การจำลองแบบเชิงตัวเลขสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

นายจิรายุส สมจินดา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2551

NUMERICAL MODELING OF CONJUGATE HEAT TRANSFER WITH FREE AND FORCED CONVECTION BY FINITE VOLUME METHOD

Mr.Jirayus Somjinda

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2008

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การจำลองแบบเชิงตัวเลขสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม
โดย	นายจิรายุส สมจินดา
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.อศิ บุญจิตราดุลย์)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

จิรายุส สมจินดา : การจำลองแบบเชิงตัวเลขสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม. (NUMERICAL MODELING OF CONJUGATE HEAT TRANSFER WITH FREE AND FORCED CONVECTION BY FINITE VOLUME METHOD) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์, 77 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมภายใต้สมมติฐานที่เป็นการไหลแบบราบเรียบอัดตัวไม่ได้ที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติ การถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลถูกเชื่อมโยงโดยใช้ฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากปริมาตรควบคุมในของแข็งที่ผิวรอยต่อ ซึ่งฟลักซ์ดังกล่าวถูกนำไปคำนวณเป็น Source term ของสมการอนุรักษ์พลังงานโดยไม่ตัดความเชื่อมโยงของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นถูกตรวจสอบความถูกต้องกับงานวิจัยอื่นๆก่อนหน้านี้ทั้งในส่วนของการไหลและการถ่ายเทความร้อนในโหมดต่างๆ จนมั่นใจได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถให้ผลการคำนวณที่ถูกต้อง ไม่ต่างไปจากลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง

โปรแกรมที่ผ่านการตรวจสอบความถูกต้องแล้วจะถูกใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมที่ได้รับความร้อนจากผิวด้านล่างของช่องการไหล โดยศึกษาถึงผลของเรย์โนลด์นัมเบอร์ พรันเทิลด์นัมเบอร์ และอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน พบว่า อัตราการถ่ายเทความร้อนมีความสัมพันธ์โดยตรงกับตัวแปรทั้งสาม กล่าวคือ เมื่อค่าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งเพิ่มขึ้นจะทำให้อัตราการถ่ายเทความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย โดยตัวแปรที่มีผลมากที่สุดคืออัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน และเมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าตั้งแต่ 100 ขึ้นไป สิ่งกีดขวางจะมีอุณหภูมิคงที่จนไม่มีผลของการนำความร้อนในของแข็ง (เกรเดียนท์ของอุณหภูมิในของแข็งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์)

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต จิรายุส สมจินดา
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2551

4870577121 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS : CONJUGATE HEAT TRANSFER / FINITE VOLUME / CONVECTION

JIRAYUS SOMJINDA : NUMERICAL MODELING OF CONJUGATE HEAT TRANSFER WITH FREE AND FORCED CONVECTION BY FINITE VOLUME METHOD. THESIS ADVISOR : ASST.PROF. SOMPONG PUTIVISUTISAK, Ph.D., 77 pp.

This thesis presents a finite volume method for conjugate heat transfer problem in two-dimensional steady laminar flow. Heat transfer at the interface between solid and fluid parts is calculated by using heat flux that leaves or enters the control volume. The heat flux is dumped into the source term of the energy conservation equation and the calculation is continued without link-cutting off the adjacent control volume. The developed program is validated with results from previous studies. It is found that both flow field and heat transfer are in reasonably good agreement with experimental and other numerical data.

The verified computer program is used to investigate the conjugate heat transfer problem of flow over a rectangular obstacle in channel which is heated from its base. Effects of Reynolds number, Prandtl number, and thermal conductivity ratio are studied. It is found that all three parameters affect the heat transfer rate, i.e. heat transfer rate increases with the increasing of each parameter. If the thermal conductivity ratio is more than 100, the obstacle temperature can be regarded as a constant. Hence, there is no conduction in the solid part (temperature gradient approaching zero).

Department : Mechanical Engineering Student's Signature จิรายุส สมจินดา
Field of Study : Mechanical Engineering Advisor's Signature
Academic Year : 2008

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนคำปรึกษาที่มีคุณค่ายิ่งทั้งในเรื่องงานวิจัยและการดำเนินชีวิต

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.อศิ บุญจิตราดุลย์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น

ขอขอบคุณพี่กิตติศักดิ์ คู่วรัญญู และเพื่อนๆ สมาชิกในห้องปฏิบัติการ Computational Modelling and Optimisation Laboratory รวมไปถึงเพื่อนๆปริญญาโททุกท่าน สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือ กำลังใจ และข้อคิดเห็นต่างๆ ตลอดระยะเวลาการทำงานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา อันเป็นที่รักยิ่งที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยเสมอมา และคุณค่าอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดา มารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

a	ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการพีชคณิต
A	พื้นที่หน้าตัดของปริมาตรควบคุม
CV	ปริมาตรควบคุม
c_p	ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
D	สัมประสิทธิ์การแพร่
E	พลังงานรวม
e	พลังงานภายในของของไหล
F	ฟลักซ์การพา
$\vec{\mathrm{f}}$	แรงที่กระทำต่อของไหล
Gr	กราชอฟนัมเบอร์ (Grashof number)
g	แรงโน้มถ่วงโลก
H	ความสูงของช่องทางไหล
h	ความสูงของสิ่งกีดขวาง, เอนทาลปี
K	อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็งต่อของไหล
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
L	ความยาวของช่องทางไหล
L_e	ระยะทางช่วงขาเข้าของช่องทางไหล
L_o	ระยะทางช่วงขาออกช่องทางไหล
m	มวล
Nu	นัซเซิลท์นัมเบอร์ (Nusselt number)
Pe	เพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)
Pr	พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl number)
p	ความดัน
Q	ความร้อนที่ถ่ายเทเข้าออกปริมาตรควบคุม
q''	ฟลักซ์ความร้อน
Ra	เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number)
Re	เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number)
$\vec{\mathrm{r}}$	เวคเตอร์แสดงตำแหน่ง

S	พจน์ของ Source
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิอ้างอิง
t	เวลา
u	ความเร็วในแนวแกน x
V	ปริมาตรควบคุม
$\vec{\mathrm{V}}$	เวคเตอร์ความเร็ว
v	ความเร็วในแนวแกน y
W	งานที่กระทำต่อปริมาตรควบคุม
w	ความกว้างของสิ่งกีดขวาง
X_r	ระยะการหมุนวน
x	ระยะในแนวแกน x
y	ระยะในแนวแกน y
β	สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน
ϕ	ตัวแปรสเกลาร์
Γ	สัมประสิทธิ์การแพร่
μ	ความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic viscosity)
θ	อุณหภูมิไร้มิติ
ρ	ความหนาแน่น
σ	ความเค้น
τ	ความเค้นเฉือน

ตัวห้อย (Subscripts)

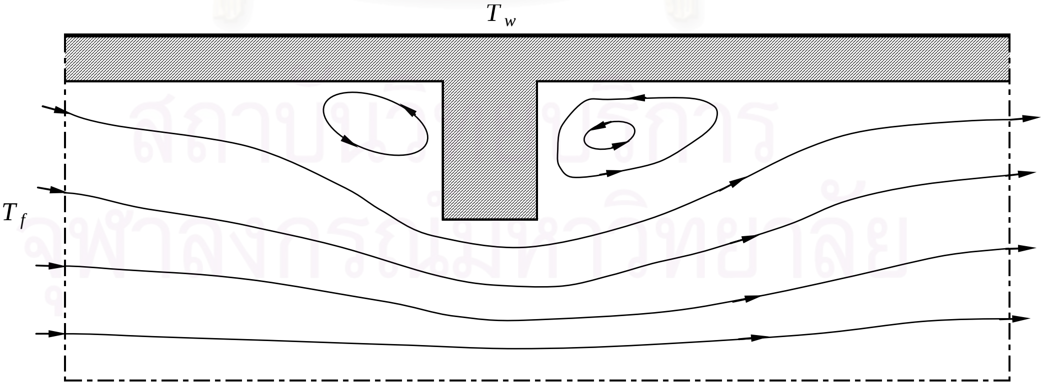
E,W,N,S	จุดที่อยู่ข้างเคียงตามทิศ east, west, north และ south
e,w,n,s	ผิวของปริมาตรควบคุม
f	ของไหล
i,j,I,J	indices
nb	จุดต่อที่อยู่ข้างเคียง
s	ของแข็ง
w	ผนัง

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนเป็นปัญหาที่มีผู้สนใจศึกษากันเป็นจำนวนมากเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนมักจะเกี่ยวข้องกับงานทางวิศวกรรมหลายๆประเภท เช่น การถ่ายเทความร้อนออกจากครีบของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การถ่ายเทความร้อนออกจากอุปกรณ์อิเล็กทรอนิคส์ การถ่ายเทความร้อนของรอยเชื่อมออกสู่อากาศ การระบายความร้อนภายในใบพัดกังหันก๊าซ และการระบายความร้อนของเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ เป็นต้น จะเห็นว่าการถ่ายเทความร้อนส่วนใหญ่จะเป็นการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งไปสู่ของไหลทั้งสิ้น โดยในอดีตเพื่อให้ปัญหามีความง่ายต่อการคำนวณจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่บริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนมีความคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง ดังนั้นเพื่อให้การคำนวณมีความถูกต้องมากขึ้นจึงต้องพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ซึ่งการถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่าการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยสามารถอธิบายได้ด้วยรูปที่ 1.1 ดังนี้



รูปที่ 1.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

พิจารณาจากรูปจะเห็นว่ามีของไหลอุณหภูมิ T_f ไหลผ่านท่อที่มีครีบระบายความร้อน โดยที่ผนังท่อและครีบมีความหนา ที่ผิวด้านนอกท่อมีอุณหภูมิคงที่ T_w ซึ่งเป็นผลให้เกิดการนำความร้อนและมีการกระจายตัวของอุณหภูมิเกิดขึ้น โดยอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อระหว่างครีบและของไหลย่อมต้องมีค่าไม่คงที่อย่างแน่นอน ดังนั้นแล้วถ้ากำหนดให้อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อมีค่าคงที่เพื่อใช้เป็นเงื่อนไขขอบของของไหลแล้ว ผลเฉลยของการคำนวณย่อมต้องคลาดเคลื่อนไป

ปัญหานี้สามารถแก้ได้โดยการใช้โดเมนการคำนวณที่รวมส่วนของของแข็งและของไหลไว้ในโดเมนเดียวกัน ซึ่งกรณีนี้จะทำให้ใช้เงื่อนไขขอบของอุณหภูมิที่ผิวด้านนอกอย่างเดียวก็สามารถหาผลเฉลยได้ ส่วนวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อของทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอดีตเริ่มจากการศึกษาปัญหาของการไหลผ่านแผ่นราบโดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ เช่น Luikov (1974), Payvar (1971) และ Pozzi and Lupo (1989) ศึกษาปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของแผ่นราบโดยวิเคราะห์การนำความร้อนในของแข็งเพียง 1 มิติ ทำให้ทราบถึงการกระจายตัวของอุณหภูมิทั้งในส่วนของแข็งและของไหล ต่อมา Rizk et al. (1992) และ Vynnycky (1998) ได้ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของแผ่นราบเช่นกันแต่ได้รวมผลของการนำความร้อนตามแนวแกนไว้ด้วยทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน และนัซเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อในกรณีต่างๆ โดย Vynnycky (1998) ได้นำผลการวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับผลจากวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) พบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

เมื่อต้องการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนขึ้นทำให้การใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ทำได้ยากจึงมีการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการคำนวณและนำไปประยุกต์ใช้กับงานในหลายๆ แขนง เช่น

Choi and Kim (1996) วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบผลต่างสืบเนื่อง โดยจำลองปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในท่อทรงสี่เหลี่ยมซึ่งมีการพาความร้อนแบบผสม จากการศึกษาสามารถอธิบายผลกระทบของการพาความร้อนแบบอิสระเฉพาะช่วงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำ แต่ในช่วงค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สูงสามารถพิจารณาเป็นการพาความร้อนแบบบังคับโดยไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงผลของการพาความร้อนแบบอิสระ

Young and Vafai (1998) ได้วิเคราะห์การระบายความร้อนของสิ่งกีดขวางในช่องการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ โดยศึกษาถึงผลกระทบของเรย์โนลด์นัมเบอร์ อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน วิธีการให้ความร้อน และรูปร่างของสิ่งกีดขวาง ว่ามีผลอย่างไรต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

Chen and Hans (2000) ได้แสดงข้อผิดพลาดของการใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE กับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเนื่องจากค่าความจุความร้อนในสมการพลังงาน โดยกรณีที่ใช้สัมประสิทธิ์ของเทอมการแพร่เป็นอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่อค่าความจุความร้อน จะทำให้ผลการคำนวณผิดไปจากความเป็นจริง ซึ่งวิธีแก้ไขคือการใช้ค่าความจุความร้อนของของไหลแทนค่าความจุความร้อนของของแข็งจะทำให้ผลการคำนวณที่ผิวรอยต่อมีความต่อเนื่องและสอดคล้องกับปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้นจริง

Chiu at al. (2001) ได้แสดงรายละเอียดของผลการทดลองและผลจากวิธีไฟไนต์วอลุมของปัญหาการไหลในช่องการไหลที่มีแผ่นราบได้รับความร้อนจากด้านล่าง พบว่าผลจากทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี และเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่คิดผลของการนำความร้อนจะเห็นความแตกต่างกันอย่างชัดเจนทั้งในส่วนของอุณหภูมิและอัตราการถ่ายเทความร้อน

Liaqat and Baytas (2001) เปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกับกรณีพิจารณาให้อุณหภูมิที่ขอบมีค่าคงที่ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในบ่อรูปครึ่งวงกลม พบว่าผลของคอนจูเกตจะเกิดขึ้นเมื่อผนังนำความร้อนมีความหนาและอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าน้อย

Pratumwal (2002) ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยใช้วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ที่ผิวรอยต่อด้วยวิธีค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิค โดยศึกษาผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติต่างๆต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตและศึกษาผลกระทบของแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิที่มีต่อการไหล

Malatip (2004) ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งคำนวณด้วยวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คินในของไหลและวิธีกาเลอร์คินในของแข็ง และประยุกต์เข้ากับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน โดยทำการศึกษาผลกระทบในส่วนของการถ่ายเทความร้อนจากการเปลี่ยนแปลงต่อค่าคุณสมบัติต่างๆ

Kanna and Das (2006) ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกับปัญหาการไหลผ่าน Backward-facing step โดยศึกษาผลของตัวแปรสี่ตัวคือ เรย์โนลด์นัมเบอร์ พรันด์เทิลนัมเบอร์ อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน และความหนาของชั้นของแข็ง ว่ามีผลอย่างไรต่อนัซเซิลท์นัมเบอร์ นัซเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ย และอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อ

Mobedi and Sunden (2006) วิเคราะห์การระบายความร้อนของครีบที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนขนาดเล็กด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง โดยพิจารณาว่าเป็นการพาความร้อนแบบอิสระ พบว่าตำแหน่งที่ดีที่สุดของแหล่งกำเนิดความร้อนจะขึ้นอยู่กับตัวแปรสองตัวคือ พรันด์เทิลนัมเบอร์และพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนและความหนาของครีบ

Jahangeer et al. (2007) ศึกษาถ่ายเทความร้อนในชิ้นส่วนของเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ที่ใช้โซเดียมเหลวเป็นตัวหล่อเย็น โดยใช้สมการชั้นขอบเขต (Boundary layer equation) ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ทำให้ทราบถึงช่วงการใช้งานของค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่มีผลต่อขีดจำกัดของอุณหภูมิ

Divo and Kassab (2007) ได้พัฒนาวิธี Radial basis function meshless method และประยุกต์ใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในลักษณะต่างๆเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากโปรแกรมสำเร็จรูป พบว่าการใช้วิธีดังกล่าวจะใช้กริดในการคำนวณน้อยลงโดยที่ยังให้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Wang et al. (2007) ได้พัฒนาอัลกอริทึม Lattice Boltzmann เพื่อประยุกต์ใช้กับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตร่วมกับการประมาณค่าที่บริเวณผิวรอยต่อของของแข็ง-ของไหลด้วยวิธี Half lattice division ซึ่งการคำนวณด้วยวิธีดังกล่าวนี้ทำให้ใช้หน่วยความจำในการคำนวณลดลงเป็นอย่างมาก

จากที่ได้กล่าวมาจะเห็นว่างานวิจัยส่วนใหญ่จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหา ทั้งนี้เนื่องมาจากความซับซ้อนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตทำให้การประยุกต์ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ทำได้ลำบากหรือทำไม่ได้เลยในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อนมาก

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยจะคำนวณการถ่ายเทความร้อนทั้งในส่วนของของแข็งและของไหลไว้ในโดเมนเดียวกัน ทำการคำนวณสมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงานไปพร้อมๆกันในเวลาเดียว ซึ่งวิธีการคำนวณแบบนี้ทำให้ลดขั้นตอนและความซับซ้อนของการคำนวณแบบแยกกันดังเช่นในกรณีของ Limtrakarn (2002) กล่าวคือ โดเมนการคำนวณของของไหลและของแข็งจะแยกจากกัน โดยการคำนวณเริ่มแรกจะคำนวณในส่วนของของไหลก่อนแล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้หลังจากคำตอบลู่เข้าแล้วไปเป็นเงื่อนไขขอบของของแข็ง หลังจากนั้นจึงคำนวณหาผลเฉลยในโดเมนของของแข็ง และนำผลลัพธ์ที่ได้กลับไปเป็นเงื่อนไขขอบของของไหลอีกครั้งหนึ่ง แล้วจึงทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวจนได้คำตอบ ซึ่งการคำนวณแบบกลับไปกลับมานี้มีข้อเสียคือจะต้องใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างนานและทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของคำตอบ เนื่องจากไม่มีความต่อเนื่องของฟลักซ์ความร้อนที่ผิวรอยต่อ จะเห็นได้ว่าวิธีการคำนวณแบบแยกกันนี้เป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้กับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต เนื่องจากการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตต้องพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กันไปในเวลาเดียวกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.2.1 เพื่อศึกษาพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

1.2.2 พัฒนาแบบจำลองที่ใช้สำหรับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

1.2.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุมให้สามารถทำนายพฤติกรรมถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตสำหรับการไหลแบบราบเรียบอัดตัวไม่ได้ในสองมิติที่สภาวะคงตัว

1.3.2 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับลักษณะการนำความร้อนและการพาความร้อนกับปัญหาการไหลแบบง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการทดลองที่มีผู้ทำมาแล้ว หรือจากผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ

1.3.3 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตรวจสอบความถูกต้องแล้วมาประยุกต์เข้ากับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตและวิเคราะห์ผลที่ได้จากการคำนวณ

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในส่วนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งประกอบไปด้วยการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง ของไหล และการถ่ายเทความร้อนที่มีการนำความร้อนและการพาความร้อนควบคู่กัน

1.4.2 ศึกษางานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง

1.4.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อให้สามารถคำนวณการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

1.4.4 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาแบบง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการทดลองที่มีผู้ทำมาแล้ว หรือผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ

1.4.5 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตรวจสอบแล้วไปคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

1.4.6 วิเคราะห์และสรุปผล

1.4.7 จัดทำวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.5.1 เข้าใจลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของแข็งและของไหล เมื่อพิจารณาการพาความร้อนและการนำความร้อนควบคู่กัน

1.5.2 เข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างสาขาวิชาพลศาสตร์ของไหลกับการถ่ายเทความร้อน

1.5.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนจากของแข็ง ไปสู่ของไหลได้

1.5.4 สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ถ่ายเทความร้อนได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ

1.5.5 ลดค่าใช้จ่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนในปัญหาทางวิศวกรรมทั่วไป

บทที่ 2

สมการพื้นฐาน

ปรากฏการณ์ทางกายภาพที่เกิดขึ้นของการถ่ายเทความร้อน การไหล หรือกระบวนการอื่นๆต้องเริ่มต้นจากกฎหรือความจริงพื้นฐานที่เป็นตัวกำกับกระบวนการ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมักจะอยู่ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ โดยในบทนี้จะได้อธิบายถึงการได้มาของสมการพื้นฐานที่เป็นตัวกำกับลักษณะทางกายภาพของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนอันได้แก่ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) โดยทั้งสามสมการจะอยู่ภายใต้ข้อสมมติฐานดังนี้

1) การไหลเป็นแบบราบเรียบและอัดตัวไม่ได้

2) การไหลอยู่ในสภาวะคงตัว

3) การไหลเกิดขึ้นใน 2 มิติ

4) คุณสมบัติต่างๆของของไหลมีค่าคงที่

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลได้มาจากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวลที่กล่าวว่า “มวลนั้นไม่สูญหายไป” ซึ่งเมื่อประยุกต์เข้าใช้กับปริมาตรควบคุมแล้วจะสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลในพิกัดแบบคาร์ทีเซียนสองมิติในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \qquad (2.1)$$

จากสมมติฐานข้างต้นที่ว่าการไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ กล่าวคือ ปริมาตรควบคุมที่พิจารณามีขนาดคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นความหนาแน่นของของไหลจึงมีค่าคงที่ ทำให้สมการลดรูปเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2.2)$$

หรือเขียนในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \;=\; 0 \tag{2.3}$$

สมการ (2.3) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลหรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่าสมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมได้มาจากกฎข้อที่สองของนิวตันที่กล่าวว่า “แรงเท่ากับมวลคูณความเร่ง” ซึ่งสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในรูปทั่วไปได้ดังนี้

ในแกน x
$$\rho\frac{Du}{Dt} \;=\; \rho g_x \;+\; \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \;+\; \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.4ก}$$

ในแกน y
$$\rho\frac{Dv}{Dt} \;=\; \rho g_y \;+\; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \;+\; \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{2.4ข}$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) สามารถเขียนความเค้นต่างๆ ให้อยู่ในรูปของความเร็วและความดันได้โดยใช้สมมติฐานของสโตกส์ (Stokes’ hypothesis) ดังนี้

$$\sigma_{xx} \;=\; -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.5ก}$$

$$\sigma_{yy} \;=\; -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.5ข}$$

$$\tau_{xy} \;=\; \tau_{yx} \;=\; \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{2.5ค}$$

โดย μ คือ ค่าความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic viscosity)

เมื่อนำค่าความเค้นในสมการ (2.5) แทนลงในสมการ (2.4) จะได้สมการของการเคลื่อนที่สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียนที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ดังนี้

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)u=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}\right] +\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{2.6ก}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)v=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}\right] \tag{2.6ข}$$

จากสมมติฐานข้างต้นที่ว่าเป็นการไหลชนิดอัดตัวไม่ได้ที่อยู่ในสภาวะคงตัว ทำให้สมการนาเวียร์-สโตกส์ลดรูปเป็น

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y} \;=\; \rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{2.7ก}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{2. 7ข}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.8}$$

สมการ (2.8) คือ สมการของการอนุรักษ์โมเมตัม หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์

สำหรับกรณีของการไหลที่มีอุณหภูมิเข้ามาเกี่ยวข้องทำให้มีความแตกต่างของอุณหภูมิเกิดขึ้น ค่าความหนาแน่นของของไหลจะเปลี่ยนแปลงไป เป็นผลทำให้ของไหลที่มีอุณหภูมิสูงจะลอยตัวขึ้นในขณะที่ของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำจะเคลื่อนตัวลง ซึ่งลักษณะการไหลแบบนี้เรียกว่าการพาความร้อนโดยธรรมชาติ (Natural convection) โดยที่แรงลอยตัว (Bouyant force) ของของไหลอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิสามารถประมาณค่าจากการใช้สมมติฐานของบุซซิเนสค์ (Boussinesq approximation) ที่สมมติว่ามีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นเฉพาะพจน์ของแรงลอยตัวในขณะที่พจน์อื่นๆไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเทอมของแรงโน้มถ่วงจะมีเฉพาะในทิศแนวดิ่ง ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} = \rho g_y\beta(T-T_0)-\frac{\partial p}{\partial y}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{2.9}$$

เมื่อ $T_0=\frac{T_{\max}+T_{\min}}{2}$ คือ อุณหภูมิอ้างอิงที่ของไหลไม่เกิดการลอยตัว

$\beta=1/T_0$ คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of thermal expansion)

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานได้มาจากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิคส์ที่กล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับอัตราความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุมรวมกับอัตราของงานที่กระทำบนปริมาตรควบคุม” ซึ่งสามารถเขียนสมการในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\frac{dE_t}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{dW}{dt} \tag{2.10}$$

โดย E_t คือพลังงานรวมทั้งหมดของปริมาตรควบคุม

Q คือความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุม

W คืองานที่กระทำต่อปริมาตรควบคุม

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานรวมมีค่าดังต่อไปนี้

$$\frac{dE_t}{dt}=\rho dxdy\cdot\frac{d}{dt}\left[e+\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}-\vec{\mathrm{f}}\cdot\vec{\mathrm{r}}\right] \tag{2.11}$$

โดย e คือ พลังงานภายในของของไหล

$\vec{\mathrm{f}}$ คือ แรงที่กระทำต่อของไหล โดยที่ $\vec{\mathrm{f}}=f_x\hat{i}+f_y\hat{j}$

$\vec{\mathrm{r}}$ คือ เวคเตอร์แสดงตำแหน่งของของไหล

อัตราของความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่ปริมาตรควบคุมมีค่าดังต่อไปนี้

$$\frac{dQ}{dt}=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)dxdy \tag{2.12}$$

โดย q_x คืออัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน x

q_y คืออัตราการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน y

อัตราของงานที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมมีค่าดังต่อไปนี้

$$\frac{dW}{dt}=\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx})+\frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_{yy})\right]dxdy \tag{2.13}$$

นำสมการ (2.10), (2.11) และ (2.12) แทนลงไปในสมการ (2.9) แล้วจัดรูปใหม่จะได้เป็น

$$\begin{aligned}\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}-\vec{\mathrm{f}}\cdot\vec{\mathrm{V}}\right)=&-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx})\\&+\frac{\partial}{\partial x}(v\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_{yy})\end{aligned} \tag{2.14}$$

เมื่อใช้กฎการถ่ายเทความร้อนของฟูริเยร์ (Fourier’s Law) ไม่คิดผลของฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) และกำหนดให้เอนทาลปี $h=e+\frac{p}{\rho}$ ทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\rho\left(u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{2.15}$$

หรือ

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{2.16}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\rho c_p\left(u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \tag{2.17}$$

สมการ (2.17) คือ สมการของการอนุรักษ์พลังงานซึ่งเป็นสมการที่กำหนดลักษณะทางกายภาพของการถ่ายเทความร้อน

2.4 สรุปสมการพื้นฐาน

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่าสมการพื้นฐานที่เป็นตัวกำหนดลักษณะทางกายภาพของการไหลและการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยสามสมการ ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง สมการนาเวียร์-สโตกส์ และสมการของการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.18}$$

$$\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{2.19}$$

$$\rho c_p\left(u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \tag{2.20}$$

เมื่อพิจารณาสมการทั้งสามจะพบว่ารูปแบบของสมการมีความคล้ายคลึงกัน ดังนั้นแล้วจะสามารถจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปทั่วไปของตัวแปร ϕ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + S_\phi \qquad (2.21)$$

สมการ (2.21) คือ สมการในรูปทั่วไปของตัวแปร ϕ หรือที่เรียกกันว่าสมการการส่งผ่าน (Transport equation) ของตัวแปร ϕ โดยที่รายละเอียดของแต่ละสมการได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 รายละเอียดของตัวแปรในสมการการส่งผ่านของตัวแปร ϕ

Equation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuity	1	0	0
Momentum	u_i	μ	$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
Energy*	T	k	0

* <u>หมายเหตุ</u> ค่าความร้อนจำเพาะในสมการของการอนุรักษ์พลังงานจะรวมอยู่ในพจน์เดียวกับค่าความหนาแน่น $(\rho = \rho c_p)$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้แสดงไว้ในบทนี้จะถูกดิสครีไทซ์เป็นสมการพีชคณิตเพื่อนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหา โดยรายละเอียดและวิธีการจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

หลังจากได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นตัวกำหนดลักษณะทางกายภาพของปัญหาแล้ว ขั้นตอนต่อมาคือการนำสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้มาแปลงเป็นสมการพีชคณิตเพื่อหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (Finite volume method) ซึ่งจะเป็นเนื้อหาหลักของบทนี้

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของการไหลและการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากวิธีนี้มีข้อดีคือจะแบ่งโดเมนของปัญหาที่พิจารณาออกเป็นปริมาตรควบควบคุมย่อยๆ ที่ไม่ทับซ้อนกัน แล้วจึงอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุม ซึ่งทำให้ค่าคุณสมบัติต่างๆ มีความสมดุลและสอดคล้องทั่วกันทั้งหมด นอกจากนี้ยังทำให้เห็นค่าคุณสมบัติต่างๆที่เข้าและออกจากปริมาตรควบคุมได้อย่างชัดเจน

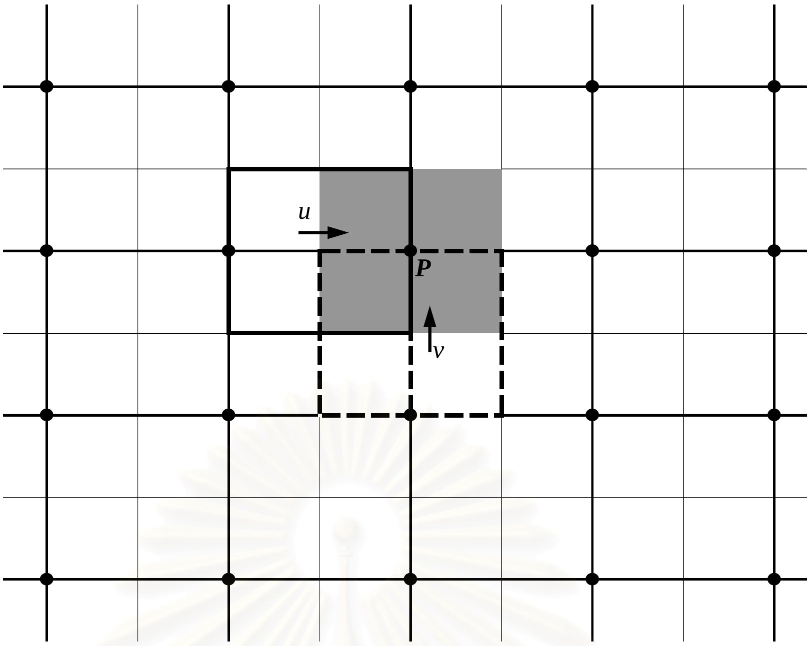
3.1 การวางกริดและปริมาตรควบคุม

ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าโดเมนของปัญหาถูกแบ่งออกเป็นปริมาตรควบควบคุมย่อยๆ และเมื่อใช้การวางกริดแบบเยื้อง (Staggered grid arrangement) ดังแสดงในรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าค่าของตัวแปรสเกลาร์จะถูกเก็บไว้ที่จุด P ส่วนความเร็ว u และ v จะเก็บค่าไว้ตรงกลางระหว่างจุดกริด โดยที่จุด P จะเป็นตัวแทนของปริมาตรควบคุมของสเกลาร์ที่แสดงไว้โดยการแรเงา ส่วนปริมาตรควบคุมของ u และ v ถูกแสดงด้วยเส้นทึบและเส้นประตามลำดับ

การวางกริดแบบเยื้องกันนี้มีข้อดีคือสนามความเร็วจะสอดคล้องกันกับสมการความต่อเนื่อง ซึ่งเป็นการป้องกันการเกิดปัญหา Checker-board effect และ Wavy velocity field กล่าวคือ ผลต่างของความดันของจุดกริดที่อยู่ติดกันจะเป็นแรงขับโดยธรรมชาติสำหรับความเร็วที่อยู่ระหว่างจุดกริดนั้น (Patankar, 1980)

3.2 การดิสครีไทซ์สมการ

การดิสครีไทซ์เป็นวิธีการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนไปเป็นสมการพีชคณิตเพื่อนำไปคำนวณหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีทางตัวเลขซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 การวางตัวของปริมาตรควบคุมสำหรับกริดแบบเยื้อง

พิจารณาสมการการส่งผ่าน (3.1) จะเห็นว่าสมการประกอบไปด้วยเทอมต่างๆ สามเทอม คือ พจน์ของการพา (Convection term) พจน์ของการแพร่ (Diffusion term) และพจน์ของ Source (Source term) ดังนี้

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}}_{\text{Convection Term}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}_{\text{Diffusion Term}}+\underbrace{S_{\phi}}_{\text{Source Term}} \tag{3.1}$$

ทำการดิสครีไทซ์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมโดยการอินทิเกรตสมการ (3.1) ตลอดปริมาตรควบคุมจะได้

$$\int_{CV}\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}dV+\int_{CV}\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}dV=\int_{CV}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dV+\int_{CV}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dV+\int_{CV}S_{\phi}dV \tag{3.2}$$

เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาจึงแยกคิดทีละพจน์ดังนี้

3.2.1 พจน์ของการพา

อินทิกรัลของพจน์ของการพาคือ $\int_{\Delta V} \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} dV$

กำหนดให้ $A_e = A_w = 1\times \Delta y$ และ $A_n = A_s = 1\times \Delta x$ จะได้พจน์ของการพาคือ

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) dV = (\rho uA)_e \phi_e - (\rho uA)_w \phi_w + (\rho vA)_n \phi_n - (\rho vA)_s \phi_s \qquad (3.3)$$

เมื่อกำหนดให้ฟลักซ์การพา (Convection flux) คือ $F = \rho uA$ สมการ (3.3) จะลดรูปเป็น

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) dV = F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s \qquad (3.4)$$

โดยค่า ϕ_e, ϕ_w, ϕ_n และ ϕ_s คือค่าของ ϕ ที่ผิวของปริมาตรควบคุมซึ่งได้มาจากการประมาณค่าจากจุดกริดที่ติดกันโดยที่ความถูกต้องของการประมาณจะขึ้นอยู่กับ Numerical scheme ที่ใช้ สำหรับงานวิจัยนี้ใช้การประมาณค่าแบบ Upwind differencing scheme ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

Upwind differencing scheme ใช้สมมติฐานที่ว่า ค่าของ ϕ ที่ผิวของปริมาตรควบคุมจะมีค่าเท่ากับค่าของ ϕ ที่จุดกริดของปริมาตรควบคุมด้านต้นกระแสการไหล (Upstream) นั่นคือ

$\phi_e = \phi_P$ เมื่อ $F_e > 0$

$\phi_e = \phi_E$ เมื่อ $F_e < 0$

และ $\phi_w = \phi_W$ เมื่อ $F_w > 0$

$\phi_w = \phi_P$ เมื่อ $F_w < 0$

ข้อดีของการประมาณค่าด้วยวิธีนี้คือทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขค่อนข้างมีความสเถียรและไม่เกิดการสั่นของผลลัพธ์ แต่มีข้อด้อยคือความถูกต้องของการประมาณอยู่ในอันดับความถูกต้องที่ 1 เท่านั้น (1st order of accuracy)

3.2.2 พจน์ของการแพร่

อินทิกรัลของพจน์ของการแพร่คือ $\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dV+\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dV$

ในทำนองเดียวกันกับพจน์ของการพา ทำการดิสครีไทซ์พจน์ของการแพร่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dV+\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dV &= \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}A\right)_e-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}A\right)_w \\ &\quad+\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}A\right)_n-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}A\right)_s\end{aligned} \tag{3.5}$$

เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์การแพร่ คือ $D=\frac{\Gamma A}{\delta}$ สมการ (3.5) จะลดรูปเป็น

$$\begin{aligned}\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dV+\int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dV &= D_e(\phi_E-\phi_P)-D_w(\phi_P-\phi_W) \\ &\quad+D_n(\phi_N-\phi_P)-D_s(\phi_P-\phi_S)\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2.3 Source term

เมื่ออินทิเกรต Source term ตลอดปริมาตรควบคุมจะได้

$$\int_{\Delta V}S_\phi dV=S_\phi V \tag{3.7}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะแยก Source term ออกเป็นสองส่วนโดยใช้การประมาณแบบเชิงเส้นดังนี้

$$S_\phi=S_u+S_P\phi_P \tag{3.8}$$

โดย S_u คือ พจน์ที่มีค่าคงที่

S_P คือ พจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของ ϕ_P

ดังนั้นแล้ว Source term จะมีค่าเป็น

$$\int_{\Delta V} S_\phi dV \;=\; S_u V + S_P \phi_P V \tag{3.9}$$

3.3 รูปสุดท้ายของสมการดิสครีไทซ์

หลังจากดิสครีไทซ์สมการที่อยู่ในรูปอินทิกรัลครบทุกพจน์แล้วจึงนำค่าที่ได้มารวมกันดังนี้

$$\begin{aligned} F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s \;=\;& D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \\ &+ D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S) + S_u V + S_P \phi_P V \end{aligned} \tag{3.10}$$

เมื่อใช้การประมาณค่าแบบ Upwind differencing scheme และจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ของค่า ϕ จะได้สมการดิสครีไทซ์ในรูปทั่วไปคือ

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_u V \tag{3.11}$$

โดย $a_N = \max[-F_n, 0]$

$a_S = \max[F_s, 0]$

$a_E = \max[-F_e, 0]$

$a_W = \max[F_w, 0]$

$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + (F_n - F_s + F_e - F_w) - S_P V$

เมื่อ $\max[A, B]$ คือ ค่าสูงสุดที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าของ A กับ B

สมการ (3.11) คือสมการดิสครีไทซ์ที่อยู่ในรูปทั่วไปที่นำมาใช้ในการคำนวณ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ a_N, a_S, a_E และ a_W จะมีค่าเปลี่ยนไปตามวิธีการประมาณค่าที่ใช้

3.4 เงื่อนไขขอบ

การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของปัญหาจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบด้วยทุกครั้งเนื่องจากลักษณะทางกายภาพของปัญหาจะขึ้นกับการกำหนดเงื่อนไขขอบด้วย กล่าวคือ เมื่อเงื่อนไขขอบเปลี่ยนไปจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปด้วยเช่นกัน สำหรับเงื่อนไขขอบที่ใช้ในงานวิจัยมีดังต่อไปนี้

3.4.1 เงื่อนไขขอบที่ทางเข้า

ค่าของตัวแปร ϕ ทุกตัว ($u,\ v,\ T$) จะถูกกำหนดค่าที่ขอบทางเข้า โดยค่าที่กำหนดอาจได้มาจากผลการทดลองหรือการประมาณค่า ตามแต่ลักษณะของปัญหาที่คำนวณ

3.4.2 เงื่อนไขขอบที่ทางออก

ค่าของตัวแปรที่ทางออกจะไม่สามารถรู้ค่าได้ ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีพิจารณาคือ เมื่อตำแหน่งทางออกของการไหลมีระยะทางที่ไกลเพียงพอแล้ว การไหลจะเป็นแบบพัฒนาเต็มที่ (Fully developed flow) ซึ่งค่าของตัวแปรต่างๆจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางการไหล ทำให้ได้เงื่อนไขขอบที่ทางออกดังนี้

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{exit} = 0 \qquad (3.12)$$

3.4.3 เงื่อนไขขอบที่ผนัง

สำหรับกรณีที่ผนังไม่มีการเคลื่อนที่ ความเร็วที่ผนังทุกจุดจะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ $(u, v = 0)$ และค่าสัมประสิทธิ์ของสมการดิสครีไทซ์ด้านที่อยู่ติดกับผนังก็จะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย $(a = 0)$

เนื่องจากเป็นการไหลแบบหนืด ดังนั้น ความเร็วที่บริเวณใกล้กับผนังจะก่อให้เกิดความเค้นเฉือนดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งจะเห็นว่าความเร็ว u ที่ไหลขนานไปกับผนังทำให้มีความเค้นเฉือน τ_w เกิดขึ้นที่บริเวณผนัง โดยความเค้นเฉือนดังกล่าวจะต้องนำไปรวมกับ Source term ในสมการดิสครีไทซ์ของโมเมนตัม u ดังนี้

$$\tau_w = \mu \frac{u_P}{\Delta y_P} \tag{3.13}$$

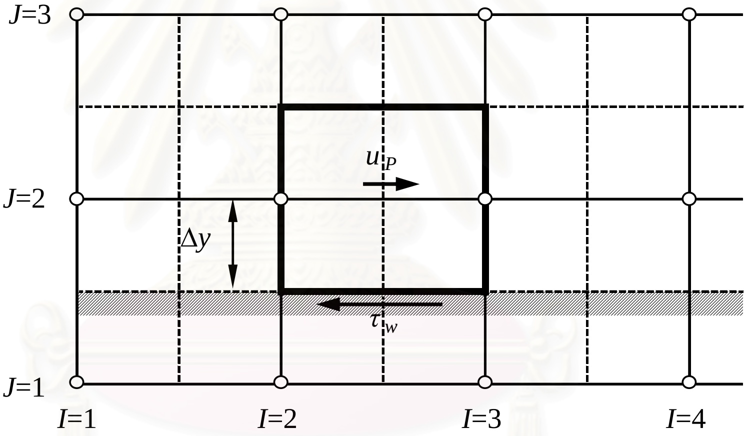
และแรงเฉือนมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} F_S &= -\tau_w A_{cell} \\ &= -\mu \frac{u_P}{\Delta y_P} A_{cell} \end{aligned} \tag{3.14}$$

โดย A_{cell} คือพื้นที่ของผนังปริมาตรควบคุม

ดังนั้นแล้ว Source term ของสมการโมเมนตัม u จะมีค่าดังนี้

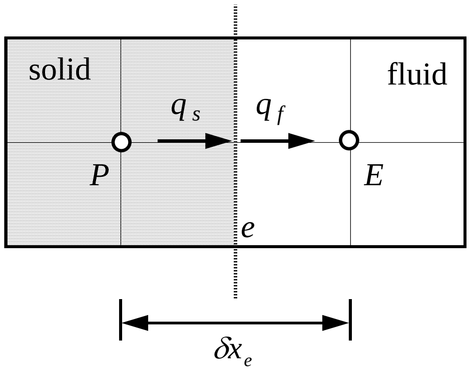
$$S_P = -\frac{\mu}{\Delta y_P} A_{cell} \tag{3.15}$$



รูปที่ 3.2 ปริมาตรควบคุมของความเร็ว u ที่อยู่ติดผนัง

3.4.4 เงื่อนไขที่ผิวรอยต่อ

พิจารณาปริมาตรควบคุมบริเวณผิวรอยต่อที่อยู่ติดกันดังแสดงในรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าปริมาตรควบคุมด้านซ้ายจะอยู่ในของแข็งส่วนด้านขวาอยู่ในของไหลโดยมีฟลักซ์ความร้อนจากของแข็งเข้าสู่ของไหลที่ผิวรอยต่อ เพื่อให้สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์พลังงาน ฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากของแข็งต้องเท่ากับฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่ของไหล นั่นคือ $q_s = q_f$ โดยที่ $q = -k \dfrac{\partial T}{\partial x}$ ดังนั้น จะได้เงื่อนไขของการถ่ายเทความร้อนที่ผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลดังนี้



รูปที่ 3.3 เงื่อนไขที่ผิวรอยต่อ

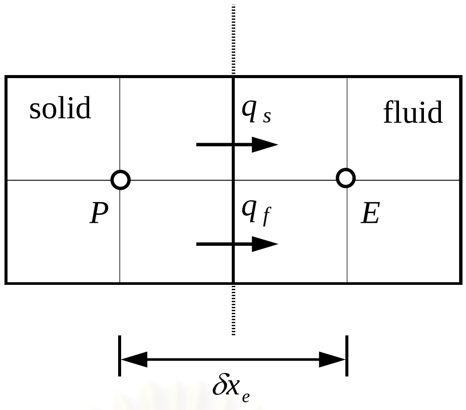
$$-k_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\text{solid}} = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\text{fluid}} \tag{3.16}$$

จากสมการ (3.16) จะเห็นว่าอุณหภูมิที่ใช้ในการคำนวณคือค่าที่อยู่บริเวณผิวรอยต่อซึ่งในความเป็นจริงอาจหาได้ไม่ง่ายนัก จึงต้องหาวิธีการที่สามารถคำนวณค่าฟลักซ์ความร้อนได้อย่างถูกต้อง สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอวิธีการคิดค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านผิวรอยต่อโดยการใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่จุด P และ E เป็นตัวเชื่อมโยงในการคำนวณ แล้วจึงนำไปรวมกับ Source term ของสมการพลังงาน ดังนี้

พิจารณารูปที่ 3.4 จะเห็นว่ามีฟลักซ์ความร้อนที่บริเวณผิวรอยต่อสองค่าคือ q_s และ q_f ซึ่ง q_s คือฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากของแข็ง และ q_f คือฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่ของไหล โดยค่าฟลักซ์ทั้งสองนี้สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.17) และ (3.18) ตามลำดับ

$$q_s = -\frac{k_f (T_E - T_P)}{\delta x_e} \tag{3.17}$$

$$q_f = -\frac{k_s (T_E - T_P)}{\delta x_e} \tag{3.18}$$



รูปที่ 3.4 เงื่อนไขที่ผิวรอยต่อที่ใช้ในการคำนวณ

เมื่อใช้การประมาณแบบเชิงเส้น ดังนั้น Source term ของสมการพลังงานสำหรับปริมาตรควบคุมของของแข็ง (ปริมาตรควบคุม P) จะมีค่าเป็น

$$q_s = S_u + S_P T_P \tag{3.19}$$

โดย

$$S_u = k_f \frac{T_E}{\delta x_e} A_{cell}$$

$$S_P = -k_f \frac{A_{cell}}{\delta x_e}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับปริมาตรควบคุมของของไหล (ปริมาตรควบคุม E) จะมีค่า Source term ดังนี้

$$q_f = S_u + S_P T_E \tag{3.20}$$

โดย

$$S_u = k_s \frac{T_P}{\delta x_e} A_{cell}$$

$$S_P = -k_s \frac{A_{cell}}{\delta x_e}$$

ค่าฟลักซ์ความร้อน q_s ที่คำนวณได้จะถูกนำไปรวมกับ Source term ของปริมาตรควบคุม P ที่อยู่ในของแข็ง และในทำนองเดียวกัน ฟลักซ์ความร้อน q_f จะนำไปรวมกับ Source term ของปริมาตรควบคุม E ที่อยู่ในของไหล หลังจากนั้นการคำนวณจะดำเนินการตามขั้นตอนปกติโดยไม่ต้องตัดความเชื่อมโยงของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน

3.5 กระบวนการหาผลเฉลย

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้กล่าวถึงวิธีการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลและการถ่ายเทความร้อน โดยผลลัพธ์ที่ได้จากกระบวนการดังกล่าวจะอยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นซึ่งต้องทำการหาผลเฉลยเสียก่อน โดยที่ความซับซ้อนและขนาดของระบบสมการจะขึ้นอยู่กับจำนวนของกริดที่ใช้และวิธีการดิสครีไทซ์ สำหรับขั้นตอนวิธีที่ใช้แก้ระบบสมการในงานวิจัยนี้คือขั้นตอนวิธีของเมทริกซ์สามแนวเฉียง (TDMA) ร่วมกับเทคนิควิธีทำซ้ำ (Iterative method) ซึ่งวิธีนี้มีข้อดีคือใช้หน่วยความจำในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแก้สมการโดยตรง (Direct or Explicit method)

ปัญหาสำคัญอีกอย่างหนึ่งในการหาผลเฉลยคือความสอดคล้องกันของคำตอบที่ได้จากการคำนวณ ซึ่งเป็นผลมาจากการที่สมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมมีความเกี่ยวโยงต่อกัน (Couple equations) เพื่อแก้ปัญหานี้จึงใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องและสอดคล้องกัน ซึ่งจะได้กล่าวถึงรายละเอียดต่อไป

3.5.1 ขั้นตอนวิธีเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tri-diagonal matrix algorithm, TDMA)

พิจารณาระบบสมการที่อยู่ในรูปเมทริกซ์สามแนวเฉียงดังนี้

$$
\begin{array}{lcl}
\phi_1 & = & C_1 \\
-\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 & = & C_2 \\
\quad -\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 & = & C_3 \\
\qquad -\beta_4\phi_3 + D_4\phi_4 - \alpha_4\phi_5 & = & C_4 \\
\qquad\quad . \quad . \quad . \quad . & & . \\
\qquad\qquad -\beta_n\phi_{n\text{-}1} + D_n\phi_n - \alpha_n\phi_{n+1} & = & C_n \\
\qquad\qquad\qquad \phi_{n+1} & = & C_n
\end{array}
\tag{3.21}
$$

ในระบบสมการด้านบนนั้น ϕ_1 และ ϕ_{n+1} จะทราบค่ามาจากเงื่อนไขขอบ ดังนั้น สมการที่เหลือสามารถเขียนในรูปทั่วไปแบบสมการเดี่ยวได้ดังนี้

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \tag{3.22}$$

ชุดสมการ (3.21) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{3.23ก}$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \tag{3.23ข}$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\phi_3 + \frac{C_3}{D_3} \tag{3.23ค}$$

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n}\phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

สมการเหล่านี้สามารถแก้ได้โดยกระบวนการกำจัดไปข้างหน้า (Forward elimination) และการแทนที่ย้อนกลับ (Back-substitution)

สำหรับกระบวนการกำจัดไปข้างหน้าทำได้โดยการนำค่า ϕ_2 จากสมการ (3.23ก) ไปแทนค่าในสมการ (3.23ข) ซึ่งจะได้

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3\dfrac{\alpha_2}{D_2}}\right)\phi_4 + \left(\frac{\beta_3\left(\dfrac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \dfrac{C_2}{D_2}\right) + C_3}{D_3 - \beta_3\dfrac{\alpha_2}{D_2}}\right) \tag{3.24ก}$$

เพื่อลดความซับซ้อนของสมการจึงกำหนดให้

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \qquad \text{และ} \qquad C_2' = \frac{\beta_2}{D_2}\phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{3.24ข}$$

สมการ (3.24ก) จึงลดรูปลงเป็น

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2}\right)\phi_4 + \left(\frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}\right) \tag{3.24ค}$$

กำหนดให้

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \qquad \text{และ} \qquad C_3' = \frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}$$

สมการ (3.24ค) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\phi_3 = A_3\phi_4 + C_3' \tag{3.25}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (3.25) สามารถกำจัด ϕ_3 ที่มีอยู่ในสมการ (3.23ค) ได้แล้ว และในทำนองเดียวกันกระบวนการนี้สามารถทำซ้ำขึ้นใหม่ไปจนถึงสมการสุดท้ายของระบบสมการ

สำหรับกระบวนการแทนที่ย้อนกลับ (Back-substitution) จะใช้สมการในรูปทั่วไปที่คล้ายๆ กับสมการ (3.25) ดังนี้

$$\phi_j = A_{\mathrm{j}}\phi_{j+1} + C_{\mathrm{j}}' \tag{3.26}$$

โดยที่ $$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \qquad \text{และ} \qquad C_j' = \frac{\beta_j C_{j-1}' + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}$$

เมื่อทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบที่จุด $j = 1$ และ $j = n+1$ ทำให้กำหนดค่าสำหรับ A และ C' ได้ดังนี้

$$A_1 = 0 \qquad \text{และ} \qquad C' = \phi_1$$

$$A_{n+1} = 0 \qquad \text{และ} \qquad C_{n+1}' = \phi_{n+1}$$

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าในการแก้ระบบสมการนั้นอย่างแรกคือต้องจัดให้อยู่ในรูปของสมการ (3.22) แล้ว α_j, β_j, D_j และ C_j ก็จะสามารถหาค่าได้ จากนั้นจึงคำนวณค่าของ A_j และ C_j' โดยเริ่มจาก $j = 2$ ไปจนถึง $j = n$ และเมื่อรู้ค่าของ ϕ ที่ตำแหน่งขอบ $(n+1)$ ค่าของ ϕ_j ก็สามารถหาได้จากการแทนที่ย้อนกลับในลำดับถัดไป $(\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_{n-2}, ..., \phi_2)$ โดยการใช้สมการ (3.26)

3.5.2 การประยุกต์ใช้ TDMA

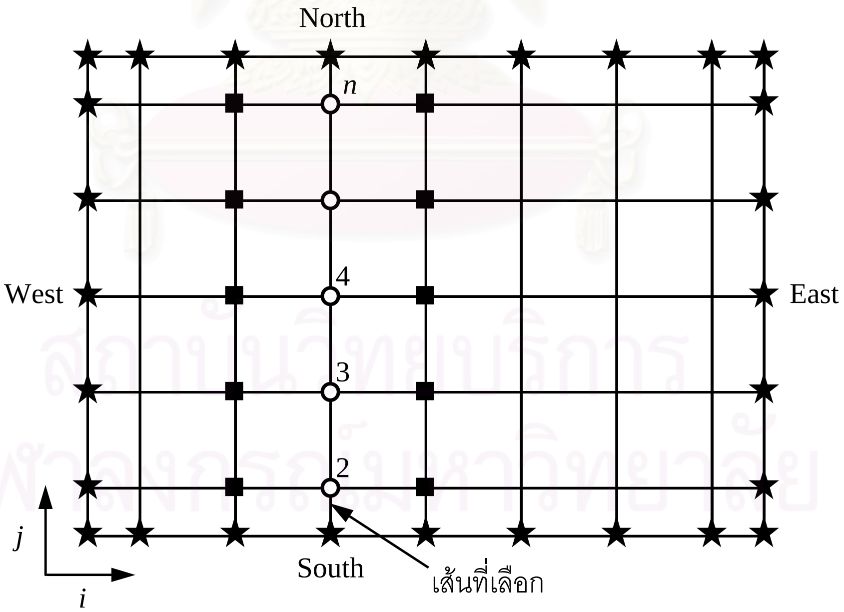
วิธีการ TDMA สามารถประยุกต์ใช้เข้ากับปัญหาเพื่อแก้ระบบสมการได้โดยการพิจารณากริดในรูปที่ 3.5 จะเห็นว่าเส้นที่ได้เลือกมาคำนวณคือเส้น $n-s$ และสมการดิสครีไทซ์ที่อยู่ในรูปทั่วไปคือ

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + b \tag{3.27}$$

เมื่อจัดรูปใหม่จะได้

$$-a_S\phi_S + a_P\phi_P - a_N\phi_N = a_W\phi_W + a_E\phi_E + b \tag{3.28}$$

พจน์ทางด้านขวาของสมการ (3.28) จะถูกสมมติว่ารู้ค่าชั่วคราว และจะสังเกตเห็นได้ว่ารูปแบบของสมการ (3.28) นั้นเหมือนกันกับสมการ (3.22) ซึ่ง $a_N \equiv \alpha_j$, $a_S \equiv \beta_j$, $a_P \equiv D_j$ และ $a_W\phi_W + a_E\phi_E + b \equiv C$ ดังนั้น จะสามารถแก้สมการในทิศ $n-s$ ของเส้นที่เลือกไว้ได้แล้ว ซึ่งก็คือค่าที่ $j = 2, 3, 4, \ldots n$ ดังแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การคำนวณโดยใช้วิธี TDMA แบบ Line-by-line

○ จุดที่ทำการคำนวณ

■ จุดที่สมมติว่ารู้ค่าชั่วคราว

★ จุดที่รู้ค่าจากเงื่อนไขขอบ

ลำดับต่อมาเมื่อคำนวณครบทุกจุดในเส้น $n-s$ ที่เลือกไว้แล้วก็จะเปลี่ยนไปคำนวณที่เส้น $n-s$ ถัดไป ซึ่งค่าของ ϕ_W ที่อยู่ทางด้าน West ของจุดต่อ P ก็จะรู้ค่ามาจากการคำนวณของเส้นก่อนหน้านั่นเอง อย่างไรก็ตามเนื่องจากยังไม่ทราบค่า ϕ_E ดังนั้นกระบวนการหาคำตอบจึงต้องทำซ้ำ และในแต่ละรอบของการทำซ้ำ ϕ_E ก็จะมีค่าจากการคำนวณในรอบก่อนหน้าหรือจากค่าเริ่มต้นที่มาจากการเดาในกรณีที่เป็นการคำนวณรอบแรก กระบวนการคำนวณแบบเส้นต่อเส้น (Line-by-line) จะถูกทำซ้ำใหม่หลายครั้งจนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าสู่คำตอบ

3.5.3 ขั้นตอนวิธี SIMPLE

ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) เป็นวิธีการแก้ปัญหาสนามการไหลเพื่อให้ความเร็วและความดันที่คำนวณได้จากสมการโมเมนตัมสอดคล้องกันกับสมการความต่อเนื่อง โดยรายละเอียดสามารถหาได้จาก Patankar (1980) และ Versteeg and Malalasekera (1995)

ขั้นตอนวิธี SIMPLE เริ่มจากสมมติค่าความดัน p^* แล้วจึงแก้สมการโมเมนตัมเพื่อให้ได้ u^* และ v^* หลังจากนั้นคำตอบที่ได้จะถูกปรับค่าให้มีความสอดคล้องกันมากขึ้นโดยใช้สมการการปรับแก้ (Correction equation) ขั้นตอนต่อมาคือแก้สมการพลังงานเพื่อหาค่า T อันเป็นการครบรอบการคำนวณเนื่องจากรู้ค่าของตัวแปรครบทุกตัวแล้ว โดยค่า p ที่ปรับแก้แล้วจะถูกนำไปแทนที่ค่า p^* เดิมแล้วจึงทำซ้ำกระบวนการจนคำตอบลู่เข้า

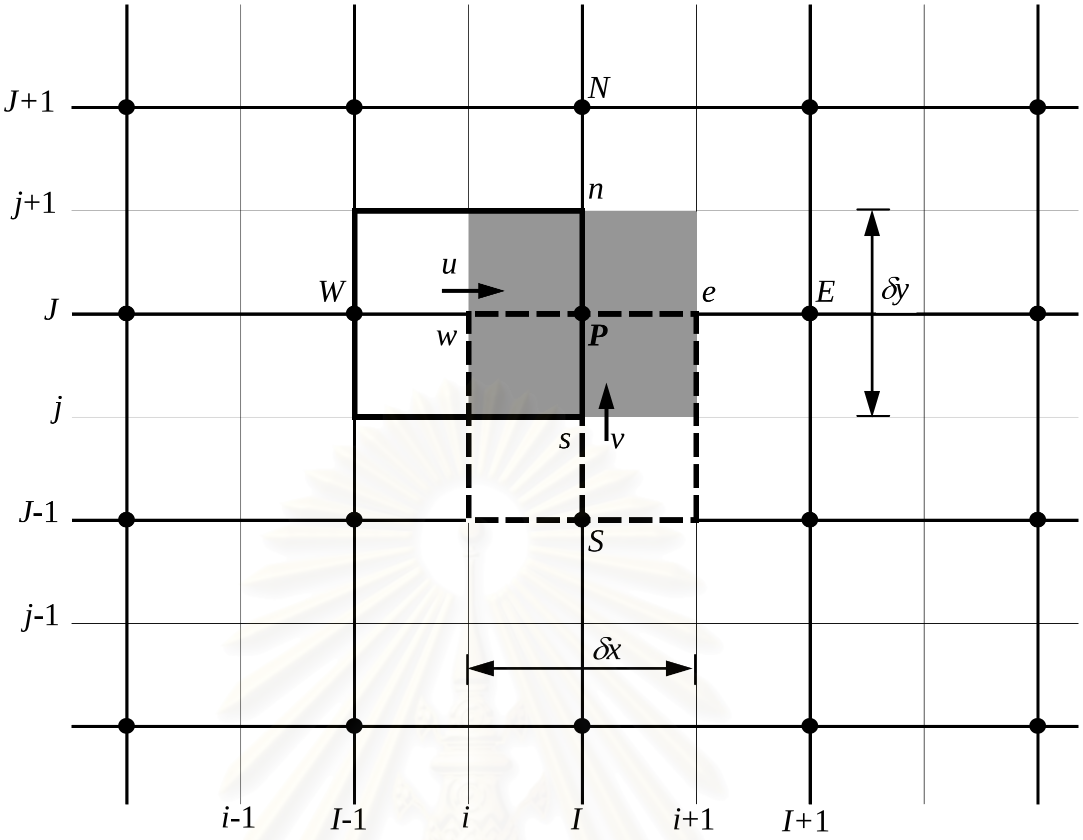
จากรูปที่ 3.6 จะสามารถเขียนสมการดิสครีไทซ์โมเมนตัม u ที่ตำแหน่ง (i,J) และสมการดิสครีไทซ์โมเมนตัม v ที่ตำแหน่ง (I,j) ได้ตามลำดับดังนี้

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + \left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right)A_{i,J} + b_{i,J} \tag{3.29}$$

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + \left(p_{I,J-1} - p_{I,J}\right)A_{I,j} + b_{I,j} \tag{3.30}$$

โดย $\sum a_{nb}u_{nb} = a_{(i-1,J)}u_{(i-1,J)} + a_{(i+1,J)}u_{(i+1,J)} + a_{(i,J+1)}u_{(i,J+1)} + a_{(i,J-1)}u_{(i,J-1)}$

$$\sum a_{nb}v_{nb} = a_{(i-1,J)}v_{(i-1,J)} + a_{(i+1,J)}v_{(i+1,J)} + a_{(i,J+1)}v_{(i,J+1)} + a_{(i,J-1)}v_{(i,J-1)}$$



รูปที่ 3.6 กริดแบบเยื้องที่ใช้ในขั้นตอนวิธี SIMPLE

เมื่อเดาค่าเริ่มต้น p^* และแก้สมการ (3.29) และ (3.30) สมการทั้งสองจะเปลี่ยนรูปเป็น

$$a_{i,J}u^*_{i,J} = \sum a_{nb}u^*_{nb} + \left(p^*_{I-1,J} - p^*_{I,J}\right)A_{i,J} + b_{i,J} \tag{3.31}$$

$$a_{I,j}v^*_{I,j} = \sum a_{nb}v^*_{nb} + \left(p^*_{I,J-1} - p^*_{I,J}\right)A_{I,j} + b_{I,j} \tag{3.32}$$

โดย

$$p = p^* + p' \tag{3.33}$$

$$u = u^* + u' \tag{3.34}$$

$$v = v^* + v' \tag{3.35}$$

เมื่อ	p,u,v	คือ ค่าที่ถูกต้อง
	p^*,u^*,v^*	คือ ค่าความดันและความเร็วที่คำนวณได้ในแต่ละขั้นตอน
	p',u',v'	คือ ค่าปรับแก้ไข

นำสมการ (3.29) ลบสมการ (3.31) และนำสมการ (3.30) ลบสมการ (3.32) จะได้สมการ (3.36) และ (3.37) ดังนี้

$$a_{i,J}\left(u_{i,J}-u_{i,J}^{*}\right)=\sum a_{nb}\left(u_{nb}-u_{nb}^{*}\right)+\left(p_{I-1,J}-p_{I,J}-p_{I-1,J}^{*}-p_{I,J}^{*}\right)A_{i,J} \quad (3.36)$$

$$a_{I,j}\left(v_{I,j}-v_{I,j}^{*}\right)=\sum a_{nb}\left(v_{nb}-v_{nb}^{*}\right)+\left(p_{I,J-1}-p_{I,J}-p_{I,J-1}^{*}-p_{I,J}^{*}\right)A_{i,J} \quad (3.37)$$

แทนค่าสมการ (3.33-3.35) ลงในสมการ (3.36) และ (3.37) จะได้

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{nb}u'_{nb} + \left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right)A_{i,J} \quad (3.38)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + \left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right)A_{I,j} \quad (3.39)$$

เพื่อลดความยุ่งยากของสมการจึงตัดเทอม $\sum a_{nb}u'_{nb}$ และ $\sum a_{nb}v'_{nb}$ ทิ้งไป ซึ่งการตัดเทอมทั้งสองทิ้งไปนั้นไม่ส่งผลต่อคำตอบสุดท้าย เพราะว่าเมื่อคำตอบลู่เข้าสู่ผลลัพธ์แล้วค่าของ p', u', v' จะมีค่าเท่ากับศูนย์ (Patankar, 1980) ดังนั้น สมการจะลดรูปเป็น

$$u'_{i,J} = d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right) \quad (3.40)$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right) \quad (3.41)$$

โดย $d_{i,J} = \dfrac{A_{i,J}}{a_{i,J}}$ และ $d_{I,j} = \dfrac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$

นำสมการ (3.40) และ (3.41) ไปแทนในสมการ (3.34) และ (3.35) จะได้

$$u_{i,J} = u_{i,J}^{*} + d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right) \quad (3.42)$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^{*} + d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right) \quad (3.43)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $u_{i+1,J}$ และ $v_{I,j+1}$ จะได้

$$u_{i+1,J} = u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J}\left(p'_{I,J} - p'_{I+1,J}\right) \qquad (3.44)$$

$$v_{I,j+1} = v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1}\left(p'_{I,J} - p'_{I,J+1}\right) \qquad (3.45)$$

โดย $d_{i+1,J} = \dfrac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}}$ และ $d_{I,j+1} = \dfrac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}$

เพื่อให้สนามความเร็วที่ได้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องจึงต้องนำสมการความต่อเนื่องมาร่วมกำกับด้วย โดยสมการดิสครีไทซ์ของสมการความต่อเนื่องซึ่งได้มาจากการดิสครีไทซ์สมการ (2.3) คือ

$$(\rho uA)_{i+1,J} - (\rho uA)_{i,J} + (\rho vA)_{I,j+1} - (\rho vA)_{I,j} = 0 \qquad (3.46)$$

นำสมการ (3.42-3.45) ไปแทนในสมการ (3.46) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ของ p' ได้ดังนี้

$$a_{I,J}\,p'_{I,J} = a_{I+1,J}\,p'_{I+1,J} + a_{I-1,J}\,p'_{I-1,J} + a_{I,J+1}p'_{I,J+1} + a_{I,J-1}p'_{I,J-1} + b'_{I,J} \qquad (3.47)$$

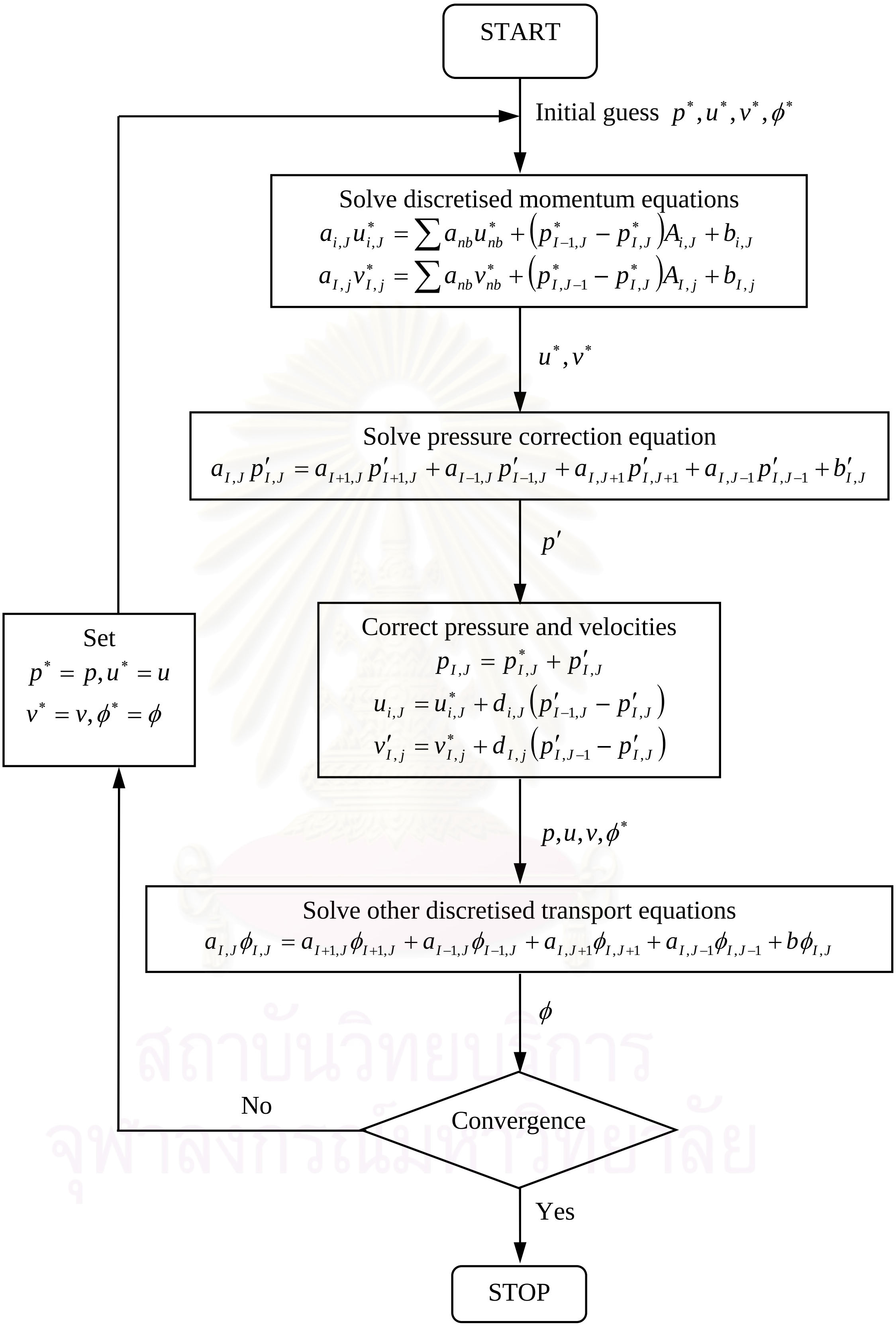
โดย
$$\begin{aligned}
a_{I,J} &= a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}\\
a_{I+1,J} &= (\rho dA)_{i+1,J}\\
a_{I-1,J} &= (\rho dA)_{i,J}\\
a_{I,J+1} &= (\rho dA)_{I,j+1}\\
a_{I,J-1} &= (\rho dA)_{I,j}\\
b'_{I,J} &= (\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}
\end{aligned}$$

ซึ่งสมการ (3.47) ก็คือ สมการของการปรับแก้ความดัน (Pressure correction equation) นั่นเอง

จากที่ได้กล่าวมา ขั้นตอนวิธี SIMPLE สามารถนำมาเขียนสรุปด้วยแผนภาพดังแสดงในรูปที่ 3.7

3.6 สรุป

ในบทนี้ได้อธิบายถึงขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมโดยเริ่มตั้งแต่การประยุกต์ใช้กริดแบบเยื้องเข้ากับปัญหาแล้วจึงดิสครีไทซ์สมการพื้นฐานจนได้สมการที่อยู่ในรูปทั่วไป ต่อมาได้แสดงวิธีการประมาณค่าและเงื่อนไขขอบที่จำเป็นต้องใช้ และสุดท้ายได้อธิบายกระบวนการหาผลเฉลยด้วยใช้วิธี TDMA ร่วมกับขั้นตอนวิธี SIMPLE เพื่อให้แน่ใจว่าผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องไม่ผิดไปจากลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งทั้งหมดนี้เพื่อนำไปสู่การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนไปเป็นสมการพีชคณิตอย่างง่ายเพื่อที่จะสามารถนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยได้อย่างเหมาะสม



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนวิธี SIMPLE

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ก่อนที่จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นไปวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการ จะต้องตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมเสียก่อนเพื่อให้มั่นใจว่าโปรแกรมที่ใช้สามารถหาผลเฉลยได้อย่างถูกต้องตามลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง โดยในบทนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับผลของงานวิจัยที่ผ่านมาว่ามีความสอดคล้องหรือแตกต่างกันอย่างไร

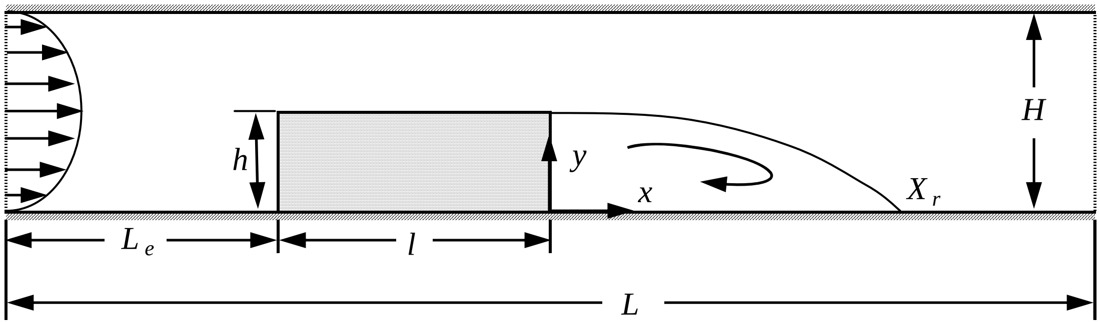
สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมจะแบ่งเป็นสามส่วน โดยส่วนแรกจะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของสนามการไหล ซึ่งปัญหาที่ใช้เป็นกรณีศึกษาคือ การไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปสี่เหลี่ยมในช่องทางไหล ส่วนที่สองเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของการถ่ายเทความร้อนสำหรับการนำความร้อนและการพาความร้อนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ และส่วนสุดท้ายคือการตรวจสอบความถูกต้องของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตอย่างง่ายที่รวมการพาความร้อนและการนำความร้อนเข้าไว้ด้วยกัน

4.1 การตรวจสอบความถูกต้องของสนามการไหล

ในส่วนนี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของสนามการไหลโดยปัญหาที่นำมาเป็นกรณีศึกษาคือปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหล เนื่องจากเป็นปัญหาแบบง่ายที่สามารถพบได้ในงานทางวิศวกรรมทั่วๆไป ซึ่งมีปรากฏการณ์ของการไหลหลายๆอย่างเกิดขึ้น เช่น การแยกตัวของการไหล (Flow separation) การหมุนวน (Recirculation) หรือการพัฒนาตัวขึ้นอีกครั้ง

ลักษณะของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.1 จากรูปจะเห็นว่ามีของไหลที่พัฒนาเต็มที่ไหลเข้ามาที่บริเวณทางเข้าและมีสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมวางอยู่ที่ผิวด้านล่างของช่องทางไหล โดยค่าของตัวแปรต่างๆได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.1 เงื่อนไขขอบที่ผนังคือความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ ที่ทางออกกำหนดให้ความเร็วไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ เรย์โนลด์นัมเบอร์คิดจากสมการ (4.1) มีค่าเท่ากับ 144 โดยความเร็วอ้างอิงคือความเร็วสูงสุดที่ทางเข้า (U_0) มีค่าเท่ากับ 0.432 m/s

$$\mathrm{Re}_H = \frac{U_0 H/2}{\nu} \tag{4.1}$$



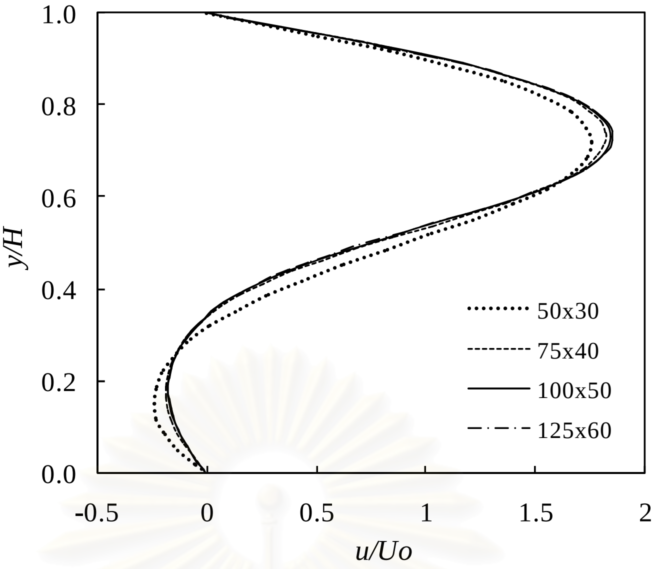
รูปที่ 4.1 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหล (Not to scale)

ตารางที่ 4.1 ขนาดของตัวแปรสำหรับปัญหาในรูปที่ 4.1

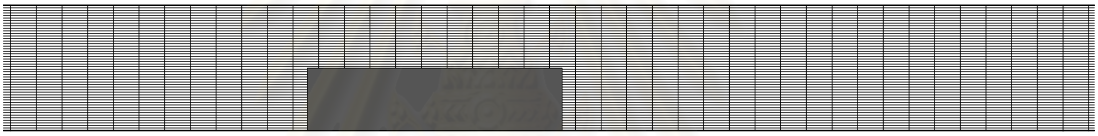
Re_H	H (mm)	L (mm)	l (mm)	h (mm)	L_e (mm)
144	10	200	20	5	50

ทดสอบความเป็นอิสระของกริด (Grid independent) โดยใช้กริดแบบสม่ำเสมอขนาดต่างๆ กันสี่ขนาดคือ 50×30, 75×40, 100×50 และ 125×60 ซึ่งเมื่อนำผลการคำนวณที่ได้จากการใช้กริดทั้งสี่ขนาดที่ตำแหน่ง $x=8$ มาเปรียบเทียบกันดังแสดงในรูปที่ 4.2 จะพบว่าผลการคำนวณที่ได้จากการใช้กริดขนาด 125×60 ไม่เปลี่ยนแปลงไปจากการใช้กริดขนาด 100×50 ดังนั้น การใช้กริดขนาด 100×50 จึงมีความละเอียดเพียงพอต่อการคำนวณโดยไม่ทำให้ผลลัพธ์เปลี่ยนแปลงไป สำหรับรูปร่างของกริดขนาด 100×50 ที่ใช้ในการคำนวณได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.3

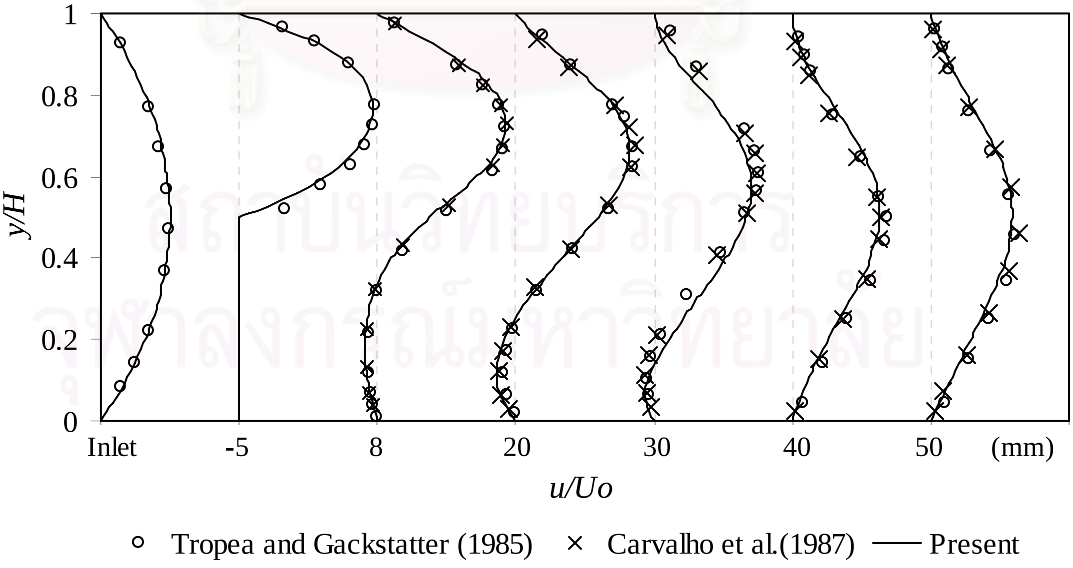
รูปที่ 4.4 แสดงรูปร่างของความเร็วที่ระยะต่างๆกันเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Tropea and Gackstatter (1985) และ Carvalho et al. (1987) ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าที่ทางเข้าความเร็วมีรูปร่างเป็นโค้งพาราโบล่า ต่อมา บริเวณด้านบนของสิ่งกีดขวางซึ่งคือที่ตำแหน่ง $x=-5$ พบว่าความเร็วมีค่าเพิ่มขึ้นเป็นอย่างมากเนื่องมาจากพื้นที่หน้าตัดของการไหลลดลงนั่นเอง จากนั้น บริเวณหลังสิ่งกีดขวางที่ตำแหน่ง $x=8$ พบว่ามีความเร็วที่มีค่าเป็นลบนั่นคือเกิดการหมุนวนขึ้นและจะมีค่าลดลงไปเรื่อยๆตามระยะทางการไหลจนถึงระยะที่ $x=40$ ก็ไม่พบการหมุนวนอีกแล้ว นั่นคือการไหลได้เริ่มมีการพัฒนาตัวขึ้นอีกครั้ง ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองแล้วจะเห็นว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีในทุกๆตำแหน่งที่เปรียบเทียบ



รูปที่ 4.2 รูปร่างความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 8$ ในกรณีที่ใช้กริดขนาดต่างๆกัน

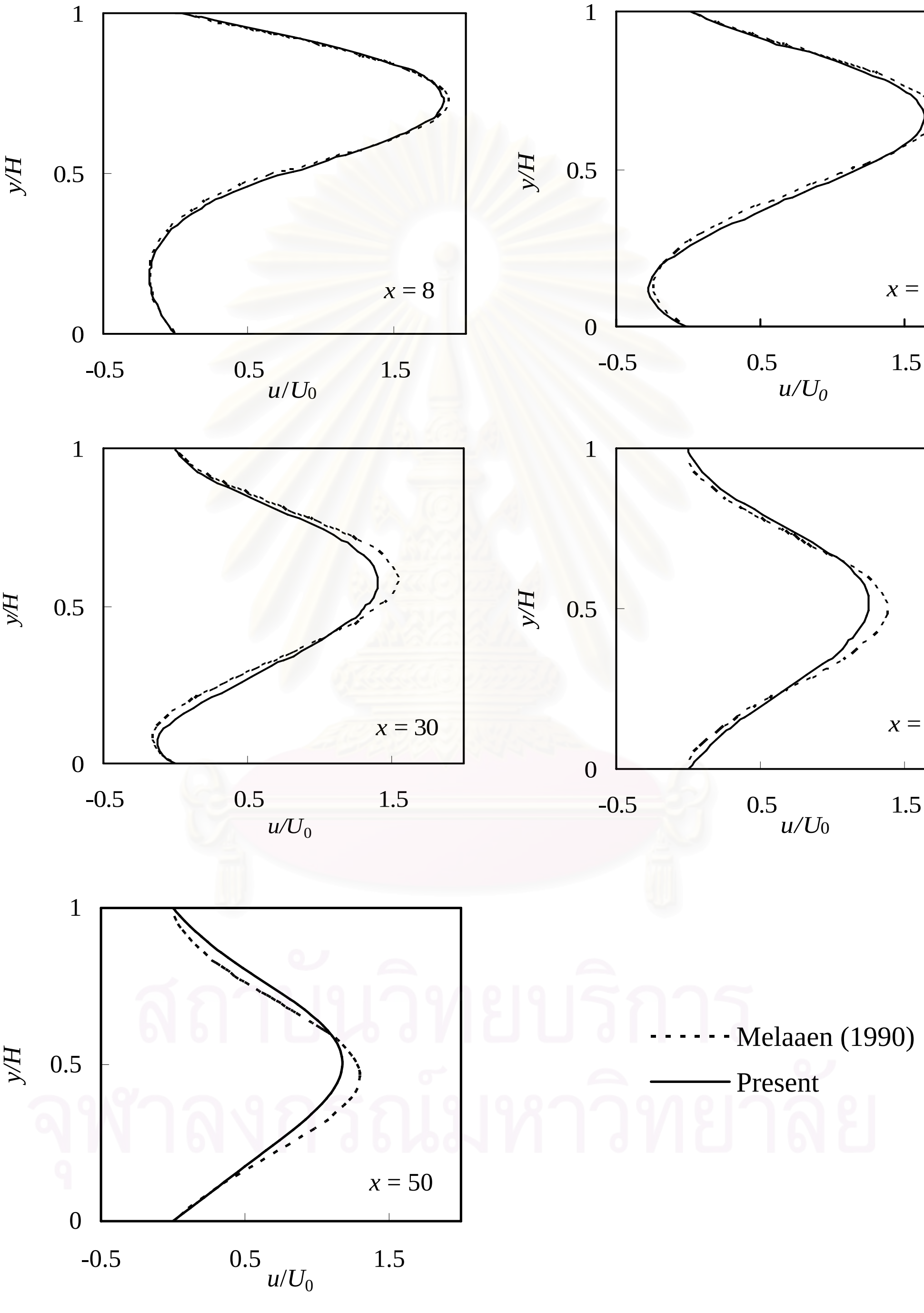


รูปที่ 4.3 รูปร่างของกริดขนาด 100×50 ที่ใช้ในการคำนวณ (Not to scale)



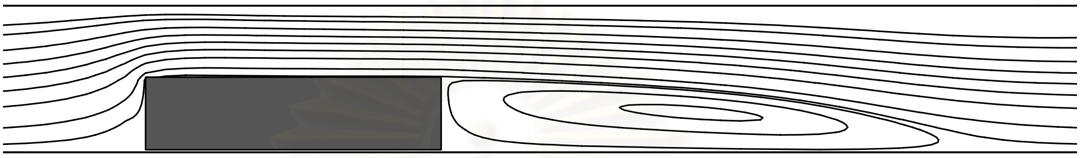
รูปที่ 4.4 รูปร่างความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

รูปที่ 4.5 แสดงผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Melaaen (1990) ที่ระยะ $X = 8, 20, 30, 40, 50$ จากรูปจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีในทุกๆตำแหน่งเช่นกัน



รูปที่ 4.5 รูปร่างของความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆเปรียบเทียบกับผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ผลการคำนวณในรูปของเส้นกระแสการไหลได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.6 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าเกิดการหมุนวนที่บริเวณหลังสิ่งกีดขวางได้อย่างชัดเจน และเมื่อเปรียบเทียบระยะการหมุนวนดังแสดงในตารางที่ 4.2 จะพบว่าระยะหมุนวนที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยก่อนหน้า โดยมีค่าอยู่ระหว่างค่าจากผลการทดลองของ Tropea and Gackstatter (1985) และค่าจากผลการคำนวณของ Melaaen (1990)



รูปที่ 4.6 เส้นกระแสการไหลของการไหลผ่านสิ่งกีดขวาง (Not to scale)

ตารางที่ 4.2 ระยะการหมุนวน (X_r)

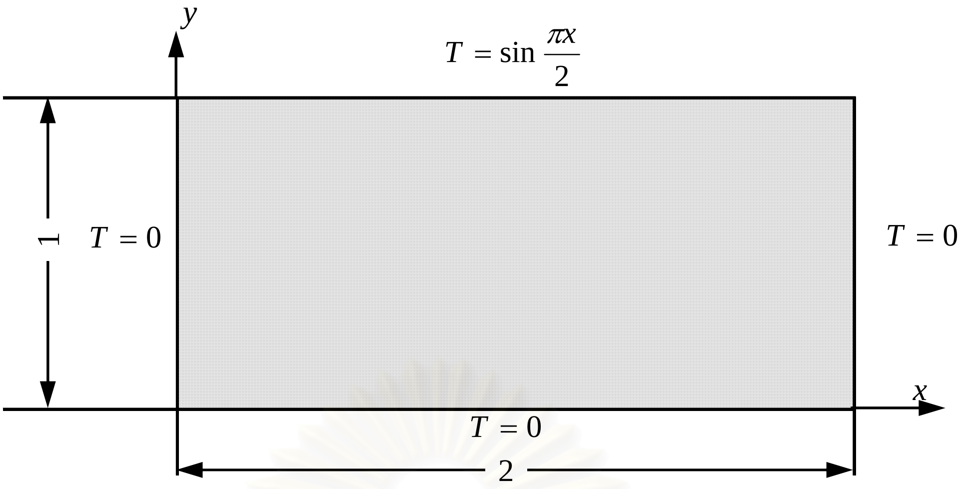
งานวิจัย	ระยะการหมุนวน (X_r)
ผลการทดลองของ Tropea and Gackstatter (1985)	7.1
ผลการคำนวณของ Melaaen (1990)	7.9
ผลการคำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์	7.4

4.2 การตรวจสอบความถูกต้องของการถ่ายเทความร้อน

ในส่วนนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของการถ่ายเทความร้อน โดยปัญหาที่นำมาเป็นกรณีศึกษาคือปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะ ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด และปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหล

4.2.1 การนำความร้อน

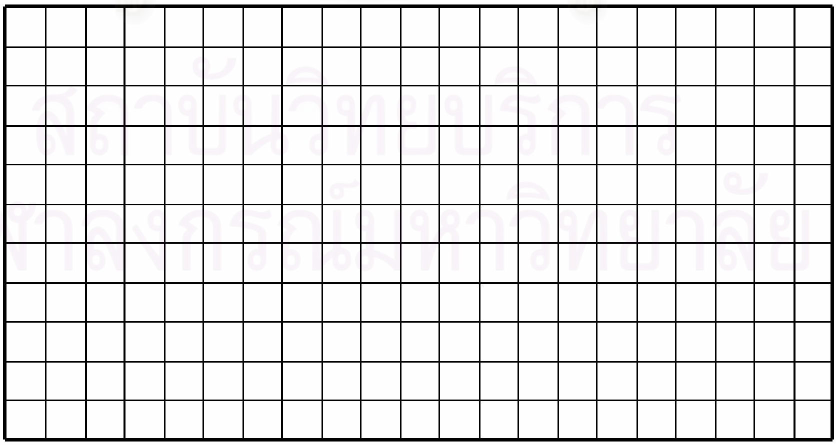
ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.7 จากรูปจะเห็นว่าอุณหภูมิที่ขอบด้านซ้าย ด้านขวา และด้านล่างมีค่าเท่ากับศูนย์ ที่ขอบด้านบนกำหนดให้อุณหภูมิอยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ โดยปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายของอุณหภูมิของ Carslaw and Jaeger (1959) ดังแสดงในสมการ (4.2)



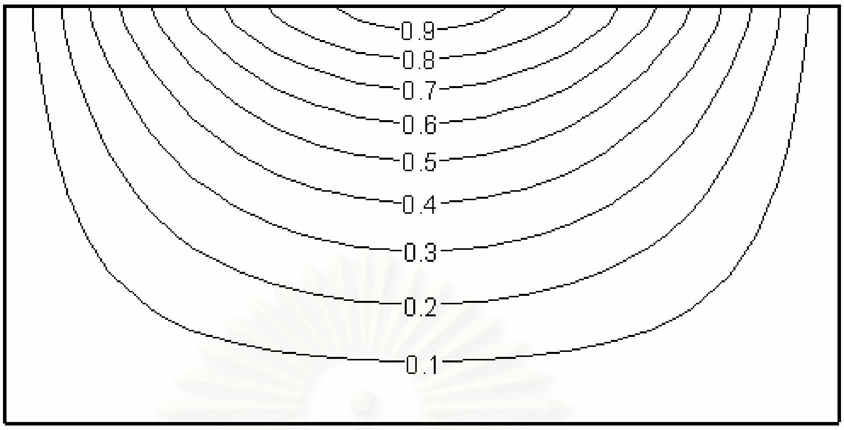
รูปที่ 4.7 ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะ

$$T(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2}\sinh\frac{\pi y}{2}/\sinh\frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$

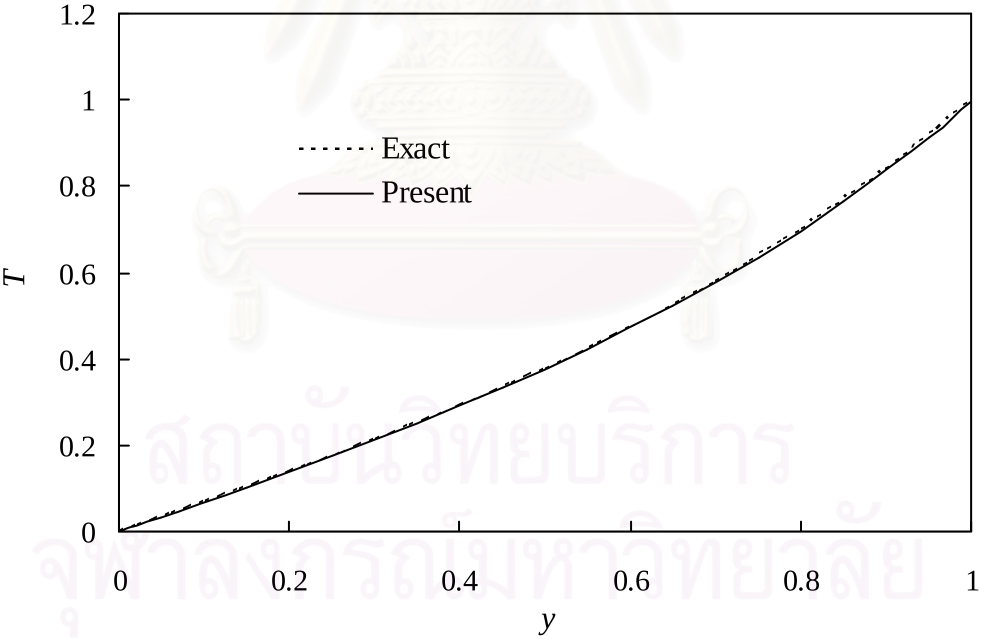
รูปที่ 4.8 แสดงกริดแบบสม่ำเสมอขนาด 20×10 ที่ใช้ในการคำนวณ ในขณะที่รูปที่ 4.9 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่คำนวณได้ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นโลหะมีอุณหภูมิสูงที่บริเวณกึ่งกลางด้านบน และเมื่อนำผลการคำนวณที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ระยะ $x=0.5$ ดังแสดงในรูปที่ 4.10 จะเห็นว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันอย่างดี



รูปที่ 4.8 กริดแบบสม่ำเสมอที่ใช้ในการคำนวณการนำความร้อนในแผ่นโลหะ



รูปที่ 4.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิในแผ่นโลหะ



รูปที่ 4.10 อุณหภูมิที่ตำแหน่ง $x = 1$ เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง

4.2.2 การพาความร้อนแบบอิสระ

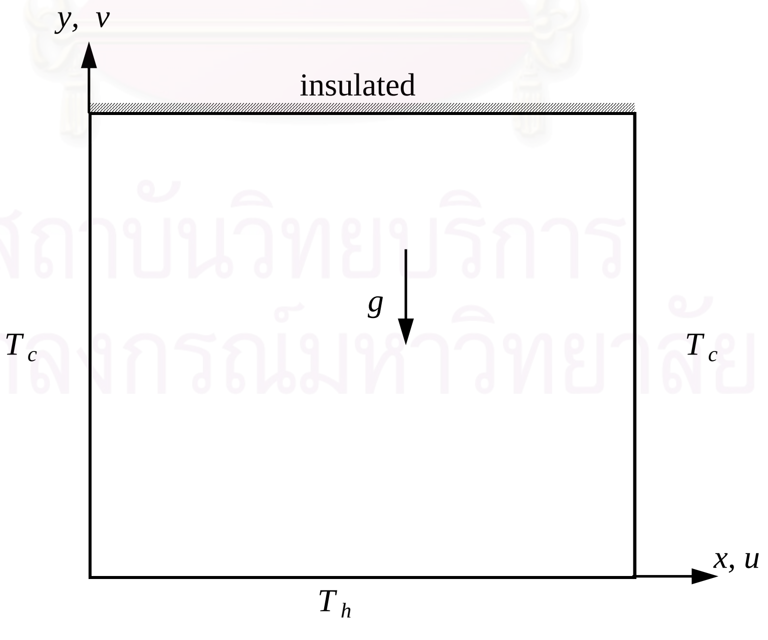
ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.11 จากรูปจะเห็นว่าที่ผนังด้านบนเป็นฉนวนกันความร้อน ผนังด้านข้างมีอุณหภูมิต่ำ และผนังด้านล่างมีอุณหภูมิสูง สำหรับปัญหานี้คำนวณโดยใช้กริดแบบสม่ำเสมอขนาด 50×50 และทำการคำนวณที่สภาวะการไหลสามกรณีคือ

1) $\mathrm{Pr} = 0.7$ และ $\mathrm{Ra} = 10^3$
2) $\mathrm{Pr} = 0.7$ และ $\mathrm{Ra} = 10^5$
3) $\mathrm{Pr} = 10$ และ $\mathrm{Ra} = 10^5$

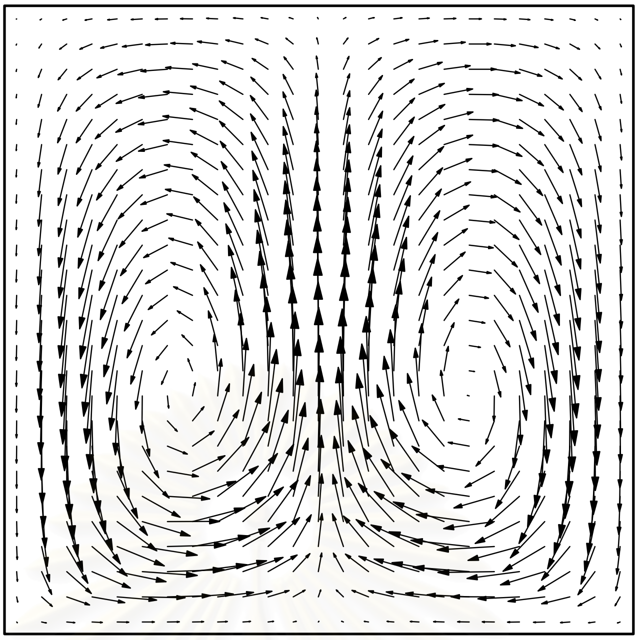
โดยที่ค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์ (Pr) และเรย์เลห์นัมเบอร์ (Ra) คิดจากสมการ (4.3) และ (4.4) ตามลำดับ

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \tag{4.3}$$

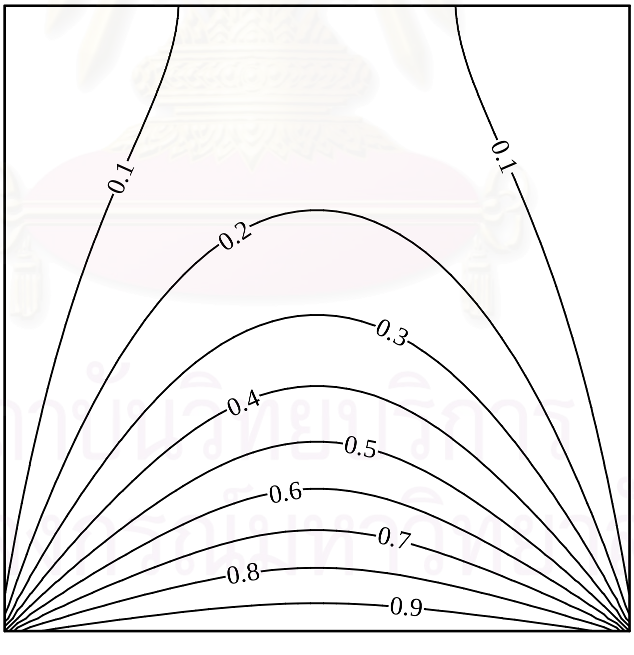
$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta(T_h - T_c)\rho^2 L^3}{\mu^2} \tag{4.4}$$



รูปที่ 4.11 ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด

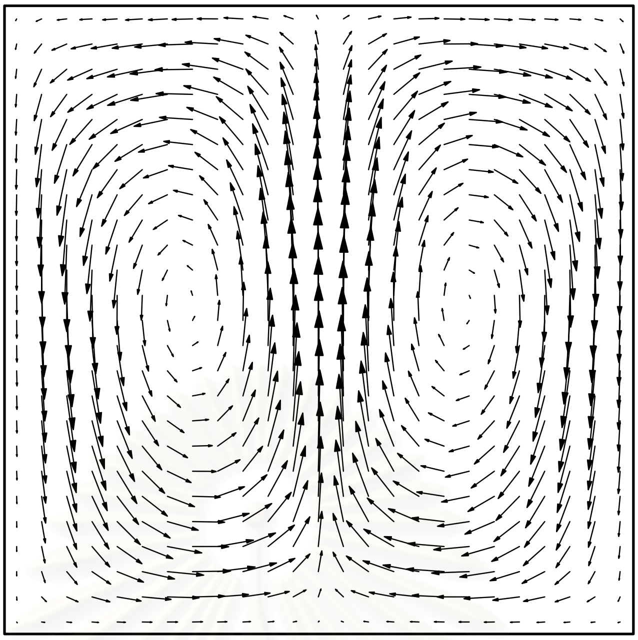


ก) เวกเตอร์ความเร็ว

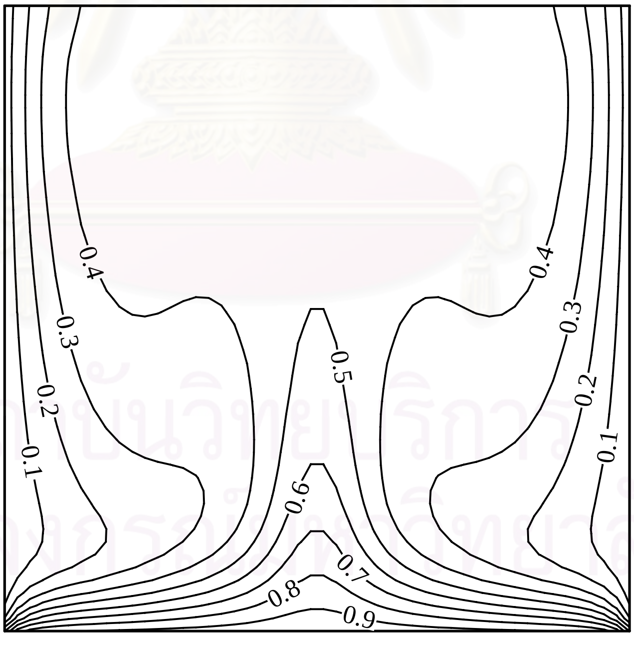


ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิ

รูปที่ 4.12 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนกรณี $\mathrm{Pr} = 0.7, \mathrm{Ra} = 10^3$

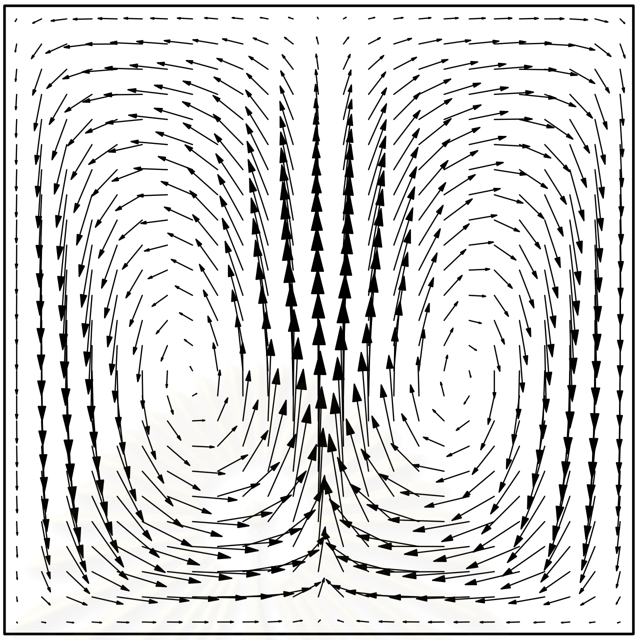


ก) เวกเตอร์ความเร็ว

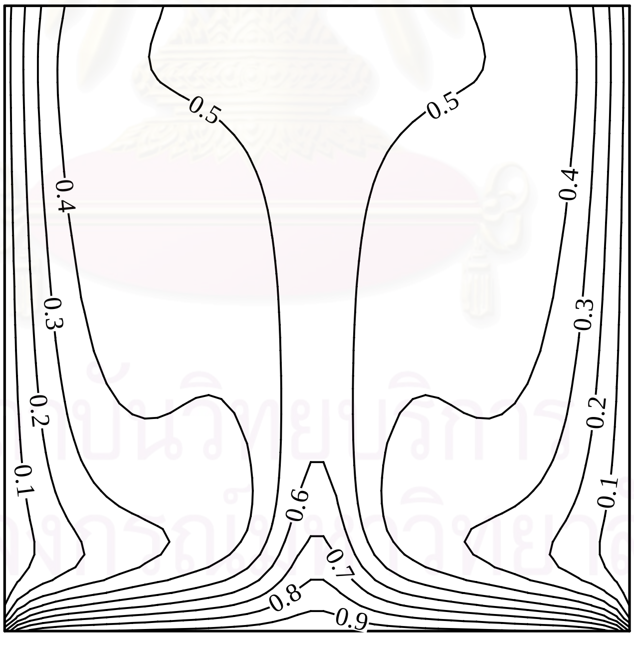


ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิ

รูปที่ 4.13 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนกรณี $\mathrm{Pr} = 0.7, \mathrm{Ra} = 10^5$

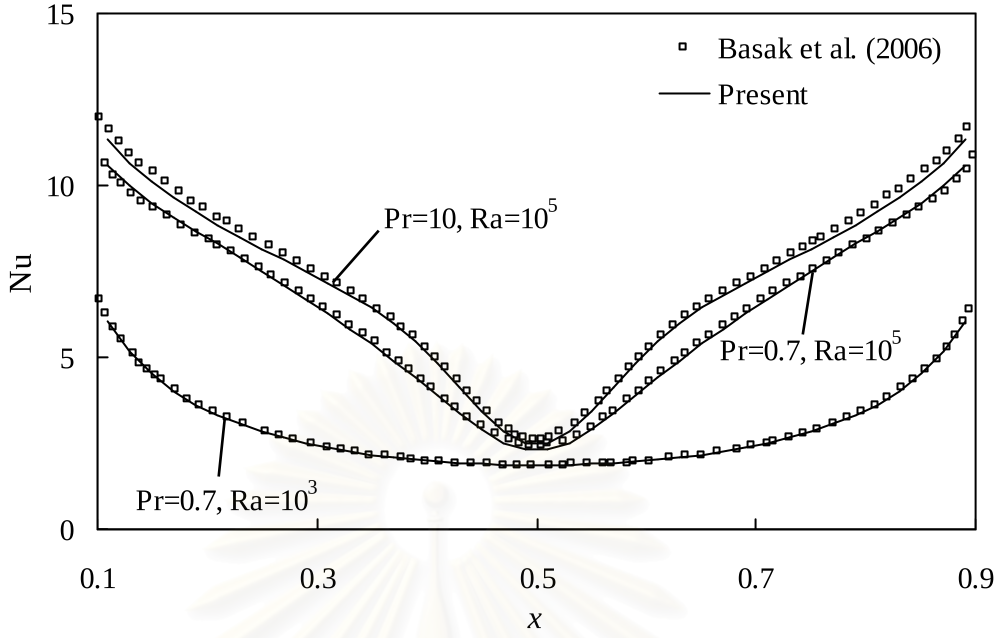


ก) เวกเตอร์ความเร็ว

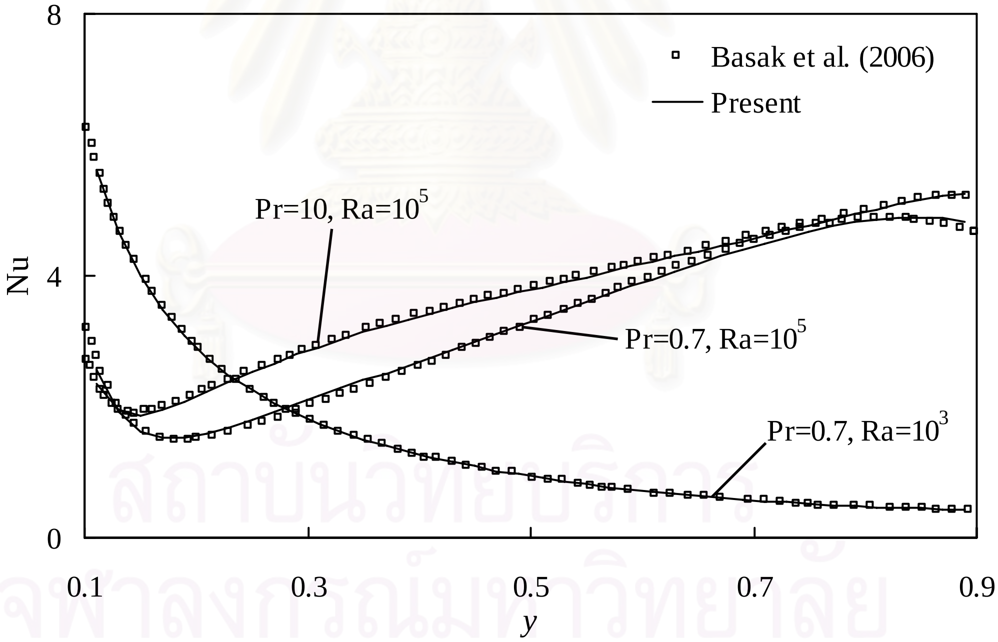


ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิ

รูปที่ 4.14 สภาวะการไหลเนื่องจากการพาความร้อนกรณี $\mathrm{Pr} = 10, \mathrm{Ra} = 10^5$



ก) ผนังด้านล่าง



ข) ผนังด้านข้าง

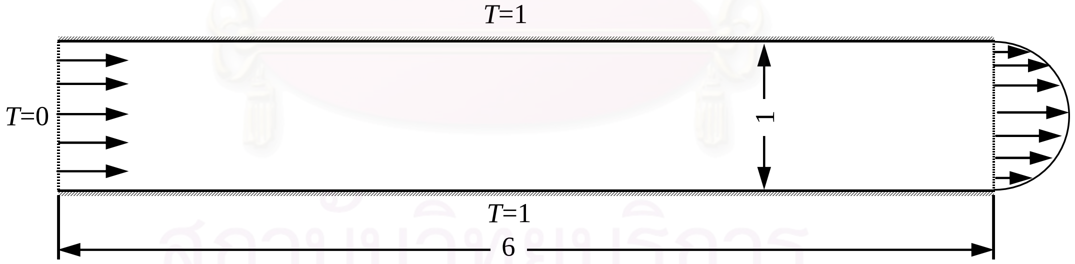
รูปที่ 4.15 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผนังของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ

ผลการคำนวณที่สภาวะการไหลทั้งสามกรณีที่ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.12-4.14 ซึ่งเมื่อพิจารณาลักษณะการไหลในรูปที่ 4.12ก, 4.13ก และ 4.14ก จะพบว่ามีลักษณะคล้ายๆกันคือ เกิดการไหลแบบหมุนวนใน 2 บริเวณ โดยการไหลหมุนวนที่ฝั่งซ้ายเป็นไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ส่วนบริเวณการหมุนวนฝั่งขวาเกิดการวนไปในทิศทางตรงกันข้าม ซึ่งก็เป็นไปตามสมมติฐานของบุซซิเนสค์ที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้านั่นคือ บริเวณที่มีอุณหภูมิสูงของไหลจะลอยตัวสูงขึ้นในขณะที่บริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำของไหลจะเคลื่อนตัวลง และก็สอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับการกระจายตัวของอุณหภูมิที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.12ข ,4.13ข และ 4.14ข

ผลการคำนวณที่ได้ถูกเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ Basak et al. (2006) ที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 4.15 โดยในรูปที่ 4.15ก แสดงค่าของนัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผนังด้านล่าง ในขณะที่ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผนังด้านข้างถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.15ข ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันอย่างดีในทุกกรณีทั้งที่ผนังด้านข้างและผนังด้านล่าง

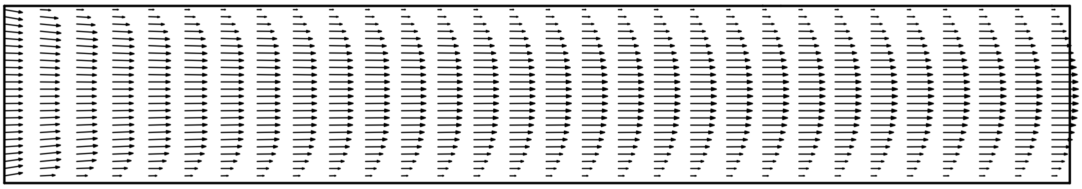
4.2.3 การพาความร้อนแบบบังคับ

ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.16 ซึ่งจะเห็นว่าของไหลอุณหภูมิต่ำที่มีความเร็วคงที่ไหลเข้าไปในช่องทางไหลที่มีอุณหภูมิสูงตลอดผนังด้านบนและด้านล่าง โดยการไหลจะค่อยๆพัฒนาตัวไปเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่ที่ทางออก

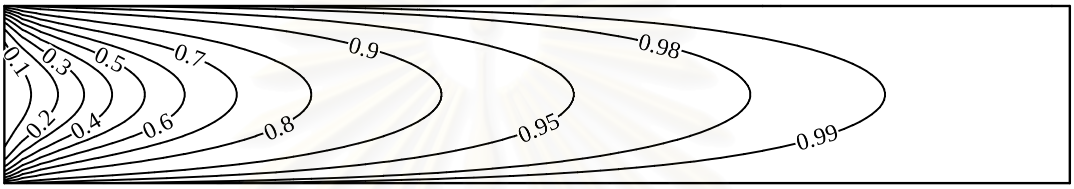


รูปที่ 4.16 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับ

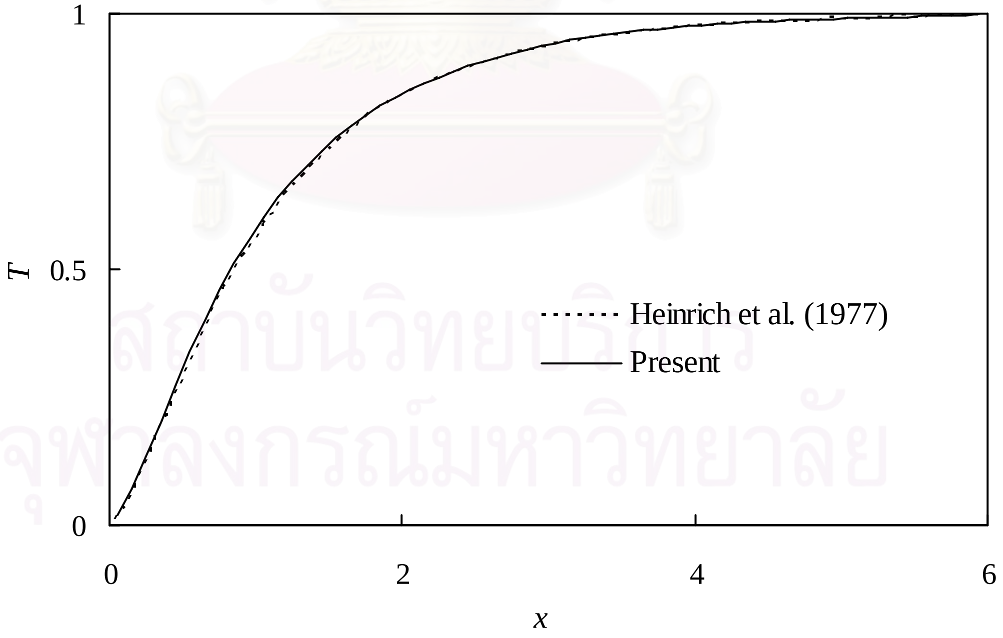
สำหรับปัญหานี้ใช้กริดขนาด 60×50 ในการคำนวณที่เพกเลตนัมเบอร์เท่ากับ 7.5 และเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 150 โดยผลการคำนวณในรูปของเวกเตอร์ความเร็วและการกระจายตัวของอุณหภูมิได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.17 และ 4.18 ตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบอุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางช่องการไหลกับผลงานวิจัยของ Heinrich et al. (1977) ที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 4.19 พบว่าผลการคำนวณมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



รูปที่ 4.17 เวกเตอร์ความเร็วของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับ



รูปที่ 4.18 การกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับ



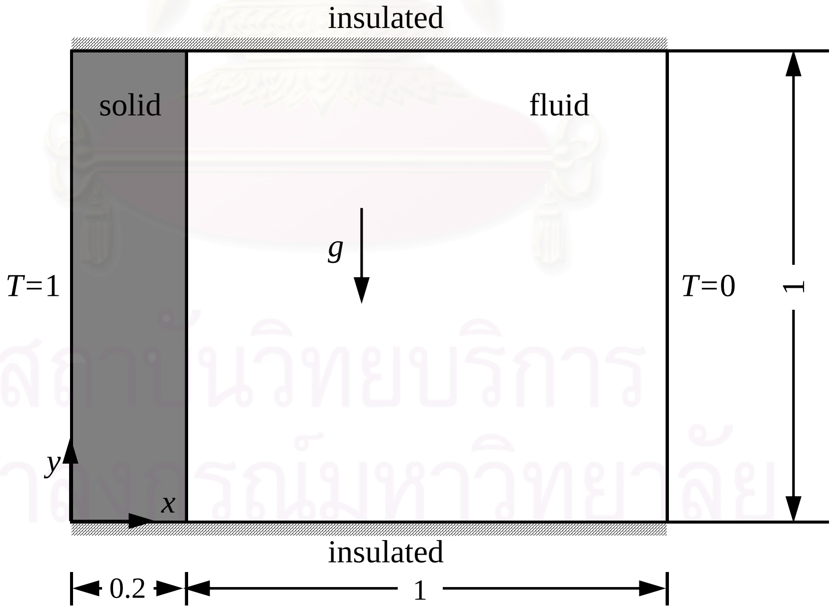
รูปที่ 4.19 อุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางของช่องทางไหลเปรียบเทียบกับผลจาก
วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ของ Heinrich et al. (1977)

4.3 การตรวจสอบความถูกต้องของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตอย่างง่าย

หลังจากที่มั่นใจแล้วว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถคำนวณสนามการไหลและการถ่ายเทความร้อนได้อย่างถูกต้องเพียงพอแล้ว จึงนำโปรแกรมมาตรวจสอบความถูกต้องในส่วนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ที่รวมเอาการพาความร้อนในของไหลและการนำความร้อนในของแข็งเข้าไว้ด้วยกัน โดยปัญหาที่นำมาเป็นกรณีศึกษาคือ ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีผนังนำความร้อน และปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับภายในช่องการไหลที่มีผนังนำความร้อน

4.3.1 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมที่มีผนังนำความร้อน

จากลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีผนังนำความร้อนได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.20 ซึ่งจะเห็นว่าที่ขอบด้านบนและด้านล่างเป็นฉนวนกันความร้อน ที่ขอบด้านขวามีอุณหภูมิต่ำ $T = 0$ และบริเวณด้านซ้ายของช่องปิดเป็นผนังนำความร้อนที่มีอุณหภูมิสูง $T = 1$ ที่ขอบด้านซ้าย



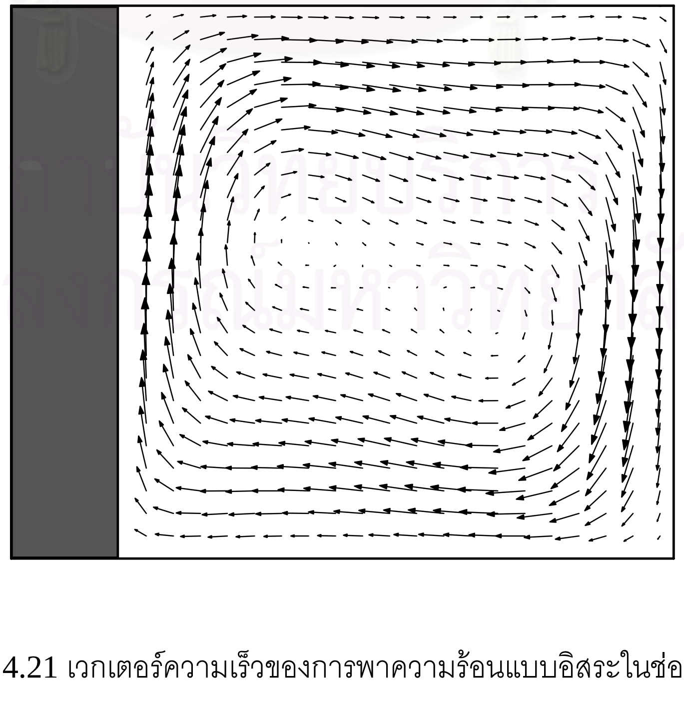
รูปที่ 4.20 ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระที่มีผนังนำความร้อน

สำหรับปัญหานี้ใช้กริดขนาด 50×50 ในการคำนวณที่กราชอร์ฟนัมเบอร์ (Gr) เท่ากับ 10^5 และพรันด์เทิลนัมเบอร์ (Pr) เท่ากับ 0.71 โดยที่กราชอร์ฟนัมเบอร์คำนวณจากสมการ (4.5)

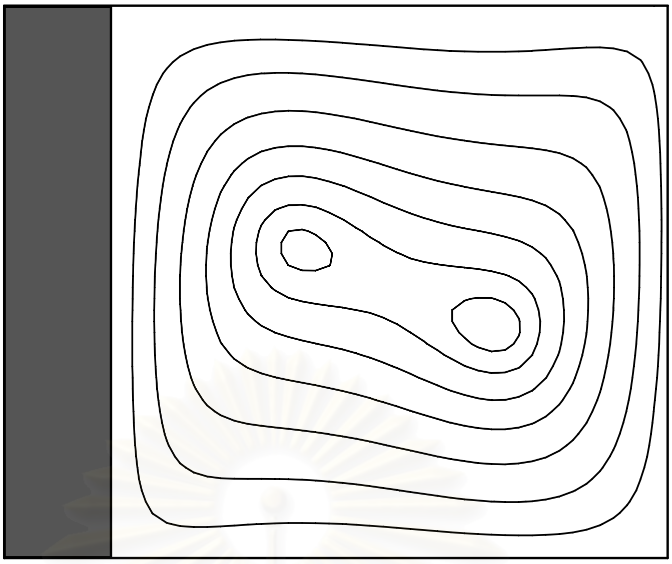
$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T\rho^2 L^3}{\mu^2} \tag{4.5}$$

ผลการคำนวณในรูปของเวกเตอร์ความเร็วและเส้นกระแสการไหลได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.21 และ 4.22 ตามลำดับ จะเห็นว่ามีการไหลหมุนวนเกิดขึ้นในทิศตามเข็มนาฬิกา โดยบริเวณผนังด้านซ้ายของช่องปิดที่มีอุณหภูมิสูงกว่า ของไหลจะลอยตัวสูงขึ้น ในขณะที่ด้านขวาของไหลเคลื่อนต่ำลง และบริเวณตรงกลางของช่องปิดเกิดการไหลวนสองบริเวณโดยที่บริเวณหมุนวนด้านซ้ายอยู่สูงกว่าบริเวณหมุนวนทางขวาเล็กน้อย

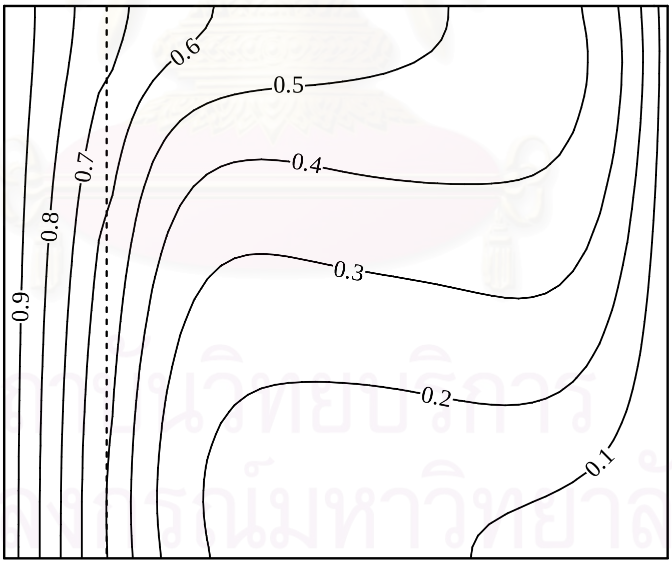
การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่าอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล $(K = k_s / k_f)$ ต่างๆกันได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.23 ซึ่งจะเห็นว่ากรณี $K=1$ อุณหภูมิในผนังจะมีการกระจายตัวที่ถี่กว่ากรณีที่ค่า $K=5$ และ $K=10$ เนื่องจากมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่น้อยกว่า ทำให้มีการถ่ายเทความร้อนไปสู่ของไหลได้น้อยลงกว่ากรณีอื่น โดยจะเห็นว่าเกรเดียนท์อุณหภูมิจะลดลงเมื่อ K มากขึ้นเนื่องจากค่าความต้านทานความร้อนในของแข็งต่อค่าความต้านทานความร้อนในของไหล (Biot number, Bi) มีค่าลดลง ดังนั้น เมื่อ K มีค่ามาก (หรือ Bi มีค่าน้อย) จะสามารถสมมติว่าอุณหภูมิที่ผิวมีค่าคงที่ได้ ซึ่งในกรณีนี้ก็คือการพาความร้อนแบบทั่วไปที่ไม่มีผลของคอนจูเกตนั่นเอง



รูปที่ 4.21 เวกเตอร์ความเร็วของการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด

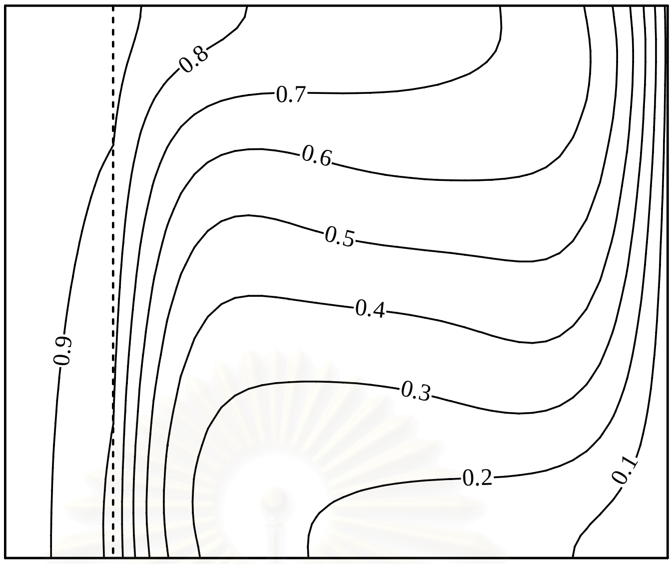


รูปที่ 4.22 เส้นกระแสการไหลของการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด

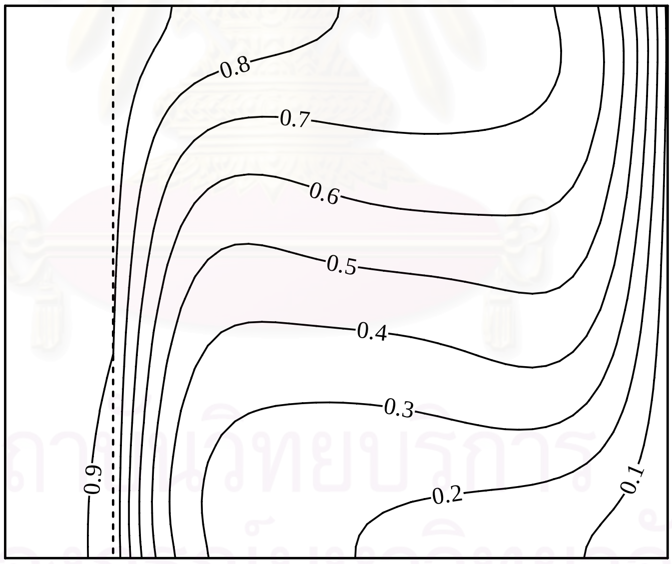


ก) กรณี $K = 1$

รูปที่ 4.23 การกระจายตัวของอุณหภูมิกรณี $\mathrm{Gr} = 10^5, \mathrm{Pr} = 0.7$



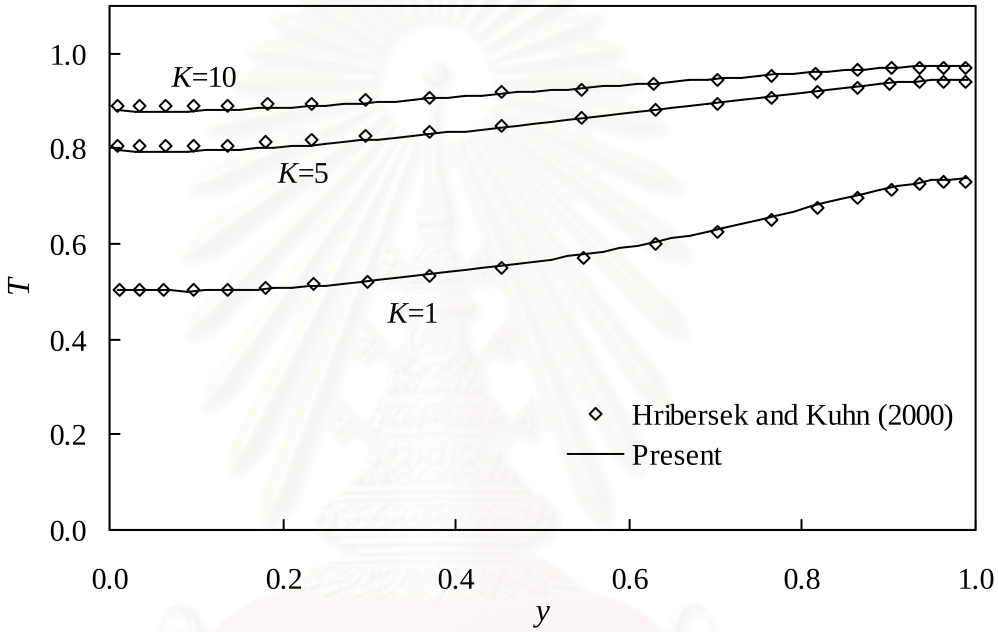
ข) กรณี $K = 5$



ค) กรณี $K = 10$

รูปที่ 4.23 (ต่อ) การกระจายตัวของอุณหภูมิกรณี $\mathrm{Gr} = 10^5, \mathrm{Pr} = 0.7$

รูปที่ 4.24 แสดงอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อระหว่างผนังกับของไหลกรณี $K = 1, 5$ และ 10 เปรียบเทียบกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Hribersek and Kuhn (2000) ซึ่งใช้วิธี Boundary element method พบว่าเมื่อค่า K เพิ่มสูงขึ้นอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อจะมีค่าสูงขึ้นตามไปด้วย เนื่องจากผนังสามารถถ่ายเทความร้อนไปสู่ของไหลได้มากขึ้น นอกจากนี้ค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อก็จะมีค่าค่อนข้างสม่ำเสมอเมื่อค่า K สูงขึ้น และจากรูปจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณทั้งสามกรณีมีความสอดคล้องกับผลของ Hribersek and Kuhn (2000) เป็นอย่างดี



รูปที่ 4.24 อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อกรณีค่า K ต่างๆกัน

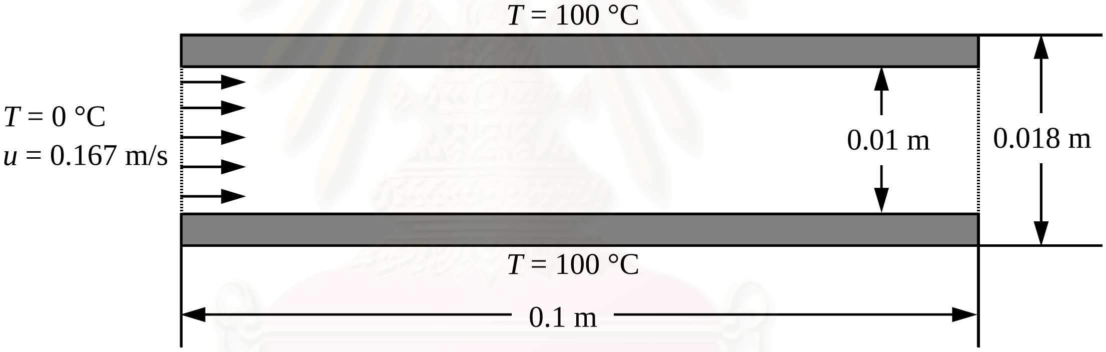
4.3.2 การพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อน

ลักษณะของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อนถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.25 จะเห็นว่าที่บริเวณทางเข้าอากาศไหลเข้ามาด้วยอุณหภูมิและความเร็วคงที่ $(u = 0.167\ \text{m/s}, T = 0^\circ\text{C})$ เข้าสู่ช่องการไหลที่ยาว $0.1\ \text{m}$ สูง $0.01\ \text{m}$ ผนังด้านบนและด้านล่างมีความหนาด้านละ $0.004\ \text{m}$ โดยที่อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของผนังทั้งด้านบนและล่างมีค่า $T = 100^\circ\text{C}$ โดยคุณสมบัติต่างๆของอากาศมีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 0.167\ \text{m/s} \\
\rho &= 1.225\ \text{kg/m}^3 \\
\mu &= 1.79\times10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2 \\
k &= 2.42\times10^{-2}\ \text{W/m}\cdot\text{K} \\
c_p &= 1006.43\ \text{J/kg}\cdot\text{K}
\end{aligned}
$$

และคุณสมบัติของผนังโลหะมีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
\rho &= 8030\ \text{kg/m}^3 \\
k &= 16.27\ \text{W/m}\cdot\text{K} \\
c_p &= 502.48\ \text{J/kg}\cdot\text{K}
\end{aligned}
$$

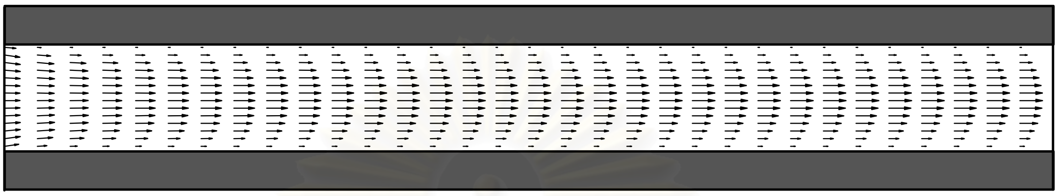


รูปที่ 4.25 ลักษณะปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อน

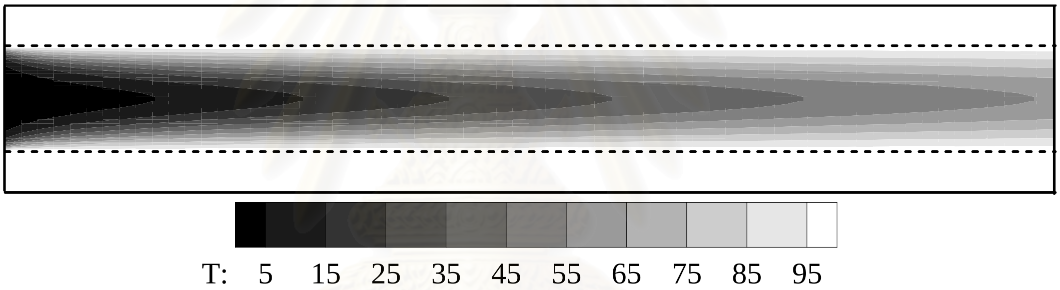
ผลการคำนวณจากการใช้กริดสม่ำเสมอขนาด 70×50 ได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.26 และ 4.27 โดยในรูปที่ 4.26 จะเห็นว่าที่บริเวณทางเข้าความเร็วจะมีค่าค่อนข้างคงที่และหลังจากนั้นการไหลก็ค่อยๆ พัฒนาตัวขึ้นตามระยะทางการไหลจนเกิดการพัฒนาตัวแบบเต็มที่ในที่สุด รูปที่ 4.27 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิ จะเห็นว่าในส่วนของการนำความร้อนในโลหะมีอุณหภูมิสูงใกล้เคียงกับอุณภูมิที่ขอบด้านนอก เนื่องมาจากค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของโลหะมีค่าสูงทำให้ปริมาณความร้อนจากโลหะถ่ายเทไปสู่ของไหลได้มาก สำหรับการกระจายตัวของอุณหภูมิในของไหลจะเห็นว่าที่บริเวณทางเข้ามีอุณหภูมิต่ำและค่อยๆเพิ่มสูงขึ้นตามทิศทางการไหลเนื่องมาจากการได้รับความร้อนที่ถ่ายเทมาจากโลหะนั่นเอง และเมื่อพิจารณาอุณหภูมิในของ

ไหลที่ระยะ 1/4, 1/2, 3/4 และ 1/1 ของความยาวช่องทางไหลจะพบว่าอุณหภูมิต่ำสุดจะอยู่ที่บริเวณกึ่งกลางของช่องการไหลดังแสดงในรูปที่ 4.28

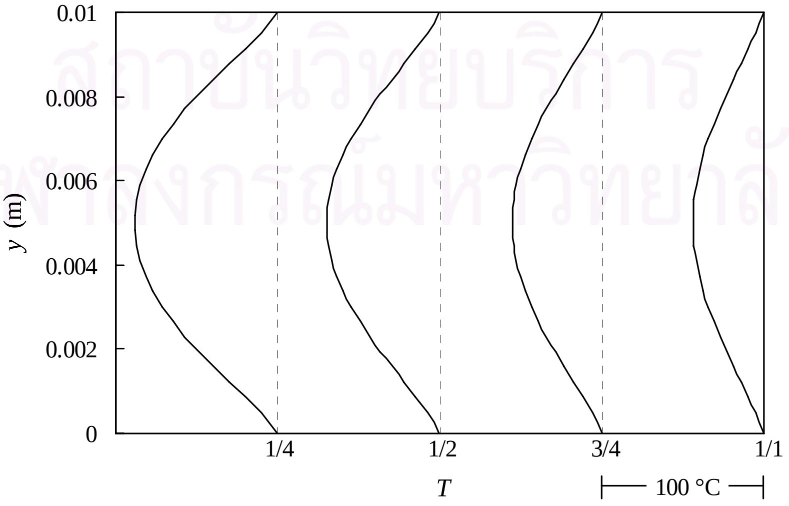
รูปที่ 4.29 แสดงการเปรียบเทียบค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผิวรอยต่อกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Divo and Kassab (2007) ซึ่งใช้วิธี Radial basis function meshless method พบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



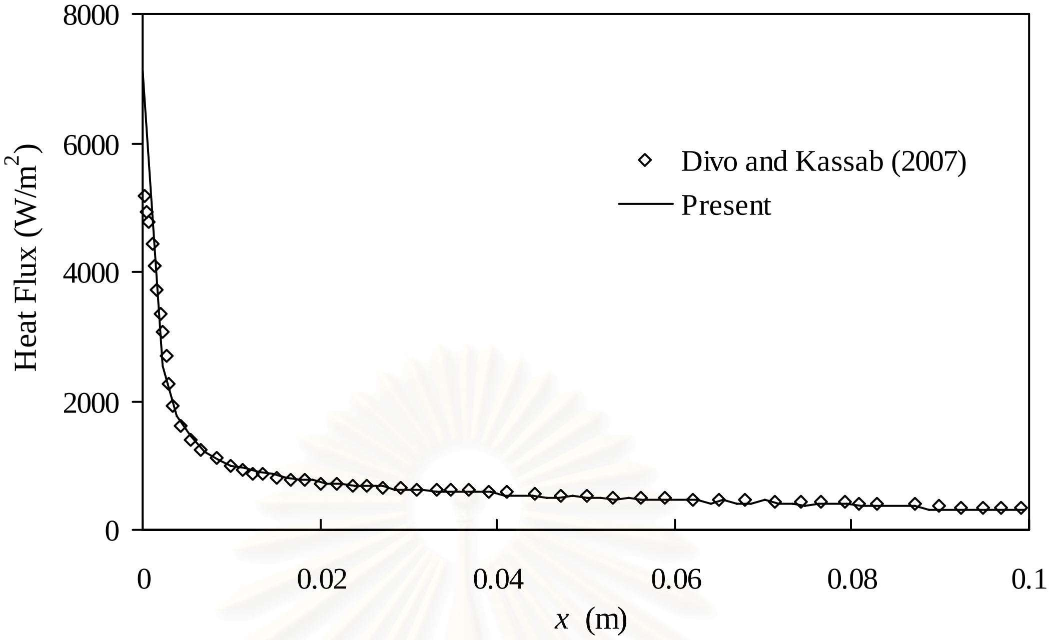
รูปที่ 4.26 เวกเตอร์ความเร็วของการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อน



รูปที่ 4.27 การกระจายตัวของอุณหภูมิการพาความร้อนแบบบังคับ
ในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อน



รูปที่ 4.28 รูปร่างของอุณหภูมิที่ระยะ 1/4, 1/2, 3/4 และ 1/1 ของความยาวช่องทางไหล



รูปที่ 4.29 ฟลักซ์ความร้อนที่ผิวรอยต่อของการพาความร้อนแบบบังคับที่มีผนังนำความร้อน

4.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้องทั้งในส่วนของสนามการไหลและการถ่ายเทความร้อนในแบบต่างๆ ซึ่งพบว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกับผลงานวิจัยก่อนหน้าเป็นอย่างดีในทุกๆปัญหาที่เปรียบเทียบ ดังนั้น จึงมั่นใจได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพเพียงพอที่จะนำไปคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ต้องการได้อย่างถูกต้องต่อไป

บทที่ 5
การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

หลังจากได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำเพียงพอแล้ว จึงนำโปรแกรมดังกล่าวมาวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายความร้อนแบบคอนจูเกต โดยปัญหาที่นำมาเป็นกรณีศึกษาคือปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมนำความร้อนที่วางอยู่ที่ผิวด้านล่างของช่องทางไหล ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีความน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานในสาขาต่างๆได้อย่างหลากหลาย โดยเฉพาะกับการระบายความร้อนของอุปกรณ์อิเล็คทรอนิคส์ที่ต้องควบคุมอุณหภูมิสูงสุดไม่ให้เกินขีดจำกัดของอุปกรณ์เพื่อป้องกันความเสียหายที่จะเกิดขึ้น

5.1 ลักษณะของปัญหา

ลักษณะของปัญหาได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.1 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่ามีของไหลที่มีอุณหภูมิคงที่ไหลเข้ามาที่บริเวณทางเข้าแบบพัฒนาเต็มที่ด้วยความเร็ว $u = 6y(1-y)$ โดยมีสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมวางอยู่ที่ผิวด้านล่างของช่องทางไหล ขอบผนังด้านบนและด้านล่างของช่องทางไหลเป็นฉนวนกันความร้อนยกเว้นที่บริเวณผิวด้านล่างของสิ่งกีดขวางได้รับฟลักซ์ความร้อนคงที่ ที่ตำแหน่งทางออกกำหนดให้ค่าความเร็วและอุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางการไหลเนื่องจากเป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว ขนาดของตัวแปรต่างๆ สำหรับปัญหาได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 5.1

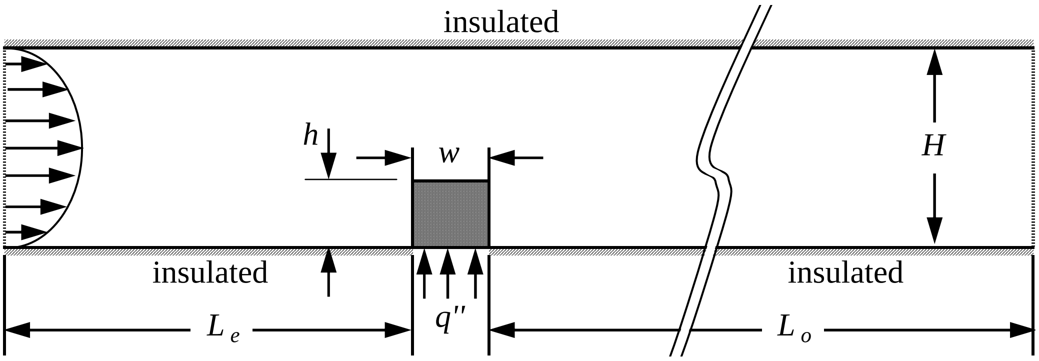
สำหรับตัวแปรไร้มิติที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ คือ เรย์โนลด์นัมเบอร์ นัสเซิลท์นัมเบอร์และอุณหภูมิไร้มิติ ได้แสดงไว้ในสมการ (5.1), (5.2) และ (5.3) ตามลำดับ

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_f u_m D_h}{\mu_f} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{Nu} = -\frac{1}{\theta_w}\frac{\partial \theta_f}{\partial n} \tag{5.2}$$

$$\theta = \frac{(T - T_e)}{q'' H / k_f} \tag{5.3}$$

โดย $u_m = H^{-1}\int_0^H u(y)\,dy$ และ $D_h = 2H$



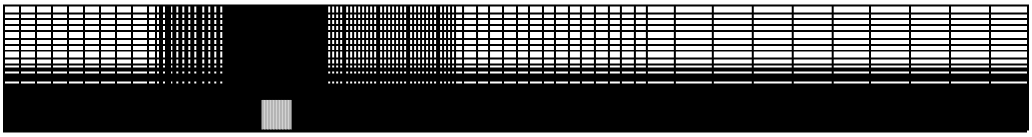
รูปที่ 5.1 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต (Not to scale)

ตารางที่ 5.1 ขนาดของตัวแปรต่างๆสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

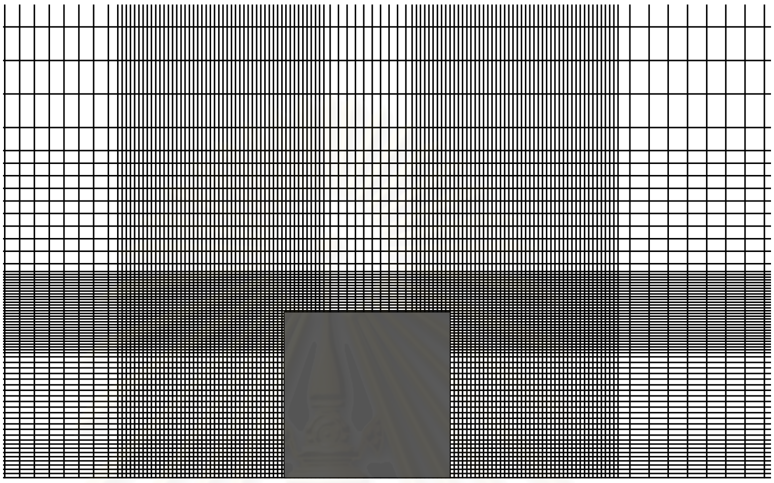
H (m)	L_e (m)	L_o (m)	w (m)	h (m)	q'' $(\mathrm{W/m^2})$
1	2	8	0.25	0.25	1

เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างมีความซับซ้อนทั้งในส่วนของการไหลและการถ่ายเทความร้อนทำให้การใช้กริดแบบสม่ำเสมอที่ละเอียดเพียงพอทั่วกันทั้งโดเมนจะต้องใช้หน่วยความจำและเวลาในการคำนวณมากเกินความจำเป็น ดังนั้น จึงแบ่งกริดใหม่โดยที่บริเวณผิวรอยต่อและบริเวณที่มีเกรเดียนท์สูงจะใช้กริดที่มีความละเอียดมากกว่าบริเวณที่ห่างออกไปดังแสดงในรูปที่ 5.2

ทดสอบความเป็นอิสระของกริดโดยใช้กริดต่างกันสามขนาดคือ 150×60, 200×75 และ 250×90 โดยเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติที่ผิวรอยต่อจากมุมด้านซ้ายล่างของสิ่งกีดขวางไปถึงมุมด้านขวาล่างในกรณี $\mathrm{Re}=1000$, $\mathrm{Pr}=0.72$ และ $K=k_s/k_f=10$ ดังแสดงในรูปที่ 5.3 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อจะมีค่าต่ำที่สุดเมื่อใช้กริดขนาด 150×60 และจะเพิ่มสูงขึ้นเมื่อใช้กริดที่ละเอียดขึ้น แต่เมื่อใช้กริดขนาด 250×90 พบว่าค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อมีค่าเพิ่มขึ้นมากกว่ากรณีที่ใช้กริดขนาด 200×75 เพียงเล็กน้อย ดังนั้น สำหรับปัญหานี้การเลือกใช้กริดขนาด 200×75 จึงมีความละเอียดเพียงพอต่อการคำนวณ

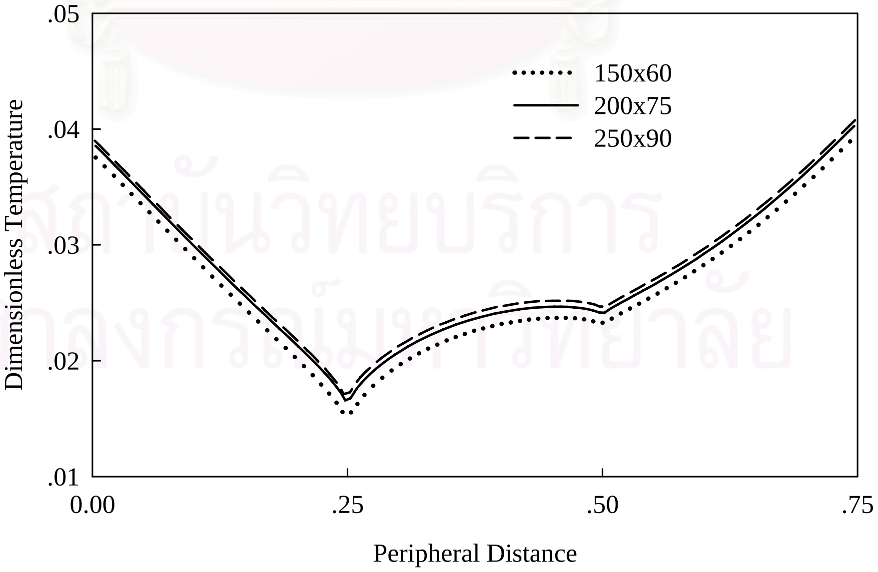


ก) กริดในโดเมนการคำนวณ



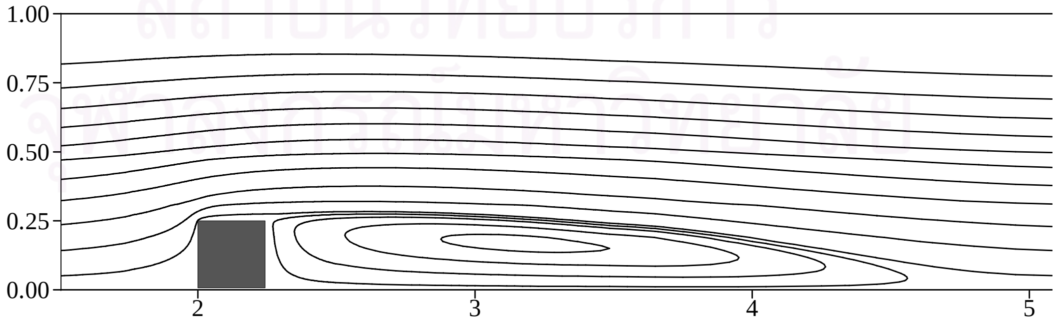
ข) ภาพขยายของกริดบริเวณสิ่งกีดขวาง

รูปที่ 5.2 ลักษณะของกริดที่ใช้ในการคำนวณ

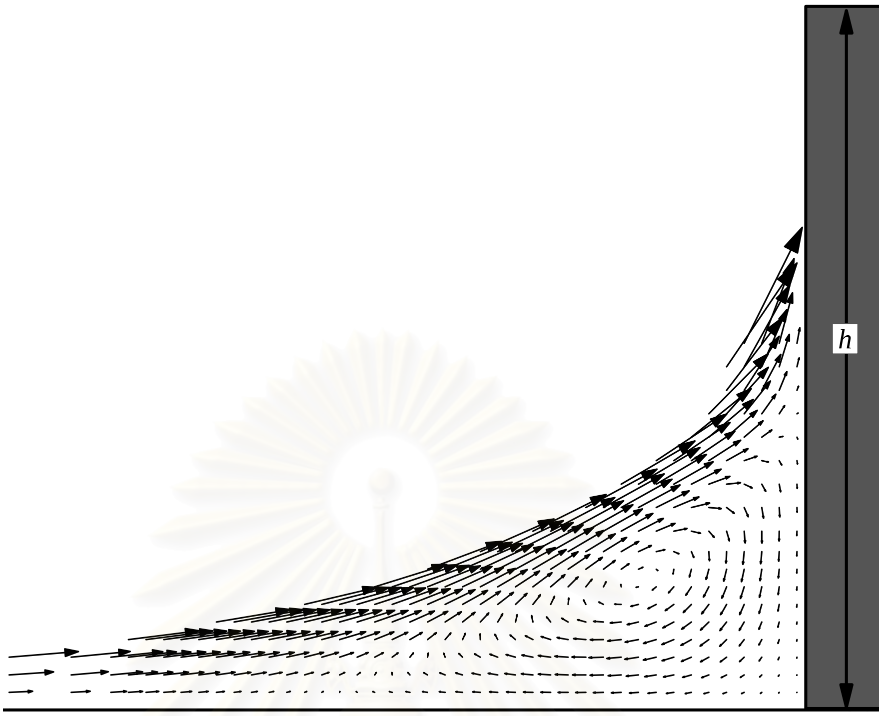


รูปที่ 5.3 อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อกรณีใช้กริดขนาดต่างกัน

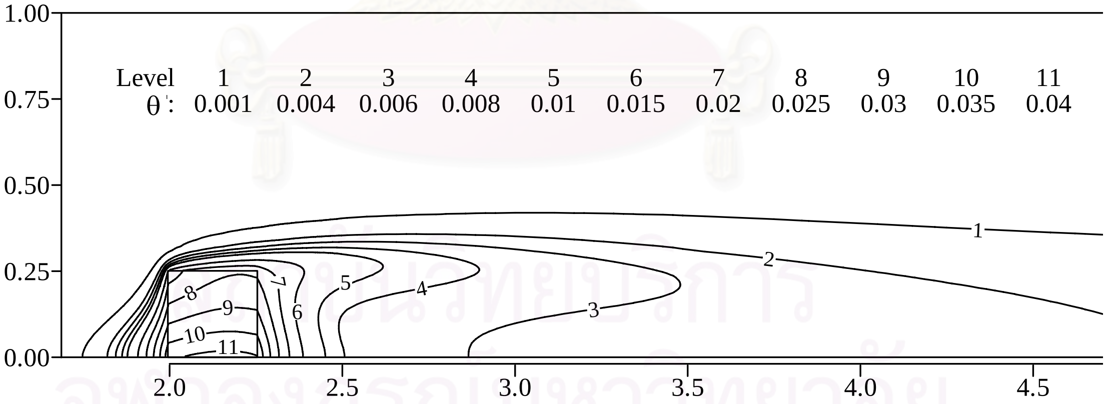
รูปที่ 5.4–5.6 แสดงผลการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 200×75 ที่สภาวะการไหล $\mathrm{Re}=1000$, $\mathrm{Pr}=0.72$ และ $K=10$ โดยในรูปที่ 5.4 แสดงเส้นกระแสการไหลซึ่งจะเห็นว่าที่บริเวณท้ายกระแสการไหลของสิ่งกีดขวางมีการหมุนวนเกิดขึ้นเป็นระยะประมาณสิบสองเท่าของความสูงของสิ่งกีดขวาง ส่วนที่บริเวณต้นกระแสการไหลไม่พบการหมุนวนเนื่องจากบริเวณการหมุนวนมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับบริเวณหมุนวนด้านท้ายกระแสการไหล แต่เมื่อพิจารณาอย่างละเอียดจะเห็นว่าบริเวณดังกล่าวก็เกิดการหมุนวนเช่นกัน โดยทิศทางการหมุนวนจะหมุนไปตามเข็มนาฬิกาดังจะเห็นได้จากภาพขยายของเวกเตอร์ความเร็วในรูปที่ 5.5 โดยบริเวณการหมุนวนที่เกิดขึ้นจะมีอิทธิพลต่อการถ่ายเทความร้อนของสิ่งกีดขวางดังแสดงในรูปที่ 5.6 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณมุมล่างด้านซ้ายจะกระจายขึ้นไปด้านบน และที่บริเวณมุมบนด้านซ้ายบนอุณหภูมิจะมีค่าต่ำกว่าเนื่องจากได้รับอิทธิพลของกระแสการไหลหลักนั่นเอง ซึ่งก็สอดคล้องกับค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อเป็นอย่างดีดังแสดงในรูปที่ 5.7 จะเห็นว่าที่ผิวด้านซ้ายนัสเซิลท์นัมเบอร์จะค่อยๆเพิ่มขึ้นในช่วงแรกและจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่บริเวณใกล้มุมบนด้านซ้ายจนมีค่าสูงสุด หลังจากนั้นจึงมีค่าลดลงที่บริเวณผิวด้านบนตามทิศทางการไหลจนถึงบริเวณมุมบนด้านขวานัสเซิลท์นัมเบอร์จะเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเนื่องจากอุณหภูมิที่ผิวมีค่าลดลงเพราะของไหลบริเวณนั้นไม่ได้รับความร้อนจากสิ่งกีดขวาง สำหรับนัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวด้านขวาจะเห็นว่ามีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงแรกจนมีค่าต่ำที่สุดและมีค่าเกือบจะคงที่จนถึงบริเวณมุมล่างด้านขวาจึงมีค่าเพิ่มขึ้นอีกเล็กน้อยเนื่องจากบริเวณนั้นมีเกรเดียนท์ของอุณหภูมิที่มากกว่านั่นเอง และจากการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Young and Vafai (1998) และผลจากวิธีเชิงวิเคราะห์ของ Cess and Shaffer (1959) ดังแสดงในรูปที่ 5.7 พบว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



รูปที่ 5.4 เส้นกระแสการไหลที่กรณี $\mathrm{Re}=1000$, $\mathrm{Pr}=0.72$ และ $K=10$

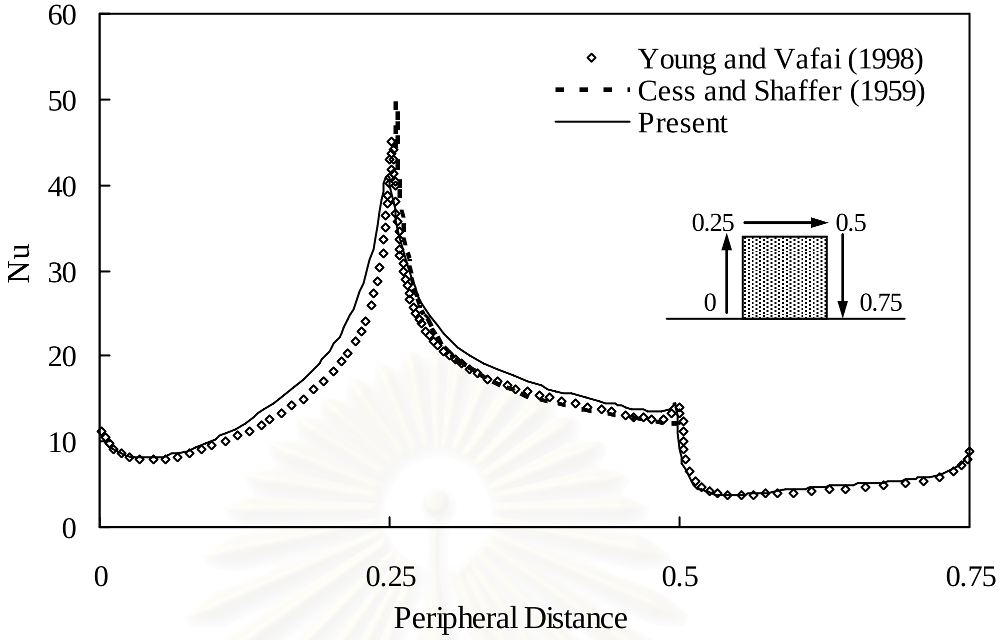


รูปที่ 5.5 ภาพขยายเวกเตอร์ความเร็วบริเวณต้นกระแสการไหลของสิ่งกีดขวาง



รูปที่ 5.6 การกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณสิ่งกีดขวาง

กรณี $\mathrm{Re} = 1000,\ \mathrm{Pr} = 0.72$ และ $K = 10$



รูปที่ 5.7 การกระจายตัวของนัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Young and Vafai (1998) และผลเชิงวิเคราะห์ของ Cess and Shaffer (1959) กรณี $\mathrm{Re}=1000,\ \mathrm{Pr}=0.72$ และ $K=10$

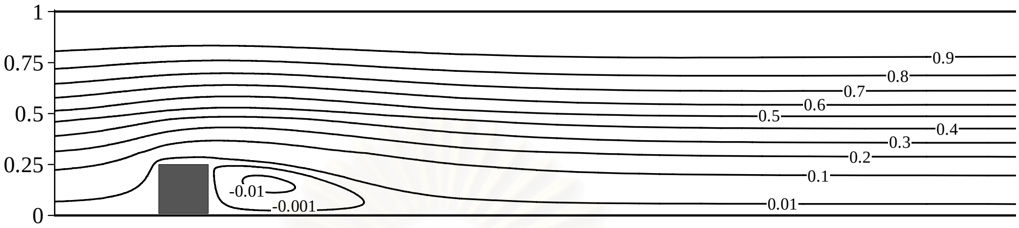
สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวนี้จะใช้สภาวะการไหลที่ $\mathrm{Re}=1000,\ \mathrm{Pr}=0.72$ และ $K=10$ เป็นสภาวะฐาน โดยจะเปลี่ยนค่าของตัวแปรที่ต้องการศึกษาและวิเคราะห์ถึงผลที่เกิดขึ้นต่อการไหลและการถ่ายเทความร้อนดังต่อไปนี้

5.2 ผลของเรย์โนลด์นัมเบอร์

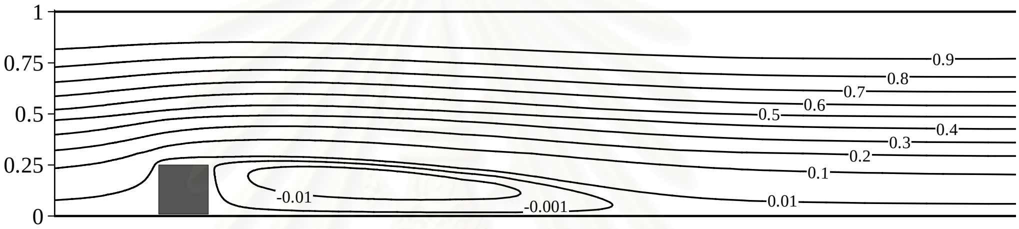
ผลของเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่อสนามการไหลได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.8 โดยเป็นการเปรียบเทียบเส้นกระแสการไหลที่ $\mathrm{Re}=200, 800, 1400$ และ 2000 ซึ่งจะเห็นว่าระยะการหมุนวนบริเวณหลังสิ่งกีดขวางจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่เพิ่มขึ้น

รูปที่ 5.9 แสดงผลของเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่อนัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อสำหรับกรณี $200 \le \mathrm{Re} \le 2000$ ดังที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้า นั่นคือ ในช่วงแรกนัสเซิลท์นัมเบอร์จะมีค่าต่ำที่บริเวณมุมล่างด้านซ้ายและเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่บริเวณใกล้มุมด้านบน หลังจากนั้นนัสเซิลท์นัมเบอร์ที่บริเวณผิวด้านบนจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงแรกและต่อมาจึงลดลงอย่างช้าๆ และที่บริเวณผิวด้านขวานัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะลดลงอย่างรวดเร็วอีกครั้งจนมีค่าต่ำที่สุดและมีค่าเกือบจะ

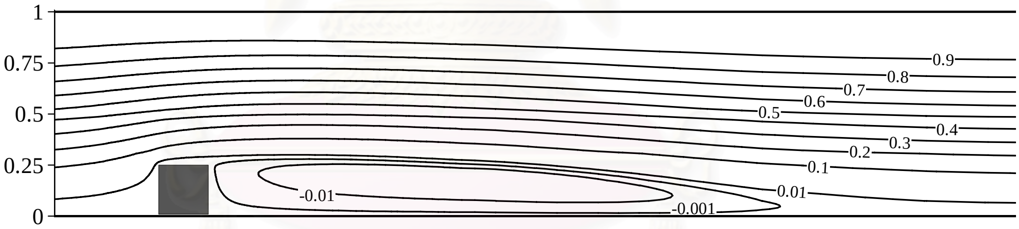
คงที่ไปจนสุดผิวรอยต่อที่มุมล่างด้านขวา โดยจะเห็นว่าเมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น นัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย นั่นคือสามารถระบายความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางได้มากขึ้นนั่นเอง



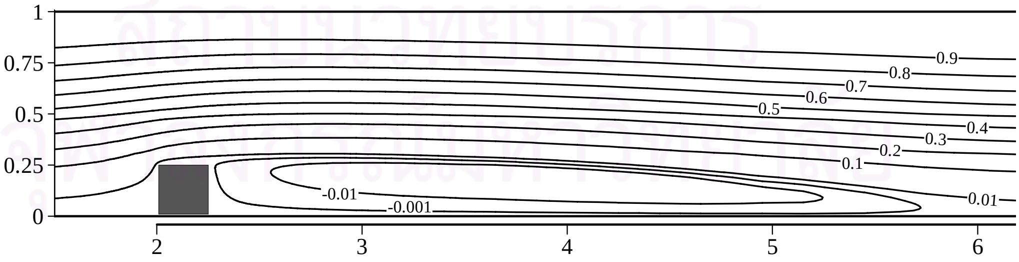
ก) $\mathrm{Re} = 200$



ข) $\mathrm{Re} = 800$

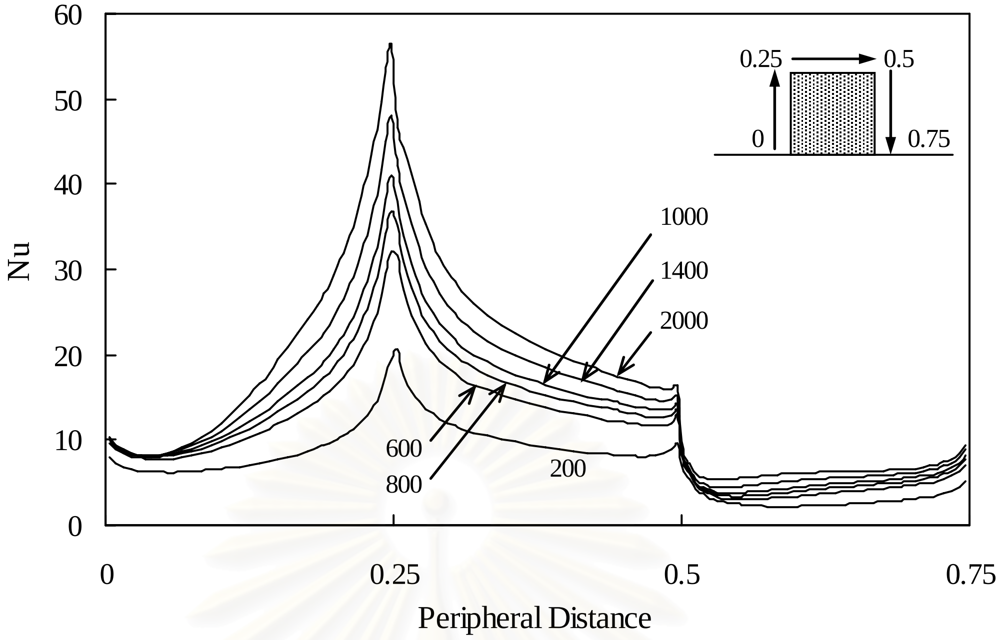


ค) $\mathrm{Re} = 1400$



ง) $\mathrm{Re} = 2000$

รูปที่ 5.8 เส้นกระแสการไหลที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่างๆกัน



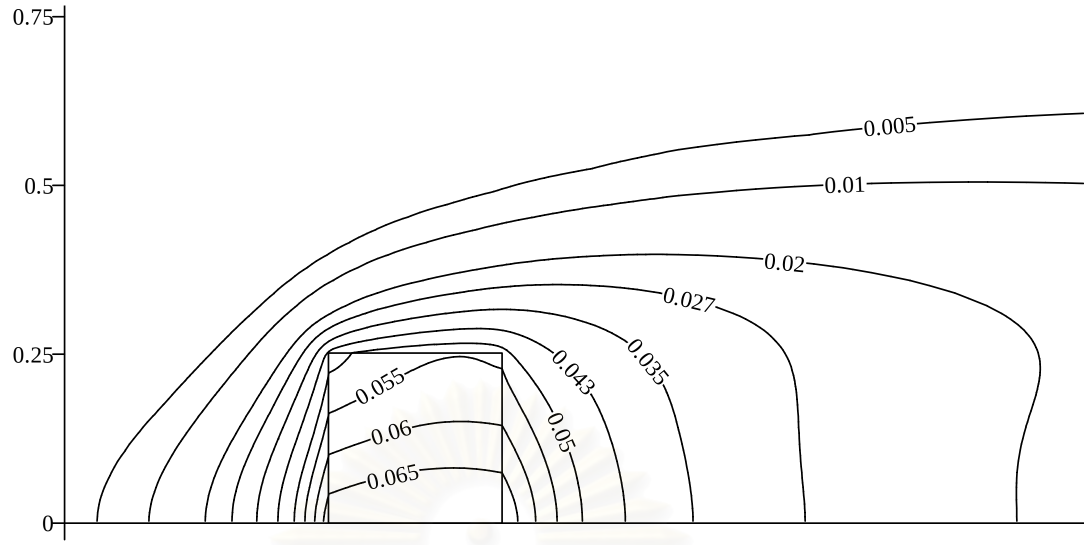
รูปที่ 5.9 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อกรณี $200 \le \text{Re} \le 2000$

5.3 ผลของพรันด์เทิลนัมเบอร์

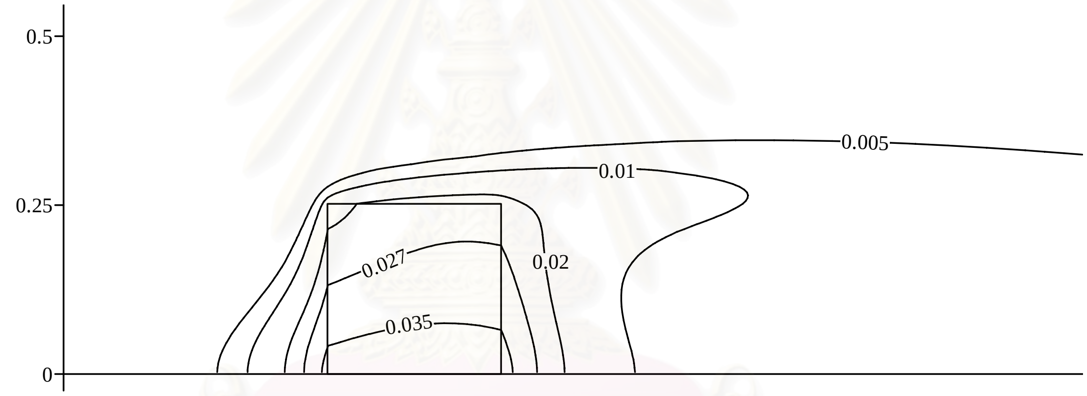
ผลของพรันด์เทิลนัมเบอร์ต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิไร้มิติได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.10 ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นผลให้ชั้นขอบเขตความร้อน (Thermal boundary layer) บางลง โดยจะขยับลงมาทางด้านล่างของช่องทางไหลดังจะเห็นได้จากในรูป ก) เส้นอุณหภูมิคงที่เส้นนอกสุดซึ่งมีค่า 0.005 จะขยับลงมาชิดกับสิ่งกีดขวางมากขึ้นเมื่อพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเพิ่มสูงขึ้นในรูป ข) และ ค) ซึ่งเป็นผลมาจากการถ่ายเทความร้อนโดยการพามีอิทธิพลมากขึ้นตามค่าพรันด์เทิลนัมเบอร์ และเมื่อของไหลสามารถพาความร้อนได้มากขึ้นนั่นคือสามารถดึงความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางได้เพิ่มขึ้นเช่นกันจึงทำให้อุณหภูมิในสิ่งกีดขวางมีค่าลดลง

5.4 ผลของอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

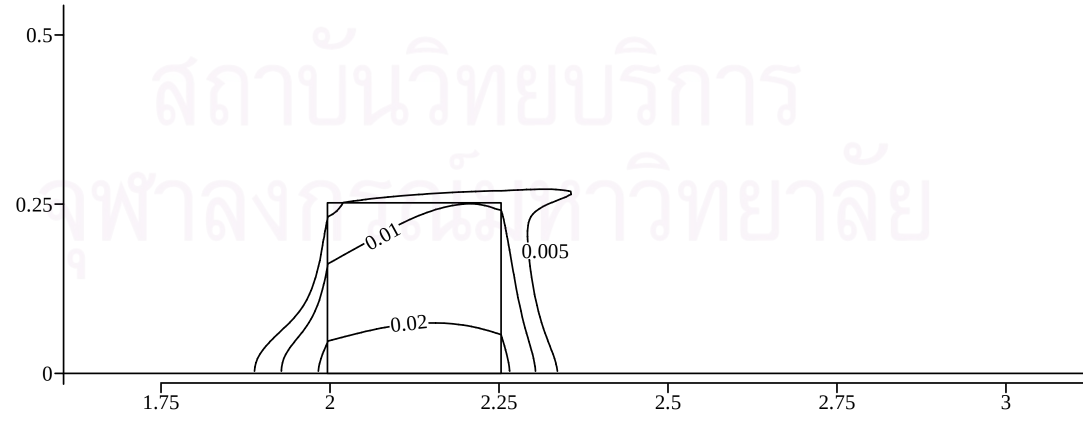
อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (K) มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตค่อนข้างมากดังที่แสดงในรูปที่ 5.11 และตารางที่ 5.2 โดยจะเห็นว่าเมื่อค่า K เพิ่มขึ้นอุณหภูมิภายในสิ่งกีดขวางจะลดลงอย่างเห็นได้ชัด โดยในกรณี $K = 1$ อุณภูมิสูงสุดจะมีค่าเท่ากับ 0.1518 และลดลงเป็น 0.0415 ในกรณี K เพิ่มขึ้นสิบเท่า และเมื่อค่า $K = 100$ อุณภูมิ



ก) $\mathrm{Pr} = 0.072$



ข) $\mathrm{Pr} = 0.72$



ค) $\mathrm{Pr} = 7.2$

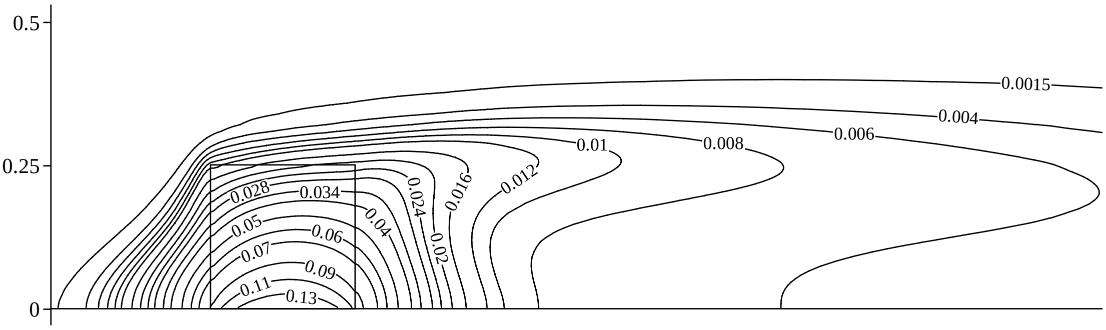
รูปที่ 5.10 ผลของพรันด์เทิลนัมเบอร์ต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิไร้มิติ

สูงสุดจะมีค่าเท่ากับ 0.0249 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับกรณี $K = 1000$ และเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิจะเห็นว่าในกรณีที่ $K = 100$ และ $K = 1000$ อุณหภูมิในสิ่งกีดขวางมีการกระจายตัวน้อยมากจนกล่าวได้ว่าอุณหภูมิทั่วทั้งสิ่งกีดขวางมีค่าคงที่เท่ากันทำให้การนำความร้อนในของแข็งไม่มีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งก็เสมือนกับว่าเป็นการพาความร้อนโดยทั่วไปที่มีเงื่อนไขขอบเป็นค่าอุณภูมิคงที่นั่นเอง

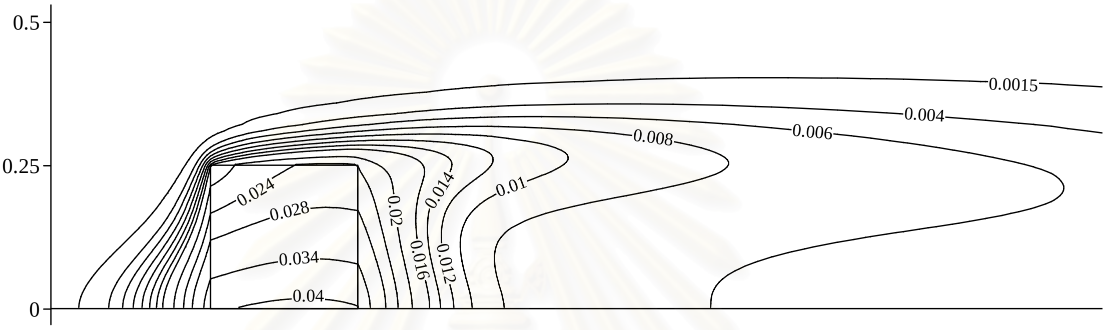
จากการกระจายตัวของอุณหภูมิที่กล่าวมาจะเห็นว่าสอดคล้องกับค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อดังแสดงในรูปที่ 5.12 โดยจะเห็นว่าเมื่ออัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าเพิ่มขึ้นทำให้นัสเซิลท์นัมเบอร์เพิ่มขึ้นตามไปด้วยนั่นคือสามารถถ่ายเทความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางได้มากขึ้นอุณหภูมิจึงมีค่าลดลง และเมื่อค่า K มีค่าตั้งแต่หนึ่งร้อยขึ้นไป ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง สำหรับกรณี $K = 1$ สิ่งกีดขวางจะประพฤติตัวเสมือนกับเป็นฉนวนกันความร้อนสำหรับการไหลของอากาศ กล่าวคือ ในกรณีนี้ค่าความต้านทานความร้อนมีค่ามากทำให้ความร้อนถ่ายเทจากของแข็งไปสู่ของไหลได้น้อย ดังนั้น การกระจายตัวของนัสเซิลท์นัมเบอร์จึงมีความแตกต่างออกไปจากกรณีอื่นๆ

ตารางที่ 5.2 ค่าอุณหภูมิไร้มิติสูงสุดกรณี $K = 1, 10, 100$ และ 1000

K	1	10	100	1000
θ	0.1518	0.0415	0.0249	0.0208

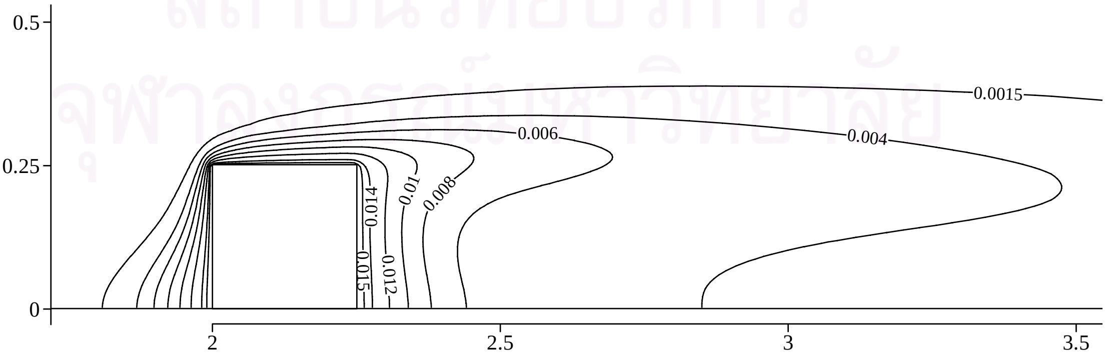


ก) $K = 1$



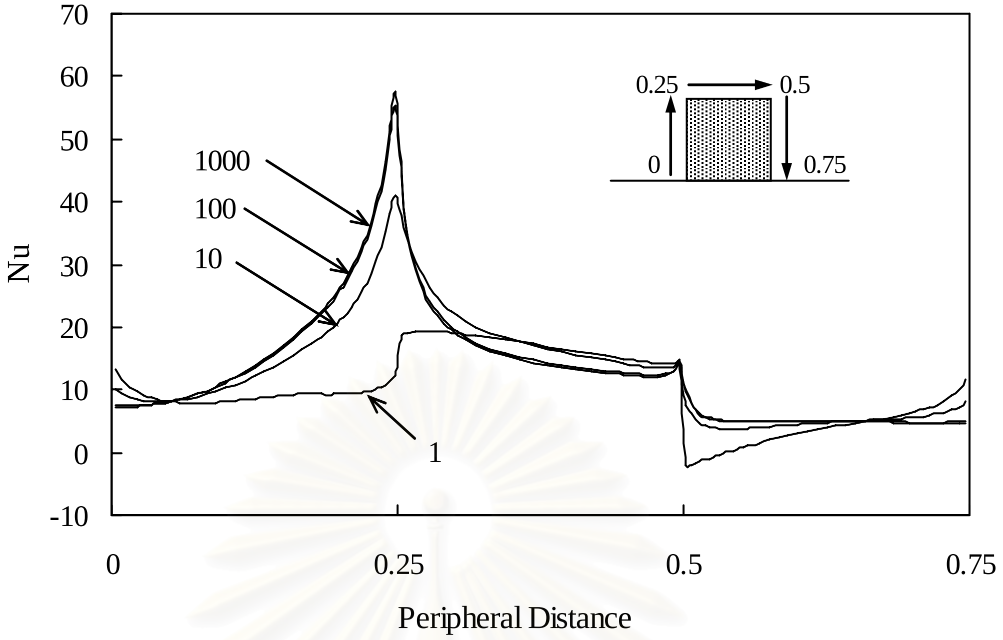
ข) $K = 10$

ค) $K = 100$



ง) $K = 1000$

รูปที่ 5.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ค่า K ต่างๆกัน

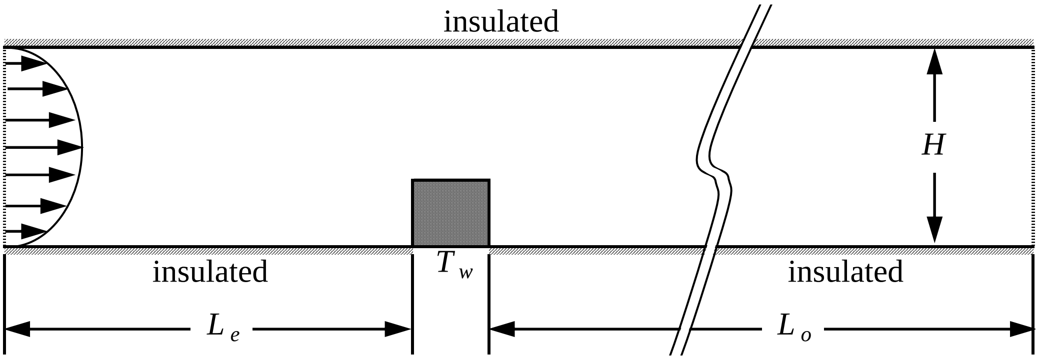


รูปที่ 5.12 ผลของอัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่อนัสเซิลท์นัมเบอร์ (ค่า K=1, 10, 100 และ 1000)

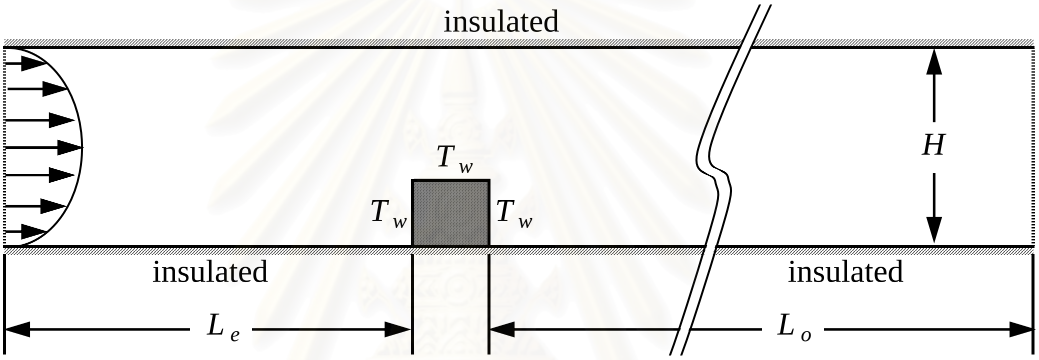
5.5 การเปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนที่มีและไม่มีผลของคอนจูเกต

ในส่วนนี้จะเป็นการพิจารณาความสำคัญของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ว่ามีความแตกต่างกับการพาความร้อนแบบทั่วไปที่ไม่คิดผลของคอนจูเกตอย่างไร โดยลักษณะของปัญหาที่พิจารณาจะเหมือนกับการวิเคราะห์ที่ผ่านมา ยกเว้นที่บริเวณผิวด้านล่างของสิ่งกีดขวางจะเปลี่ยนจากฟลักซ์ความร้อนคงที่เป็นค่าอุณภูมิคงที่ T_w สำหรับกรณีที่คิดผลของคอนจูเกตดังแสดงในรูปที่ 5.13 และสำหรับกรณีการถ่ายเทความร้อนแบบทั่วไปที่ไม่คิดผลของคอนจูเกตที่มีอุณหภูมิคงที่ตลอดผิวรอยต่อได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.14 อุณหภูมิไร้มิติสำหรับปัญหานี้คำนวณจากสมการ (5.4)

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e} \tag{5.4}$$

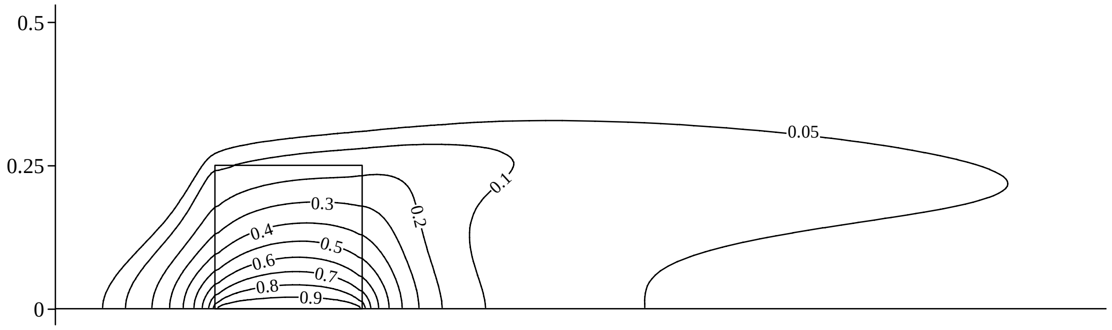


รูปที่ 5.13 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตกรณีสิ่งกีดขวางมีอุณหภูมิคงที่ผิวด้านล่าง (Not to scale)

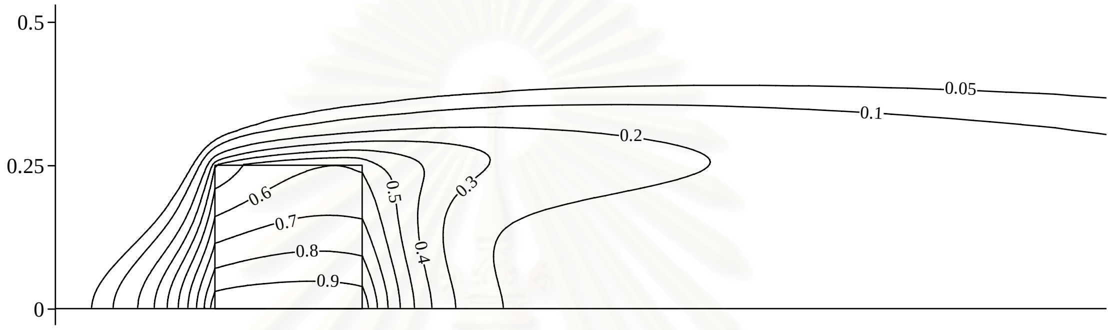


รูปที่ 5.14 ลักษณะของปัญหาการถ่ายเทความร้อนกรณีสิ่งกีดขวางมีอุณหภูมิคงที่ตลอดผิวรอยต่อ (Not to scale)

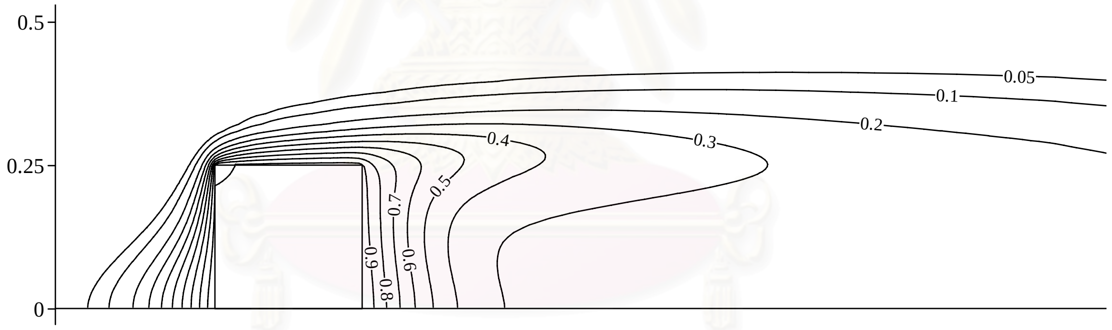
ผลการคำนวณในรูปของการกระจายตัวของอุณหภูมิได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.15 โดยในรูป 5.15ก-5.15ค สำหรับกรณีที่คิดผลของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่ค่า K=1, 10 และ 100 ตามลำดับ ส่วนในรูป 5.15ง สำหรับกรณีการพาความร้อนแบบทั่วไปที่ไม่คิดผลของคอนจูเกต จากรูปจะเห็นว่ากรณีการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจะมีลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่คล้ายกับหัวข้อก่อนหน้านี้ แต่ค่าอุณหภูมิจะต่างออกไปเนื่องจากเงื่อนไขขอบที่เปลี่ยนไปนั่นเอง เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่คิดผลของคอนจูเกตจะพบว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิในสนามการไหลของกรณี K=1และ 10 มีความแตกต่างออกไปอย่างชัดเจน แต่การกระจายตัวของอุณหภูมิจะมีลักษณะใกล้เคียงกันเมื่อเปรียบเทียบระหว่างรูป 5.15ค และ 5.15ง เมื่อพิจารณานัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อดังแสดงในรูปที่ 5.16 ก็จะพบว่ามีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันคือ กรณี K=1และ 10 นัสเซิลท์นัมเบอร์จะมีความแตกต่างกับกรณีการพาความร้อนอย่างเห็นได้ชัด และเมื่อ K เพิ่มขึ้นเป็น 100 จะเห็นว่านัสเซิลท์นัมเบอร์แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย



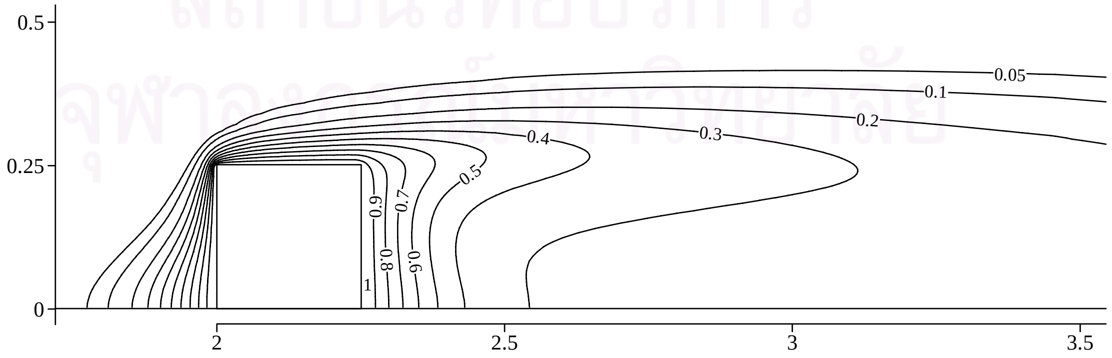
ก) $K = 1$



ข) $K = 10$

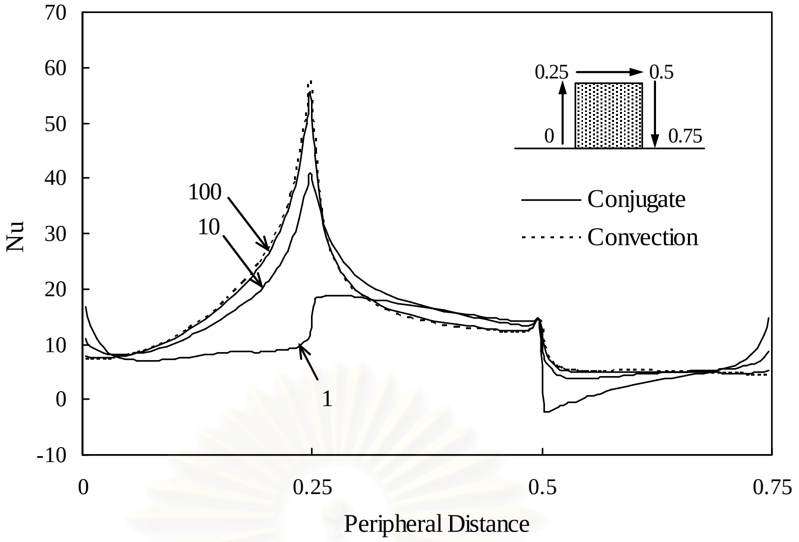


ค) $K = 100$



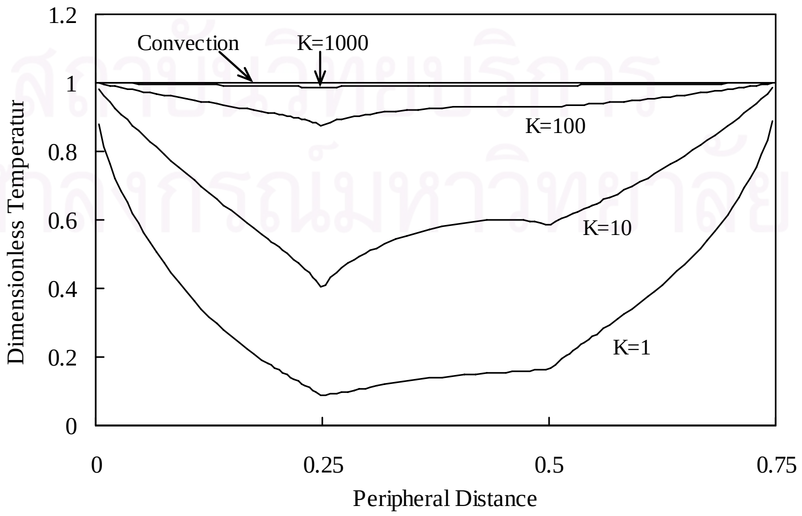
ง) กรณีที่ไม่คิดผลของคอนจูเกต

รูปที่ 5.15 การกระจายตัวของอุณหภูมิกรณีผิวของสิ่งกีดขวางมีค่าคงที่



รูปที่ 5.16 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ผิวรอยต่อเปรียบเทียบกับกรณีการพาความร้อน

พิจารณารูปที่ 5.17 จะเห็นว่าค่าอุณหภูมิไร้มิติที่ผิวรอยต่อจะเพิ่มสูงขึ้นเมื่อ K มีค่ามากขึ้น โดยมีแนวโน้มที่จะขยับเข้าไปใกล้ค่าอุณหภูมิคงที่ $\theta = 1$ ของกรณีการพาความร้อน และลักษณะของเส้นกราฟก็จะมีความชันลดลงด้วย เมื่อพิจารณาเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดของอุณหภูมิที่ค่า K ต่างๆ เปรียบเทียบกับกรณีการพาความร้อนดังแสดงในตารางที่ 5.3 จะเห็นว่ากรณีที่ K มีค่าน้อย อุณหภูมิที่ผิวรอยต่อจะมีความแตกต่างกับกรณีการพาความร้อนอย่างชัดเจน โดยกรณี $K = 1$ จะแตกต่างมากถึง 91.14% และความแตกต่างนี้ก็จะลดลงไปตามค่า K ที่สูงขึ้น จนเมื่อ $K = 100$ ก็จะพบว่ามีความแตกต่างสูงสุดของอุณหภูมิเพียง 12.36% และในกรณี $K = 1000$ เปอร์ความแตกต่างมีค่าน้อยมากเพียง 1.34%



รูปที่ 5.17 อุณหภูมิไร้มิติที่ผิวรอยต่อที่ค่า K ต่างๆกันเปรียบเทียบกับกรณีการพาความร้อน

ตารางที่ 5.3 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสูงสุดของอุณหภูมิไร้มิติที่ผิวรอยต่อกรณี $K = 1, 10, 100$ และ 1000 เปรียบเทียบกับกรณีการพาความร้อนที่ไม่คิดผลของคอนจูเกต

K	1	10	100	1000
% ความแตกต่างสูงสุด	91.14	59.43	12.36	1.34

จะเห็นได้ว่าการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจะมีบทบาทสำคัญมากในกรณีที่ K มีค่าน้อยๆ โดยกรณีที่ $K > 100$ ค่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อจะมีค่าค่อนข้างคงที่ทำให้สามารถสมมติได้ว่าเป็นการพาความร้อนแบบทั่วไปโดยไม่ทำให้ผลการคำนวณคลาดเคลื่อนไปมากนัก

5.6 สรุป

ในบทนี้ได้นำโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาวิเคราะห์ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมที่ได้รับความร้อนจากผิวด้านล่างของช่องการไหล โดยศึกษาถึงผลของเรย์โนลด์นัมเบอร์ นัสเซิลท์นัมเบอร์ และอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนว่ามีผลกระทบต่อการไหลและการถ่ายเทความร้อนอย่างไร ซึ่งจากการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ดังนี้

1) เมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์เพิ่มสูงขึ้นนัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย
2) เมื่อพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเพิ่มขึ้นชั้นขอบเขตความร้อนจะบางลง ของไหลสามารถดึงความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางได้เพิ่มขึ้นเป็นผลให้อุณหภูมิมีค่าต่ำลง
3) อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนจะมีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเมื่อ $K < 100$ โดยถ้ามีค่าเกินไปจากนี้การนำความร้อนในส่วนของแข็งจะไม่มีผล (เกรเดียนท์อุณหภูมิภายในของแข็งมีค่าเป็นศูนย์)

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าอัตราการถ่ายเทความร้อนมีความสัมพันธ์โดยตรงกับตัวแปรทั้งสาม กล่าวคือ เมื่อตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้อัตราการถ่ายเทความร้อนเพิ่มขึ้นตามไปด้วยนั่นเอง

บทที่ 6
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

งานวิทยานิพนธ์นี้แสดงการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตซึ่งเป็นปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่พิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมภายใต้สมมติฐานที่เป็นการไหลแบบราบเรียบ อัดตัวไม่ได้ ที่สภาวะคงตัวในสองมิติ และคุณสมบัติของของไหลมีค่าคงที่ ซึ่งจากผลการคำนวณจะเห็นได้ว่า โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้เป็นที่น่าพอใจ

สำหรับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ต้องเริ่มต้นจากสมการพื้นฐานที่เป็นตัวกำกับกระบวนการและลักษณะทางกายภาพของปัญหา โดยวิธีการได้มาของสมการเหล่านี้ได้อธิบายไว้ในบทที่ 2 โดยสมการดังกล่าวประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม ทั้งในแนวแกน x และในแนวแกน y ที่รวมผลของแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิ และสุดท้าย คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน โดยในตอนท้ายของบทได้จัดรูปสมการพื้นฐานดังกล่าวให้อยู่ในรูปทั่วไป ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ดังที่ได้แสดงรายละเอียดและวิธีการไว้ในบทที่ 3 ซึ่งเริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาที่พิจารณาออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยๆ โดยใช้กริดแบบเยื้อง ต่อจากนั้น ทำการดิสครีไทซ์สมการพื้นฐานให้เป็นสมการพีชคณิตอย่างง่าย ร่วมกับการประมาณค่าที่ผิวรอยต่อและการประยุกต์เงื่อนไขขอบ และสุดท้ายได้อธิบายกระบวนการหาผลเฉลยด้วยวิธี TDMA ร่วมกับเทคนิควิธีทำซ้ำและขั้นตอนวิธี SIMPLE เพื่อให้แน่ใจว่าผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้อง ไม่ผิดไปจากลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์วอลุมที่พัฒนาขึ้นจากระเบียบวิธีในบทที่ 3 จะถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ โดยแบ่งการตรวจสอบออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนของสนามการไหล ส่วนของการถ่ายเทความร้อน และส่วนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยปัญหาที่นำมาเป็นกรณีศึกษามีดังนี้

1) ปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหล

2) ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะ

3) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิด

4) ปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหล

5) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระที่มีผนังนำความร้อน

6) ปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหลที่มีผนังนำความร้อน

จากการเปรียบเทียบพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถให้ผลการคำนวณที่สอดคล้องกับผลงานวิจัยก่อนหน้านี้เป็นอย่างดี ดังที่ได้แสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 4

ในบทที่ 5 ได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตรวจสอบความถูกต้องแล้วมาวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของปัญหาการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมที่ได้รับความร้อนที่ผิวด้านล่าง โดยวิเคราะห์ถึงผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลและการถ่ายเทความร้อน ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1) กรณีที่เรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น ระยะการหมุนวนบริเวณด้านหลังสิ่งกีดขวางจะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย และอัตราการถ่ายเทความร้อนที่อยู่ในรูปของนัสเซิลท์นัมเบอร์ก็จะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเช่นกัน

2) เมื่อพรันด์เทิลนัมเบอร์มีค่าเพิ่มขึ้น ชั้นขอบเขตความร้อนจะบางลง ของไหลจะสามารถดึงความร้อนออกจากสิ่งกีดขวางได้เพิ่มขึ้น เป็นผลให้อุณหภูมิในสิ่งกีดขวางมีค่าลดต่ำลง

3) อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนจะมีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตเมื่อ K มีค่าน้อยๆ โดยถ้า $K > 100$ การนำความร้อนในส่วนของแข็งจะไม่มีผล เนื่องมาจากเกรเดียนท์อุณหภูมิภายในของแข็งมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สามารถสมมติได้ว่าอุณหภูมิที่ผิวรอยต่อมีค่าคงที่

จากทั้งหมดที่ได้กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า วิทยานิพนธ์นี้ได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต การถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหลถูกเชื่อมโยงโดยใช้ฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากปริมาตรควบคุมในของแข็งที่ผิวรอยต่อ ซึ่งฟลักซ์ดังกล่าวถูกนำไปคำนวณเป็น Source term ของสมการอนุรักษ์พลังงานโดยไม่ตัดความเชื่อมโยงของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน ผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นอยู่ในระดับเป็นที่น่าพอใจ

6.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยต่อไป

แม้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นจะสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยให้ผลการคำนวณเป็นที่น่าพอใจก็ตาม แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอีกหลายๆอย่างที่ควรพัฒนาต่อไปเพื่อให้โปรแกรมมีประสิทธิภาพมากขึ้นดังนี้

1) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะการไหลแบบปั่นป่วนได้
2) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณการไหลในรูปร่างของปัญหาที่มีความซับซ้อนได้
3) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณการไหลในสภาวะชั่วขณะได้
4) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณการไหลในสามมิติได้
5) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่สามารถคำนวณการเปลี่ยนรูปเนื่องจากความเค้นในของแข็งได้
6) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณการไหลในหลายสถานะได้ (Multiphase flow)
7) พัฒนาโปรแกรมให้มีความสะดวกและง่ายต่อการใช้งานมากขึ้น

รายการอ้างอิง

Basak, T., Roy, S. and Balakrishnan, A.R., Effects of Thermal Boundary Conditions on Natural Convection Flows within a Square Cavity. International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006): 4525-4535.

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1959.

Carvalho, M.G., Durst, F., and Pereira, J.C.F., Predictions and Measurements of Laminar Flow Over Two-Dimensional Obstacle. Applied Mathematical Modelling 11 (1987): 23-34.

Cess, R.D. and Shaffer E.C., Summary of Laminar Heat Transfer Between Paralell Plates with Unsymmetrical Wall Tempertures. Journal of Aero Space Sciences (1959): 26-538. (cited in Young and Vafai (1998))

Chen, X. and Han, P., A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems using SIMPLE-like Algorithms. International Journal of Heat and Fluid Flow, 21 (2001): 463-467.

Chiu, W.K.S., Richards, C.J. and Jaluria Y., Experimental and Numerical Study of Conjugate Heat Transfer in a Horizontal Channel Heated From Below. Journal of Heat Transfer 123 (2001): 688-697.

Choi, C.Y. and Kim, S.J., Conjugate Mixed Convection in a Channel : Modified Five Percent Deviation Rule. International Journal of Heat and Mass Transfer 39 (1996): 1223-1234.

Divo, E. and Kassab, A. J., An Efficient Localized Radial Basis Function Meshless Method for Fluid Flow and Conjugate Heat Transfer. Journal of Heat Transfer 129 (2007): 124-136.

Heinrich, J.C., Huyakorn P.S., Zienkiewicz, O.C. and Mitchell, A.R. An Upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation. International Journal of Numerical Methods in Engineering 12 (1977): 131-143.

Hribersek, M., and Kuhn, G., Conjugate Heat Transfer by Boundary-Domain Integral Method. Engineering Analysis with Boundary Elements 24 (2000): 297-305.

Jahangeer, S., Ramis M.K., and Jilani, G., Conjugate Heat Transfer Analysis of a Heat Generating Vertical Plate. International Journal of Heat and Mass Transfer 50 (2007): 85-93.

Kanna, P.R. and Das, M.K., Conjugate Heat Transfer Study of Backward-Facing Step Flow – A Benchmark Problem. International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006): 3929-3941.

Liaqat, A., and Baytas A. C., Numerical Comparison of Conjugate and Non-Conjugate Natural Convection for Internally Heated Semi-Circular Pools. International Journal of Heat and Fluid Flow 22 (2001): 650-656

Limtrakarn, W., Finite Element Method for High-Speed Flow-Structure Interaction. Thesis for the Doctor Degree, Department of Mechanical Engineering, Chulalongkorn University, Bangkok, 2002.

Luikov, A.V., Conjugate Convective Heat Transfer Problems. International Journal of Heat and Mass Transfer 17 (1974): 257-265.

Malatip, A., Finite Element Method for Analysis of Conjugate Heat Transfer. Thesis for the Master Degree, Department of Mechanical Engineering, Chulalongkorn University, Bangkok, 2004.

Melaaen, M.C., Analysis of Curvilinear Non-Orthogonal Coordinates for Numerical Calculation of Fluid Flow in Complex Geometries. Thesis for the Doctor Degree, Division of Thermodynamics, University of Trondheim, 1990.

Mobedi, M. and Sunden, B., Natural Convection Heat Transfer from a Thermal Heat Source Located in a Vertical Plate Fin. International Journal of Heat and Mass Transfer 33 (2006): 943-950.

Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

Payvar, P., Convective Heat Transfer to Laminar Flow over a Plate of Finite Thickness. International Journal of Heat and Mass Transfer 20 (1977): 431-433.

Pozzi, A. and Lupo, M., The Coupling of Conduction with Forced Convection Over Flat Plate. International Journal of Heat and Mass Transfer 32 (1989): 1207-1214.

Pratumwal, Y., Finite Volume Method for Analysis of Conjugate Heat Transfer. Thesis for the Master Degree, Department of Mechanical Engineering, Chulalongkorn University, Bangkok, 2002.

Rizk, T.A., Kleinstreuer, C. and Ozisik, M.N., Analytic Solution to the Conjugate Heat Transfer Problem for Flow past a Heated Block. International Journal of Heat and Mass Transfer 35 (1992): 1519-1525.

Tropea, C.D., and Gackstatter, R., The Flow Over Two-Dimensional Surface-Mounted Obstacles at Low Reynolds Numbers. Journal of Fluids Engineering 107 (1985): 489-494.

Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., An Introduction to Computation Fluid Dynamics : The Finite Volume Method. Longman Scientific & Technical, London, 1995.

Vynnycky, M., Kimura, S., Kanav, K. and Pop, I., Forced Convection Heat Transfer from a Flat Plate : the Conjugate Problem. International Journal of Heat and Mass Transfer 41 (1998): 45-59

Wang, J., Wang, M. and Li, Z., A Lattice Boltzmann Algorithm for Fluid-Solid Conjugate Heat Transfer. International Journal of Thermal Sciences 46 (2007): 228-234.

Young, T.J. and Vafai, K., Convective Cooling of a Heated Obstacle in a Channel. International Journal of Heat and Mass Transfer 41 (1997): 3131-3148.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายจิรายุส สมจินดา เกิดเมื่อวันที่ 14 เดือนตุลาคม พุทธศักราช 2525 จังหวัดราชบุรี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เมื่อปีการศึกษา 2548 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2548