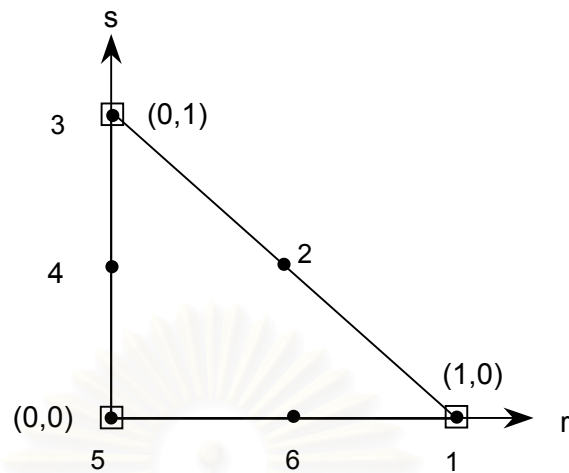
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ก.

Element Type, Shape Functions and Derivatives of Shape Function

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



DOF	Symbol
Displacement	●
Pore Pressure	□

### Shape Functions

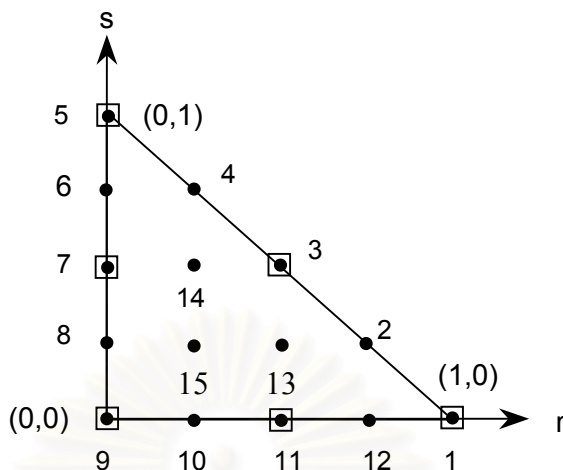
Node	r	s	f	f*
1	1	0	$2r(r-0.5)$	r
2	0.5	0.5	$4rs$	-
3	0	1	$2s(s-0.5)$	s
4	0	0.5	$4s(1-r-s)$	-
5	0	0	$2(1-r-s)(1-r-s-0.5)$	$(1-r-s)$
6	0.5	0	$4r(1-r-s)$	-

### Derivatives of Shape Function

Node	$\delta f / \delta r$	$\delta f / \delta s$	$\delta f / \delta r^*$	$\delta f / \delta s^*$
1	$2(2r-0.5)$	0	1	0
2	4s	4r	-	-
3	0	$2(2s-0.5)$	0	1
4	-4s	$4(1-r-2s)$	-	-
5	$-2[(1-r-s)+(1-r-s-0.5)]$	$-2[(1-r-s)+(1-r-s-0.5)]$	-1	-1
6	$4(1-2r-s)$	-4r	-	-

\* For pore pressure node

รูปที่ ก-1 6-Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis



DOF	Symbol
Displacement	●
Pore Pressure	□

Shape Functions

Node	r	s	f	f*
1	1	0	$(32/3)r(r-0.25)(r-0.5)(r-0.75)$	$2r(r-0.5)$
2	0.75	0.25	$(128/3)r(1-r-s)(r-0.25)(r-0.5)$	-
3	0.5	0.5	$64r(1-r-s)(r-0.25)(s-0.25)$	$4rs$
4	0.25	0.75	$(128/3)r(1-r-s)s-0.25)(s-0.5)$	-
5	0	1	$(32/3)s(s-0.25)(s-0.5)(s-0.75)$	$2s(s-0.5)$
6	0	0.75	$(128/3)s(1-r-s)(s-0.25)(s-0.5)$	-
7	0	0.5	$64s(1-r-s)(s-0.25)(1-r-s-0.5)$	$4s(1-r-s)$
8	0	0.25	$(128/3)s(1-r-s)(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)$	-
9	0	0	$(32/3)(1-r-s)(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)(1-r-s-0.75)$	$2(1-r-s)(1-r-s-0.5)$
10	0.25	0	$(128/3)s(1-r-s)(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)$	-
11	0.5	0	$64r(1-r-s)(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)$	$4r(1-r-s)$
12	0.75	0	$(128/3)rs(1-r-s)(r-0.25)$	-
13	0.5	0.25	$128rs(1-r-s)(r-0.25)$	-
14	0.25	0.5	$128rs(1-r-s)(s-0.25)$	-
15	0.25	0.25	$128rs(1-r-s)(1-r-s-0.25)$	-

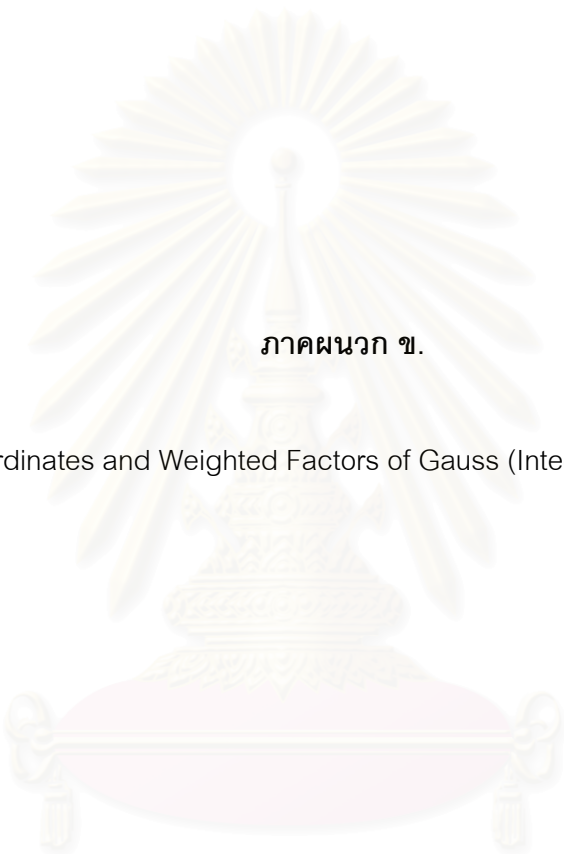
รูปที่ ก-2 15-Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis (1 ใน 2)

## Derivatives of Shape Function

_Node	$\delta f / \delta r$	$\delta f / \delta s$	$\delta f / \delta r^*$	$\delta f / \delta s^*$
1	$(32/3)[(r-0.5)(r-0.75)(2r-0.25)+r(r-0.25)((r-0.75)+(r-0.5))]$	0	$2(2r-0.5)$	0
2	$(128/3)s[(r-0.5)(2r-0.25)+r(r-0.25)]$	$(128/3)r(r-0.25)(r-0.5)$	-	-
3	$64s(s-0.25)(2r-0.25)$	$64r(r-0.25)(2s-0.25)$	4s	4r
4	$(128/3)s(s-0.25)(s-0.5)$	$(128/3)r[(s-0.5)(2s-0.25)+s(s-0.25)]$	-	-
5	0	$(32/3)[(s-0.5)(s-0.75)(2s-0.25)+s(s-0.25)(2s-1.25)]$	0	$2(2s-0.5)$
6	$-(128/3)s(s-0.25)(s-0.5)$	$(128/3)[(1-r-s)((s-0.5)(2s-0.25)+s(s-0.25))+s(s-0.25)(s-0.5)]$	-	-
7	$-64s(s-0.25)[(1-r-s-0.5)+(1-r-s)]$	$64[(1-r-s)(1-r-s-0.25)(2s-0.25)-s(s-0.25)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))]$	-4s	$4(1-r-2s)$
8	$-(128/3)s[(1-r-s-0.5)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))+(1-r-s)(1-r-s-0.5)]$	$(128/3)[(1-r-s)(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)-s((1-r-s-0.5)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))+(1-r-s)(1-r-s-0.25))]$	-	-
9	$-(32/3)[(1-r-s-0.5)(1-r-s-0.75)(1-r-s-0.5)-r(1-r-s-0.5)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))+(1-r-s)(1-r-s-0.25)]$	$-(32/3)[(1-r-s-0.5)(1-r-s-0.75)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))+(1-r-s)(1-r-s-0.25)((1-r-s-0.5)+(1-r-s-0.75))]$	$-2[(1-r-s)+(1-r-s-0.5)]$	$-2[(1-r-s)+(1-r-s-0.5)]$
10	$(128/3)[(1-r-s)*(1-r-s-0.25)(1-r-s-0.5)-r((1-r-s-0.5)((1-r-s-0.25)+(1-r-s)))+(1-r-s)(1-r-s-0.25)]$	$-(128/3)r[(1-r-s-0.5)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))+(1-r-s)(1-r-s-0.25)]$	-	-
11	$64[(1-r-s)(1-r-s-0.25)(2r-0.25)-r(r-0.25)((1-r-s-0.25)+(1-r-s))]$	$-64r(r-0.25)[(1-r-s-0.25)+(1-r-s)]$	$4(1-2r-s)$	-4r
12	$(128/3)[(1-r-s)((r-0.5)(2r-0.25)+r(r-0.25))-r(r-0.25)(r-0.5)]$	$-(128/3)r(r-0.25)(r-0.5)$	-	-
13	$128s[(1-r-s)(2r-0.25)-r(r-0.25)]$	$128r(r-0.25)(1-r-2s)$	-	-
14	$128s(s-0.25)(1-2r-s)$	$128r[(1-r-s)(2s-0.25)-s(s-0.25)]$	-	-
15	$128s[(1-r-s)*(1-r-s-0.25)-r(1-2r-s)]$	$128r[(1-r-s)(1-r-s-0.25)-s((1-r-s)+(1-r-s-0.25))]$	-	-

\* For pore pressure node

รูปที่ ก-2 15-Noded Element สำหรับการวิเคราะห์แบบ Coupled Analysis (2 ใน 2)

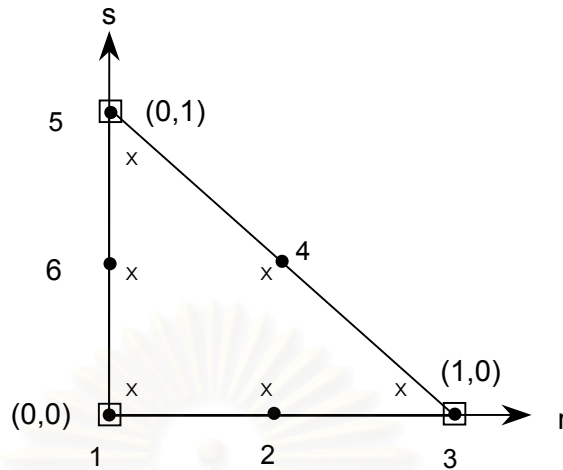


ภาคผนวก ข.

Coordinates and Weighted Factors of Gauss (Integration) Points

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





DOF	Symbol
Displacement	●
Pore Pressure	□

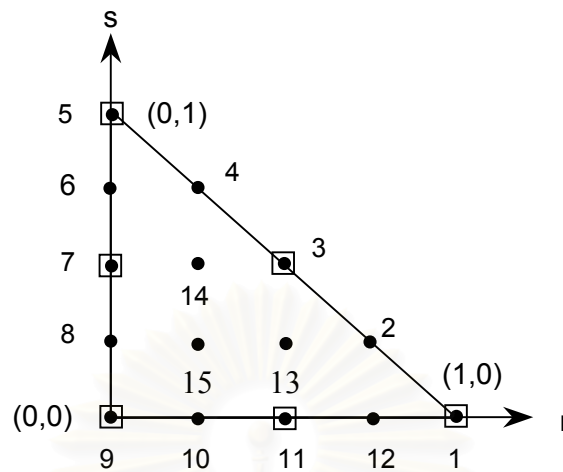
3 Points Scheme (for Pore Pressure Nodes)

Point	r	s	Weight
1	0.6666666666666666	0.1666666666666666	0.1666666666666666
2	0.1666666666666666	0.6666666666666666	0.1666666666666666
3	0.1666666666666666	0.1666666666666666	0.1666666666666666

6 Points Scheme (for Displacement Nodes)

Point	r	s	Weight
1	0.816847572980459	0.091576213509771	0.054975871827661
2	0.091576213509771	0.816847572980459	0.054975871827661
3	0.091576213509771	0.091576213509771	0.054975871827661
4	0.108103018168070	0.445948490915965	0.111690794839006
5	0.445948490915965	0.108103018168070	0.111690794839006
6	0.445948490915965	0.445948490915965	0.111690794839006

รูปที่ ๓-1 Coordinates and Weighted Factors of Gauss Points for 6-Noded Element



DOF	Symbol
Displacement	●
Pore Pressure	□

16 Gauss Points Scheme

Point	r	s	Weight
1	0.333333333333333	0.333333333333333	0.072157803838894
2	0.658861384496478	0.170569307751761	0.051608685267359
3	0.170569307751761	0.658861384496478	0.051608685267359
4	0.170569307751761	0.170569307751761	0.051608685267359
5	0.898905543365938	0.050547228317031	0.016229248811599
6	0.050547228317031	0.898905543365938	0.016229248811599
7	0.050547228317031	0.050547228317031	0.016229248811599
8	0.081414823414554	0.459292588292723	0.047545817133642
9	0.459292588292723	0.081414823414554	0.047545817133642
10	0.459292588292723	0.459292588292723	0.047545817133642
11	0.008394777409958	0.263112829634638	0.013615157087217
12	0.008394777409958	0.728492392955404	0.013615157087217
13	0.728492392955404	0.008394777409958	0.013615157087217
14	0.728492392955404	0.263112829634638	0.013615157087217
15	0.263112829634638	0.728492392955404	0.013615157087217
16	0.263112829634638	0.008394777409958	0.013615157087217

รูปที่ ๗-2 Coordinates and Weighted Factors of Gauss Points for 15-Noded Element

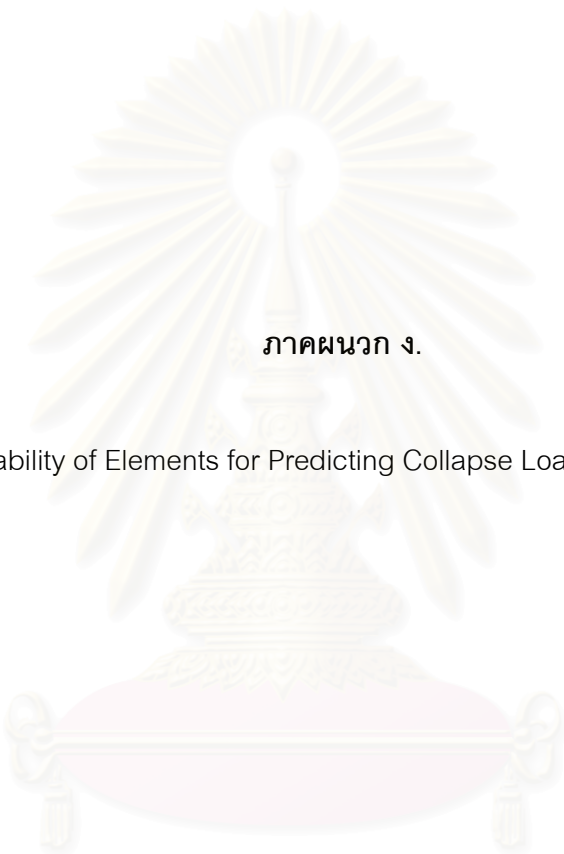
ภาคผนวก ค.

Published data for Parameters of MIT-E3 Soil Model

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Input Parameter	Boston Blue Clay	Empire Clay	London Clay
$e_0$	1.12	1.26	1.21
$K_{0NC}$	0.48	0.62	0.62
$\kappa_0$	0.001	0.0035	0.001
$\lambda$	0.184	0.274	0.172
$2G/K$	1.05	0.86	0.99
$\phi'_{TC}$	$33.4^\circ$	$23.6^\circ$	$22.5^\circ$
$\phi'_{TE}$	$45.9^\circ$	$21.6^\circ$	$22.5^\circ$
$c$	0.86	0.75	0.80
$S_t$	4.5	3.0	3.9
$C$	22.0	24.0	65.0
$n$	1.60	1.75	1.50
$\omega$	0.07	0.20	0.20
$h$	0.2	0.2	0.1
$\gamma$	0.5	0.5	0.5
$\psi_0$	100.0	100.0	100.0

รูปที่ ค-1 Input Parameters for MIT-E3 Soil Model











ภาคผนวก ง.

Suitability of Elements for Predicting Collapse Loads Accurately

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Figure 9-1 Suitable of Element for Predict Collapse Load

Element Type	Degrees of Freedom per Element	Plane Strain				Axisymmetric			
		Integration Rule	Constraints per Element	Ratio Degrees of Freedom / Constraints	Suitable	Integration Rule	Constraints per Element	Ratio Degrees of Freedom / Constraints	Suitable
 constant strain triangle*	1	1-point	1	$\frac{1}{1}$	Yes	3-point	3	$\frac{1}{3}$	No
 linear strain triangle*	4	3-point	3	$\frac{4}{3}$	Yes	6-point	6	$\frac{2}{3}$	No
 quadratic strain triangle	9	6-point	6	$\frac{3}{2}$	Yes	12-point	10	$\frac{9}{10}$	No
 cubic strain triangle	16	12-point	10	$\frac{8}{5}$	Yes	16-point	15	$\frac{16}{15}$	Yes
 4-noded quadrilateral*	2	2x2	3	$\frac{2}{3}$	No	3x3	5	$\frac{2}{5}$	No
 8-noded quadrilateral*	6	3x3	6	1	Yes	3x3	9	$\frac{2}{3}$	No
 12-noded quadrilateral	10	4x4	10	1	Yes	4x4	13	$\frac{10}{13}$	No
 17-noded quadrilateral	16	5x5	14	$\frac{8}{7}$	Yes	5x5	19	$\frac{16}{19}$	No

Notes: - All results for rectangular quadrilaterals and straight-sided triangles. The number of constraints per element shown are minima for quadrilateral and triangular elements of arbitrary shape.  
 - \* How entries after Nagtegaal, Parku and Rice<sup>1</sup>.  
 - Integration rules for triangles from Laurson and Gallert<sup>11</sup>.



ภาคผนวก จ.

Biot'Consolidation Formulation and Automatic Solution Implemented in Finite Element Method

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

System of first order differentiation equations for finite element coupled Consolidation

$$\begin{bmatrix} K_{ep} & L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{F}^{ext} \\ Q \end{bmatrix}$$

where

$$K_{ep} = \sum_{elem.} k_{ep} = \sum_{elem.} \int_{V^e} B_u^T D_{ep} B_u dV$$

$$L = \sum_{elem.} l = \sum_{elem.} \int_{V^e} B_u^T m N_p dV$$

$$H = \sum_{elem.} h = - \sum_{elem.} \int_{V^e} B_p^T \frac{k}{\gamma_w} B_p dV$$

are the global elasto-plastic stiffness, coupling and flow matrices and

$$\dot{F}^{ext} = \sum_{elem.} \int_{V^e} N_u^T \dot{b} dV + \sum_{elem.} \int_{S^e} N_u^T i dS$$

$$Q = \sum_{elem.} q = - \sum_{elem.} \int_{S^e} N_p^T q dS - \sum_{elem.} \int_{V^e} B_p^T \frac{k}{\gamma_w} b_w dV$$

are the global force rate and fluid supply vectors.

$$\text{and } b_w = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_w & 0 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ for three-dimension problem}$$

Automatic time stepping scheme for elasto-plastic consolidation (Sloan and Abbo, 1999)

System of nonlinear equations:

$$R(X, \dot{X}) = F(t) - C_{ep}(X) \dot{X} - KX = 0$$

where

$$C_{ep}(X) = \begin{bmatrix} K_{ep}(X) & L \\ L & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \dot{F}^{ext} \\ Q \end{bmatrix}$$

$$\text{and } X = \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson iteration ( $\theta=1$ )

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial V}(\tilde{X}^{i-1}) \right] = -[C_{ep}(\tilde{X}^{i-1})] + \theta h K$$



$$R(V_n^{i-1}) = \begin{bmatrix} \dot{F}_n^{ext} \\ Qn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{ep}(\tilde{X}_n^{i-1}) & L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} \\ \dot{\tilde{P}}_n^{i-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H\tilde{P}_n^{i-1} \end{bmatrix}$$

or

$$R(V_n^{i-1}) = \begin{bmatrix} \dot{F}_n^{ext} - (\dot{F}_n^{int})^{i-1} \\ Qn - L^T \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H\tilde{P}_n^{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\delta V^i = - \left[ \frac{\partial R}{\partial V}(\tilde{X}^{i-1}) \right]^{-1} R(V^{i-1})$$

$$V^i = V^{i-1} + \delta V^i$$

and

$$\tilde{X}^i = X_{n-1} + \theta h V^i$$

where

$$(\dot{F}_n^{int})^{i-1} = \int_V B_u^T \dot{\sigma}_n^{i-1} dV = K_{ep}(\tilde{X}_n^{i-1}) \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} + L \dot{\tilde{P}}_n^{i-1}$$

Terminating check for Newton-Raphson iteration

$$\theta h \left\| \delta \tilde{U}^i \right\| / \left\| \tilde{U}^i \right\| \leq TOLERANCE$$

where  $\tilde{U}$  corresponds to the displacement entries in  $\tilde{X}$

and  $\dot{\tilde{U}}$  corresponds to the velocity entries in  $V$ .

Approximation of  $R(V_n^{i-1})$  and Drift Correction

$$R(V_n^{i-1}) \approx \begin{bmatrix} \frac{F_n^{ext} - (F_n^{int})^{i-1}}{h} \\ Qn - L^T \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{F_{n-1}^{ext} - F_{n-1}^{int}}{h} \\ H\tilde{P}_n^{i-1} \end{bmatrix} + \text{Drift Correction}$$

$$R(V_n^{i-1}) \approx \begin{bmatrix} \frac{F_n^{ext} - (F_n^{int})^{i-1}}{h} \\ Qn - L^T \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{F_{n-1}^{ext} - F_{n-1}^{int}}{h} \\ H\tilde{P}_n^{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F_{n-1}^{ext} - F_{n-1}^{int}}{h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R(V_n^{i-1}) \approx \begin{bmatrix} \frac{F_n^{ext} - (F_n^{int})^{i-1}}{h} \\ Qn - L^T \dot{\tilde{U}}_n^{i-1} - H\tilde{P}_n^{i-1} \end{bmatrix}$$

Automatic algorithm

Step 1. Initialization

1.1 Enter wt the  $X_{t_0}, \dot{X}_{t_0}$ , Tolerance, time step  $\Delta t$ , State parameter at current integration point

1.2 Set  $t=t_0$  and  $h=\min\{h_{last}, Dt\}$

Step 2. Main subincrementation

2.1 Compute  $\dot{X}_{t+h}$  and  $\tilde{X}_{t+h}$  using Newton-Raphson algorithm, if the solution fails to converge, set

$$h \leftarrow 0.25h$$

and try again

2.2 Estimate error for the current subincrement using

$$Error_{t+h}^u = \frac{1}{2}h \|\dot{U}_t - \dot{U}_{t+h}\|$$

where  $\dot{U}$  denotes the velocity component of  $\dot{X}$ .

2.3 Estimate relative error for current subincrement using

$$R_{t+h}^u = Error_{t+h}^u / \|\tilde{U}_{t+h}\|$$

where  $\tilde{U}_{t+h}^u$  is the displacement component of  $\tilde{X}_{t+h}$

2.4 If  $R_{t+h}^u > TOLERANCE$  then

$$q = \max\{0.8\sqrt{TOLERANCE / R_{t+h}^u}, 0.1\}$$

$$h \leftarrow qh$$

return to step 2.1

else

- update new displacement and pore pressure using

$$X_{t+h} = X_t + \frac{1}{2}(\dot{X}_t + \dot{X}_{t+h})$$

- for each integration point compute strains

$$\Delta \varepsilon = B \left\{ \frac{h}{2} (\dot{u}_t + \dot{u}_{t+h}) \right\}$$

- update new stresses and state parameters by integrating constitutive laws

- estimate a new subincrement size factor by

$$q = \min\{0.8\sqrt{TOLERANCE / R_{t+h}^u}, 2.0\}$$

if previous subincrement was unsuccessful, then  $q = \min\{q, 1.0\}$

$$t \leftarrow t + h$$

$$h = qh$$

$$h_{last} = \min\{h, \Delta t\}$$

$$h \leftarrow \min\{h, t_o + \Delta t - t\}$$

return to step 2.1



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียน

นาย นบปนม แก้วหานาม เกิดเมื่อวันที่ 26 กุมภาพันธ์ 2519 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2541 และเข้าศึกษาต่อในสาขาวิศวกรรมปฐพี ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย