การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

นายณัฐพล ธนาเตชะวงศ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

ON-LINE ADDITION IN PENNEY COMPLEX NUMBER SYSTEM

Mr.Nattapon Tanatechawong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computer Science
Department of Computer Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์
โดย	นายณัฐพล ธนาเดชะวงศ์
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

ณัฐพล ธนาเดชะวงศ์ : การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์. (ON-LINE ADDITION IN PENNEY COMPLEX NUMBER SYSTEM) อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 45 หน้า.

ระบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ใช้แสดงแทนจำนวนโดยรวมส่วนจริงและส่วนจินตภาพเข้าด้วยกันเป็นลำดับตัวเลขเดียว ซึ่งได้รับการยืนยันแล้วว่ามีความสะดวกในการดำเนินการทางเลขคณิตพื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อน นอกจากนี้ในส่วนของการคำนวณ การคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ถูกเสนอขึ้นเพื่อลดเวลาในการคำนวณด้วยแนวคิดของการคำนวณแบบสายท่อ จากงานวิจัยที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นว่าการบวกสามารถทำได้ด้วยค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่ากับสิบหก ในงานนี้เราได้เสนออัลกอริทึมในการบวกแบบเชื่อมตรงใหม่ ซึ่งอธิบายได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง ผลลัพธ์ทฤษฎีแสดงให้เห็นว่าออโตมาตาที่เสนอขึ้นนี้สามารถทำงานได้ด้วยค่าความหน่วงแบบเชื่อมตรงเท่ากับแปด และออโตมาตามีจำนวนสถานะ 407 สถานะ

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ณัฐพล ธนาเดชะวงศ์
สาขาวิชา วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Athasit Surarerks
ปีการศึกษา 2550

4770287021 : MAJOR COMPUTER SCIENCE
KEY WORD : ON-LINE ARITHMETIC COMPUTATION / PENNEY COMPLEX NUMBER SYSTEM / COMPLEX NUMBER ARITHMETIC / REDUNDANT NUMBER SYSTEM / ON-LINE FINITE AUTOMATA

NATTAPON TANATECHAWONG : ON-LINE ADDITION IN PENNEY COMPLEX NUMBER SYSTEM. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 45 pp.

Penney's complex number representation system, where real and imaginary parts are merged into one sequence of digits, is confirmed to be convenient in performing fundamental arithmetic operations for complex numbers. In order to reduce the computational time, an on-line mechanism is introduced together with a pipelining concept. Previous researches shown that addition can be carry out with an on-line delay of sixteen units. In this work, we establish a novel on-line addition algorithm illustrated by an on-line finite automaton. Theoretical result shows that the proposed automaton can function with an on-line delay of eight units and the automaton contains 407 states.

Department : Computer Engineering Student's signature : ณัฐพล ธนาเตชะวงศ์

Field of study : Computer Science Advisor's signature : Athasit Surarerks

Academic year : 2007

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง และคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ช่วยติดตามดูแลงานวิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณในความเอื้อเฟื้อของ ศาสตราจารย์ ดร. ประภาส จงสถิตย์วัฒนา อาจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจสำคัญ และขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ทุกคน ที่เปรียบเสมือนแรงผลักดันและให้ความช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การประมวลผลด้วยจำนวนเชิงซ้อนมีบทบาทสำคัญในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์และงานวิศวกรรมประยุกต์ เช่น การประมวลผลสัญญาณดิจิทัล (digital signal processing) หรือการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis) เป็นต้น ซึ่งงานเหล่านี้มีลักษณะเป็นการประมวลผลแบบทันที (real-time processing) จึงต้องการการคำนวณจำนวนเชิงซ้อนความเร็วสูง (high-speed complex number arithmetic) ดังนั้นในการคำนวณนี้จำเป็นต้องมีรูปแบบการแทนจำนวน (number representation) และวิธีการคำนวณที่มีประสิทธิภาพ มีหลายงานวิจัยได้คิดค้นและเสนอระบบจำนวน (number system) ที่ใช้แสดงจำนวนเชิงซ้อนมาเป็นเวลานาน จากการศึกษานั้นได้บ่งบอกว่าการแสดงจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปลำดับของตัวเลข (sequence of digits) เพียงลำดับเดียวนั้น ฐาน (base) ของระบบจำนวน (number system) ต้องมีส่วนจินตภาพ (imaginary part) รวมอยู่ด้วย จึงมีการเสนอระบบจำนวนโดยใช้ฐานที่รวมส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพเข้าด้วยกัน เช่น ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ (Penney) [1] ซึ่งใช้ฐาน $-1+i$ และระบบจำนวนเชิงซ้อนของคนุท (Knuth) [2] ซึ่งใช้ฐาน $2i$ เป็นต้น

งานวิจัยนี้สนใจการแสดงจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ระบบฐานของเพนนีย์ เนื่องจากฐาน $-1+i$ มีการรวมส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพเข้าด้วยกัน คุณสมบัตินี้ทำให้รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพใกล้เคียงกันจะใช้จำนวนบิตในการแทนจำนวนน้อยกว่าการแทนจำนวนด้วยระบบอื่น เช่น คนุท

ในงานที่มีความซับซ้อนและต้องการความเร็ว นอกจากการใช้รูปแบบการแทนจำนวนที่เหมาะสมแล้ว วิธีการที่นำมาใช้กับการคำนวณเชิงเลขคณิตเป็นส่วนสำคัญเช่นกัน มีทฤษฎีการคำนวณหนึ่งที่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณ คือ การคำนวณเชิงเลขคณิตแบบเชื่อมตรง (on-line arithmetic computation) ซึ่งมีลักษณะการคำนวณแบบลำดับ (serial computation) จากตัวเลขตำแหน่งที่มีนัยสำคัญสูงสุดก่อน (most significant digit first) เมื่อได้รับค่าในตำแหน่งนั้นจะทำการคำนวณผลลัพธ์ในตำแหน่งนั้นทันที สามารถนำผลลัพธ์ในตำแหน่งนั้นมาคำนวณต่อในการคำนวณเชิงเลขคณิตลำดับถัดไป ซึ่งสามารถรองรับการคำนวณแบบท่อตรง (pipelined implementation) ได้

การนำคุณสมบัติการคำนวณแบบเชื่อมตรงมาใช้กับระบบจำนวนเชิงซ้อน สามารถเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณได้ แต่การจะใช้การคำนวณแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนนั้นต้องเป็นระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อน (redundant number systems) จึงมีการประยุกต์ระบบ

จำนวนด้วยแนวคิดของอเวเซียนีส (Avizienis) โดยการใช้ตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit) [3] ได้ถูกนำมาประยุกต์ร่วมกัน เพื่อให้ระบบจำนวนมีสมบัติความซ้ำซ้อน (redundancy) คือจำนวนหนึ่งสามารถมีรูปแบบการแทนจำนวนในระบบจำนวนนั้นได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ เพื่อช่วยจำกัดการแพร่กระจายของตัวทดระหว่างการคำนวณ

ในปี ค.ศ.1999 ฟรูนีย์ [4] ได้เสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์สำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ โดยใช้ชุดตัวเลข (digit set) เป็นจำนวนเต็มระหว่าง -2 ถึง 2 และระหว่าง -3 ถึง 3 การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนนี้สามารถคำนวณได้โดยมีค่าความหน่วง (delay) เป็น 8 และ 4 ตามลำดับ แต่การใช้ชุดตัวเลขดังกล่าวทำให้ระบบจำนวนมีระดับของความซ้ำซ้อน (degree of redundancy) สูง และทำให้เกิดปัญหาการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์ (zero redundant) ซึ่งระบบจำนวนที่มีลักษณะการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์นั้น ไม่เป็นที่นิยมในการนำมาประยุกต์ใช้ ในส่วนของการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ โดยใช้ชุดตัวเลข เป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1 เพื่อลดปัญหาเดิมที่มีการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์ และมีระดับของความซ้ำซ้อนสูงนั้น มีการพิสูจน์โดย อรรถสิทธิ์ [5] ว่าสามารถทำได้โดยมีค่าความหน่วงไม่เกิน 16 แต่ในส่วนของอัลกอริทึมที่ใช้ในการคำนวณนั้นปัจจุบันยังไม่ถูกคิดค้นขึ้น

ในงานนี้ได้ประยุกต์ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ซึ่งจากเดิมจำนวนใดๆ ในระบบนี้สามารถแสดงได้เพียงรูปแบบเดียวในระบบแทนจำนวน ให้เป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อนเพื่อทำการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบใหม่นี้ โดยมีชุดตัวเลข เป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1 และเนื่องจากปัญหาการบวกสามารถพิจารณาเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลข (digit set conversion) ในระบบฐานเดียวกันได้ ดังนั้นการบวกแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จะกลายเป็นปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง (on-line digit set conversion) ซึ่งในส่วนของตัวแบบการทำให้เกิดผล (implementation model) นั้น ในงานนี้จะนำทฤษฎีของออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง (on-line finite automata) ซึ่งถูกนิยามไว้ใน [6] มาประยุกต์ใช้ในอัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบอัลกอริทึมการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1 ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 เสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1

1.3.2 เสนออัลกอรึทึมสำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1

1.3.3 อัลกอรึทึมสำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1 ต้องมีค่าความหน่วงของอัลกอริทึมไม่เกิน 16

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ และการคำนวณเชิงเลขคณิตแบบเชื่อมตรง

1.4.2 ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.4.3 กำหนดขอบเขตงานวิจัย

1.4.4 ออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1

1.4.5 พิสูจน์ทฤษฎีและอัลกอริทึมโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.4.6 วิเคราะห์ สรุปผล และจัดทำรายงานวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.5.1 ได้ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งไม่มีการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์ และมีระดับของความซ้ำซ้อนของการแทนจำนวนน้อยลงกว่าระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่ถูกเสนอโดยฟรูนีย์

1.5.2 ได้อัลกอริทึมสำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ -1 ถึง 1

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1.6.1 ”On-line Addition Algorithm in Penney Complex Representation System” โดย ณัฐพล ธนาเตชะวงศ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการนานาชาติ The

4^{th} International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE2007)

1.6.2 ” On-line Finite Automaton for Addition in Penney’s Complex Representation System” โดย ณัฐพล ธนาเตชะวงศ์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ The 11^{th} National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2007)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบจำนวน

ระบบจำนวน (number system) สามารถแสดงจำนวนโดยเขียนอยู่ในรูปของ (β, D) โดย β คือ ฐาน (base) ซึ่งสามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และ D คือ ชุดตัวเลข (digit set) เป็นเซตจำกัดที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนเชิงซ้อน โดยจำนวนใดๆ สามารถแสดงด้วยรูปแบบการแทนจำนวน β (β-representation) บนชุดตัวเลข D ในรูปของลำดับของตัวเลข X ดังต่อไปนี้

$$X = (x_m x_{m-1} x_{m-2} \ldots x_0 x_{-1} x_{-2} \ldots)_\beta$$

โดย $x_j \in D$ สำหรับ $j \leq m$ เมื่อมีจำนวนเต็ม $m \in Z$ บางจำนวน ค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของ X บนฐาน β เขียนแทนด้วย $\|X\|$ สามารถคำนวณได้โดยสมการต่อไปนี้

$$\|X\| = \sum_{j=m}^{-\infty} x_j \beta^j$$

ซึ่งเซตของรูปแบบการแทนจำนวน β บนชุดตัวเลข D ทั้งหมดสามารถเขียนให้อยู่รูป $P[\beta, D]$ ได้ โดยที่

$$P_n^m[\beta, D] = \left\{X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta \middle| x_i \in D, m \leq i \leq n\right\}$$
$$P_n[\beta, D] = \left\{X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta \middle| x_i \in D, i \leq n\right\}$$

โดย $P_n^m[\beta, D]$ และ $P_n[\beta, D]$ เป็นเซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ เมื่อ n เป็นเลขชี้กำลังสูงสุด และ m เป็นเลขชี้กำลังต่ำสุด

2.2 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน

ระบบจำนวนซ้ำซ้อน คือ ระบบจำนวนที่มีจำนวนอย่างน้อยหนึ่งจำนวนสามารถถูกแสดงในระบบนั้นได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ กล่าวคือ ในระบบจำนวนนั้นมีรูปแบบการแทนจำนวนที่แตกต่างกัน X_1 และ X_2 ที่มี $\|X_1\| = \|X_2\|$

ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอเวเซียนีส (Avizienis's signed-digit number system) [3] เป็นระบบจำนวนแบบหนึ่งที่มีสมบัติการซ้ำซ้อน ซึ่งถูกเสนอขึ้นเพื่อลดการเกิดสายการแพร่ของตัวทด (carry propagation chain) ในการบวกกันของเลขคณิต ประกอบด้วยฐานที่

เป็นจำนวนเต็ม $\beta \geq 3$ และชุดตัวเลข $\{e \in Z \mid -d \leq e \leq d\}$ โดยที่ $\frac{\beta}{2} < d \leq \beta - 1$ และเมื่อให้ $\beta = 2$ จะมีชุดตัวเลขเป็น {-1, 0, 1} ซึ่งภายหลังพาร์ฮามี (Parhami) [7] ได้เสนอระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายที่อยู่ในรูปทั่วไป โดยที่ชุดตัวเลขไม่จำเป็นต้องสมมาตร

หมายเหตุ ในระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายนิยมเขียน $\bar{a}$ เป็นสัญลักษณ์แทนตัวเลข $-a$

2.3 ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ (Penney's complex number system) ถูกเสนอโดยวอลเทอร์ เพนนีย์ (Walter Penney) [1] เพื่อใช้ในการแสดงจำนวนเชิงซ้อนด้วยฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ โดยมีการพิสูจน์แล้วว่าจำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวนสามารถแสดงบนระบบจำนวนที่มีฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ และชุดตัวเลข $C = \{0,1\}$ ได้โดยไม่มีความซ้ำซ้อน เช่น $-1 - 3\mathrm{i}$ จะมีรูปแบบการแทนจำนวนในระบบนี้ คือ

$$X = (110010)_{-1+\mathrm{i}}$$

ในการคำนวณแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ ชุดตัวเลขจะถูกขยายเป็น $D = \{\bar{1},0,1\}$ เพื่อให้ระบบจำนวนนี้มีสมบัติเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ดังนั้น $-1 - 3\mathrm{i}$ จะมีรูปแบบการแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ เช่น

$$Y = (\bar{1}\bar{1}\bar{1}0010)_{-1+\mathrm{i}} \text{ และ } Z = (\bar{1}01\bar{1}0)_{-1+\mathrm{i}}$$

โดยที่ทุกรูปแบบการแทนจำนวนข้างต้นมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $-1 - 3\mathrm{i}$ โดยสามารถดูรายละเอียดได้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงถึงรูปแบบการแทนจำนวนของ $-1 - 3\mathrm{i}$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

j	β^j	x_j	$x_j \beta^j$	y_j	$y_j \beta^j$	z_j	$z_j \beta^j$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	–1 + i	1	–1 + i	1	–1 + i	$\bar{1}$	1 – i
2	–2i	0	0	0	0	0	0
3	2 + 2i	0	0	0	0	$\bar{1}$	–2 – 2i
4	–4	1	–4	$\bar{1}$	4	0	0
5	4 – 4i	1	4 – 4i	$\bar{1}$	–4 + 4i	0	0
6	8i	0	0	$\bar{1}$	–8i	0	0
$\sum$		X	–1 – 3i	Y	–1 – 3i	Z	–1 – 3i

จากตารางที่ 2.1 แสดงให้เห็นว่าในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์นั้น เมื่อใช้ชุดตัวเลข $D = \{\bar{1},0,1\}$ ในการแสดง ระบบจะมีสมบัติเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ทำให้บางจำนวนสามารถมีรูปแบบการแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ

2.4 การคำนวณแบบเชื่อมตรง

การคำนวณแบบเชื่อมตรงถูกเสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1977 โดย เออเสกโกแวค (Ercegovac) และ ทริวิดี (Trivedi) [8] เพื่อสนับสนุนการทำงานแบบสายท่อ (pipeline structure) คือ ถ้าการคำนวณทั้งหมดทำได้ด้วยการคำนวณแบบลำดับ (serial computation) ในทิศทางเดียวกันแล้ว ตัวดำเนินการต่างๆ สามารถเริ่มต้นทำงานได้โดยไม่ต้องรอให้ตัวดำเนินการที่อยู่ในลำดับก่อนหน้าทำเสร็จเสียก่อน ในการคำนวณแบบลำดับ การบวก การลบ และการคูณ จะคำนวณได้จากหลักที่มีเลขนัยสำคัญต่ำสุดก่อน (least significant digit first : LSDF) แต่การหารต้องคำนวณจากหลักที่มีเลขนัยสำคัญสูงสุดก่อน (most significant digit first : MSDF) เท่านั้น ดังนั้นการคำนวณแบบลำดับจึงไม่สามารถทำไปได้พร้อมกันทุกตัวดำเนินการ แต่การคำนวณแบบเชื่อมตรงจะให้ทุกตัวดำเนินการคำนวณไปในทิศทางเดียวกัน คือ คำนวณจากหลักที่มีเลขนัยสำคัญสูงสุดก่อน

การคำนวณแบบเชื่อมตรงจะให้ผลลัพธ์แบบตำแหน่งต่อตำแหน่ง และมีค่าความหน่วงเชื่อมตรง (δ) เป็นเลขจำนวนเต็มบวกขนาดเล็กใช้ระบุว่าผลลัพธ์ตำแหน่งแรกสามารถคำนวณออกมาได้เมื่อผ่านการคำนวณไปกี่ตำแหน่ง

จากนี้เราจะให้นิยามรูปนัยของการคำนวณแบบเชื่อมตรง โดยให้ D เป็นชุดตัวอักษรจำกัด (finite alphabet) เซตของคำ (word) บน D เขียนแทนด้วย D^* คำว่าง (empty word) เขียนแทนด้วย ε และเซตของคำอนันต์ (infinite word) เขียนแทนด้วย D^{N} และ D^p เป็นเซตของคำที่มีความยาว p บน D

ฟังก์ชัน

$$\varphi : D^{\mathrm{N}} \to E^{\mathrm{N}}$$
$$(x_j)_{j\geq 1} \mapsto (y_j)_{j\geq 1}$$

จะเป็นฟังก์ชันที่*สามารถคำนวณแบบเชื่อมตรงได้*ด้วยค่าความหน่วง δ ถ้ามีจำนวนเต็ม δ ซึ่งสำหรับทุกๆ ค่า $j \geq 1$ แล้ว จะปรากฏฟังก์ชัน

$$\Phi_j : D^{j+\delta} \to E$$

ซึ่ง $y_j = \Phi_j(x_1 x_2 \cdots x_{j+\delta})$ และ*ค่าความหน่วง*ของฟังก์ชัน φ จะเป็นค่า δ ที่เล็กที่สุด

ในทางทฤษฎีของค่าความหน่วงของฟังก์ชัน φ จะมีบางกรณีที่สามารถหาค่าความหน่วงเชื่อมตรงของฟังก์ชันได้ แต่ไม่สามารถหาอัลกอริทึมในการคำนวณฟังก์ชันด้วยค่าความหน่วงตามทฤษฎีนั้นได้ เช่น จากงานวิจัย [9] ได้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^x เมื่อ $x \in [0, 1]$ ที่ถูกแสดงในระบบจำนวนฐาน 2 ด้วยชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$ มีค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่ากับ 3 แต่สามารถหาได้เพียงอัลกอริทึมมีค่าความหน่วงเท่ากับ 4 เท่านั้น ซึ่งถูกคาดการณ์ว่า 4 เป็นค่าความหน่วงที่เหมาะที่สุดแล้ว

เซต $D^{\mathbb{N}}$ สามารถนิยามระยะทาง d ได้ดังนี้ ให้ x และ u อยู่ใน $D^{\mathbb{N}}$ และให้

$$d(x,u) = 2^{-r}$$

เมื่อ $r = \min\{ j \mid x_j \neq u_j \}$ เซต $D^{\mathbb{N}}$ มีลักษณะเป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับ (compact metric space)

บทตั้งที่ 2.1 *ให้ $\varphi : D^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}$ เป็นการคำนวณแบบเชื่อมตรงด้วยค่าความหน่วง δ แล้ว φ สามารถคำนวณได้อย่างต่อเนื่อง*

พิสูจน์ ให้ x และ u อยู่ใน D โดยที่ $d(x,u) = 2^{-r}$ ดังนั้น $x = x_1 \cdots x_{r-1} x_r x_{r+1} \cdots$ และ $u = x_1 \cdots x_{r-1} u_r u_{r+1} \cdots$ โดยที่ $x_r \neq u_r$ แล้วจะได้ว่า $\varphi(x) = y_1 \cdots y_{r-1-\delta} y_{r-\delta} y_{r+1-\delta} \cdots$ และ $\varphi(u) = y_1 \cdots y_{r-1-\delta} s_{r-\delta} s_{r+1-\delta} \cdots$ ดังนั้น

$$d(\varphi(x), \varphi(u)) \leq 2^{\delta} d(x,u)$$

เพราะฉะนั้น φ สามารถคำนวณได้อย่างต่อเนื่อง ■

2.5 ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง

สำหรับนิยามทั่วไปของออโตมาตาสามารถศึกษาได้จาก [10] ซึ่งเราจะให้เฉพาะนิยามที่จำเป็นต้องใช้ในงานนี้เท่านั้น ซึ่งออโตมาตาที่เราจะใช้นั้นไม่จำเป็นต้องมีลักษณะจำกัด

ออโตมาตาที่ใช้ในงานนี้มีจุดประสงค์เพื่อนำมาใช้ในการแปลงชุดตัวเลข ซึ่งเป็นออโตมาตาชนิดตัวเปลี่ยนแปร (transducer) หรือเรียกว่าเป็นออโตมาตาเชิงลำดับ (sequential automaton) ซึ่งออโตมาตาชนิดนี้มีสมบัติในการแปลงชุดตัวอักษร ที่มีชุดตัวอักษรเข้า D และชุดตัวอักษรออก E สามารถอธิบายได้ด้วยกราฟระบุชื่อและทิศทาง (directed labeled graph)

$$A = (Q, D \times E^*, i_0, F)$$

เมื่อ Q เป็นเซตของสถานะ (state) (แทนด้วยจุดยอดของกราฟ) $i_0 \in Q$ เป็นสถานะเริ่มต้น (initial state) และฟังก์ชันการเปลี่ยนสถานะ (transition function) ถูกแทนด้วย F ซึ่งเป็นเซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่มีการระบุชื่อ (label) ด้วยคู่อันดับของ $D \times E^*$ สามารถเขียนแทนด้วย

$$p \xrightarrow{x/y} q$$

โดยที่ $(x, y) \in D \times E^*$ สิ่งสำคัญของออโตมาตาคือต้องมีสมบัติข้อมูลเข้าเชิงกำหนด (input deterministic) หรือกล่าวได้ว่า ถ้า $p \xrightarrow{x/y_1} q_1$ และ $p \xrightarrow{x/y_2} q_2$ แล้ว $q_1 = q_2$ และ $y_1 = y_2$ และถ้า Q และ F เป็นเซตจำกัดแล้ว เราจะเรียกออโตมาตาชนิดนี้ว่าเป็นออโตมาตาจำกัด (finite automata)

ออโตมาตาแบบเชื่อมตรงเป็นออโตมาตาเชิงลำดับชนิดหนึ่งที่มีลักษณะพิเศษ ออโตมาตาแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วง δ นั้นสามารถอธิบายได้โดยออโตมาตาเชิงลำดับ

$$A = (Q, D \times (E \cup \varepsilon), i_0, F)$$

ซึ่งทุกวิถี (path) ความยาว δ ที่เริ่มจากสถานะเริ่มต้น i_0 จะอยู่ในรูป

$$i_0 \xrightarrow{x_1/\varepsilon} q_1 \xrightarrow{x_2/\varepsilon} q_2 \cdots \xrightarrow{x_\delta/\varepsilon} q_\delta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ สำหรับ $i \leq \delta$ และแต่ละเส้นเชื่อมระหว่าง $i_0, q_1, q_2, \ldots, q_\delta$ อยู่ในรูปแบบข้างต้น นั่นคือ ออโตมาตาจะรับตัวอักษรเข้า δ ตัวแรกโดยไม่ผลิตตัวอักษรออก ซึ่งในทางปฏิบัติจริงจะสมมติให้ตัวอักษรเข้า δ ตัวแรกเท่ากับ 0 ดังนั้นเราจะพิจารณาออโตมาตาแบบเชื่อมตรงที่ทุกเส้นเชื่อมอยู่ในรูป

$$p \xrightarrow{x/y} q$$

เมื่อ $x \in D$ และ $y \in E$

ให้ฟังก์ชัน f จาก $D^{\mathbb{N}}$ ไป $E^{\mathbb{N}}$ เป็นฟังก์ชันในการแปลงชุดตัวอักษรที่เป็นคำอนันต์ เราจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า *สามารถคำนวณได้*ด้วยออโตมาตาแบบเชื่อมตรง A ถ้าเซตของชื่อที่ระบุอยู่บนวิถีอนันต์ใน A ซึ่งเริ่มจากสถานะเริ่มต้น i_0 นั้นเท่ากับกราฟของฟังก์ชัน f

ในกรณีของคำจำกัด (finite word) ออโตมาตาจะต้องมีฟังก์ชันปลายทาง (terminal function) $\omega : Q \to E^*$ ซึ่งฟังก์ชัน f จาก D^* ไป E^* สามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาแบบเชื่อมตรง A ถ้ากราฟของ f ที่เป็นเซตของคู่อันดับ (x, y) ของ $D^* \times E^*$ นั้นปรากฏอยู่ใน A ในรูปของวิถีจำกัด $i_0 \xrightarrow{(x,u)} q$ และ $y = u\omega(q)$

2.6 การแปลงชุดตัวเลข

การแปลงชุดตัวเลขนั้นมีอยู่หลายชนิด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะสนใจเฉพาะการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนที่มีฐานเดียวกัน กำหนดให้ D และ E เป็นชุดตัวเลขแบบจำกัดที่ต่างกัน และให้ β เป็นเลขฐานที่สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน การแปลงชุดตัวเลขในระบบเลขฐาน β จากชุดตัวเลข D ไปเป็นชุดตัวเลข E สามารถเขียนเป็นสมการฟังก์ชันดังนี้

$$\lambda : D^{\mathrm{N}} \to E^{\mathrm{N}} \text{ โดยที่ } X \in D, \|\lambda(X)\| = \|X\|$$

ในทางทฤษฎีแล้วปัญหาการแปลงชุดตัวเลขถูกนำไปใช้ในการอธิบายการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มากมาย เช่น การบวกของจำนวนสองจำนวนบนชุดตัวเลข $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid a \le e \le b\}$ เมื่อ $a \le 0$ และ $b \ge 0$ สามารถเทียบได้กับการแปลงชุดตัวเลขบนเลขฐานเดียวกันจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid 2a \le d \le 2b\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid a \le e \le b\}$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.1 *การบวกของจำนวนสองจำนวนบนระบบจำนวนฐานสองระหว่าง X = 0101010 และ Y = 0011010 สามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนฐานสองจากชุดตัวเลข D = {0, 1, 2} ไปยังชุดตัวเลข E = {0, 1} ได้*

วิธีทำ การบวกจำนวนสองจำนวนบนระบบจำนวนฐานสองของ X = 0101010 และ Y = 0011010 จะได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีชุดตัวเลข D = {0, 1, 2} เป็น 0112020 ซึ่งผลลัพธ์ที่เราต้องการนั้นต้องอยู่ในรูปของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีชุดตัวเลข E = {0, 1} จึงต้องทำการแปลงชุดตัวเลขดังที่แสดงในรูปที่ 2.1 จึงได้ผลลัพธ์ที่ต้องการเป็น 1000100

X =	0	1	0	1	0	1	0
Y =	0	0	1	1	0	1	0
$X+Y$ =	0	1	1	2	0	2	0
ผลลัพธ์	1	0	0	0	1	0	0

รูปที่ 2.1 การแปลงชุดตัวเลขจากการบวกจำนวน 2 จำนวนในระบบจำนวนฐานสอง □

2.7 การบวกด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง

การแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลขจำกัด D ไปยัง E ที่มีฐาน β เป็นจำนวนเต็มจะสามารถทำการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงได้นั้น ระบบจำนวน (β, E) ต้องมีความต้องการพื้นฐาน โดยชุดตัวเลข E จะอยู่ในรูป $\{e \in \mathrm{Z} \mid a \le e \le b\}$ เมื่อ $a \le 0$ และ $b \ge 0$ และ (β, E) ต้องเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ถ้าเราพิจารณาปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขที่มาจากการบวกกัน n จำนวนโดยที่ $n > 1$ ในระบบจำนวน (β, E) แล้ว D จะอยู่ในรูป

$\{d \in Z \mid na \le d \le nb\}$ การแปลงชุดตัวเลขในลักษณะดังกล่าวนี้ ได้มีการศึกษาโดย อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ [5] แล้วว่าสามารถทำการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงโดยใช้ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงได้

การสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A จะขึ้นอยู่กับตัวแปรสำคัญสองตัว คือ k และ Q เมื่อ k คือ ค่าความหน่วงของ A ซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ Q คือ เซตของสถานะของ A โดยที่ $Q = \{q \in Z \mid g \le q \le h\}$ เมื่อ $g \le 0 \le h$ ซึ่งจำนวนสมาชิกของ Q มีค่าเท่ากับ $|\beta^k|$ สำหรับการเลือกค่า k และ Q จะมีวิธีการคำนวณโดยพิจารณาจาก β ซึ่งแตกต่างกันระหว่าง β เป็นจำนวนเต็มบวกและ β เป็นจำนวนเต็มลบ สามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [5] ส่วนวิธีที่ใช้ในการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจะเป็นอัลกอริทึมเดียวกับอัลกอริทึมที่ 2.1 ซึ่งถูกเสนอไว้ดังต่อไปนี้

ก่อนที่เราจะแสดงอัลกอริทึม เราจะให้นิยามของการหารแบบยุคลิด กำหนดให้ z และ p เป็นจำนวนเต็ม เราจะนิยาม $\tau(z,p)$ ดังนี้

$$\tau(z,p) = z - p \times \left\lfloor \frac{z}{p} \right\rfloor$$

ดังนั้น จะได้ว่า $|\tau(z,p)| \le |p| - 1$ และถ้า z และ p เป็นจำนวนบวกแล้ว $\tau(z,p)$ จะมีค่าเท่ากับ z มอดุโล p

อัลกอริทึมที่ 2.1 อัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนที่มีฐานเป็นจำนวนเต็ม

Input : $(x_m x_{m-1} \cdots)_\beta$, $x_j \in D = \{d \in Z \mid na \le d \le nb\}$

Output : $(y_{m+k} y_{m+k-1} \cdots)_\beta$, $y_j \in E = \{e \in Z \mid a \le e \le b\}$

begin

$q_{m+k} \leftarrow 0$

$j \leftarrow m$

while $j \le m$ do

$q_{j+k-1} \leftarrow \tau(x_j + q_{j+k}\beta, \beta^k)$

if $q_{j+k-1} \le g$ then $q_{j+k-1} \leftarrow q_{j+k-1} + |\beta^k|$ endif

if $q_{j+k-1} \ge h$ then $q_{j+k-1} \leftarrow q_{j+k-1} - |\beta^k|$ endif

$y_{j+k} \leftarrow (x_j + q_{j+k}\beta - q_{j+k-1}) / \beta^k$

$j \leftarrow j - 1$

enddo

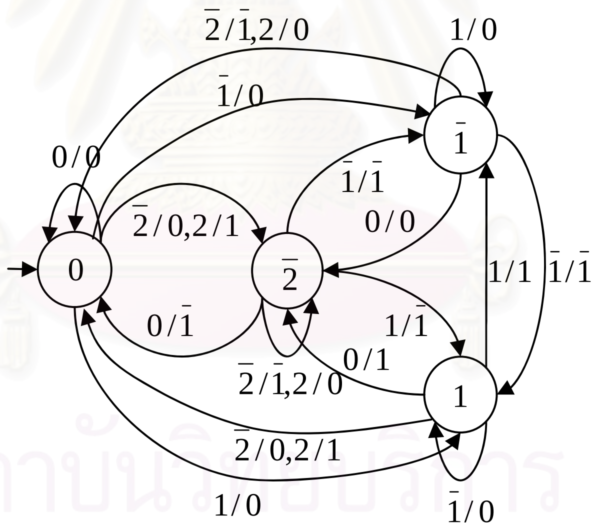
end

จากอัลกอริทึมที่ 2.1 สามารถสร้างเป็นออโตมาตาจำกัด $A = (Q, D \times E, 0, F)$ โดยที่มี 0 เป็นสถานะเริ่มต้น และทุกๆ เส้นเชื่อมอยู่ในรูป

$$q_{j+k} \xrightarrow{x_j / y_{j+k}} q_{j+k-1}$$

ตัวอย่างที่ 2.2 *การบวกแบบเชื่อมตรงระหว่างจำนวนสองจำนวนในระบบจำนวนฐานสองแบบมีเครื่องหมายสามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก* $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ *ไปยัง* $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ *ในฐาน* $\beta = 2$

วิธีทำ ในการแปลงแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ ในฐาน $\beta = 2$ นั้นสามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงได้หลายแบบ ซึ่งหนึ่งในออโตมาตาที่สามารถคำนวณการแปลงแบบเชื่อมตรงนี้ได้นั้นมีเซตของสถานะ $Q = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1\}$ และมีค่าความหน่วงเชื่อมตรงของออโตมาตา $k = 2$ ออโตมาตาแบบเชื่อมตรงนี้แสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขในระบบแทนจำนวนฐานสองแบบมีเครื่องหมาย

ตัวอย่างการบวกของ $(\bar{1}\bar{1}101\bar{1})_2$ และ $(\bar{1}\bar{1}1\bar{1}0\bar{1})_2$ จะได้ผลลัพธ์ในรูปแบบการแทนจำนวนของชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ เป็น $w = (\bar{2}\bar{2}2\bar{1}1\bar{2})_2$

ในออโตมาตาที่แสดงในรูปที่ 2.2 มีวิถี

$$0 \xrightarrow{\bar{2}/0} \bar{2} \xrightarrow{\bar{2}/\bar{1}} \bar{2} \xrightarrow{2/0} \bar{2} \xrightarrow{\bar{1}/\bar{1}} \bar{1} \xrightarrow{1/0} \bar{1} \xrightarrow{\bar{2}/\bar{1}} 0$$

ฟังก์ชันปลายทาง $\omega : Q \to E^*$ กำหนดให้ $\omega(\bar{2}) = \bar{1}0$, $\omega(\bar{1}) = 0\bar{1}$, $\omega(0) = 00$ และ $\omega(1) = 01$ ผลลัพธ์ของการแปลง w จะอยู่ในรูป $v = (0\bar{1}0\bar{1}0000)_2$ สังเกตได้ว่าความยาวของผลลัพธ์จะเท่ากับความยาวของข้อมูลเข้าบวกด้วยสอง □

บทที่ 3

การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

การบวกบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ก็ต่อเมื่อ ระบบจำนวนนั้นเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน ซึ่งจากงานวิจัยของฟรูนีย์ [4] ได้เสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่เป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อน โดยใช้ชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มระหว่าง -2 ถึง 2 และระหว่าง -3 ถึง 3 และเสนออัลกอริทึมการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนดังกล่าว แต่ระบบจำนวนเหล่านี้มีระดับของความซ้ำซ้อนสูง และมีปัญหาการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์ ดังนั้นเพื่อลดปัญหาดังกล่าว เราจึงมุ่งเน้นไปที่ระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ ที่มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มระหว่าง -1 ถึง 1

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ การนำเสนออัลกอริทึมการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็น $E = \{\bar{1},0,1\}$ โดยพิจารณาปัญหาการบวกแบบเชื่อมตรงของจำนวนสองจำนวน เป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมสำหรับแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ วิธีการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงเพื่อใช้ในการแปลงชุดตัวเลขดังกล่าว รวมถึงบทพิสูจน์ความถูกต้องของอัลกอริทึม

3.1 ปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

สิ่งที่ต้องระวังในการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงคือปัญหาของ*ส่วนล้น* (overflow) โดยที่ส่วนล้นคือจำนวนเต็มที่เล็กที่สุด l ซึ่งทำให้

$$\forall X \in P_m[\beta, D], \exists Y \in P_{m+l}[\beta, E], \|X\| = \|Y\|$$

จาก [5] ได้แสดงให้เห็นว่า สำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง ค่าความหน่วง δ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับส่วนล้น l ตัวอย่างของส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลขเช่น การบวกกันระหว่างจำนวนสองจำนวนในระบบจำนวนฐานสองแบบมีเครื่องหมาย ความยาวของผลลัพธ์จะมากกว่าข้อมูลเข้าหนึ่งตัวเลข (digit) เนื่องจากการกระจายตัวทดในการบวก สามารถอธิบายได้ด้วยการแปลงชุดตัวเลขจาก $P_m[2, \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}]$ ไปยัง $P_{m+1}[2, \{\bar{1},0,1\}]$

สำหรับการพิจารณาปัญหาของส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลขในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ จาก $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ เราจะพิจารณาลักษณะของการกระจายตัวทดของการแปลงชุดตัวเลขนี้ก่อน ซึ่งเป็นไปตามบทตั้งที่ 3.1

บทตั้งที่ 3.1 *การแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในฐาน* $\beta = -1+i$ *จาก* $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ *ไปยัง* $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ *โดยพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบลำดับจากหลักที่มีเลขนัยสำคัญต่ำสุดก่อน เมื่อพิจารณาการแปลงชุดตัวเลขของข้อมูลเข้าทีละหลักจะได้ตัวเลขผลลัพธ์ในหลักที่พิจารณาอยู่ใน* $\{\bar{1}, 0, 1\}$ *และมีตัวทดที่กระจายไปไม่เกิน 4 หลักจากหลักที่พิจารณา โดยที่ตัวทดในแต่ละหลักอยู่ใน* $\{\bar{1}, 0, 1\}$ *เสมอ*

พิสูจน์ ในระบบจำนวน $(-1+\mathrm{i}, E)$ จะมีรูปแบบการแทนจำนวนและการกระจายตัวทดของจำนวนเต็มตั้งแต่ -5 ถึง 5 ตามตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 รูปแบบการแทนจำนวนและการกระจายตัวทดของจำนวนเต็มตั้งแต่ -5 ถึง 5 ในระบบจำนวน $(-1+\mathrm{i}, E)$

x_j	$P[-1+\mathrm{i}, E]$	c_{j+4}	c_{j+3}	c_{j+2}	c_{j+1}	r_j
$\bar{5}$	$1000\bar{1}$	1	0	0	0	$\bar{1}$
$\bar{4}$	10000	1	0	0	0	0
$\bar{3}$	$\bar{1}\bar{1}0\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}\bar{1}00$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	0	0	0	$\bar{1}$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
2	1100	0	1	1	0	0
3	1101	0	1	1	0	1
4	$\bar{1}0000$	$\bar{1}$	0	0	0	0
5	$\bar{1}0001$	$\bar{1}$	0	0	0	1

จากตารางที่ 3.1 เมื่อพิจารณาชุดตัวเลขของข้อมูลเข้า $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์และตัวทดในแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1}, 0, 1\}$ และตัวทดจะกระจายไปไม่เกิน 3 หลักจากหลักที่พิจารณา แต่ในกรณีที่ข้อมูลเข้าเป็น $\bar{2}$ หรือ 2 ที่เหมือนกันอยู่ติดกันสองหลักจะทำให้เกิดการกระจายตัวทดที่เป็น $\bar{2}$ หรือ 2 ดังนี้

$$(\bar{2}\bar{2})_{-1+\mathrm{i}} = (\bar{1}\bar{2}\bar{1}00)_{-1+\mathrm{i}}$$

$$(22)_{-1+\mathrm{i}} = (12100)_{-1+\mathrm{i}}$$

แต่ในระบบจำนวนนี้ $(122)_{-1+\mathrm{i}} = (0)_{-1+\mathrm{i}}$ เนื่องจากการนำรูปแบบการแทนจำนวนที่เท่ากับศูนย์มาบวกหรือลบจะทำได้รูปแบบการแทนจำนวนที่เปลี่ยนไปแต่มีค่าเชิงตัวเลขเท่าเดิม ดังนั้น

$$(\bar{2}\bar{2})_{-1+\mathrm{i}} = (100)_{-1+\mathrm{i}}$$
$$(22)_{-1+\mathrm{i}} = (\bar{1}00)_{-1+\mathrm{i}}$$

จากกรณีที่กล่าวมา ตัวทดที่กระจายไปในแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ เนื่องจากข้อมูลเข้าในแต่ละหลักเป็น $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ เมื่อนำมาบวกกับตัวทดมีค่าอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ จะได้ผลลัพธ์อยู่ใน $\{\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3\}$ ซึ่งจากตารางที่ 3.1 กรณีของ $\bar{3}$ และ 3 จะมีการกระจายตัวทดเช่นเดียวกับกรณี $\bar{2}$ หรือ 2 ตามลำดับ ดังนั้นกรณีที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด ตัวทดจะกระจายไปไม่เกิน 3 หลักจากหลักที่พิจารณา และแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$

แต่จะมีบางกรณีของตัวทดที่เป็น $\bar{2}$ หรือ 2 แต่ไม่สามารถใช้รูปแบบการแทนจำนวนที่เท่ากับศูนย์มาบวกหรือลบให้ตัวทดจะกระจายไปไม่เกิน 3 หลักจากหลักที่พิจารณา และแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ ได้ เช่น

$$(\bar{2}\bar{2}2\bar{2})_{-1+\mathrm{i}} = (\bar{1}\bar{2}00\bar{1}00)_{-1+\mathrm{i}}$$
$$(22\bar{2}2)_{-1+\mathrm{i}} = (1200100)_{-1+\mathrm{i}}$$

ในกรณีดังกล่าว ให้นำ $(1220000)_{-1+\mathrm{i}}$ ซึ่งมีค่าเชิงเชิงตัวเลขเท่ากับ 0 มาบวกหรือลบตามลำดับ จะทำให้การกระจายตัวทดกลายเป็น

$$(\bar{2}\bar{2}2\bar{2})_{-1+\mathrm{i}} = (20\bar{1}00)_{-1+\mathrm{i}}$$
$$(22\bar{2}2)_{-1+\mathrm{i}} = (\bar{2}0100)_{-1+\mathrm{i}}$$

เมื่อตัวทดเป็น $\bar{2}$ หรือ 2 จะทำให้ผลบวกระหว่างตัวทดและข้อมูลเข้าเป็น $\bar{4}$ หรือ 4 ได้ ถ้าให้หลักที่ผลบวกระหว่างตัวทดและข้อมูลเข้าเท่ากับ $\bar{4}$ หรือ 4 เป็น x_j แล้ว จากตารางที่ 3.1 กรณีของ $\bar{4}$ หรือ 4 จะมีการกระจายตัวทดเป็น 1 หรือ $\bar{1}$ ตามลำดับไปในหลักที่ x_{j+4} และในกรณีนี้ ตัวทดในหลัก x_{j+1}, x_{j+2} และ x_{j+3} จะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ เสมอ เนื่องจากเมื่อ x_j ไม่มีการกระจายตัวทดไปใน x_{j+2} และ x_{j+3} ดังนั้นตัวทดที่เป็นไปได้ในหลัก x_{j+2} และ x_{j+3} จะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ และในหลัก x_{j+1} จะมีตัวทดที่กระจายเข้ามาในหลักนี้เป็น $\bar{2}$ หรือ 2 ก็ต่อเมื่อมีการกระจายตัวทดมาจากหลัก x_{j-2} และ x_{j-1} ไปยังหลัก x_j, x_{j+1} และ x_{j+2} เป็น $(\bar{1}\bar{2}\bar{1})_{-1+\mathrm{i}}$ หรือ $(121)_{-1+\mathrm{i}}$ ซึ่งสามารถใช้ $(122)_{-1+\mathrm{i}}$ มาบวกหรือลบตามลำดับเพื่อให้ตัวทดอยู่ในหลักของ x_j เท่านั้น ทำให้หลัก x_{j+1} มีตัวทดที่กระจายเข้ามาอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ เช่นกัน

เพราะฉะนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าผลลัพธ์จากการแปลงชุดตัวเลขในฐาน $\beta=-1+\mathrm{i}$ จาก $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E=\{\bar{1},0,1\}$ ตัวทดจะกระจายไปไม่เกิน 4 หลัก โดยที่ในแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ เสมอ ■

เราสามารถพิจารณาส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ได้ตามทฤษฎีบทที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *การแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในฐาน* $\beta = -1+i$ *จาก* $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ *ไปยัง* $E = \{\bar{1},0,1\}$ *โดยพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบลำดับจากหลักที่มีเลขนัยสำคัญต่ำสุดก่อนจะมีส่วนล้นเท่ากับ 4*

พิสูจน์ เราจะพิจารณาการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในลักษณะการแปลงชุดตัวเลขแบบลำดับจากหลักที่มีเลขนัยสำคัญต่ำสุดก่อน เมื่อการแปลงชุดตัวเลขดำเนินการมาถึงหลักที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดแล้ว จากบทตั้งที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่าตัวทดกระจายจะกระจายออกไปได้สูงสุดไม่เกิน 4 หลัก และในแต่ละหลักจะอยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ เสมอ ดังนั้นส่วนล้นของการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จะเท่ากับ 4 ■

กำหนดให้ออโตมาตาจำกัดสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ มีค่าความหน่วงของออโตมาตาเท่ากับ k และมีเซตจำกัดของสถานะเป็น Q ซึ่งการแปลงชุดตัวเลขด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 3.1

$$x_j + q_{j+k}\beta = y_{j+k}\beta^k + q_{j+k-1} \tag{3.1}$$

เมื่อ q_{j+k} และ q_{j+k-1} คือสถานะปัจจุบันและสถานะถัดไปตามลำดับ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ใน Q และข้อมูลเข้า x_j และข้อมูลออก y_{j+k} เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ใน D และ E ตามลำดับ

ดังนั้นออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลข D ไปยัง E สามารถสร้างได้ด้วยการหาค่า k และเซต Q โดยที่ Q ต้องเป็นเซตจำกัดและ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ 3.1 ซึ่งในงานวิจัยนี้ จะมีหลักพิจารณา k ตามบทตั้งที่ 3.2

บทตั้งที่ 3.2 *การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก* $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ *ไปยัง* $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ *เมื่อ* $n \ge 1$ *บนฐาน* $\beta = -1+i$ *ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงเมื่อพิจารณาการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงตามสมการที่ 3.1 แล้ว เซต* Q *สามารถลดจำนวนสถานะลงได้ ด้วยการกำหนดให้ค่าความหน่วงของออโตมาตา* k *อยู่ในรูปพหุคูณของสี่*

พิสูจน์ จากสมการที่ 3.1 สามารถเขียนใหม่เป็น

$$q_{j+k-1} = x_j - y_{j+k}\beta^k + q_{j+k}\beta \tag{3.2}$$

จากสมการที่ 3.2 แสดงให้เห็นว่า ข้อมูลเข้า x_j ซึ่งเป็นจำนวนเต็มจะมีผลทำให้สถานะถัดไป q_{j+k-1} ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนเพิ่มขึ้นหรือลดลงเฉพาะค่าในส่วนจริงเท่านั้น ดังนั้นเราสามารถลดขอบเขตของค่าของ q_{j+k-1} ได้โดยทำให้ค่าจากพจน์ $y_{j+k}\beta^k$ เป็นค่าในส่วนจริงเท่านั้นเช่นกัน เนื่องจาก $(-1+\mathrm{i})^4 = (-4)$ ดังนั้นค่าจากพจน์ $y_{j+k}\beta^k$ จะเป็นค่าในส่วนจริงเท่านั้นก็ต่อเมื่อ k อยู่ในรูปพหุคูณของสี่ เนื่องจากขอบเขตของค่าของ q_{j+k-1} ลดลง ดังนั้นจำนวนสถานะในเซต Q จะลดลงด้วยเช่นกัน ■

จากบทตั้งที่ 3.2 เป็นเหตุผลให้ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ โดยใช้ค่าความหน่วงเป็น k ที่อยู่ในรูปพหุคูณของสี่

3.2 การสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ สามารถเขียนอธิบายได้ดังนี้

$$A = (Q, D \times E, 0, F)$$

ซึ่งสิ่งสำคัญของการสร้างออโตมาตาจำกัด A ขึ้นอยู่กับตัวแปรสำคัญสองตัว คือ ค่าความหน่วงของออโตมาตา k และเซตจำกัดของสถานะ Q เนื่องจากเหตุผลที่ให้ไว้ในบทตั้งที่ 3.2 เราจะสร้าง A โดยพิจารณาที่ค่าความหน่วง k ที่อยู่ในรูปพหุคูณของสี่

สำหรับการสร้างออโตมาตาจำกัด A ที่มีค่าหน่วง k เงื่อนไขที่บ่งบอกว่าสามารถสร้าง A ตามค่าหน่วงนั้นได้คือ สามารถหาเซตจำกัดของสถานะ Q ได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะหาเซตจำกัดของสถานะ Q ด้วยลักษณะการทำงานแบบเวียนเกิด (recursive) โดยเราสามารถหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ เมื่อกำหนดให้ค่าหน่วงเป็น k ได้ตามอัลกอริทึมที่ 3.1

อัลกอริทึมที่ 3.1 อัลกอริทึมการหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A ที่มีค่าหน่วง k

Input : $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$, $E = \{\bar{1},0,1\}$, $\beta = -1+\mathrm{i}$ and
$k = 4n, n \in \mathrm{Z}^{+}$

Output : Q

begin
    $Q \leftarrow \{0\}$
    do
        $Q' \leftarrow Q$
        $U \leftarrow \{u = q\beta + d \mid q \in Q, d \in D\}$
        for each $u \in U$
            $V \leftarrow \{v = u + e\beta^{k} \mid e \in E\}$
            if $V \cap Q = \phi$ then
                $u' = u + e\beta^{k}, e \in E, u' \in \{\sum_{j=0}^{k-1} e_j(-1+\mathrm{i})^{j} \mid e_j \in E\}$
                if $u' \in \{\sum_{j=0}^{k-1} e_j(-1+\mathrm{i})^{j} \mid e_j \in E\}$ doesn't exist then
                    can't find Q by delay k
                endif
                $Q \leftarrow Q \cup \{u'\}$
            endif
        endfor
    while $Q \neq Q'$
end

อัลกอริทึมที่ 3.1 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ ที่มีค่าหน่วงเท่ากับ k ซึ่งอัลกอริทึมนี้มีขั้นตอนการทำงานโดย เริ่มต้นจะกำหนด Q เป็นเซตของสถานะเริ่มต้น จากนั้นอัลกอริทึมจะทำงานแบบวนซ้ำเพื่อเพิ่มจำนวนสถานะใหม่ใน Q โดยสถานะใหม่จะพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงของสถานะเมื่อรับข้อมูลเข้าที่อยู่ใน D และผลิตข้อมูลออกที่อยู่ใน E ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ 3.1 อัลกอริทึมจะวนซ้ำเพื่อเพิ่มจำนวนสถานะใน Q ไปจนกว่าในรอบของการวนซ้ำนั้นจะไม่มีสถานะใหม่เพิ่มขึ้น

สำหรับการเลือกค่า k จะส่งผลต่อการสร้างออโตมาตาจำกัด A ซึ่งเป็นไปตามบทตั้งที่ 3.3

บทตั้งที่ 3.3 *การสร้างออโตมาตาจำกัด A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $E=\{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta=-1+i$ จากอัลกอริทึมที่ 3.1 จะไม่สามารถหาอัลกอริทึมที่มีค่าหน่วง k ได้ ถ้ามีบางสถานะที่อยู่ใน Q แต่ไม่อยู่ใน $\{\sum_{j=0}^{k-1} e_j(-1+i)^j \mid e_j \in E\}$*

พิสูจน์ เนื่องจากในการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงด้วยออโตมาตาจำกัด A หลังจากแปลงข้อมูลเข้าตัวเลขสุดท้ายแล้ว จะมีค่าที่เหลือจากการแปลงชุดตัวเลขด้วย A อยู่ในรูปของสถานะ จากนั้นฟังก์ชันปลายทาง $\omega: Q \to E^*$ จะแปลงค่าที่เหลือจากการแปลงชุดตัวเลขด้วย A ให้อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนใน $P_k[-1+\mathrm{i},E]$ เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากการแปลงชุดตัวเลขด้วย A มารวมกับผลลัพธ์ที่ได้จากฟังก์ชันปลายทางจะได้ผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขที่สมบูรณ์ ดังนั้นถ้ามีสถานะ p ที่อยู่ใน Q แต่ไม่อยู่ใน $\{\sum_{j=0}^{k-1} e_j(-1+\mathrm{i})^j \mid e_j \in E\}$ ฟังก์ชันปลายทางจะไม่สามารถแปลง p ให้อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนใน $P_k[-1+\mathrm{i},E]$ ได้ ทำให้ไม่สามารถผลิตผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขที่สมบูรณ์ได้ ■

บทตั้งที่ 3.4 *กำหนดให้ q เป็นจุดที่อยู่ในระนาบเชิงซ้อน (complex plane) ที่แกน x เป็นส่วนจริง และแกน y เป็นส่วนจินตภาพ เมื่อ q อยู่ที่คู่ลำดับ (u,v) แล้ว q จะแทนจำนวนเชิงซ้อน $u+vi$ คู่ลำดับใหม่ที่เกิดจากการนำ $\beta=-1+i$ มาคูณกับ q จะเป็นคู่ลำดับ $(u',v')=(-u-v,u-v)$*

พิสูจน์ ให้ $q=u+v\mathrm{i}$ เมื่อนำ $\beta=-1+\mathrm{i}$ มาคูณกับ q จะได้ว่า

$$\begin{aligned} q\beta &= (u+v\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) \\ &= -u-v\mathrm{i}+u\mathrm{i}-v \\ &= (-u-v)+(u-v)\mathrm{i} \end{aligned}$$

ซึ่ง $(-u-v)+(u-v)\mathrm{i}$ สามารถแทนด้วยคู่ลำดับ (u',v') โดยที่

$$u' = -u-v \tag{3.3}$$

$$v' = u-v \tag{3.4}$$

■

บทตั้งที่ 3.5 *ในระนาบเชิงซ้อนที่แกน x เป็นส่วนจริง และแกน y เป็นส่วนจินตภาพ ถ้ากำหนดให้มีเซตของจุดที่อยู่บนสมการเส้นตรง ซึ่งแบ่งกรณีออกเป็น 4 เส้นตรง คือ $x = c_1$, $y = c_2$, $y - x = c_3$ และ $y + x = c_4$ แล้ว การนำจุดในเซตของแต่ละเส้นตรงมาคูณกับ $\beta = -1 + i$ จะทำให้ได้เซตของจุดใหม่ซึ่งจะอยู่ในสมการเส้นตรง $y - x = 2c_1$, $y + x = -2c_2$, $y = -c_3$ และ $x = -c_4$ ตามลำดับ*

พิสูจน์ เซตของจุดที่อยู่บนสมการเส้นตรง $x = c_1$, $y = c_2$, $y - x = c_3$ หรือ $y + x = c_4$ สามารถอธิบายด้วยเซตดังต่อไปนี้

$$S_1 = \{u + v\mathrm{i} \mid u = c_1\}$$
$$S_2 = \{u + v\mathrm{i} \mid v = c_2\}$$
$$S_3 = \{u + v\mathrm{i} \mid v - u = c_3\}$$
$$S_4 = \{u + v\mathrm{i} \mid v + u = c_4\}$$

เมื่อนำจุดในแต่ละเซตมาคูณกับ $\beta = -1 + \mathrm{i}$ จะทำให้ได้เซตของจุดใหม่ ดังนี้

กรณีของ $S_1 = \{u + v\mathrm{i} \mid u = c_1\}$ ผลคูณของจุดในเซต S_1 กับ β จะอยู่ในรูปสมการตามสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 ดังนี้

$$u' = -u - v$$
$$v' = u - v$$

เมื่อแทน u ด้วย c_1 ในสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 จะได้ว่า

$$u' = -c_1 - v \tag{3.5}$$
$$v' = c_1 - v \tag{3.6}$$

เมื่อนำสมการที่ 3.6 มาลบกับสมการที่ 3.5 จะได้

$$v' - u' = 2c_1$$

ดังนั้นผลคูณของจุดในเซต S_1 กับ β จะได้ผลลัพธ์เป็น $S_1' = \{u' + v'\mathrm{i} \mid v' - u' = 2c_1\}$

กรณีของ $S_2 = \{u + v\mathrm{i} \mid v = c_2\}$ ผลคูณของจุดในเซต S_2 กับ β จะอยู่ในรูปสมการตามสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 ดังนี้

$$u' = -u - v$$
$$v' = u - v$$

เมื่อแทน v ด้วย c_2 ในสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 จะได้ว่า

$$u' = -u - c_2 \tag{3.7}$$
$$v' = u - c_2 \tag{3.8}$$

เมื่อนำสมการที่ 3.7 มาบวกกับสมการที่ 3.8 จะได้

$$v' + u' = -2c_2$$

ดังนั้นผลคูณของจุดในเซต S_2 กับ β จะได้ผลลัพธ์เป็น $S_2' = \{u' + v'\mathrm{i} \mid v' + u' = -2c_2\}$

กรณีของ $S_3 = \{u + v\mathrm{i} \mid v - u = c_3\}$ ผลคูณของจุดในเซต S_3 กับ β จะอยู่ในรูปสมการตามสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 ดังนี้

$$u' = -u - v$$
$$v' = u - v$$

เมื่อแทน v ด้วย $u + c_3$ ในสมการที่ 3.4 จะได้ว่า

$$v' = u - u - c_3$$
$$v' = -c_3$$

ดังนั้นผลคูณของจุดในเซต S_3 กับ β จะได้ผลลัพธ์เป็น $S_3' = \{u' + v'\mathrm{i} \mid v' = -c_3\}$

กรณีของ $S_4 = \{u + v\mathrm{i} \mid v + u = c_4\}$ ผลคูณของจุดในเซต S_4 กับ β จะอยู่ในรูปสมการตามสมการที่ 3.3 และสมการที่ 3.4 ดังนี้

$$u' = -u - v$$
$$v' = u - v$$

เมื่อแทน v ด้วย $-u + c_4$ ในสมการที่ 3.3 จะได้ว่า

$$u' = -u - (-u + c_4)$$
$$u' = -c_4$$

ดังนั้นผลคูณของจุดในเซต S_4 กับ β จะได้ผลลัพธ์เป็น $S_4' = \{u' + v'\mathrm{i} \mid u' = -c_4\}$ ■

3.3 การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

อัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ สามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ที่มีค่าความหน่วงเท่ากับ k ซึ่งออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A สามารถสร้างได้ด้วย

อัลกอริทึมที่ 3.1 โดยที่ค่าความหน่วง k จะอยู่ในรูปพหุคูณของสี่ตามบทตั้งที่ 3.2 และออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ที่สร้างจากอัลกอริทึมที่ 3.1 ต้องมีค่าความหน่วง k และเซตจำกัดของสถานะ Q ที่สอดคล้องกับบทตั้งที่ 3.3 ซึ่งออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ที่สอดคล้องกับบทตั้งที่ 3.2 และบทตั้งที่ 3.3 จะมีค่าความหน่วงที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ $k = 8$

สำหรับออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงนี้จะถูกนำไปใช้ในการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ในทฤษฎีบทที่ 3.2 ซึ่งจะถูกกล่าวถึงในลำดับถัดไป

ทฤษฎีบทที่ 3.2 *การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็น $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ สามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับ 8*

พิสูจน์ เนื่องจากปัญหาของการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็น $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ สามารถพิจารณาเป็นปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ได้ ดังนั้นเราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยการนำเสนออัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A_R ที่มีค่าความหน่วงเป็น $k = 8$ ซึ่ง A_R สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$A_R = (Q, D \times E, 0, F)$$

เมื่อ Q คือ เซตจำกัดของสถานะ

D คือ เซตจำกัดของข้อมูลเข้า ซึ่งเท่ากับ $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

E คือ เซตจำกัดของข้อมูลออก ซึ่งเท่ากับ $\{\bar{1}, 0, 1\}$

0 คือ สถานะเริ่มต้น และ

F คือ เซตจำกัดของการเปลี่ยนแปลงสถานะ

โดยที่เซตจำกัดของสถานะ Q สามารถอธิบายได้ด้วย

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5$$

เมื่อ $Q_1 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1 \wedge v \in V_1 \wedge v - u \le 10 \wedge v + u \le 22\}$ โดยที่

$U_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid 1 \le u \le 11\}$ และ

$V_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 11 \le v \le 14\}$

$Q_2 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2 \wedge v \in V_2\}$ โดยที่

$U_2 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -4 \le u \le 11\}$ และ

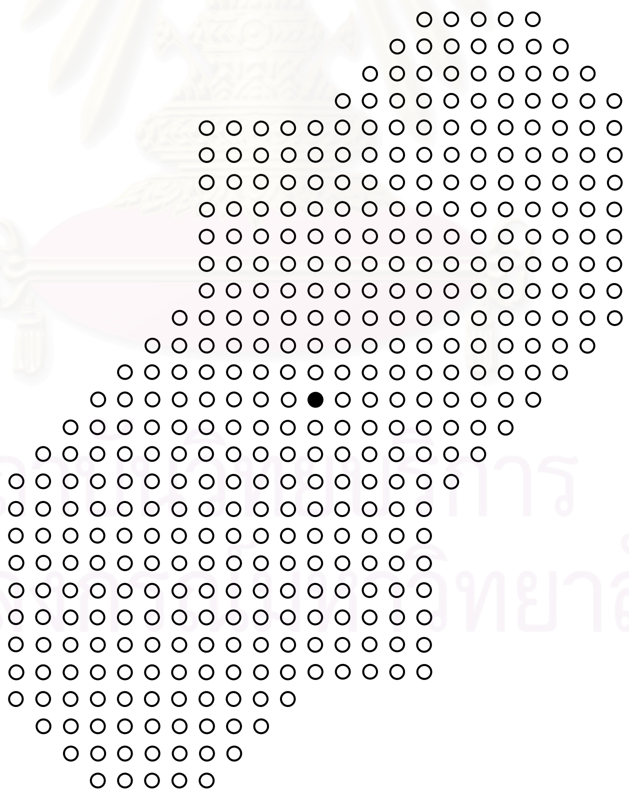
$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 4 \le v \le 10\}$

$Q_3 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_3 \wedge v \in V_3 \wedge -8 \le v - u \le 8\}$ โดยที่
$U_3 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le 11\}$ และ
$V_3 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -3 \le v \le 3\}$

$Q_4 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_4 \wedge v \in V_4\}$ โดยที่
$U_4 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le 4\}$ และ
$V_4 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le -4\}$

$Q_5 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_5 \wedge v \in V_5 \wedge v - u \ge -10 \wedge v + u \ge -22\}$ โดยที่
$U_5 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le -1\}$ และ
$V_5 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -14 \le v \le -11\}$

เซตจำกัดของสถานะ Q สามารถแสดงได้ด้วยระนาบเชิงซ้อนดังรูปที่ 3.1 โดยที่แต่ละสถานะใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน $x + y\mathrm{i}$ โดยแกน x ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจริงและแกน y ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจินตภาพ



รูปที่ 3.1 ระนาบเชิงซ้อนแสดงเซตจำกัดของสถานะ Q โดยที่แต่ละสถานะใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน $x + y\mathrm{i}$ โดยแกน x ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจริงและแกน y ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจินตภาพ จุดสีดำตรงกลางแทนพิกัด (0, 0)

การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A_R ที่มีค่าความหน่วงเป็น $k = 8$ สามารถคำนวณได้ด้วยอัลกอริทึมที่ 3.2 ดังต่อไปนี้

อัลกอริทึมที่ 3.2 อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A_R ที่มีค่าความหน่วงเป็น $k = 8$

Input : $X = (x_m x_{m-1} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}, \forall j \le m, x_j \in D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Output : $Y = (y_{m+8} y_{m+7} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}, \forall j \le m, y_{j+8} \in E = \{\bar{1}, 0, 1\}$

begin

 Let $q_j = u_j + v_j \mathrm{i}$, $\beta = -1 + \mathrm{i}$, $k = 8$ and $\beta^k = 16$

 $q_{m+8} \leftarrow 0$

 $j \leftarrow m$

 while $j \le m$ do

  $q_{j+7} \leftarrow x_j + q_{j+8}\beta$

  if $q_{j+7} \in Q$ then

   $y_{j+8} \leftarrow 0$

  elseif $q_{j+7} \notin Q$ then

   if $u_{j+7} < 0$ then

    $y_{j+8} \leftarrow -1$

   elseif $u_{j+7} > 0$ then

    $y_{j+8} \leftarrow 1$

   endif

  endif

  $q_{j+7} \leftarrow x_j + q_{j+8}\beta - y_{j+8}\beta^8$

  $j \leftarrow j - 1$

 enddo

end

อัลกอริทึมที่ 3.2 ออโตมาตาจำกัด $A_R = (Q, D \times E, 0, F)$ มีลักษณะการทำงานโดยคำนวณข้อมูลเข้าทีละหลักเริ่มจากข้อมูลเข้าที่มีเลขนัยสำคัญสูงสุดก่อน ซึ่งจะทำการรับข้อมูลเข้า x_j

หนึ่งตัวเลข แล้วผลิตข้อมูลออก y_{j+8} หนึ่งตัวเลข พร้อมเปลี่ยนแปลงสถานะจาก q_{j+8} ไปยัง q_{j+7} เมื่อ $j \in Z$ และ $j \le m$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยสมการที่ 3.9

$$x_j + q_{j+8}\beta = y_{j+8}\beta^8 + q_{j+7} \tag{3.9}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเส้นเชื่อมในออโตมาตาได้ดังนี้

$$q_{j+8} \xrightarrow{x_j / y_{j+8}} q_{j+7}$$

เพื่อแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถทำการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ได้อย่างถูกต้อง เราจะแสดงบทพิสูจน์ของอัลกอริทึมที่ 3.2 ดังต่อไปนี้

บทพิสูจน์ของอัลกอริทึม ในการพิสูจน์ความถูกต้องของอัลกอริทึมที่ 3.2 เราต้องแสดงว่าอัลกอริทึมมีความสมเหตุสมผล (validation) และความถูกต้อง (correctness)

พิสูจน์ความสมเหตุสมผล การพิสูจน์ในส่วนนี้เป็นการแสดงว่า ข้อมูลออกทุกตัวเลขจากการแปลงชุดตัวเลขด้วยออโตมาตาจำกัด A_R จะอยู่ใน $E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ เสมอ ซึ่งเราจะพิสูจน์โดยแสดงว่า สำหรับทุกๆ $j \le m$ แล้ว

1. ถ้า q_{j+8} อยู่ใน Q และสำหรับทุกๆ ข้อมูลเข้า x_j อยู่ใน D แล้วจะสามารถหาข้อมูลออก y_{j+8} ที่อยู่ใน E ได้เสมอ
2. ข้อมูลออก y_{j+8} ทุกตัวเลขจะอยู่ใน E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ รอบของการคำนวณที่สอดคล้องกับสมการที่ 3.9 สถานะถัดไป q_{j+7} ต้องอยู่ใน Q เสมอ ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าข้อมูลออกและจำนวนสถานะของ A_R มีขอบเขตที่แน่นอน

1. จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถเห็นได้ชัดว่า y_{j+8} จะอยู่ใน E เสมอ

2. เราจะแสดงว่า ถ้าออโตมาตาจำกัด A_R มีสถานะปัจจุบันเป็น q_{j+8} ซึ่งอยู่ใน Q และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน D แล้ว ออโตมาตาจำกัด A_R จะผลิตข้อมูลออกเป็น y_{j+8} ซึ่งอยู่ใน E และมีสถานะถัดไปเป็น q_{j+7} ซึ่งอยู่ใน Q เสมอ โดยการพิสูจน์จะแบ่งออกเป็น 5 กรณี คือกรณีของสถานะปัจจุบัน q_{j+8} อยู่ใน Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 และ Q_5

กรณีที่ 1 q_{j+8} อยู่ใน Q_1

กำหนดให้ q_{j+8} อยู่ใน Q_1 โดยที่

$$Q_1 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1 \wedge v \in V_1 \wedge v - u \le 10 \wedge v + u \le 22\},$$

$U_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid 1 \le u \le 11\}$ และ

$V_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 11 \le v \le 14\}$

เมื่อออโตมาตาจำกัด A_R รับข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออกและเปลี่ยนแปลงสถานะโดยคำนวณจากสมการที่ 3.9

การคำนวณจะเริ่มโดยการนำทุกสถานะ q_{j+8} ที่อยู่ใน Q_1 มาคูณกับ β ซึ่งสามารถคำนวณการคูณได้ตามบทตั้งที่ 3.5 ผลลัพธ์ของการคูณ $q_{j+8}\beta$ จะอยู่ในรูปของเซต S_1 โดยที่

$S_1 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U \wedge v \in V \wedge -28 \le v + u \le -22\}$,

$U = \{u \in \mathrm{Z} \mid -22 \le u \le -12\}$ และ

$V = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le 0\}$

เมื่อนำ x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ มาบวกกับ $q_{j+8}\beta$ ตามฝั่งซ้ายของสมการที่ 3.9 จะได้เซต S_1' โดยที่

$S_1' \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U' \wedge v \in V' \wedge -30 \le v + u \le -20\}$,

$U' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -24 \le u \le -10\}$ และ

$V' = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le 0\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถแบ่ง S_1' ออกเป็นสองเซตย่อยคือ S_{11} และ S_{12} โดยที่ S_{11} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน Q และ S_{12} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q

S_{11} จะเป็นเซตย่อยของ Q_4 ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

$S_{11} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{11} \wedge v \in V_{11} \wedge v + u \le -20\}$,

$U_{11} = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le -10\}$ และ

$V_{11} = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le -9\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อ S_{11} เป็นเซตย่อยของ Q ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 0

จากสมการที่ 3.9 สามารถเขียนใหม่เป็น

$$q_{j+7} = x_j + q_{j+8}\beta - y_{j+8}\beta^8 \tag{3.10}$$

ดังนั้น จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{11} ซึ่งเป็นเซตย่อยของ Q_4

S_{12} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$S_{12} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{12} \wedge v \in V_{12} \wedge -30 \le v + u \le -20\}$,

$U_{12} = \{u \in Z \mid -24 \le u \le -12\}$ และ

$V_{12} = \{v \in Z \mid -10 \le v \le 0\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{12} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่น้อยกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ -1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = -16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S'_{12} โดยที่

$S'_{12} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U'_{12} \wedge v \in V'_{12} \wedge -14 \le v + u \le -4\}$,

$U'_{12} = \{u \in Z \mid -8 \le u \le 4\}$ และ

$V'_{12} = \{v \in Z \mid -10 \le v \le 0\}$

โดยที่ S'_{12} เป็นเซตย่อยของ $Q_3 \cup Q_4$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ q_{j+8} อยู่ใน Q_1 และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออก y_{j+8} อยู่ใน $\{\bar{1},0\}$ และมีสถานะถัดไป q_{j+7} อยู่ใน Q เสมอ

กรณีที่ 2 q_{j+8} อยู่ใน Q_2

กำหนดให้ q_{j+8} อยู่ใน Q_2 โดยที่

$Q_2 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2 \wedge v \in V_2\}$,

$U_2 = \{u \in Z \mid -4 \le u \le 11\}$ และ

$V_2 = \{v \in Z \mid 4 \le v \le 10\}$

เมื่อนำทุกสถานะ q_{j+8} ที่อยู่ใน Q_2 มาคูณกับ β ซึ่งสามารถคำนวณการคูณได้ตามบทตั้งที่ 3.5 ผลลัพธ์ของการคูณ $q_{j+8}\beta$ จะอยู่ในรูปของเซต S_2 โดยที่

$S_2 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U \wedge v \in V \wedge -8 \le v - u \le 22 \wedge -20 \le v + u \le -8\}$,

$U = \{u \in Z \mid -21 \le u \le 0\}$ และ

$V = \{v \in Z \mid -14 \le v \le 7\}$

เมื่อนำ x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ มาบวกกับ $q_{j+8}\beta$ ตามฝั่งซ้ายของสมการที่ 3.9 จะได้เซต S'_2 โดยที่

$S'_2 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U' \wedge v \in V' \wedge -10 \le v - u \le 24 \wedge -22 \le v + u \le -6\}$,

$U' = \{u \in Z \mid -23 \le u \le 2\}$ และ

$V' = \{v \in Z \mid -14 \le v \le 7\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถแบ่ง S_2' ออกเป็นสองเซตย่อยคือ S_{21} และ S_{22} โดยที่ S_{21} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน Q และ S_{22} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q

S_{21} จะเป็นเซตย่อยของ $Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5$ ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

$S_{21} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{21} \wedge v \in V_{21} \wedge -10 \le v - u \le 8 \wedge -22 \le v + u \le -6\}$,
$U_{21} = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le 2\}$ และ
$V_{21} = \{v \in \mathrm{Z} \mid -14 \le v \le 1\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อ S_{21} เป็นเซตย่อยของ Q ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 0 และจากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{21} ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5$

S_{22} สามารถอธิบายได้ด้วย $T_1 \cup T_2$ โดยที่

$T_1 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1 \wedge v \in V_1 \wedge 9 \le v - u \le 24 \wedge -22 \le v + u \le -6\}$,
$U_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -23 \le u \le -8\}$,
$V_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -3 \le v \le 7\}$,
$T_2 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2 \wedge v \in V_2 \wedge v + u \ge -22\}$,
$U_2 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -18 \le u \le -12\}$ และ
$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le -4\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{22} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่น้อยกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ -1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = -16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{22}' เมื่อ S_{22}' สามารถอธิบายได้ด้วย $T_1' \cup T_2'$ โดยที่

$T_1' \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1' \wedge v \in V_1' \wedge -7 \le v - u \le 8 \wedge -6 \le v + u \le 10\}$,
$U_1' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -7 \le u \le 8\}$,
$V_1' = \{v \in \mathrm{Z} \mid -3 \le v \le 7\}$,
$T_2' \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2' \wedge v \in V_2' \wedge v + u \ge -6\}$,
$U_2' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -2 \le u \le 4\}$ และ
$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le -4\}$

โดยที่ T_1' เป็นเซตย่อยของ $Q_2 \cup Q_3$ และ T_2' เป็นเซตย่อยของ Q_4 ดังนั้น S_{22}' จะเป็นเซตย่อยของ Q

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ q_{j+8} อยู่ใน Q_2 และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออก y_{j+8} อยู่ใน $\{\bar{1},0\}$ และมีสถานะถัดไป q_{j+7} อยู่ใน Q เสมอ

กรณีที่ 3 q_{j+8} อยู่ใน Q_3

กำหนดให้ q_{j+8} อยู่ใน Q_3 โดยที่

$$Q_3 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_3 \wedge v \in V_3 \wedge -8 \le v - u \le 8\},$$
$$U_3 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le 11\} \text{ และ}$$
$$V_3 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -3 \le v \le 3\}$$

เมื่อนำทุกสถานะ q_{j+8} ที่อยู่ใน Q_3 มาคูณกับ β ซึ่งสามารถคำนวณการคูณได้ตามบทตั้งที่ 3.5 ผลลัพธ์ของการคูณ $q_{j+8}\beta$ จะอยู่ในรูปของเซต S_3 โดยที่

$$S_3 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U \wedge v \in V \wedge -6 \le v + u \le 6\},$$
$$U = \{u \in \mathrm{Z} \mid -14 \le u \le 14\} \text{ และ}$$
$$V = \{v \in \mathrm{Z} \mid -8 \le v \le 8\}$$

เมื่อนำ x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ มาบวกกับ $q_{j+8}\beta$ ตามฝั่งซ้ายของสมการที่ 3.9 จะได้เซต S_3' โดยที่

$$S_3' \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U' \wedge v \in V' \wedge -8 \le v + u \le 8\},$$
$$U' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -16 \le u \le 16\} \text{ และ}$$
$$V' = \{v \in \mathrm{Z} \mid -8 \le v \le 8\}$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถแบ่ง S_3' ออกเป็นสามเซตย่อยคือ S_{31}, S_{32} และ S_{33} โดยที่ S_{31} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน Q และ S_{32} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงน้อยกว่า 0 และ S_{33} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงมากกว่า 0

S_{31} สามารถอธิบายได้ด้วย $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ โดยที่

$$T_1 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1 \wedge v \in V_1 \wedge v + u \le 8\},$$
$$U_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -4 \le u \le 4\},$$
$$V_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 4 \le v \le 8\},$$
$$T_2 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2 \wedge v \in V_2 \wedge -8 \le v - u \le 8 \wedge -8 \le v + u \le 8\},$$
$$U_2 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -8 \le u \le 8\},$$
$$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -3 \le v \le 3\},$$
$$T_3 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_3 \wedge v \in V_3 \wedge v + u \ge -8\},$$
$$U_3 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -4 \le u \le 4\} \text{ และ}$$
$$V_3 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -8 \le v \le -4\}$$

โดยที่ T_1 เป็นเซตย่อยของ Q_2 และ T_2 เป็นเซตย่อยของ Q_3 และ T_3 เป็นเซตย่อยของ Q_4 ดังนั้น S_{31} จะเป็นเซตย่อยของ Q

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อ S_{31} เป็นเซตย่อยของ Q ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 0 และจากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{31} ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$

S_{32} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$S_{32} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{32} \wedge v \in V_{32} \wedge v - u \geq 9 \wedge v + u \geq -8\},$$
$$U_{32} = \{u \in \mathrm{Z} \mid -16 \leq u \leq -5\} \text{ และ}$$
$$V_{32} = \{v \in \mathrm{Z} \mid 1 \leq v \leq 8\}$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{32} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่น้อยกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ -1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = -16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S'_{32} เมื่อ S'_{32} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$S'_{32} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U'_{32} \wedge v \in V'_{32} \wedge v - u \geq -7 \wedge v + u \geq 8\},$$
$$U'_{32} = \{u \in \mathrm{Z} \mid 0 \leq u \leq 11\} \text{ และ}$$
$$V'_{32} = \{v \in \mathrm{Z} \mid 1 \leq v \leq 8\}$$

โดยที่ S'_{32} เป็นเซตย่อยของ $Q_2 \cup Q_3$

S_{33} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$S_{33} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{33} \wedge v \in V_{33} \wedge v - u \leq -9 \wedge v + u \leq 8\},$$
$$U_{33} = \{u \in \mathrm{Z} \mid 5 \leq u \leq 16\} \text{ และ}$$
$$V_{33} = \{v \in \mathrm{Z} \mid -8 \leq v \leq 1\}$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{33} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่มากกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = 16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S'_{33} เมื่อ S'_{33} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$S'_{33} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U'_{33} \wedge v \in V'_{33} \wedge v - u \leq 7 \wedge v + u \leq -8\},$$
$$U'_{33} = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \leq u \leq 0\} \text{ และ}$$
$$V'_{33} = \{v \in \mathrm{Z} \mid -8 \leq v \leq 1\}$$

โดยที่ S'_{33} เป็นเซตย่อยของ $Q_3 \cup Q_4$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ q_{j+8} อยู่ใน Q_3 และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออก y_{j+8} อยู่ใน $\{\bar{1},0,1\}$ และมีสถานะถัดไป q_{j+7} อยู่ใน Q เสมอ

กรณีที่ 4 q_{j+8} อยู่ใน Q_4

กำหนดให้ q_{j+8} อยู่ใน Q_4 โดยที่

$$Q_4 = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_4 \wedge v \in V_4\},$$
$$U_4 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le 4\} \text{ และ}$$
$$V_4 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -10 \le v \le -4\}$$

เมื่อนำทุกสถานะ q_{j+8} ที่อยู่ใน Q_4 มาคูณกับ β ซึ่งสามารถคำนวณการคูณได้ตามบทตั้งที่ 3.5 ผลลัพธ์ของการคูณ $q_{j+8}\beta$ จะอยู่ในรูปของเซต S_4 โดยที่

$$S_4 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U \wedge v \in V \wedge -22 \le v - u \le 8 \wedge 8 \le v + u \le 20\},$$
$$U = \{u \in \mathrm{Z} \mid 0 \le u \le 21\} \text{ และ}$$
$$V = \{v \in \mathrm{Z} \mid -7 \le v \le 14\}$$

เมื่อนำ x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ มาบวกกับ $q_{j+8}\beta$ ตามฝั่งซ้ายของสมการที่ 3.9 จะได้เซต S_4' โดยที่

$$S_4' \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U' \wedge v \in V' \wedge -24 \le v - u \le 10 \wedge 6 \le v + u \le 22\},$$
$$U' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -2 \le u \le 23\} \text{ และ}$$
$$V' = \{v \in \mathrm{Z} \mid -7 \le v \le 14\}$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถแบ่ง S_4' ออกเป็นสองเซตย่อยคือ S_{41} และ S_{42} โดยที่ S_{41} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน Q และ S_{42} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q

S_{41} จะเป็นเซตย่อยของ $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$S_{41} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{41} \wedge v \in V_{41} \wedge -8 \le v - u \le 10 \wedge 6 \le v + u \le 22\},$$
$$U_{41} = \{u \in \mathrm{Z} \mid -2 \le u \le 11\} \text{ และ}$$
$$V_{41} = \{v \in \mathrm{Z} \mid -1 \le v \le 14\}$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อ S_{41} เป็นเซตย่อยของ Q ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 0 และจากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{41} ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$

S_{42} สามารถอธิบายได้ด้วย $T_1 \cup T_2$ โดยที่

$T_1 \subseteq \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U_1 \wedge v \in V_1 \wedge -24 \le v-u \le -9 \wedge 6 \le v+u \le 22\}$,
$U_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid 8 \le u \le 23\}$,
$V_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -7 \le v \le 3\}$,
$T_2 \subseteq \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U_2 \wedge v \in V_2 \wedge v+u \le 22\}$,
$U_2 = \{u \in \mathrm{Z} \mid 12 \le u \le 18\}$ และ
$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 4 \le v \le 10\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{42} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่มากกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = 16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S'_{42} เมื่อ S'_{42} สามารถอธิบายได้ด้วย $T'_1 \cup T'_2$ โดยที่

$T'_1 \subseteq \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U'_1 \wedge v \in V'_1 \wedge -8 \le v-u \le 7 \wedge -10 \le v+u \le 6\}$,
$U'_1 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -8 \le u \le 7\}$,
$V'_1 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -7 \le v \le 3\}$,
$T'_2 \subseteq \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U'_2 \wedge v \in V'_2 \wedge v+u \le 6\}$,
$U'_2 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -4 \le u \le 2\}$ และ
$V_2 = \{v \in \mathrm{Z} \mid 4 \le v \le 10\}$

โดยที่ T'_1 เป็นเซตย่อยของ $Q_3 \cup Q_4$ และ T'_2 เป็นเซตย่อยของ Q_2 ดังนั้น S'_{42} จะเป็นเซตย่อยของ Q

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ q_{j+8} อยู่ใน Q_4 และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออก y_{j+8} อยู่ใน $\{0,1\}$ และมีสถานะถัดไป q_{j+7} อยู่ใน Q เสมอ

กรณีที่ 5 q_{j+8} อยู่ใน Q_5

กำหนดให้ q_{j+8} อยู่ใน Q_5 โดยที่

$Q_5 = \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U_5 \wedge v \in V_5 \wedge v-u \ge -10 \wedge v+u \ge -22\}$,
$U_5 = \{u \in \mathrm{Z} \mid -11 \le u \le -1\}$ และ
$V_5 = \{v \in \mathrm{Z} \mid -14 \le v \le -11\}$

เมื่อนำทุกสถานะ q_{j+8} ที่อยู่ใน Q_5 มาคูณกับ β ซึ่งสามารถคำนวณการคูณได้ตามบทตั้งที่ 3.5 ผลลัพธ์ของการคูณ $q_{j+8}\beta$ จะอยู่ในรูปของเซต S_5 โดยที่

$S_5 \subseteq \{u+v\mathrm{i} \mid u \in U \wedge v \in V \wedge 22 \le v+u \le 28\}$,
$U = \{u \in \mathrm{Z} \mid 12 \le u \le 22\}$ และ

$V = \{v \in Z \mid 0 \le v \le 10\}$

เมื่อนำ x_j ซึ่งอยู่ใน $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ มาบวกกับ $q_{j+8}\beta$ ตามฝั่งซ้ายของสมการที่ 3.9 จะได้เซต S'_5 โดยที่

$S'_5 \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U' \wedge v \in V' \wedge 20 \le v + u \le 30\}$,
$U' = \{u \in Z \mid 10 \le u \le 24\}$ และ
$V' = \{v \in Z \mid 0 \le v \le 10\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สามารถแบ่ง S'_5 ออกเป็นสองเซตย่อยคือ S_{51} และ S_{52} โดยที่ S_{51} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน Q และ S_{52} เป็นเซตที่มีสมาชิกทั้งหมดไม่อยู่ใน Q

S_{51} จะเป็นเซตย่อยของ Q_2 ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

$S_{51} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{51} \wedge v \in V_{51} \wedge v + u \ge 20\}$,
$U_{51} = \{u \in Z \mid 10 \le u \le 11\}$ และ
$V_{51} = \{v \in Z \mid 9 \le v \le 10\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อ S_{51} เป็นเซตย่อยของ Q ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 0 และจากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S_{51} ซึ่งเป็นเซตย่อยของ Q_2

S_{52} สามารถอธิบายได้ดังนี้

$S_{52} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_{52} \wedge v \in V_{52} \wedge 20 \le v + u \le 30\}$,
$U_{52} = \{u \in Z \mid 12 \le u \le 24\}$ และ
$V_{52} = \{v \in Z \mid 0 \le v \le 10\}$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 เมื่อสมาชิกทุกตัวของ S_{52} ไม่อยู่ใน Q และมีส่วนจริงที่มากกว่า 0 ดังนั้นข้อมูลออก y_{j+8} จะเท่ากับ 1 จะได้ว่า $y_{j+8}\beta^8 = 16$ จากสมการที่ 3.10 สถานะถัดไป q_{j+7} จะอยู่ใน S'_{52} โดยที่

$S'_{52} \subseteq \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U'_{52} \wedge v \in V'_{52} \wedge 4 \le v + u \le 14\}$,
$U'_{52} = \{u \in Z \mid -4 \le u \le 8\}$ และ
$V'_{52} = \{v \in Z \mid 0 \le v \le 10\}$

โดยที่ S'_{52} เป็นเซตย่อยของ $Q_2 \cup Q_3$

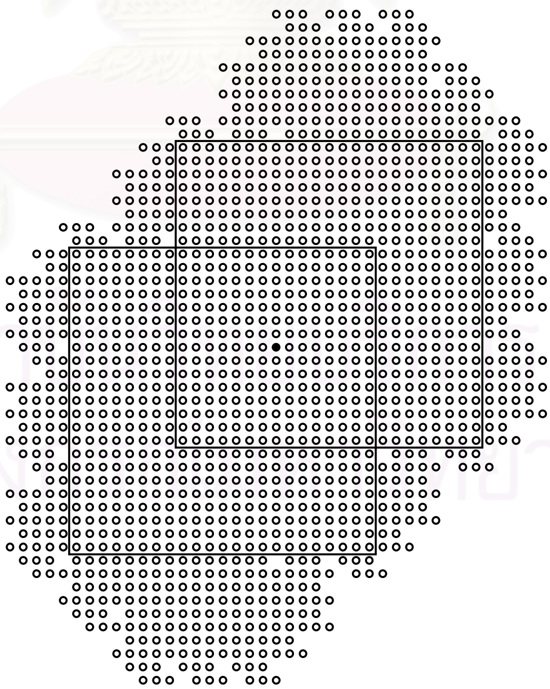
ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ q_{j+8} อยู่ใน Q_5 และมีข้อมูลเข้าเป็น x_j ซึ่งอยู่ใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้ว A_R จะผลิตข้อมูลออก y_{j+8} อยู่ใน $\{0,1\}$ และมีสถานะถัดไป q_{j+7} อยู่ใน Q เสมอ

จากการพิจารณาทั้ง 5 กรณีของ q_{j+8} ที่อยู่ในแต่ละเซตย่อยของ Q จะเห็นว่า เมื่อออโตมาตาจำกัด A_R ได้รับข้อมูลเข้าเป็น x_j ที่อยู่ใน $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ จะผลิตข้อมูลออกเป็น y_{j+8} ที่อยู่ใน $E=\{\bar{1},0,1\}$ และมีสถานะถัดไปเป็น q_{j+7} ซึ่งอยู่ใน Q เสมอ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าผลลัพธ์จากการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงด้วยออโตมาตาจำกัด A_R มีความสมเหตุสมผล

การพิสูจน์ข้างต้น แสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมมีความสมเหตุสมผลกับข้อมูลเข้ามีขนาดเป็นอนันต์ แต่ในกรณีที่เป็นข้อมูลเข้ามีขนาดจำกัด เราต้องพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของฟังก์ชันปลายทาง $\omega : Q \to E^*$ ด้วย โดยฟังก์ชันปลายทางจะมีความสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ ทุกๆ สถานะใน Q สามารถแสดงได้ด้วยรูปแบบการแทนจำนวนใน $P_7[-1+\mathrm{i}, E]$ ได้ ซึ่งหมายความว่า

$$Q \subseteq W = \{\textstyle\sum_{j=0}^{7} e_j(-1+\mathrm{i})^j \mid e_j \in E\}$$

เมื่อ W เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่สามารถแสดงได้ในระบบจำนวน $(-1+\mathrm{i}, E)$ ด้วยรูปแบบการแทนจำนวนที่มีความยาว 8 ตัวเลข สามารถแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ใน W ด้วยระนาบเชิงซ้อนดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ระนาบเชิงซ้อนแสดงเซตของจำนวนเชิงซ้อน W โดยที่แต่ละจุดใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน $x+y\mathrm{i}$ โดยแกน x ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจริงและแกน y ในระนาบเชิงซ้อนเป็นส่วนจินตภาพ จุดสีดำตรงกลางแทนพิกัด (0, 0)

ให้ W' เป็นเซตย่อยของ W ซึ่งเป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในกรอบสี่เหลี่ยม 2 รูปในระนาบเชิงซ้อนของรูปที่ 3.2 โดยที่ $W' = W_1' \cup W_2'$ สามารถอธิบายได้ด้วย

$$W_1' = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_1' \wedge v \in V_1'\},$$
$$U_1' = V_1' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -7 \le u \le 15\},$$
$$W_2' = \{u + v\mathrm{i} \mid u \in U_2' \wedge v \in V_2'\} \text{ และ}$$
$$U_2' = V_2' = \{u \in \mathrm{Z} \mid -15 \le u \le 7\},$$

เมื่อพิจารณาแต่ละเซตย่อยของ Q จะได้ว่า $Q_1 \subseteq W_1'$, $Q_2 \subseteq W_1'$, $Q_3 \subseteq W_1' \cup W_2'$, $Q_4 \subseteq W_2'$ และ $Q_5 \subseteq W_2'$ ซึ่งทำให้ $Q \subseteq W' \subseteq W$ ดังนั้นเราสรุปได้ว่าฟังก์ชันปลายทางมีความสมเหตุสมผล

พิสูจน์ความถูกต้อง การพิสูจน์ในส่วนนี้เป็นการแสดงว่า ผลลัพธ์จากการแปลงชุดตัวเลขด้วยออโตมาตาจำกัด A_R จะมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับข้อมูลเข้า

ให้ $X = (x_m x_{m-1} x_{m-2} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}$ เมื่อ $x_j \in D$ โดยที่ $j \le m$ เป็นข้อมูลเข้าของอัลกอริทึมที่ 3.2 และ $Y = (y_{m+8} y_{m+7\,m+6} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}$ เมื่อ $y_{j+8} \in E$ เราจะแสดงว่า $\|X\| = \|Y\|$

เนื่องจากอัลกอริทึมที่ 3.2 การแปลงชุดตัวเลขสามารถคำนวณได้ด้วยสมการที่ 3.9 ถ้ากำหนดให้ $n \ge 0$ การแปลงชุดตัวเลขของข้อมูลเข้า $n+1$ ตัวแรกสามารถอธิบายได้ด้วยสมการดังนี้

$$x_m + q_{m+8}\beta = y_{m+8}\beta^8 + q_{m+7},$$
$$x_{m-1} + q_{m+7}\beta = y_{m+7}\beta^8 + q_{m+6},$$
$$x_{m-2} + q_{m+6}\beta = y_{m+6}\beta^8 + q_{m+5},$$
$$\vdots$$
$$x_{m-n+1} + q_{m-n+9}\beta = y_{m-n+9}\beta^8 + q_{m-n+8} \text{ และ}$$
$$x_{m-n} + q_{m-n+8}\beta = y_{m-n+8}\beta^8 + q_{m-n+7}$$

เมื่อนำ β^j ไปคูณในแต่ละสมการของ x_j เมื่อ $j \le m$ จะได้ว่า

$$x_m\beta^m + q_{m+8}\beta^{m+1} = y_{m+8}\beta^{m+8} + q_{m+7}\beta^m,$$
$$x_{m-1}\beta^{m-1} + q_{m+7}\beta^m = y_{m+7}\beta^{m+7} + q_{m+6}\beta^{m-1},$$
$$x_{m-2}\beta^{m-2} + q_{m+6}\beta^{m-1} = y_{m+6}\beta^{m+6} + q_{m+5}\beta^{m-2},$$
$$\vdots$$
$$x_{m-n+1}\beta^{m-n+1} + q_{m-n+9}\beta^{m-n+2} = y_{m-n+9}\beta^{m-n+9} + q_{m-n+8}\beta^{m-n+1} \text{ และ}$$
$$x_{m-n}\beta^{m-n} + q_{m-n+8}\beta^{m-n+1} = y_{m-n+8}\beta^{m-n+8} + q_{m-n+7}\beta^{m-n}$$

เมื่อนำสมการทั้งหมดมาบวกกัน จะได้

$$x_m\beta^m+\cdots+x_{m-n}\beta^{m-n}+q_{m+8}\beta^{m+1}=y_{m+8}\beta^{m+8}+\cdots+y_{m-n+8}\beta^{m-n+8}+q_{m+7}\beta^m$$

เนื่องจากสถานะเริ่มต้นของ A_R เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $q_{m+8}=0$ จะได้ว่า

$$x_m\beta^m+\cdots+x_{m-n}\beta^{m-n}=y_{m+8}\beta^{m+8}+\cdots+y_{m-n+8}\beta^{m-n+8}+q_{m+7}\beta^m$$

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 สำหรับแต่ละ $j\le m$ เมื่อ q_{j+8} อยู่ใน Q และ y_{j+8} อยู่ใน E เสมอ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า $\|X\|=\|Y\|$ ■

ตัวอย่างที่ 3.1 *การบวกแบบเชื่อมตรงระหว่างจำนวนสองจำนวนในระบบเชิงซ้อนของเพนนีย์สามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก* $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ *ไปยัง* $E=\{\bar{1},0,1\}$ *ในฐาน* $\beta=-1+i$

วิธีทำ การบวกจำนวนสองจำนวนบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ระหว่าง $(10\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}11011)_{-1+\mathrm{i}}$ และ $(1\bar{1}01\bar{1}010011)_{-1+\mathrm{i}}$ จะได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีชุดตัวเลข $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ เป็น $X=(21\bar{2}00\bar{1}\bar{1}21022)_{-1+\mathrm{i}}$ การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงด้วยออโตมาตาจำกัด A_R เมื่อข้อมูลเข้าคือ X สามารถแสดงได้ด้วยตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากข้อมูลเข้า $X=(21\bar{2}00\bar{1}\bar{1}21022)_{-1+\mathrm{i}}$ ด้วยออโตมาตาจำกัด A_R

j	x_j	y_{j+8}	q_{j+7}
11	2	0	2
10	1	0	$-1+2\mathrm{i}$
9	$\bar{2}$	0	$-3-3\mathrm{i}$
8	0	0	6
7	0	$\bar{1}$	$10+6\mathrm{i}$
6	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$-1+4\mathrm{i}$
5	$\bar{1}$	0	$-4-5\mathrm{i}$
4	2	1	$-5+\mathrm{i}$
3	1	1	$-11-6\mathrm{i}$
2	0	1	$1-5\mathrm{i}$
1	2	0	$6+6\mathrm{i}$
0	2	$\bar{1}$	6

จากตารางที่ 3.2 เมื่อออโตมาตาจำกัด A_R ทำการแปลงชุดตัวเลขสิ้นสุดแล้ว A_R จะมีสถานะสุดท้ายเป็น 6 ซึ่งจากฟังก์ชันปลายทางของ A_R จะได้ว่า

$$\omega(6) = 000\bar{1}1100$$

ดังนั้นผลลัพธ์จากการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงของ $X = (21\bar{2}00\bar{1}\bar{1}21022)_{-1+\mathrm{i}}$ คือ

$$Y = (0000\bar{1}\bar{1}01110\bar{1}000\bar{1}1100)_{-1+\mathrm{i}} \qquad \square$$

3.4 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับการบวกแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลขเป็น $E = \{\bar{1},0,1\}$ โดยเราจะพิจารณาปัญหาของการบวกระหว่างจำนวนสองจำนวนในระบบ เป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ ซึ่งการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงต้องพิจารณาถึงปัญหาของส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลข โดยค่าความหน่วงของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมต้องมากกว่าหรือเท่ากับส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลข จากการพิสูจน์ได้แสดงให้เห็นว่าส่วนล้นจากการแปลงชุดตัวเลข D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ จะเท่ากับ 4 ซึ่งในงานวิจัยของเราจะใช้ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงมาใช้อธิบายอัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ โดยเราได้เสนอวิธีการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขดังกล่าว ซึ่งจากผลทางทฤษฎีแสดงให้เห็นว่า อัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับ 8 ซึ่งค่าความหน่วงที่เท่ากับ 8 เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดตามวิธีการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงที่ถูกเสนอขึ้นในงานวิจัยนี้ จากนั้นจึงทำการพิสูจน์ว่าอัลกอริทึมที่นำเสนอมีความถูกต้องและสมเหตุสมผล

บทที่ 4

บทวิเคราะห์การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ในระบบจำนวนที่มีฐาน β ที่สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน และมีชุดตัวเลข $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid a \le e \le b\}$ เมื่อ $a \le 0$ และ $b \ge 0$ ปัญหาของการบวกและการคูณในระบบจำนวนนี้ สามารถพิจารณาเป็นปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid na \le d \le nb\}$ ไป E โดยที่การบวกจะเป็นกรณีของ $n = 2$ และการคูณด้วย u จะเป็นกรณีของ $n = u$

จากที่ได้กล่าวข้างต้น เป็นที่มาของการแปลงชุดตัวเลขในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลขในรูปทั่วไป (generic form) คือ ปัญหาการแปลงชุดตัวเลขจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ เมื่อ $n \ge 1$ ในบทนี้เราจะกล่าวถึงบทวิเคราะห์ของการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงที่ใช้ในการแปลงชุดตัวเลขในรูปทั่วไปและอัลกอริทึมของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงนี้

4.1 การสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในรูปทั่วไป

การสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในรูปทั่วไป $A = (Q, D \times E, 0, F)$ จะมีวิธีการพิจารณาการสร้างคล้ายคลึงกับการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขจาก $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $\{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ คือ กำหนดค่าความหน่วง k ให้กับออโตมาตาจำกัด และใช้กำหนดการพลวัตในการหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A เนื่องจากออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขจาก $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ ไปยัง $\{\bar{1}, 0, 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ มีค่าความหน่วงเท่ากับ 8 ดังนั้นการสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ เมื่อ $n \ge 1$ จะพิจารณาด้วยค่าความหน่วงเป็น $k = 4n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง และเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลข $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ บนฐาน $\beta = -1 + \mathrm{i}$ ด้วยค่าหน่วง k สามารถหาได้ด้วยอัลกอริทึมที่ 4.1 ดังต่อไปนี้

อัลกอริทึมที่ 4.1 อัลกอริทึมการหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัด A ที่มีค่าหน่วง k สำหรับการแปลงชุดตัวเลขบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในรูปทั่วไป

Input : $D=\{d\in Z\mid -n\le d\le n\}$, $E=\{e\in Z\mid -1\le e\le 1\}$, $\beta=-1+\mathrm{i}$ and

$k=4n, n\in Z, n\ge 2$

Output : Q

begin

$Q\leftarrow\{0\}$

do

$Q'\leftarrow Q$

$U\leftarrow\{u=q\beta+d\mid q\in Q, d\in D\}$

for each $u\in U$

$V\leftarrow\{v=u+e\beta^k\mid e\in E\}$

if $V\cap Q=\phi$ then

$u'=u+e\beta^k, e\in E, u'\in\{\sum_{j=0}^{k-1}e_j(-1+\mathrm{i})^j\mid e_j\in E\}$

if $u'\in\{\sum_{j=0}^{k-1}e_j(-1+\mathrm{i})^j\mid e_j\in E\}$ doesn't exist then

can't find Q by delay k

endif

$Q\leftarrow Q\cup\{u'\}$

endif

endfor

while $Q\ne Q'$

end

อัลกอริทึมที่ 4.1 จะมีวิธีในการหาเซตจำกัดของสถานะ Q เช่นเดียวกับอัลกอริทึมที่ 3.1 ที่ใช้ในการหาเซตจำกัดของสถานะของออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงสำหรับการแปลงชุดตัวเลขจาก $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปยัง $\{\bar{1},0,1\}$ บนฐาน $\beta=-1+\mathrm{i}$ โดยจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะส่วนของข้อมูลเข้าของอัลกอริทึมเพื่อใช้ในการหาเซตจำกัดของสถานะ Q ของออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A สำหรับการแปลงชุดตัวเลขจากชุดตัวเลขจาก $D=\{d\in Z\mid -n\le d\le n\}$ ไปยัง $E=\{e\in Z\mid -1\le e\le 1\}$ บนฐาน $\beta=-1+\mathrm{i}$ โดยที่ Q ต้องเป็นเซตย่อยของ $\{\sum_{j=0}^{k-1}e_j(-1+\mathrm{i})^j\mid e_j\in E\}$ ตามบทพิสูจน์ของบทตั้งที่ 3.3 ด้วยเช่นกัน

4.2 การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ในรูปทั่วไป

ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ที่สร้างจากอัลกอริทึมที่ 4.1 จะนำมาใช้ในการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลข $D=\{d\in Z\mid -n\le d\le n\}$ ไปยัง

$E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ เมื่อ k เป็นค่าความหน่วงของ A และ Q เป็นเซตจำกัดของสถานะของ A แล้ว การแปลงชุดตัวเลขจาก D ไปยัง E บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ สามารถคำนวณได้ตามอัลกอริทึมที่ 4.2 ดังต่อไปนี้

อัลกอริทึมที่ 4.2 อัลกอริทึมการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ที่มีค่าความหน่วง k

Input : $X = (x_m x_{m-1} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}, \forall j \le m, x_j \in D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$

Output : $Y = (y_{m+k} y_{m+k-1} \cdots)_{-1+\mathrm{i}}, \forall j \le m, y_{j+k} \in E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$

```
begin
    Let q_j = u_j + v_j i and β = −1 + i
    q_{m+k} ← 0
    j ← m
    while j ≤ m do
        q_{j+k−1} ← x_j + q_{j+k} β
        if q_{j+k−1} ∈ Q then
            y_{j+k} ← 0
        elseif q_{j+k−1} ∉ Q then
            if u_{j+k−1} < 0 then
                y_{j+k} ← −1
            elseif u_{j+k−1} > 0 then
                y_{j+k} ← 1
            endif
        endif
        q_{j+k−1} ← x_j + q_{j+k} β − y_{j+k} β^k
        j ← j − 1
    enddo
end
```

อัลกอริทึมที่ 4.2 ใช้แปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจาก $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid -n \le d \le n\}$ ไปยัง $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid -1 \le e \le 1\}$ บนฐาน $\beta = -1+\mathrm{i}$ โดยคำนวณข้อมูลเข้าทีละหลักเริ่มจากข้อมูลเข้าที่มีเลขนัยสำคัญสูงสุดก่อน การแปลงชุดตัวเลขสามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 4.1

$$x_j + q_{j+k}\beta = y_{j+k}\beta^k + q_{j+k-1} \qquad (4.1)$$

เมื่อ $j \in Z$ และ $j \le m$ โดยที่ q_{j+k} และ q_{j+k-1} คือสถานะปัจจุบันและสถานะถัดไปตามลำดับ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ใน Q และข้อมูลเข้า x_j และข้อมูลออก y_{j+k} เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ใน D และ E ตามลำดับ ดังนั้นออโตมาตาจำกัด A เมื่ออยู่ในสถานะ q_{j+k} จะแปลงตัวเลข x_j ของข้อมูลเข้าไปเป็นตัวเลข y_{j+k} ของข้อมูลออก และเปลี่ยนสถานะไปเป็น q_{j+k-1}

บทวิเคราะห์อัลกอริทึม

จากการพิสูจน์ใน [5] สามารถสรุปได้ว่า การแปลงชุดตัวเลขในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลขในรูปทั่วไป สามารถทำการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงได้เสมอ ซึ่งอัลกอริทึมที่ 4.2 ที่เสนอในงานวิจัยนี้ ใช้สำหรับการแปลงชุดตัวเลขในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์จากชุดตัวเลขในรูปทั่วไป โดยอัลกอริทึมจะคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A ซึ่งสามารถสร้างได้จากอัลกอริทึมที่ 4.1

การสร้างออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรง A จากอัลกอริทึมที่ 4.1 เป็นการหาเซตจำกัดของสถานะ Q เมื่อกำหนดให้ k เป็นค่าความหน่วงของออโตมาตา ซึ่งอัลกอริทึมที่ 4.1 มีลักษณะการทำงานแบบเวียนเกิด โดยจะทำการวนซ้ำเพิ่มจำนวนสถานะใหม่ใน Q โดยที่สถานะใหม่จะพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงของสถานะเมื่อรับข้อมูลเข้าที่อยู่ใน D และผลิตข้อมูลออกที่อยู่ใน E ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ 4.1 อัลกอริทึมจะวนซ้ำเพื่อเพิ่มจำนวนสถานะใน Q ไปจนกว่าในรอบของการวนซ้ำนั้นจะไม่มีสถานะใหม่เพิ่มขึ้น ซึ่ง Q ที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 4.1 ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปแบบที่สามารถอธิบายได้ด้วยเซตย่อย 5 เซตเหมือนกับ Q ที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 หรือกล่าวได้ว่า จากอัลกอริทึมที่ 4.1 สามารถสร้าง Q ได้แน่นอน แต่ยังไม่สามารถกำหนดรูปแบบที่สามารถอธิบายให้เข้าใจง่ายให้กับ Q ได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้นำเสนอ การบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีฐานเป็น $-1+i$ ซึ่งระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่เลือกใช้ มีชุดตัวเลขเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 เนื่องจากระบบจำนวนดังกล่าวมีระดับของความซ้ำซ้อนที่น้อยที่สุด และเป็นระบบจำนวนที่ไม่มีการซ้ำซ้อนของการแสดงค่าศูนย์ สำหรับปัญหาของการบวกแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ระหว่างจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน จะถูกพิจารณาเป็นปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -2 ถึง 2 ไปยังชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีของออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงมาช่วยแก้ปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรง โดยที่ออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงจะถูกกำหนดลักษณะเฉพาะด้วยค่าความหน่วงและเซตจำกัดของสถานะ จากทฤษฎีบทได้แสดงให้เห็นว่า อัลกอริทึมของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงจากชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -2 ถึง 2 ไปยังชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 ในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ สามารถคำนวณได้ด้วยออโตมาตาจำกัดแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับ 8 และมีจำนวนสถานะ 407 สถานะ ซึ่งได้ทำการพิสูจน์แล้วว่าอัลกอริทึมดังกล่าวมีความสมเหตุสมผล และความถูกต้อง

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับปัญหาของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีข้อมูลออกเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ -1 ถึง 1 ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงที่มาจากปัญหาการบวก และได้วิเคราะห์ถึงปัญหาการแปลงชุดตัวเลขในรูปทั่วไปแล้ว แต่ยังมีปัญหาที่น่าสนใจที่ยังไม่มีบทพิสูจน์อยู่คือ อัลกอริทึมสำหรับการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่ถูกเสนอในงานวิจัยนี้เป็นอัลกอริทึมที่มีค่าความหน่วงที่น้อยที่สุดหรือไม่ และนอกจากนี้ยังมีปัญหาของการคำนวณหาค่าความหน่วงของการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงบนระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ คือ เมื่อกำหนดชุดตัวเลขของข้อมูลเข้าเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ $-n$ ถึง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหนึ่งแล้ว ในงานวิจัยนี้จะหาค่าความหน่วงของอัลกอริทึมด้วยการทดลองจากค่าความหน่วงขั้นต่ำก่อน ซึ่งยังไม่มีวิธีที่ใช้ในการคำนวณหาความหน่วงของอัลกอริทึมโดยไม่ต้องทดลองหาที่ละระดับค่าวามหน่วงได้

รายการอ้างอิง

[1] W. Penney. A Binary System for a Complex Numbers. *Journal of the ACM* 12, 2 (April 1965): 247-248.

[2] D.E. Knuth. An Imaginary Number System. *Communications of the ACM* 3, 1 (January 1960): 245-247.

[3] A. Avizienis. Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Transactions on Electronic Computers* 10 (1961): 389-400.

[4] Ch. Frougny. On-line Finite Automata for Addition in some Numeration. *Theoretical Informatics and Applications* 33 (1999): 79-101.

[5] A. Surarerks. *On-line arithmetic in real and complex base*. Doctoral dissertation, LIAFA, Universite de Pierre et Marie Curie, 2001.

[6] A. Surarerks. Digit set conversion by on-line finite automata. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society* 8, 2 (2001): 337-358.

[7] B. Parhami. Generalized Signed-Digit Number Systems : A Unifying Framework for Redundant Number Representations. *IEEE Transactions on Computers* 39 (1990): 89-98.

[8] K.S. Trivedi, and M.D. Ercegovac. On-line Algorithms for Division and Multiplication. *IEEE Transactions on Computers* 26 (1977): 681-687.

[9] Ch. Mazenc, X. Merrheim, J.M. Muller and S. Kla. New Algorithms for parallel and on-line computation of elementary functions. *International Symposium on Optical and Optoelectronic Applied Science and Engineer* (1991).

[10] S. Eilenberg. *Automata, Language and Machine*. New York : Academic Press, 1974.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณัฐพล ธนาเตชะวงศ์ เกิดเมื่อวันที่ 15 พฤศจิกายน พ.ศ. 2525 ที่จังหวัดชลบุรี สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนชลราษฎรอำรุง อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี เข้ารับการศึกษาต่อในระดับปริญญาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา จนสำเร็จการศึกษาในปี พ.ศ. 2547 และศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย