การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ

นายชัยนรินทร์ แปนนอก

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-14-2749-2

BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE RECTANGULAR AND SKEW PLATES WITH VARIOUS EDGE SUPPORT CONDITIONS

Mr. Chainarin Pannok

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006
ISBN 974-14-2749-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ
โดย	นายชัยนรินทร์ แปนนอก
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิทยา ยงเจริญ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีวัฒน์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธัญญารัตน์ สิงหนาท)

ชัยนรินทร์ แปนนอก : การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ (BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE RECTANGULAR AND SKEW PLATES WITH VARIOUS EDGE SUPPORT CONDITIONS) อ.ที่ปรึกษา : ผศ. ดร.ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ, 93 หน้า ISBN 974-14-2749-2

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้ในการศึกษานี้อยู่ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค เงื่อนไขขอบเขตของชิ้นงานที่ศึกษาเป็นแบบ CCCC, CCCF, SCSF, CFCF, CSSC, SSCC, CFSC และ SCSC ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอมีความแม่นยำกว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพียงอย่างเดียว การศึกษานี้ได้ประยุกต์ใช้กับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยการแปลงโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งอยู่ในพิกัด x-y ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในพิกัด ξ-η เมื่อเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอสำหรับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ได้กับผลของงานวิจัยในอดีตสำหรับกรณีการจับยึดแบบ CCCC พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันทุกกรณี ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่เสนอไม่เหมาะที่จะใช้กับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายหรือแบบอิสระ เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวไม่ได้มีเงื่อนไขขอบเขตที่ตรงกับเงื่อนไขทั้งสองอย่างสมบูรณ์ วิทยานิพนธ์นี้ยังได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นคอมโพสิตบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน ขนาดสัดส่วนของภาระดึงตามขวาง องศาการวางตัวของเส้นใย และมุมเอียงของแผ่นบางแบบต่าง ๆ โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCC จากการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อขนาดของภาระดึงตามขวางและมุมเอียงของแผ่นบางมีค่าเพิ่มขึ้น การศึกษานี้ยังได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอของชิ้นงานหลาย ๆ แบบอีกด้วย

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต ชัยนรินทร์ แปนนอก

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ

ปีการศึกษา 2549

4770571221 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD : BUCKLING/ COMPOSITE / SKEW PLATE / RITZ METHOD

CHAINARIN PANNOK : BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE RECTANGULAR AND SKEW PLATES WITH VARIOUS EDGE SUPPORT CONDITIONS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. PAIROD SINGHATANADGID, Ph.D. 93 pp. ISBN 974-14-2749-2

This thesis investigates the buckling behavior of rectangular and skew thin composite plates using the Ritz method with the proposed out-of-plane displacement functions, determined by solving the buckling problem using Kantorovich method. The out-of-plane displacement functions used in this study are in form of summation of trigonometric and hyperbolic functions. The boundary conditions of the specimen considered in this study are CCCC, CCCF, SCSF, CFCF, CSSC, SSCC, CFSC and SCSC. The buckling loads of rectangular plates determined from this study show a higher accuracy are more accurate than those of using only trigonometric function as the out-of-plane displacement functions. In this study, the proposed method was also applied to skew plates by transforming the skew plate in x-y coordinate to the square plate in ξ-η coordinate. Comparing with past studies, the obtained bucking loads are very close to those of the past studies in case of skew plates with CCCC boundary condition. The proposed displacement function is not suitable for skew specimens with either simple support or free support because the function does not completely satisfy both boundary conditions. In addition, this thesis presents the bucking loads and bucking modes of thin composite plates with a variety of aspect ratios, load ratios, stacking sequences, and skew angles. The composite specimens used in this study are rectangular plates with various combination of boundary conditions and skew plates with CCCC boundary condition. The study shows that the buckling load is increased when the transverse tension and skew angle is increased. Buckling loads and modes of various specimens are also presented.

Department Mechanical Engineering Student's signature...Chainarin Pannok

Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature...Pairod Singhatanadgid

Academic year 2006

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความช่วยเหลือในทุกๆ ด้านจากท่านอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ของผู้วิจัย “ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ ” ซึ่งได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ และคำแนะนำต่างๆ ที่เป็นประโยชน์อย่างสูงด้วยความเมตตา ทั้งในการศึกษาและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิทยา ยงเจริญ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีวัฒน์ และ อาจารย์ ดร.ธัญญารัตน์ สิงหนาท กรรมการ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการดำเนินงานวิจัยซึ่งนับเป็นประโยชน์สำคัญยิ่งที่ทำให้งานวิทยานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอบคุณเพื่อน พี่ และน้องนิสิตทั้งระดับปริญญาตรี ปริญญาโท และปริญญาเอกหลายท่านที่ได้ให้คำปรึกษา ช่วยเหลือ และให้กำลังใจตลอดระยะเวลาการทำวิทยานิพนธ์

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา น้องชายและญาติของผู้วิจัยที่ได้ให้การเลี้ยงดูทั้งกายและใจ คอยดูแล พร้อมทั้งให้การสนับสนุนในด้านต่างๆ มาโดยตลอด ทำให้ผู้วิจัยมีแรงใจในการทำงานและไม่ย่อท้อต่ออุปสรรคที่เกิดขึ้น ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..จ
กิตติกรรมประกาศ..ฉ
สารบัญ...ช
สารบัญตาราง...ฌ
สารบัญภาพ..ฎ
คำอธิบายสัญลักษณ์...ฐ
บทที่ 1 บทนำ...1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์...1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์...2
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์...2
1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์..3
บทที่ 2 ปริทัศน์วรรณกรรม..5
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า.....5
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช...........8
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน..9
บทที่ 3 ปัญหาโก่งงอของวัสดุคอมโพสิต...14
3.1 พื้นฐานของวัสดุคอมโพสิต..14
3.2 ทฤษฎีพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบาง...16
3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับความเครียดและค่าความโค้ง.......20
3.4 การโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง............................21
บทที่ 4 การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตโดยวิธีเชิงตัวเลข.................26
4.1 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์...26
4.2 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช.................................30
4.3 ตัวอย่างการหาค่าภาระการโก่งงอ..35
4.3.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช..................36
4.3.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์..........................40

หน้า

บทที่ 5 การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า.......43
5.1 รายละเอียดของแผ่นคอมโพสิตบางที่ศึกษา...43
5.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการโก่งง.. 45
5.2.1 การโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่าย....45
5.2.2 การโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบผสม..47
5.3 พฤติกรรมการโก่งงอแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ..........53
5.3.1 ผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ.......55
5.3.2 ผลกระทบของภาระดึงตามขวางที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ......59
5.3.3 ผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ...62
บทที่ 6 การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน..66
6.1 การโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน... 66
6.2 การแปลงแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส....67
6.3 ข้อจำกัดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ....72
6.4 พฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น 81
6.4.1 ผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ.......81
6.4.2 ผลกระทบของมุมเอียงของแผ่นคอมโพสิตที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ.....82
6.4.3 ผลกระทบของภาระดึงตามขวาง (S_y) ที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ.....84
6.4.4 ผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ...85
บทที่ 7 บทสรุป....... 89
7.1 บทสรุป....... 89
7.2 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต........ 92
รายการอ้างอิง...94
ภาคผนวก....96
ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์....97
ภาคผนวก ข ค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช...125
ภาคผนวก ค บทความที่ได้รับการตีพิมพ์....130
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์....138

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4-1 คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตกราไฟต์ – อีพอกซี ที่ใช้ในการศึกษา……......... 35
ตารางที่ 4-2 ค่าภาระการโก่งงอ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ และโหมดการโก่งงอ
ที่ได้จากวิธีแคนโทโรวิช…………………………………………………. 38
ตารางที่ 5-1 ค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอจากการศึกษาของ Tuttle et al. [5]
เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น………………………...48
ตารางที่ 5-2 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [3,7]
กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ กรณีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ…...........54
ตารางที่ 5-3 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [7]
กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ…………..54
ตารางที่ 5-4 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน....55
ตารางที่ 5-5 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSCS และ SCSF
ที่มีสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน…………………………………………….. 56
ตารางที่ 5-6 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ SSCC และ CCCF
ที่มีสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน..57
ตารางที่ 5-7 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง $[45]_8$ ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน..........59
ตารางที่ 5-8 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ SSCC และ SCSF
ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน……..60
ตารางที่ 5-9 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CFSC
ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน………………………………………………....61
ตารางที่ 5-10 ค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$
สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับหนึ่ง...63
ตารางที่ 5-11 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CCCF
ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ…………………………………………64
ตารางที่ 5-12 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CFSC และ CCCC
ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ…………………………………………65
ตารางที่ 6-1 ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยของแผ่นบางที่มีมุมเอียงขนาดต่างๆ....................74
ตารางที่ 6-2 ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยจากการศึกษาของ Wang [12] เทียบกับค่าจาก
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สำหรับกรณีการจับยึดแบบ CCCC……....77

หน้า

ตารางที่ 6-3 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่แสดงในตารางที่ 6-2…………………………………………………....77
ตารางที่ 6-4 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีมุม $\alpha = 45^{\circ}$ และมีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน……………………………………………...82
ตารางที่ 6-5 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีมุมเอียงแตกต่างกัน………………….. 83
ตารางที่ 6-6 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน………………..86
ตารางที่ 6-7 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน…….... 87
ตารางที่ 6-8 ค่าภาระการโก่งงอและเส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิต ที่มีมุมเอียง 45° และมีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ…………………………..88

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 3.1 ภาพหน้าตัดขวางแสดงส่วนประกอบของแผ่นคอมโพสิต……………………………14
รูปที่ 3.2 การเรียงตัวของชั้นลามินาซึ่งทำมุม θ กับแกน x………………………………..15
รูปที่ 3.3 ระบบพิกัดของแผ่นลามิเนตบาง……………………………………….............17
รูปที่ 3.4 ส่วนตัดแผ่นลามิเนตบางเมื่อเกิดการโก่งงอในระนาบ $x-z$ ………………………18
รูปที่ 3.5 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบาง……………………..………....21
รูปที่ 3.6 แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแผ่นบางในแกนต่าง ๆ………………………………22
รูปที่ 4.1 รูปร่างโหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ ที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช……….........34
รูปที่ 4.2 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบาง
ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCF…………………………………………….. 35
รูปที่ 4.3 การหารากของฟังก์ชัน $Y(y)_1$ จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น………………………..36
รูปที่ 4.4 รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นในทิศ x และทิศ y
จากฟังก์ชันที่ได้โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช…………………..……………....39
รูปที่ 4.5 รูปร่างโหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งของแผ่นคอมโพสิตบาง
กรณีการจับยึดแบบ CCCF ลำดับชั้นการวางตัวแบบ $[\pm 45]_{2S}$……………..........42
รูปที่ 5.1 เงื่อนไขขอบเขตทั้ง 8 กรณี และระบบแกนพิกัด
สำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า…………………………………. 44
รูปที่ 5.2 ขั้นตอนการหาค่าภาระการโก่งงอด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น………… 46
รูปที่ 5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์และค่าภาระการโก่งงอ
จากฟังก์ชันที่หาโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช…………………………………….. 49
รูปที่ 5.4 ตัวอย่างรูปร่างโหมดการโก่งงอจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น
ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ……………….......................... 49
รูปที่ 5.5 รูปร่างโหมดการโก่งงอกรณีการจับยึดแบบ CFCF……………………………..50
รูปที่ 5.6 ลักษณะโหมดการโก่งงอต่างๆ ของฟังก์ชันที่ได้จาก Chai [3] และแคนโทโรวิช
สำหรับกรณีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน……………………………….....52
รูปที่ 5.7 ค่าภาระการโก่งงอจากการใช้ฟังก์ชันของ Chai [3] และแคนโทโรวิช
ที่มีจำนวนพจน์ต่างๆ กัน…………………………………………………………..52
รูปที่ 5.8 ค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน…………………………58
รูปที่ 5.9 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าภาระการโก่งงอและองศาการวางตัวของเส้นใย
สำหรับกรณีการจับยึดแบบ CSSC CCCF CFSC และ CCCC………….......... 63

หน้า

รูปที่ 6.1 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน…………...67
รูปที่ 6.2 การแปลงแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส……..........68
รูปที่ 6.3 เงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในระบบพิกัด $\xi - \eta$ ……………71
รูปที่ 6.4 การลู่เข้าของค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตด้านขนานที่มีมุมเอียง 45° ……...73
รูปที่ 6.5 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์และค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วย
สำหรับแผ่นที่มีมุมเอียงเท่ากับ 45° ……………………………………………....75
รูปที่ 6.6 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15] (ก)
กับค่าที่ได้จากโปรแกรม (ข) กรณีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกัน…………… 79
รูปที่ 6.7 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15] (ก)
กับค่าที่ได้จากโปรแกรม (ข) กรณีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ……………….... 80
รูปที่ 6.8 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบาง $[\pm45]_{2S}$ ที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน……......82
รูปที่ 6.9 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบาง $[0/90]_{2S}$ ที่มีมุมเอียงของแผ่นต่างกัน……… 83

คำอธิบายสัญลักษณ์

a	คือ	ความยาวของโครงสร้างแผ่นในทิศทางแกน x
A_{ij}	คือ	Laminate extensional stiffness
b	คือ	ความกว้างของโครงสร้างแผ่นในทิศทางแกน y
B_{ij}	คือ	Laminate coupling stiffness
D_{ij}	คือ	Laminate bending stiffness
E	คือ	ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น
G	คือ	ค่าโมดูลัสเฉือน
h	คือ	ความหนาของแผ่นบาง
κ_x	คือ	ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ x-z
κ_y	คือ	ค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ y-z
κ_{xy}	คือ	ค่าความโค้งบิดของการโก่งตัวนอกระนาบของระนาบกึ่งกลาง
K_{cr}	คือ	ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วย
M_n	คือ	โมเมนต์ตลอดความยาวของขอบที่ยึดในแนวแกน n
M_{nt}	คือ	โมเมนต์ดัดตลอดความยาวของขอบที่ยึดบนระนาบ n-t
M_x	คือ	โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x
M_y	คือ	โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y
M_{xy}	คือ	โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือนบนระนาบ x-y
N_x	คือ	แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x
N_y	คือ	แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y
N_{xy}	คือ	แรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือนบนระนาบ x-y
N_x^{cr}	คือ	ค่าภาระการโก่งงอในระบบพิกัด x-y (kN/m)
P	คือ	อัตราส่วนระหว่างภาระในแนวแกน y และภาระในแนวแกน x (N_y / N_x)
Q_n	คือ	แรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดในแนวแกน n
Q_x	คือ	แรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดในแนวแกน x
$\left[\bar{Q}\right]$	คือ	Transformed reduced stiffness matrix
R	คือ	สัดส่วนของชิ้นงาน (a/b)
S_x	คือ	ค่าภาระการโก่งงอในระบบพิกัด $\xi-\eta$ (kN/m)
S_y	คือ	ภาระดึงหรือภาระกดในแนวแกน η
t	คือ	ความหนาของชั้นลามินา
u	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน x

U	คือ	พลังงานความเครียนในวัสดุยืดหยุ่น
v	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน y
V	คือ	พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากภาระในแนวระนาบ
w	คือ	การเคลื่อนที่ในแนวแกน z
$w(x,y)$	คือ	ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบบนระนาบ x-y
$w(\xi,\eta)$	คือ	ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบบนระนาบ $\xi-\eta$
$X(x)$	คือ	ฟังก์ชันของ x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$
$X(\xi)$	คือ	ฟังก์ชันของ ξ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\xi=0$ และ $\xi=1$
$Y(y)$	คือ	ฟังก์ชันของ y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$
$Y(\eta)$	คือ	ฟังก์ชันของ η ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\eta=0$ และ $\eta=1$
Π	คือ	ค่าพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นบนแผ่นบาง
α	คือ	มุมเอียงของแผ่นบางเทียบกันแกน x
γ_{xy}	คือ	ความเครียดเฉือนบนระนาบ x-y
ε_x	คือ	ความเครียดตั้งฉากในทิศ x
ε_y	คือ	ความเครียดตั้งฉากในทิศ y
θ	คือ	มุมการวางตัวของเส้นใยในแผ่นคอมโพสิตเทียบกันแกน x
ν_{12}	คือ	ค่าอัตราส่วนปัวร์ซอง
σ_x	คือ	ความเค้นในแนวแกน x
σ_y	คือ	ความเค้นในแนวแกน y
τ_{xy}	คือ	ความเค้นเฉือนบนระนาบ x-y

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

งานโครงสร้างทางวิศวกรรมในปัจจุบันหลายประเภทมีส่วนประกอบของโครงสร้างแผ่นบาง (Thin plate) ตัวอย่างเช่น ชิ้นส่วนประกอบของยานยนต์ เรือ หรือโครงสร้างในงานทางอากาศยาน ชิ้นส่วนดังกล่าวมักจะเกิดปัญหาความเสียหายเนื่องจากเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม ซึ่งรูปร่างที่เปลี่ยนแปลงไปอาจไม่ได้เกิดขึ้นเนื่องจากความเค้น (Stress) มีค่ามากกว่าคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่จะทนรับได้เพียงอย่างเดียว แต่อาจจะเกิดจากโครงสร้างเหล่านั้นไม่ได้อยู่ในสภาวะที่มีเสถียรภาพ (Stability) จึงส่งผลให้ชิ้นงานเกิดการโก่งงอ (Buckling) โดยภาระที่ทำให้เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างนี้เรียกว่าภาระโก่งงอ (Buckling load) หรือภาระวิกฤติ (Critical load)

การออกแบบงานทางด้านวิศวกรรมบางประเภทมีความจำเป็นที่จะต้องใช้วัสดุที่มีน้ำหนักเบาและมีความแข็งแรงมากมาใช้เป็นส่วนประกอบ ซึ่งวัสดุที่จะตอบสนองความต้องการดังกล่าวได้ก็คือ วัสดุคอมโพสิต (Composite material) [1] อย่างไรก็ตามการออกแบบวัสดุคอมโพสิตมีความซับซ้อน เนื่องจากคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตเป็นแบบแอนไอโซโทรปิค (Anisotropic) ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่าย (Simple support, S) ทั้งสี่ด้าน สามารถหาคำตอบได้จากผลเฉลยแม่นตรงในเอกสารอ้างอิง [1,2] แต่ในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานแบบยึดแน่น (Clamped support, C) หรือปล่อยอิสระ (Free edge, F) ร่วมอยู่ด้วยหรือมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ก็จะไม่สามารถที่จะหาค่าภาระการโก่งงอได้ในรูปผลเฉลยแม่นตรง แต่จะต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลขหรือวิธีการทดลองในการแก้ปัญหา แต่ทั้งวิธีการเชิงตัวเลขหรือวิธีการทดลองต่างก็มีข้อดีและข้อด้อยที่แตกต่างกัน โดยที่วิธีการทดลองมีข้อดีก็คือสามารถหาค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานจริงที่มีความไม่สมบูรณ์รวมอยู่ด้วย แต่ข้อด้อยก็คือถ้าต้องการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีขนาดใหญ่หรือเล็กมากๆ จะทำได้ยาก เนื่องจากจะต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงและใช้เวลามากในการเตรียมการทดลอง ส่วนข้อดีของวิธีการเชิงตัวเลขก็คือสามารถหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างที่ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงได้ แต่ข้อด้อยก็คือจะต้องหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ (Out-of-plane displacement) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าว และวิธีนี้อาจจะไม่สามารถจำลองพฤติกรรมของชิ้นงานได้อย่างสมบูรณ์

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ เพื่อนำไปสู่การศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ การหาค่าภาระการโก่งงอ และโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ในการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ ซึ่งรวมถึงค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบบลามิเนตสมมาตรที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน โดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับยึดที่ขอบเขตผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ นองจากนี้ยังจะศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน ภาระดึงตามแนวขวาง มุมเอียงของแผ่นบางและองศาการวางตัวของเส้นใย ที่มีต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้มีขอบเขตโดยสังเขปคือหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่โหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช (Kantorovich) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น แต่สามารถใช้แก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ โดยนำฟังก์ชันที่ได้มาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ (Ritz Method) เพื่อศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่นบาง ภาระดึงตามแนวขวาง และองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ภายใต้สมมุติฐานของแผ่นลามิเนตเป็นแผ่นลามิเนตบางและเป็นแบบแผ่นลามิเนตแบบสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมองศาใดๆ ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน (Aspect Ratio) ทั้งหมดห้าสัดส่วนคือ 1, 1.5, 2, 2.5 และ 3 ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับยึดชิ้นงานผสมกัน

ระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระทั้งหมดแปดแบบคือ CCCC, CCCF, SCSF, CFCF, CSSC, SSCC, CFSC และ SCSC

1.4 เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหา 7 บทและภาคผนวก 2 บท โดยมีลำดับเนื้อหาและรายละเอียดโดยสรุปได้ดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความสำคัญ ที่มาของปัญหา การประยุกต์ความรู้ในการศึกษาเพื่อศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ ขอบเขตและวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ เนื้อหาโดยรวมของวิทยานิพนธ์ ส่วนของงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้แสดงอยู่ในบทที่ 2 โดยแบ่งเป็นสามส่วนคือ ส่วนแรกเป็นงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนที่สองเป็นงานวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอโดยการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และในส่วนสุดท้ายเป็นงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ส่วนทฤษฎีพื้นฐานที่มีความสำคัญสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้รวมอยู่ในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยบทที่ 3 กล่าวถึงพื้นฐานเกี่ยวกับวัสดุคอมโพสิต ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นคอมโพสิตในระบบพิกัดรวม รวมถึงทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับแผ่นลามิเนตบาง สมการการเคลื่อนที่ในแกนต่างๆ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิตซึ่งจะนำไปใช้เพื่อหาสมการครอบคลุมเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าภาระการโก่งงอ และบทที่ 4 แสดงวิธีการและตัวอย่างการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแบบแผ่นลามิเนตแบบสมมาตรด้วยระเบียบวิธีริทซ์และระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

บทที่ 5 และบทที่ 6 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามลำดับ โดยบทที่ 5 เป็นการวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยเริ่มจากรายละเอียดของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ศึกษา การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีริทซ์และระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รวมถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน ภาระดึงตามแนวขวาง และองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ ในบทที่ 6 เป็นการวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การแก้ปัญหาการโก่งงอสำหรับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยการแปลงไปเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับ

แผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การศึกษาข้อจำกัดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำเสนอ รวมถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาผลกระทบของขนาดของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่นบาง ภาระดึงตามแนวขวาง และองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน

บทสุดท้ายคือบทที่ 7 เป็นการสรุปผลที่ได้จากการศึกษาทั้งหมดรวมถึงประโยชน์ที่ได้ และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต ส่วนภาคผนวกประกอบด้วยภาคผนวก ก ภาคผนวก ข และภาคผนวก ค โดยภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ส่วนภาคผนวก ข แสดงค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในทุกกรณีเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษา และภาคผนวก ค แสดงบทความที่ได้รับการตีพิมพ์ ซึ่งมีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 2

ปริทัศน์วรรณกรรม

วิทยานิพนธ์นี้มีส่วนเกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระในสามหัวข้อหลักคือ การแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า การหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และการแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ โดยแบ่งงานวิจัยออกได้เป็นสามส่วนคือ ส่วนแรกเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยวิธีการต่างๆ ส่วนที่สองเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการหาค่าภาระการโก่งงอจากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และส่วนที่สามเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากอดีตที่ผ่านมามีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างกว้างขวาง วิธีการหาค่าภาระการโก่งงอสามารถทำได้โดยหลายวิธีได้แก่ วิธีการทดลอง (Experimental Method) วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) และวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) โดยแต่ละวิธีต่างก็มีข้อเด่นและข้อด้อยที่แตกต่างกัน การศึกษาหาค่าภาระการโก่งงอสำหรับปัญหาพื้นฐานเป็นการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการทดลองกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ภายใต้การจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน (SSSS) เนื่องจากการจับยึดแบบนี้สามารถทำนายค่าภาระการโก่งงอได้จากผลเฉลยแม่นตรง ต่อมาภายหลังก็มีการนำเสนอค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบอื่นๆ โดยเฉพาะการจับยึดแบบยึดแน่น

ผู้วิจัยได้ศึกษาเนื้อหาและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการศึกษานี้จากหนังสือของ Gibson [1] ซึ่งกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานของวัสดุคอมโพสิต ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในแต่ละชั้นของแผ่นคอมโพสิต ความสัมพันธ์ระหว่างภาระกระทำและโมเมนต์กับความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิต ปัญหาการโก่งงอ วิธีการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและโหมดของการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิต และหนังสือของ Iyengar [2] แสดงวิธีการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอ

และโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่เกิดจากภาระที่กระทำในแนวแกนเดียวและสองแกนจากผลเฉลยแม่นตรงและระเบียบวิธีริทซ์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ที่เป็นที่ยอมรับและถูกใช้อ้างอิงในงานวิจัยที่เกี่ยวกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางอย่างกว้างขวางจากอดีตจนถึงปัจจุบันสามารถรวบรวมโดยสรุปได้ตามลำดับดังนี้ เริ่มจากในปี 1994 Chai [3] นำเสนอผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยวิธีการเชิงตัวเลข โดยแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ ที่ความหนาของแผ่นแตกต่างกัน โดยพิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสามแบบคือเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน การจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน (CCCC) และการจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบง่ายอีกสองด้าน (CSCS) ในการศึกษานี้ใช้วิธีการเชิงตัวเลขที่เรียกว่าระเบียบวิธีริทซ์ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์และใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 144 พจน์ ซึ่งการศึกษานี้ได้แยกกรณีศึกษาตามลักษณะเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาแผ่นคอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำกับแผ่นคอมโพสิตทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ในส่วนนี้ได้นำค่าภาระการโก่งงอที่หาได้จากระเบียบวิธีริทซ์เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงเพื่อศึกษาว่าจำนวนชั้นของแผ่นคอมโพสิตมีผลต่อการหาค่าภาระการโก่งงอโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์อย่างไร โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตแบบไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ (Antisymetric angle-ply) ที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินาต่างกันสามแบบคือ 2 ชั้น 6 ชั้น และ 20 ชั้น และมีมุมการวางตัวของเส้นใยต่างกัน 18 มุม โดยเริ่มจาก $\theta = 0^{\circ}$ ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 5° ผลการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีริทซ์เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงมีค่าค่อนข้างต่างกันสำหรับแผ่นคอมโพสิตที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินา 2 ชั้น แต่ให้ค่าค่อนข้างตรงกันสำหรับแผ่นคอมโพสิตที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินา 6 ชั้น และ 20 ชั้น ทั้งแบบที่มีภาระกดกระทำกับแผ่นคอมโพสิตแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ในส่วนที่สองศึกษาแผ่นคอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบง่ายอีกสองด้าน โดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว โดยนำค่าภาระการโก่งงอที่หาได้จากระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันซายน์เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบและใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 144 พจน์ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการทดลองที่มีในอดีตของ Ashton และ Love [4] พบว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากทั้งสองวิธีอยู่ในช่วง - 0.21 ถึง + 0.15 เปอร์เซ็นต์

ในปี 1999 งานวิจัยของ Tuttle et al. [5] นำเสนอผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยวิธีการทดลอง โดยแผ่นบางที่ใช้ในการทดลองมีคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสี่แบบคือ $[0]_8$, $[0/90]_{2S}$, $[45]_8$ และ $[\pm45]_{2S}$ และสัดส่วนของชิ้นงานขนาดต่างๆ กันสามขนาดคือ 1, 1.5 และ 2 โดยทำการทดลองภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน และมีภาระที่กระทำกับแผ่นชิ้นงานมีลักษณะสองทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน การโก่งงอเกิดขึ้นเนื่องจากภาระกดที่กระทำในทิศทางแนวขวางในขณะที่ภาระดึงที่กระทำกับแผ่นชิ้นงานมีค่าคงที่และกระทำในแนวตั้ง จากนั้นเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างภาระกระทำในแนวระนาบและระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบเพื่อหาค่าภาระการโก่งงอ แล้วนำค่าภาระการโก่งงอและจำนวนโหมดการโก่งงอที่ได้จากการทดลองมาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอและจำนวนโหมดการโก่งงอจากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธี Galerkin ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการทดลองทั้งหมด 49 การทดลองกับค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขพบว่ามีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 1.61 เปอร์เซ็นต์ โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 15.4 เปอร์เซ็นต์ ส่วนการเปรียบเทียบโหมดการโก่งงอที่ได้จากการทดลองทั้งหมด 51 การทดลองพบว่ามีเพียงกรณีเดียวที่มีโหมดการโก่งงอไม่เท่ากัน ซึ่งสันนิษฐานว่า เป็นผลมาจากความไม่สมบูรณ์ทั้งจากแผ่นคอมโพสิต ภาระกระทำ และการจำลองเงื่อนไขขอบเขตในการทดลอง

ในปี 2004 งานวิจัยของ Darvizeh et al. [6] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธี Generalized differential quadrature rule (GDQR) โดยแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตต่างกันสองแบบคือแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตแบบไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ และแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตแบบสมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ (Symmetric angle-ply) โดยแยกกรณีศึกษาตามลักษณะเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตแบบไม่สมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำกับแผ่นคอมโพสิตทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ในส่วนนี้ได้นำค่าภาระการโก่งงอที่หาได้โดยการใช้วิธี GDQR เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่หาได้โดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์และที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันทั้งสามวิธี ในส่วนที่สองศึกษาแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตแบบสมมาตรและมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว ในส่วนนี้ได้นำค่าภาระการโก่งงอที่หา

ได้เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการศึกษาของ Chai [3] ที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ซึ่งใช้จำนวนพจน์สมการการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้ในการคำนวณเท่ากับ 144 พจน์ ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน

จากงานวิจัยที่มีในอดีตพบว่าการหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบในรูปของฟังก์ชันซายน์ สามารถหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ได้ แต่ใช้ได้กับแผ่นคอมโพสิตที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสามกรณีเท่านั้นคือ กรณีที่มีการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน กรณีที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน และกรณีที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบง่ายอีกสองด้าน แต่ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตมีด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วยหรือแบบอื่นๆ ไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้ด้วยวิธีการดังกล่าว และพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการทดลองมีค่าแตกต่างจากค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขอยู่บ้าง สิ่งที่ทำให้ค่าภาระการโก่งงอทั้งสองวิธีไม่ตรงกันเป็นผลจากความไม่สมบูรณ์ต่างๆ ในการทดลองทั้งความไม่สมบูรณ์ของชิ้นทดลอง ความไม่สมบูรณ์ของภาระกระทำรวมถึงความไม่สมบูรณ์ของเงื่อนไขขอบเขต

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

การหาค่าภาระการโก่งงอด้วยวิธีการเชิงตัวเลขจากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าเป็นวิธีที่ง่ายและสะดวกที่สุดแต่ยังมีข้อจำกัดคือไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากรณีที่เงื่อนไขขอบเขตมีด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วย ด้วยเหตุนี้จึงมีการนำวิธีการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้ในการหาค่าภาระการโก่งงอในกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบนอกเหนือจากกรณีการจับยึดที่มีการศึกษามาก่อนหน้านี้ทั้งสามกรณีจากงานวิจัยของ Chai [3]

ในปี 2006 งานวิจัยของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช โดยแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุคอมโพสิตที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระแตกต่างกันเจ็ดแบบคือ CCCC, CSCS, SSSF, SCSF, SCSC, CCCF และ CSSC ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC และ CSCS งานวิจัยดังกล่าวได้นำค่าภาระการโก่ง

งอที่หาได้เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันซายน์เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่และใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 144 พจน์จากงานวิจัยของ Chai [3] ผลการเปรียบเทียบพบว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากทั้งสองวิธีอยู่ในช่วง 0.55 ถึง 0.60 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนี้ได้นำผลการศึกษากรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSSF, SCSF และ SCSC ไปเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอจากวิธี Levy Solution [8] ผลการเปรียบเทียบพบว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากทั้งสองวิธีคือ 0.01 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนั้นการศึกษานี้ได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอสำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดสองแบบคือ CCCF และ CSSC

ผลจากการศึกษาของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] แสดงให้เห็นว่าการหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น แต่สามารถใช้ได้กับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ โดยค่าภาระการโก่งงอได้จากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเพียงพจน์เดียว

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในวิทยานิพนธ์นี้มีส่วนหนึ่งที่เป็นการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งในหัวข้อย่อยนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในปี 1971 Durvasula [9] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยวิธีการเชิงตัวเลข โดยแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิค (Isotropic) มีมุมเอียงของแผ่นทำมุมต่างกันสามมุมคือ 45° , 60° และ 75° และมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างกันทั้งหมดสี่สัดส่วนคือ 0.5, 1, 1.5 และ 2 พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว ในส่วนวิธีการเชิงตัวเลขใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชัน Double Fourier sine series เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดอย่างสมบูรณ์ กล่าวคือสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเฉพาะในส่วนของระยะการโก่งงอตลอดขอบการจับยึดจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ แต่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในส่วนของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นตลอดขอบการจับยึดที่จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ได้จากการศึกษานี้เป็นค่าโดยประมาณและไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ในการศึกษานี้ได้นำค่าภาระการโก่งงอ

ที่หาได้เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยของ Anderson [10] ที่นำเสนอในปี 1951 ผลการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากงานวิจัยของ Durvasula [9] ให้ค่าที่ต่ำกว่าค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยของ Anderson [10] ในทุกกรณีที่ศึกษา

หลังจากการนำเสนอผลการศึกษาของ Durvasula [9] มีงานวิจัยที่ศึกษาปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยเพิ่มเติมเงื่อนไขขอบเขตและคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น ในปี 1995 งานวิจัยของ Reddy et al. [11] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ที่ใช้จำนวนอิลิเมนต์ 16 อิลิเมนต์ในการคำนวณ โดยแผ่นบางที่ศึกษามีมุมเอียงของแผ่นทำมุมต่างกันสามมุมคือ 45°, 60° และ 75° และมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสองแบบคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำกับแผ่นบางทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ในการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านสามารถใช้ได้ทั้งโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยแยกกรณีศึกษาตามคุณสมบัติทางกลของวัสดุได้สองกรณีคือ กรณีแรกเป็นการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซทรอปิกเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการศึกษาของ Durvasula [9] และ Wang et al. [12] ผลการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมดและการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด แต่ค่าภาระการโก่งงอที่ได้ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันเฉพาะแผ่นบางที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 75° เท่านั้น แต่สำหรับแผ่นบางที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 45° และ 60° องศามีความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงอมาก โดยมีความแตกต่างมากที่สุดถึง 45 เปอร์เซ็นต์ในกรณีของแผ่นบางมีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 45° โดยที่ผู้เขียนได้ให้เหตุผลว่าสาเหตุที่ค่าภาระการโก่งงอมีเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างกันมากก็เนื่องจากการศึกษาของ Durvasula [9] เลือกใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอ กรณีที่สองศึกษาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบออโธทรอปิก พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสี่ด้านเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการศึกษาของ Kennedy [13] พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

ในปี 1997 งานวิจัยของ Wang et al. [12] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับ B-spline ฟังก์ชัน โดยแผ่นบางที่ศึกษามีมุมเอียงของแผ่นทำมุมต่างกันสามมุมคือ 45°, 60° และ 75° และมี

ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสองแบบคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ในการศึกษานี้สามารถแยกกรณีศึกษาตามคุณสมบัติทางกลของวัสดุได้สองกรณีคือ กรณีแรกศึกษาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซทรอปิกภายใต้ภาระกดทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนตั้งฉากกัน เมื่อเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Durvasula [9] และ Reddy et al. [11] พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมด แต่ค่าภาระการโก่งงอที่ได้ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันเฉพาะแผ่นบางที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 60° และ 75° เท่านั้น แต่สำหรับแผ่นบางที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 45° มีความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงออยู่มากถึง 17 เปอร์เซ็นต์เมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Reddy et al. [11] กรณีที่สองศึกษาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางของวัสดุคอมโพสิตที่มีการวางตัวของเส้นใยต่างกันสามแบบคือ แบบเส้นใยวางตัวทำมุม 45°, 60° และ 90° กับความยาวของแผ่นบางภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว สำหรับแผ่นบางที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านจะได้ค่าภาระการโก่งงอมีค่าใกล้เคียงค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Srinivasan และ Ramachandran [14] และการศึกษานี้ได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านด้วย

ในปี 2000 งานวิจัยของ Hu et al. [15] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยโปรแกรมไฟไนต์อิเลเมนต์ ABAQUS โดยแผ่นคอมโพสิตที่ศึกษาประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินาต่างกันสองแบบคือมีชั้นลามินา 8 ชั้น และ 40 ชั้น มีมุมเอียงของแผ่นทำมุมต่างกันสี่มุมคือ 50°, 60°, 70° และ 80° โดยมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสองแบบคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านโดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว ในการศึกษานี้สามารถแยกสิ่งที่ต้องการศึกษาได้เป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาว่าแผ่นคอมโพสิตที่มีจำนวนชั้นและมุมเอียงของแผ่นแตกต่างกันมีผลต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงออย่างไร และในส่วนที่สองศึกษาว่าลักษณะการวางตัวของเส้นใยในมุมองศาต่างๆ มีผลต่อค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงออย่างไร

ในส่วนแรกศึกษาแผ่นคอมโพสิตที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินาต่างกันสองแบบคือมีชั้นลามินา 8 ชั้น และ 40 ชั้น โดยมีการวางตัวของเส้นใยหกแบบคือ $[90/0]_{2S}$, $[\alpha/0]_{2S}$, $[90/45/0\text{-}45]_{S}$, $[90/0]_{10S}$, $[\alpha/0]_{10S}$ และ $[90/45/0\text{-}45]_{5S}$ ผลการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินามากจะมีค่ามากกว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่

ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินาน้อยกว่า ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่ามากเมื่อมุมเอียงของแผ่นคอมโพสิตมีค่าน้อย และสำหรับชิ้นงานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านจะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ในส่วนที่สองศึกษาแผ่นคอมโพสิตที่ประกอบด้วยจำนวนชั้นลามินาต่างกันสองแบบคือ 8 ชั้น และ 40 ชั้น และมีมุมการวางตัวของเส้นใยต่างกัน 19 มุมโดยเริ่มจาก $\theta = 0^\circ$ ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 5° และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ ผลจากการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอจะมีค่ามากเมื่อมุมเอียงของแผ่นคอมโพสิตมีค่าน้อยและมีค่ามากสุดเมื่อลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ โดยที่ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุมการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $0^\circ < \theta < 45^\circ$ และค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลดลงเมื่อมุมการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $45^\circ < \theta < 90^\circ$

ในปี 2002 งานวิจัยของ Karami et al. [16] นำเสนอผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้วิธี Differential quadrature (DQ) โดยแผ่นบางที่ศึกษามีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิคและมีมุมเอียงของแผ่นทำมุมต่างกันสามมุมคือ 45°, 60° และ 75° และมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสามแบบคือการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน การจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน และการจับยึดแบบง่ายสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบยึดแน่นอีกสองด้าน (SCSC) โดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว ในการศึกษานี้ได้นำค่าภาระการโก่งงอที่หาได้เปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยของ Wang et al. [12] ผลการศึกษาพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากงานวิจัยของ Karami et al. [16] มีค่าต่ำกว่าค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยของ Wang et al. [12] ทุกกรณี

จากงานวิจัยที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดจะเห็นว่าในส่วนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแสดงให้เห็นว่าการหาค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขมีข้อดีคือประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายในการดำเนินการศึกษาเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการทดลอง แต่วิธีการทดลองก็ยังมีความจำเป็นในการศึกษาหาค่าภาระการโก่งงอสำหรับชิ้นงานที่เกิดขึ้นจริงซึ่งรวมความไม่สมบูรณ์ของชิ้นงานอยู่ด้วย โดยเฉพาะในบางกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดมีความซับซ้อนไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลข เนื่องจากไม่มีฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าว ส่วนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแสดงให้เห็นว่าสามารถหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบได้ แต่ระเบียบวิธีนี้ใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีมุมการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น ส่วน

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแสดงให้เห็นถึงข้อจำกัดของการหาค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ฟังก์ชัน Double Fourier sine series เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวสามารถใช้ได้เฉพาะโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้นไม่สามารถใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านสามารถใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใช้ร่วมกับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้

ด้วยเหตุนี้วิทยานิพนธ์นี้จึงหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่โหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพิ่มเติมจากค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่มีอยู่เพียงพจน์เดียวจากงานวิจัยของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] โดยนำฟังก์ชันที่ได้มาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ เนื่องจากระเบียบวิธีนี้สามารถหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ได้ เพื่อนำไปสู่การศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่นบาง ภาระดึงตามแนวขวางและองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ ค่าภาระการโก่งงอ และโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนตามวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้

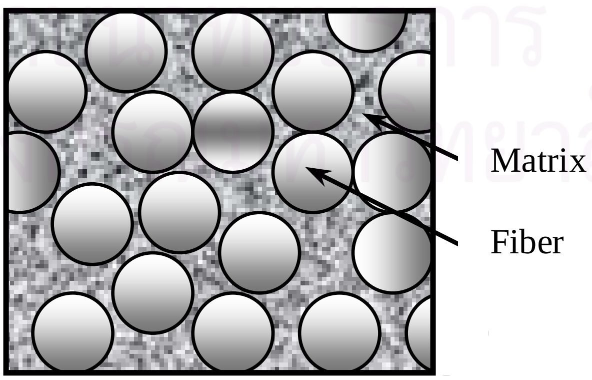
บทที่ 3

ปัญหาโก่งงอของวัสดุคอมโพสิต

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางภายใต้สมมุติฐานของแผ่นคอมโพสิตเป็นแผ่นลามิเนตบางและเป็นแบบแผ่นลามิเนตแบบสมมาตร ดังนั้นเนื้อหาของบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานของวัสดุคอมโพสิต ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นคอมโพสิตในระบบพิกัดรวม รวมถึงทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับแผ่นลามิเนตบาง สมการการเคลื่อนที่ในแกนต่าง ๆ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิตซึ่งจะนำไปใช้เพื่อหาสมการครอบคลุมเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าภาระการโก่งงอ

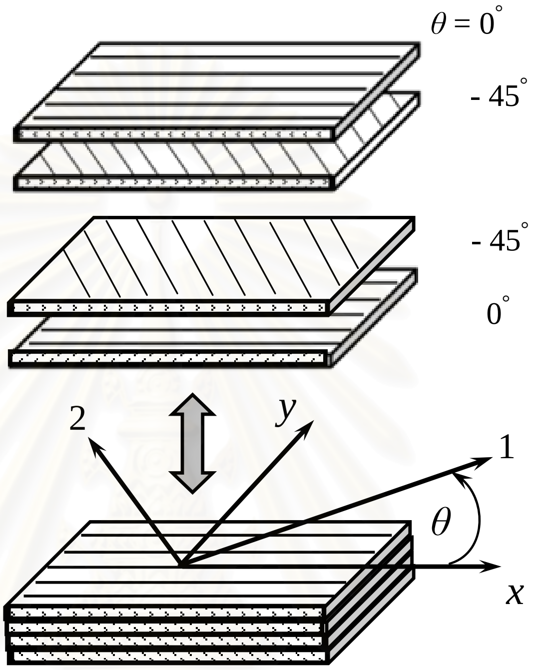
3.1 พื้นฐานของวัสดุคอมโพสิต

วัสดุคอมโพสิตประกอบด้วยการรวมกันของวัสดุสองส่วนคือ ส่วนของเส้นใย (Fiber) และส่วนของเมตริกซ์ (Matrix) โดยส่วนของเส้นใยทำหน้าที่รับภาระจากภายนอกที่มากระทำกับแผ่นคอมโพสิต ตัวอย่างของเส้นใยที่นิยมใช้ในวัสดุคอมโพสิตได้แก่ เส้นใยกราไฟต์ เส้นใยแก้ว และเส้นใยโพลิเมอร์เป็นต้น ส่วนเมตริกซ์เป็นตัวยึดเส้นใยเข้าด้วยกันและทำหน้าที่ถ่ายโอนภาระจากเส้นใยเส้นหนึ่งไปยังเส้นใยอื่นๆ ที่อยู่ใกล้เคียง ตัวอย่างเมตริกซ์ได้แก่ อีพอกซี่ (Epoxy) และเทอร์โมพลาสติก (Thermoplastics) ชนิดต่างๆ รูปที่ 3.1 แสดงส่วนประกอบของวัสดุคอมโพสิตซึ่งประกอบด้วยเส้นใยและเมตริกซ์



รูปที่ 3.1 ภาพหน้าตัดขวางแสดงส่วนประกอบของแผ่นคอมโพสิต

จากรูปที่ 3.1 วัสดุคอมโพสิตที่ประกอบด้วยเส้นใยไฟเบอร์ในทิศทางเดียวไม่สามารถรับภาระที่มีค่ามากๆ ในทิศทางตั้งฉากกับเส้นใยได้ ดังนั้นเพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้กับแผ่นคอมโพสิตจึงต้องมีการนำวัสดุคอมโพสิตแต่ละชั้นมาวางซ้อนกันให้เป็นแผ่นคอมโพสิตที่พร้อมใช้งานต่อไป รูปที่ 3.2 แสดงการเรียงตัวของชั้นลามินาต่าง ๆ ในแผ่นคอมโพสิตซึ่งมีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/-45]_S$



รูปที่ 3.2 การเรียงตัวของชั้นลามินาซึ่งทำมุม θ กับแกน x

เนื่องจากลามินาแต่ละชั้นมีการวางตัวของเส้นใยในมุมที่แตกต่างกัน ซึ่งทำให้การคำนวณหาค่าความเค้นและความเครียดที่จุดต่าง ๆ ของโครงสร้างแผ่นบางทำได้ยาก ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดพิกัดของแผ่นคอมโพสิตให้เป็นพิกัดรวม x-y ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นลามินาในระบบพิกัดรวมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}1)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned} \tag{3-2}$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างการวางตัวเส้นใยในแต่ละชั้นของแผ่นลามินาเทียบกับแกน x ในระบบพิกัดรวม

Q_{ij} เป็นคุณสมบัติของวัสดุ ซึ่งหาได้จาก

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} \\
Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{3-3}$$

โดยที่ E_1 คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศตามการวางตัวของเส้นใย

E_2 คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นในทิศตั้งฉากกับการวางตัวของเส้นใย

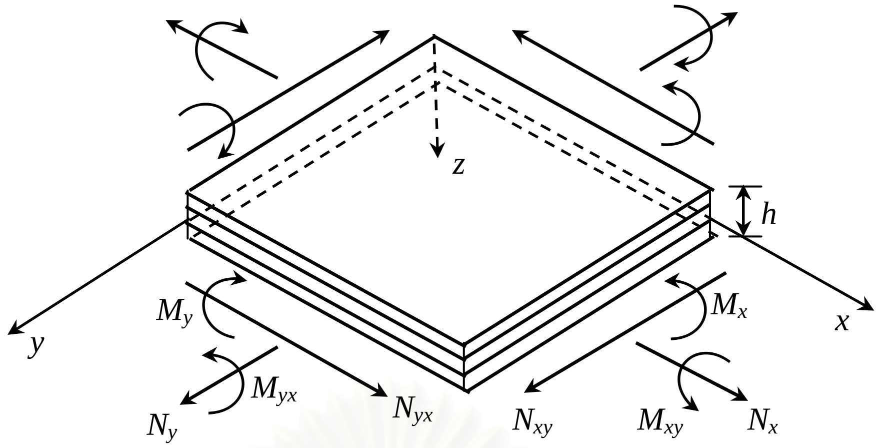
v_{12} และ v_{21} คืออัตราส่วนปัวร์ซอง

G_{12} คือค่าโมดูลัสเฉือน

คุณสมบัติของวัสดุทั้ง 4 ค่านี้ สามารถหาได้จากการทดสอบตามมาตรฐานที่มีอยู่

3.2 ทฤษฎีพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบาง

แผ่นลามิเนตบางที่จะศึกษามีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3.3 โดยแผ่นลามิเนตบางสามารถรับทั้งภาระตั้งฉาก ภาระเฉือน และโมเมนต์ได้ กำหนดให้การเคลื่อนที่ในทิศทาง x, y และ z เท่ากับ u, v และ w ตามลำดับ และมีระนาบ x-y เป็นระนาบในแนวราบที่อยู่กึ่งกลางความหนา h ซึ่งเรียกว่า ระนาบกึ่งกลาง (mid-plane)



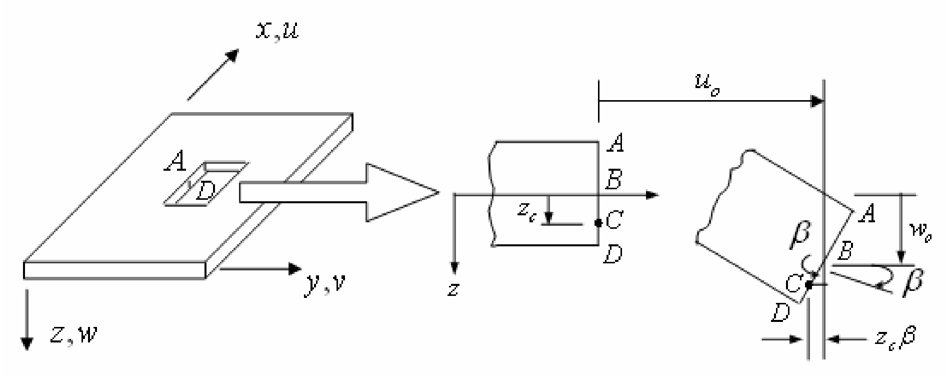
รูปที่ 3.3 ระบบพิกัดของแผ่นลามิเนตบาง

สมมติฐานเบื้องต้นที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างของแผ่นบางที่ทำจากวัสดุคอมโพสิตมีดังต่อไปนี้ [1, 2]

1. แผ่นวัสดุคอมโพสิตที่ศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้เป็นแผ่นวัสดุที่เกิดจากการนำวัสดุคอมโพสิตเส้นใยต่อเนื่องทิศทางเดียวมาเรียงกันเป็นชั้นๆ โดยคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้นอาจจะเหมือนหรือต่างกันก็ได้
2. สมมุติความหนาของแผ่นลามิเนต (h) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวและความกว้างของแผ่นลามิเนต นั่นคือชิ้นงานเป็นชิ้นงานแผ่นบาง
3. การเคลื่อนที่ของแผ่นลามิเนต ในทิศ x, y และ z ซึ่งเขียนแทนด้วย u,v และ w ตามลำดับมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา h
4. ความเครียดในระนาบ $x-y$ $\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\right)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ 1
5. ไม่คำนึงถึงความเครียดในทิศทาง z (ε_z) นั่นคือความหนาของแผ่นวัสดุไม่ เปลี่ยนแปลง
6. ไม่คำนึงถึงความเครียดเฉือนนอกระนาบ หรือ γ_{xz} และ $\gamma_{yz} = 0$
7. ค่าการเคลื่อนที่ในระนาบ u และ v เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของพิกัด z
8. วัสดุมีพฤติกรรมตามกฎของฮุค
9. ความหนาของแผ่นลามิเนตมีค่าคงที่ทั้งแผ่น
10. ไม่มีความเค้นเฉือน τ_{xz} และ τ_{yz} ที่ระยะ $z = \pm h/2$

เมื่อพิจารณาที่หน้าตัดใดหน้าตัดหนึ่งบนแผ่นบางดังแสดงในรูปที่ 3.4 จะเห็นว่าการกระจัดที่จุด C ใด ๆ ในทิศทาง x คือ

$$u = u^o - z_c \sin\beta \tag{3-4}$$



รูปที่ 3.4 ส่วนตัดแผ่นลามิเนตบางเมื่อเกิดการโก่งงอในระนาบ $x-z$

เมื่อ β คือมุมที่เส้นสัมผัสพื้นผิวทำกับระนาบกึ่งกลางของแผ่นลามิเนต โดยค่า $\sin\beta$ มีค่าน้อยมากและสามารถประมาณให้อยู่ในรูปของ $\tan\beta$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของระนาบกึ่งกลางได้ดังนี้

$$\sin\beta \cong \tan\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \qquad (3\text{-}5)$$

แทนค่า $\sin\beta$ จากสมการ (3-5) ลงในสมการ (3-4) เมื่อไม่คำนึงถึงความเครียดในทิศทาง z ค่า w_o จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งในทิศ z นั้นคือสามารถเขียน w_o ให้อยู่ในรูปของ $w_o = w(x,y)$ ดังนั้นการกระจัด u ในทิศ x คือ

$$u = u^o - z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (3\text{-}6)$$

ในทำนองเดียวกันการกระจัด v ในทิศ y คือ

$$v = v^o - z\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (3\text{-}7)$$

เมื่อ u^o, v^o เป็นการกระจัดของระนาบกึ่งกลางในทิศ x และ y ตามลำดับ จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดที่เขียนในรูป

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3\text{-}8a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3\text{-}8b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3\text{-}8c)$$

แทนค่า u และ v จากสมการ (3-6) และ (3-7) ลงในสมการ (3-8) จะได้

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u^o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v^o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u^o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial v^o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}9)
$$

จัดรูปสมการ (3-9) ใหม่จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^o + z\kappa_x \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^o + z\kappa_y \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^o + z\kappa_{xy}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}10)
$$

เมื่อ ε_x^o ,ε_y^o และ γ_{xy}^o เป็นค่าของความเครียดที่ระนาบกึ่งกลางซึ่งมีค่าดังนี้

$$
\varepsilon_x^o = \frac{\partial u^o}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y^o = \frac{\partial v^o}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy}^o = \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \qquad (3\text{-}11)
$$

และค่า κ_x ,κ_y และ κ_{xy} เป็นค่าความโค้ง (Curvature) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$
\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad , \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (3\text{-}12)
$$

โดย ค่า κ_x คือค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $x-y$

ค่า κ_y คือค่าความโค้งของระนาบกึ่งกลางบนระนาบ $y-z$

ค่า κ_{xy} คือค่าความโค้งบิดของการโก่งตัวนอกระนาบของระนาบกึ่งกลาง

จากสมการ (3-10) ความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดในชั้นที่ k ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตบางจากสมการ (3-1) สามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^o + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^o + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \qquad (3\text{-}13)
$$

ซึ่ง $\left[\overline{Q}\right]_k$ เป็นคุณสมบัติของวัสดุคอมโพสิตชั้นที่ k ซึ่งขึ้นกับทิศทางของวางตัวของเส้นใยในแต่ละชั้น

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับความเครียดและค่าความโค้ง

แรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ (force and moment resultant) ที่กระทำกับแผ่นคอมโพสิต สามารถหาได้จากการรวมค่าผลของความเค้นและค่าโมเมนต์ของความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดความหนาในแต่ละชั้นของแผ่นคอมโพสิต ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3\text{-}14a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3\text{-}14b)$$

เมื่อ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ คือความเค้น

N_x, N_y, N_{xy} คือแรงลัพธ์ที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาว (Force resultant)

M_x, M_y, M_{xy} คือโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยความยาว (Moment resultant)

h คือความหนาของแผ่นวัสดุคอมโพสิตบาง

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิตสามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3\text{-}15)$$

สมการ (3-15) เป็น Constitutive equation ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับความเครียดและค่าความโค้งที่เกิดขึ้นของแผ่นวัสดุคอมโพสิตซึ่งเกิดจากการวางลามินาเรียงกันจำนวน m ชั้น

โดย A_{ij} คือ Laminate extensional stiffness ซึ่งหาได้จาก

$$A_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\overline{Q}_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{m} (\overline{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (3\text{-}16)$$

B_{ij} คือ Laminate coupling stiffness ซึ่งหาได้จาก

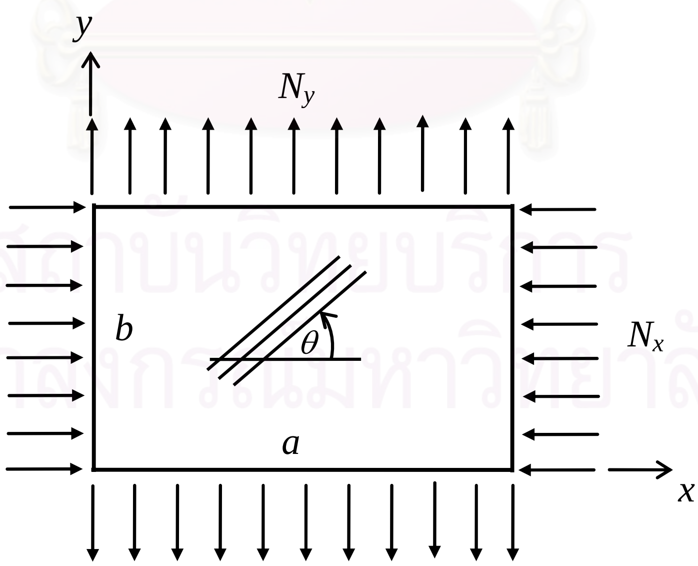
$$B_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\overline{Q}_{ij})_k \, z dz = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \qquad (3\text{-}17)$$

D_{ij} คือ Laminate bending stiffness ซึ่งหาได้จาก

$$D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\overline{Q}_{ij})_k \, z^2 dz = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m} (\overline{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \qquad (3\text{-}18)$$

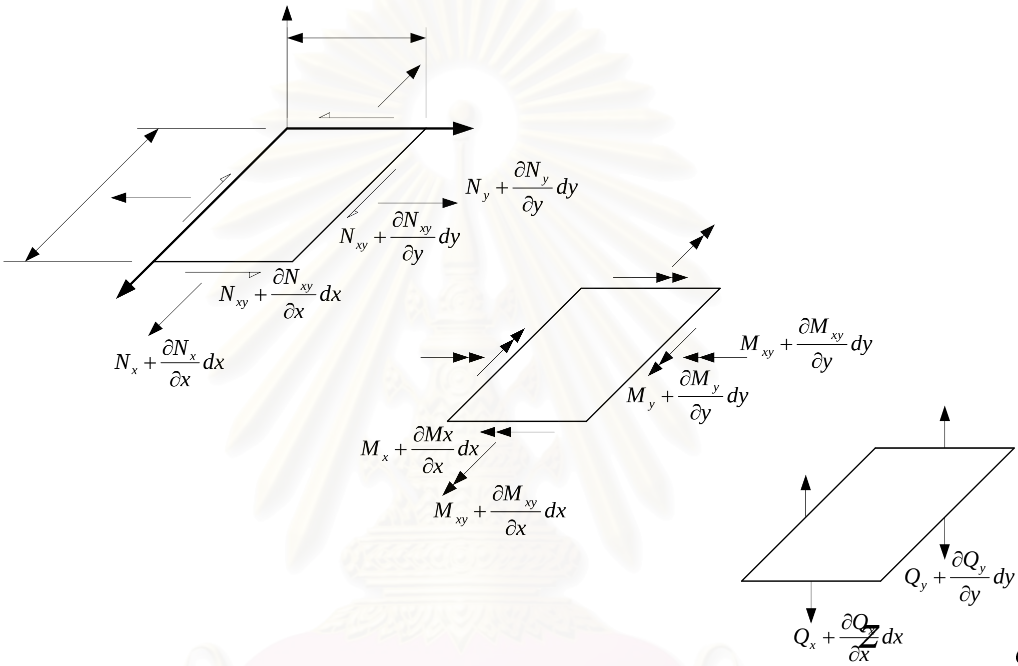
3.4 การโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง

แผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระในสองแกนดังแสดงในรูปที่ 3.5 มีขนาดความยาวตามแนวแกน x เท่ากับ a มีขนาดความกว้างตามแนวแกน y เท่ากับ b โดยภาระที่กระทำมีลักษณะสองทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกันคือภาระกดกระทำในแนวแกน x คือ N_x และมีภาระดึงซึ่งเป็นค่าคงที่กระทำในแนวแกน y คือ N_y เมื่อได้รับภาระกดสูงถึงค่าค่าหนึ่งจะทำให้แผ่นคอมโพสิตบางเกิดการโก่งงอ โดยภาระที่ทำให้เกิดการโก่งงอคือภาระกด N_x ซึ่งภาระดังกล่าวไม่จำเป็นต้องเป็นภาระที่มีค่ามากสุดที่ทำให้วัสดุเกิดการแตกหัก แต่เป็นภาระต่ำสุดที่ทำให้โครงสร้างไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นปัญหาการโก่งงอจึงมีความสำคัญในงานทางด้านการออกแบบทางวิศวกรรมซึ่งผู้ออกแบบจะต้องคำนึงถึง



รูปที่ 3.5 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบาง

สมการครอบคลุมเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระสองแกนในแนวระนาบดังแสดงในรูปที่ 3.5 [1, 2] สามารถหาได้จากการรวมแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ในแต่ละแกน โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิตจากสมการ (3-15) เพื่อเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปของความเครียดและค่าความโค้ง จากนั้นเปลี่ยนสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปการเคลื่อนที่ในแต่ละแกน โดยแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับแผ่นคอมโพสิตบางในแกนต่าง ๆ แสดงในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแผ่นบางในแกนต่าง ๆ

จากแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำบนเอลิเมนต์ของแผ่นบางในแกนต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ผลรวมของแรงในแนวแกน x แกน y และแกน z สามารถเขียนได้ดังนี้ [1, 2]

ผลรวมของแรงในแกน x

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (3\text{-}19)$$

ผลรวมของแรงในแกน y

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (3\text{-}20)$$

ผลรวมของแรงในแกน z

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad (3\text{-}21)$$

สมการ (3-19 ถึง 3-21) เป็นสมการครอบคลุมเชิงอนุพันธ์ของแผ่นบาง ซึ่งแสดงแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับโครงสร้าง สมการทั้งสามสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนที่โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กับค่าความเครียดและค่าความโค้งของแผ่นคอมโพสิตจากสมการ (3-15) ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ที่ชั้นระนาบกึ่งกลางจากสมการ (3-11) และค่าความโค้งจากสมการ (3-13) ผลรวมของแรงในแนวแกน x แกน y และแกน z ในรูปของระยะการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้ดังนี้ [1, 2]

ผลรวมของแรงในแนวแกน x

$$\begin{aligned}&A_{11}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}+2A_{16}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}+A_{16}\frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v^0}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}\\&-B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0\end{aligned} \qquad (3\text{-}22)$$

ผลรวมของแรงในแนวแกน y

$$\begin{aligned}&A_{16}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}+2A_{26}\frac{\partial^2 v^0}{\partial x\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}\\&-B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y_3}=0\end{aligned} \qquad (3\text{-}23)$$

ผลรวมของแรงในแนวแกน z

$$\begin{aligned}&D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\\&-B_{11}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2\partial y}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3}\\&-B_{16}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3}-\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 v^0}{\partial x\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3}\\&=-N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned} \qquad (3\text{-}24)$$

เนื่องจากแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° มีค่า $A_{16}=A_{26}=D_{16}=D_{26}=0$ และ $B_{ij}=0$ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งงอในสมการ (3-22 ถึง 3-24) ทั้งสามสมการสามารถแยกออกจากกันเป็นอิสระได้ (Uncoupled) กล่าวคือตัวแปร w จะเหลืออยู่ในสมการสุดท้ายเท่านั้น ทำให้สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นบางที่รับภาระในสองแกนสามารถเขียนได้เป็น [1, 2]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{26})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-N_x(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \qquad (3\text{-}25)$$

โดย $P=\dfrac{N_y}{N_x}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างภาระในแนวแกน y และภาระในแนวแกน x

สำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน ค่าภาระการโก่งงอสามารถหาได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น โดยกำหนดลักษณะของการเคลื่อนที่บริเวณที่จับยึดดังนี้

ก. ที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ (ขอบเขตซ้ายและขอบเขตขวา) ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

การเคลื่อนที่นอกระนาบ $w=0$

โมเมนต์ในแนวแกน x : $M_x=-D_{11}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

ข. ที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ (ขอบเขตล่างและขอบเขตบน) ไม่มีการเคลื่อนที่นอกระนาบและไม่มีโมเมนต์เกิดขึ้น

การเคลื่อนที่นอกระนาบ $w=0$

โมเมนต์ในแนวแกน y : $M_y=-D_{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{22}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ [2] ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสี่ด้านคือ

$$w(x,y) \;=\; w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (3\text{-}26)$$

ค่า m และ n เป็นจำนวนของ Half sine wave ของการเตลื่อนที่นอกระนาบในแกน x และ y ตามลำดับ เมื่อแทนค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x,y)$ จากสมการที่ (3-26) ลงในสมการที่ (3-25) จะได้ค่าภาระการโก่งงอซึ่งอยู่ในรูปผลเฉลยแม่นตรงเป็น

$$N_x = \frac{\pi^2 \left[D_{11}\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]}{\left[\left(\frac{m}{a}\right) + P\left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \qquad (3\text{-}27)$$

โดย R เป็นสัดส่วนของชิ้นงานสามารถหาได้จาก $R = a/b$

สมการที่ (3-27) เป็นสมการที่ใช้หาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น สำหรับแผ่นคอมโพสิตบางแบบลามิเนตสมมาตรที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใด ๆ และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ สามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้โดยระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ซึ่งวิธีการหาค่าภาระการโก่งงอและหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบด้วยวิธีการทั้งสอง ดังจะกล่าวในบทที่ 4

บทที่ 4

การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตโดยวิธีเชิงตัวเลข

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางโดยได้แสดงสมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอและการแก้สมการครอบคลุมโดยวิธีการวิเคราะห์ ซึ่งจะได้ค่าภาระการโก่งงอในรูปสมการแม่นตรง อย่างไรก็ตามสามารถแก้สมการครอบคลุมสามารถให้ได้ค่าภาระการโก่งงอในรูปผลเฉลยแม่นตรงสำหรับโครงสร้างที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบขวาง (Cross ply) หรือแบบทิศเดียว (Unidirectional ply) และมีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่ายทั้งสี่ด้านเท่านั้น สำหรับแผ่นบางแบบอื่นๆ ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้เนื่องจากค่า D_{16} และ D_{26} ของแผ่นบางดังกล่าวมีค่าไม่เป็นศูนย์ โครงสร้างบางประเภทสามารถประมาณค่าภาระการโก่งงอได้โดยวิธีการเชิงตัวเลข ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาค่าภาระการโก่งงอสองวิธีคือระเบียบวิธีริทซ์ และระเบียบวิธีแคนโทโรวิช รวมถึงตัวอย่างการหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

4.1 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์

ในทางปฏิบัติมีโครงสร้างแผ่นบางหลายประเภทที่ไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธีการวิเคราะห์ได้ ระเบียบวิธีริทซ์เป็นวิธีหนึ่งที่อาจจะนำมาใช้หาค่าภาระการโก่งงอโดยประมาณของโครงสร้างแผ่นบางได้ โดยอาศัยหลักการของพลังงานศักย์รวมต่ำสุด (Minimum total potential energy) โดยหลักการดังกล่าวสามารถกล่าวโดยสรุปได้ว่า "ถ้าการกระจัดของโครงสร้างแผ่นบางสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด และแผ่นบางอยู่ในสภาพสมดุลเสถียร (Stable equilibrium) แล้ว พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นจะมีค่าน้อยที่สุด" โดยที่พลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นบนโครงสร้างแผ่นบางประกอบด้วยพลังงานศักย์ที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุหรือที่เรียกว่าพลังงานความเครียดในวัสดุยืดหยุ่น (Strain energy) และพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก พลังงานศักย์รวมของแผ่นคอมโพสิตบางสามารถหาได้จาก

1. พลังงานความเครียดในวัสดุยืดหยุ่น U

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่รับภาระในแนวระนาบ สามารถหาค่าพลังงานความเครียดได้ในรูป

$$U=\frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dxdydz \qquad (4\text{-}1)$$

ตามสมมุติฐานพื้นฐานของแผ่นลามิเนตบางข้อ 5 และ 6 ที่แสดงไว้ในบทที่ 3 ค่า σ_z, γ_{xz} และ γ_{yz} มีค่าน้อยมากและสามารถละเลยได้ และจากความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดในชั้นที่ k ของแผ่นวัสดุคอมโพสิตบางในสมการ (3-1) เมื่อแทนค่าลงในสมการ (4-1) พลังงานความเครียดสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$U = \frac{1}{2}\iiint\left(\overline{Q}_{11}{}^{(k)}\varepsilon_{xx}{}^2 + \overline{Q}_{22}{}^{(k)}\varepsilon_{yy}{}^2 + \overline{Q}_{66}{}^{(k)}\gamma_{xy}{}^2 + 2\overline{Q}_{12}{}^{(k)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2\overline{Q}_{16}{}^{(k)}\varepsilon_{xx}\gamma_{xy} + 2\overline{Q}_{26}{}^{(k)}\varepsilon_{yy}\gamma_{xy}\right)dxdydz$$

เมื่อแทนค่าความเครียดด้วยอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่แล้วทำการอินทิเกรตในทิศ z พลังงานความเครียดในวัสดุจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\iint\Bigg[& A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2A_{16}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 2A_{16}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \\
& +2A_{26}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + 2A_{26}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2A_{66}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
& -2B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{16}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& -2B_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4B_{16}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - 2B_{26}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{26}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 4B_{26}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \\
& -4B_{66}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - 4B_{66}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& +D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg]dxdy
\end{aligned} \qquad (4\text{-}2)$$

โดย A_{ij} B_{ij} และ D_{ij} เป็นค่าใน ABD เมตริกซ์ที่นิยามไว้ตามสมการ (3-16), (3-17), (3-18) ตามลำดับ

2. พลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาระในแนวระนาบ V

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีภาระในแนวระนาบสามารถหาค่าพลังงานศักย์ที่เกิดเนื่องจากภาระในแนวระนาบกระทำต่อวัสดุได้ในรูป

$$V = \frac{1}{2}\iint\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy \qquad (4\text{-}3)$$

สำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตแผ่นบางแบบสมมาตร ซึ่งมีค่า $B_{ij}=0$ พบว่าการเคลื่อนที่ในแนวระนาบ u,v มีค่าคงที่ [2] และไม่มีผลกับการหาค่าภาระการโก่งงอ ดังนั้นพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นคือ $\Pi = U + V$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint \begin{bmatrix} D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ +4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dxdy \qquad (4\text{-}4)$$

โดย w คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด

เนื่องจากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเป็นค่าที่สมมุติขึ้นให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด ดังนั้นค่าภาระการโก่งงอที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณ ความถูกต้องจะขึ้นอยู่กับการสมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบได้ถูกต้องหรือใกล้ความเป็นจริงมากน้อยเพียงใด และขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวประกอบด้วยผลคูณของค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า และฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด โดยฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสามารถเขียนในรูปของอนุกรมได้ดังนี้

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \qquad (4\text{-}5)$$

โดย $w(x,y)$ คือการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ตำแหน่ง (x,y) ใดๆ

$X(x)$ คือฟังก์ชันของ x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$

$Y(y)$ คือฟังก์ชันของ y ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$

A_{mn} คือค่าคงที่ที่จะต้องหาซึ่งมีทั้งหมด $M \times N$ ตัว

สามารถสรุปขั้นตอนการคำนวณการหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ ได้ดังนี้

1. สมมุติฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา
2. แทนฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x,y)$ ลงในสมการพลังงานศักย์รวม (4-4)
3. หาค่าสัมประสิทธ์ A_{mn} ที่ทำให้ค่าพลังงานศักย์มีค่าต่ำสุด โดยให้อนุพันธ์ย่อยของพลังงานศักย์รวม Π เทียบกับสัมประสิทธ์ A_{mn} มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0$ ทำให้ได้สมการเชิงเส้นในรูปของตัวแปร A_{mn} จำนวน $m \times n$ ค่า
4. สมการเชิงเส้นจำนวน $m \times n$ สมการสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue problem) และเขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]\times[C]-N_x[B]\times[C]=0 \qquad (4\text{-}6)$$

โดย $[A]$ และ $[B]$ คือเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $[M\times N, M\times N]$ โดยคำนวณได้จากคุณสมบัติของวัสดุ และลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใย

$[C]$ คือเมตริกซ์แถวของค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า A_{mn}

N_x คือค่าภาระการโก่งงอ

สำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและมีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น สามารถใช้ระเบียบวิธีริทซ์ในการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าภาระการโก่งงอซึ่งจะให้ค่าภาระการโก่งงอตรงกับค่าภาระการโก่งงอที่อยู่ในรูปผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในสมการที่ (3-27) เนื่องจากค่าคงที่ที่ทำให้พลังงานศักย์รวมมีค่าต่ำสุด (A_{mn}) มีเพียงพจน์เดียวที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นสำหรับกรณีนี้ได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x, y)$ เพียงพจน์เดียว แต่สำหรับแผ่นบางที่มีการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน และมีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอให้อยู่ในรูปผลเฉลยแม่นตรงได้เนื่องจากค่า D_{16} และ D_{26} ของแผ่นบางดังกล่าวในสมการที่ (3-18) มีค่าไม่เป็นศูนย์ อย่างไรก็ตามสามารถหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดได้โดยการใช้จำนวนพจน์ที่มากพอที่จะทำให้ค่าภาระการโก่งงอลู่เข้าสู่ผลลัพธ์และให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้อง ดังนั้นค่าคงที่ที่ทำให้พลังงานศักย์รวมมีค่าต่ำสุดจึงมีหลายพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(x, y)$ หลายๆ พจน์

จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าการหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถทำได้เฉพาะกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านของแผ่นบางมีการจับยึดแบบง่ายทั้งสองด้าน (S-S) หรือแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน (C-C) เท่านั้น ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ โดยใช้ตัวอักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึดดังนี้ การจับยึดแบบง่าย (S) การจับยึดแบบยึดแน่น (C) และที่ขอบปล่อยอิสระ (F) เช่นการจับยึดแบบ (C-F) คือที่ปลายด้านหนึ่งยึดแบบยึดแน่นและอีกด้านปล่อยอิสระ การจับยึดแบบ (C-S) การจับยึดแบบ (F-C) การจับยึดแบบ (S-C) และการจับยึดแบบ (F-F) โดยฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หาได้จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

4.2 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

การศึกษาของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] นำเสนอวิธีการหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช โดยใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมด้วยวิธีการแปรผัน (Variational Method) ซึ่งจะได้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตอยู่ในผลคูณของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $X(x)$ และฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $Y(y)$ ดังนี้

$$w(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4-7}$$

โดย $w(x,y)$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

$X(x)$ คือฟังก์ชันของ x อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$

$Y(y)$ คือฟังก์ชันของ y อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$

ฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ อธิบายถึงลักษณะรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด สมการพลังงานศักย์รวมที่ใช้แก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถหาได้โดยการแทนฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสมการที่ (4-7) ลงในสมการที่ (4-4) จะได้พลังงานศักย์รวมในรูปของฟังก์ชัน $X(x)$ และฟังก์ชัน $Y(y)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b [&D_{11}X_{,xx}^2Y^2 + 2D_{12}X_{,xx}Y_{,yy}XY + D_{22}X^2Y_{,yy}^2 + 4D_{66}X_{,x}^2Y_{,y}^2 + 4(D_{16}X_{,xx}Y + \\ &D_{26}XY_{,yy})X_{,x}Y_{,y}]dxdy - \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b [N_xX_{,x}^2Y^2 + N_yX^2Y_{,y}^2 + 2N_{xy}X_{,x}Y_{,y}XY]dxdy\end{aligned} \tag{4-8}$$

การหาค่าภาระการโก่งงอและฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x โดยอาศัยหลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมสมการที่ (4-8) ด้วยวิธีการแปรผันสามารถทำได้โดยสมมุติฟังก์ชัน $X(x)$ และแทนลงในสมการที่ (4-8) เพื่อหาฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ โดยสามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^b [S_{1x}D_{11}Y^2 + 2S_{2x}D_{12}YY_{,yy} + S_{3x}D_{22}Y_{,yy}^2 + 4S_{4x}D_{66}Y_{,y}^2$$
$$+4(S_{5x}D_{16}YY_{,y} + S_{6x}D_{26}Y_{,y}Y_{,yy})]dy - \frac{1}{2}\int_0^b [S_{4x}N_xY^2]dy \qquad (4\text{-}9)$$

โดย
$$S_{1x} = \int_0^a X_{,xx}^2 dx, \qquad S_{2x} = \int_0^a XX_{,xx}dx, \qquad S_{3x} = \int_0^a X^2 dx$$
$$S_{4x} = \int_0^a X_{,x}^2 dx, \qquad S_{5x} = \int_0^a X_{,x}X_{,xx}dx, \qquad S_{6x} = \int_0^a XX_{,x}dx \qquad (4\text{-}10)$$

เป็นค่าคงที่สามารถหาจากฟังก์ชัน $X(x)$ ที่สมมุติขึ้นและขนาดความยาวของโครงสร้างแผ่นบาง จากสมการที่ (4-9) สามารถใช้หลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมโดยการแปรผันของพลังงานศักย์รวม นั่นคือ $\delta\Pi = 0$ ซึ่งผลที่ได้สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) อันดับ 4 ได้ดังนี้

$$\frac{d^4Y}{dy^4} + 2k_1\frac{d^2Y}{dy^2} + k_2Y = 0$$

โดย
$$k_1 = \frac{(S_{2x}D_{12} - 2S_{4x}D_{66})}{S_{3x}D_{22}}$$
$$k_2 = \frac{(S_{1x}D_{11} - S_{4x}N_x)}{S_{3x}D_{22}} \qquad (4\text{-}11)$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องที่ตำแหน่ง $y = 0$ และ $y = b$ คือสมการ

$$S_{3x}D_{22}\frac{d^3Y}{dy^3} + (S_{2x}D_{12} - 4S_{4x}D_{66} + S_{3x}N_y)\frac{dY}{dy} - (2S_{5x}D_{16} - S_{6x}N_{xy})Y = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

หรือ

$$Y = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

และ

$$S_{3x}D_{22}\frac{d^2Y}{dy^2} + 2S_{6x}D_{26}\frac{dY}{dy} + S_{2x}D_{12}Y = 0 \qquad (4\text{-}14)$$

หรือ

$$\frac{dY}{dy} = 0 \qquad (4\text{-}15)$$

สมการ(4-12) ถึง (4-15) เป็นสมการที่ฟังก์ชัน $Y(y)$ จะต้องสอดคล้องเพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดย

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-13) และ (4-14)
กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-13) และ (4-15)
กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-12) และ (4-14)

โดยผลเฉลยทั่วไปของฟังก์ชัน $Y(y)$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 สมการที่ (4-11) เมื่อค่า $k_1 < 0$ และ $k_2 < 0$ คือ

$$Y(y) = A_y \sin(p_1 y) + B_y \cos(p_1 y) + C_y \sinh(p_2 y) + D_y \cosh(p_2 y) \qquad (4\text{-}16)$$

โดย
$$p_1 = \sqrt{\sqrt{k_1^2 - k_2} + k_1}\,, \qquad p_2 = \sqrt{\sqrt{k_1^2 - k_2} - k_1} \qquad (4\text{-}17)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาฟังก์ชัน $X(x)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = a$ ได้โดยการนำฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่ได้จากสมการที่ (4-16) แทนลงในสมการที่ (4-8) แล้วจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^a [S_{3y}D_{11}X_{,xx}^2 + 2S_{2y}D_{12}XX_{,xx} + S_{1y}D_{22}X^2 + 4S_{4y}D_{66}X_{,x}^2 \\ +4(S_{6y}D_{16}X_{,x}X_{,xx} + S_{5y}D_{26}XX_{,x})]dx - \frac{1}{2}\int_0^a [S_{3y}N_x X_{,x}^2]dx\end{aligned} \qquad (4\text{-}18)$$

โดย
$$\begin{aligned} S_{1y} &= \int_0^b Y_{,yy}^2 dx, & S_{2y} &= \int_0^b YY_{,yy} dx, & S_{3y} &= \int_0^b Y^2 dx \\ S_{4y} &= \int_0^b Y_{,y}^2 dx, & S_{5y} &= \int_0^b Y_{,y}Y_{,yy} dx, & S_{6y} &= \int_0^b YY_{,y} dx \end{aligned} \qquad (4\text{-}19)$$

ค่า S_{iy} เป็นค่าคงที่คล้ายกับค่า S_{ix} ในสมการที่ (4-10)

ในทำนองเดียวกับกรณีการสมมุติฟังก์ชัน $X(x)$ สมการที่ (4-18) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ได้ดังนี้

$$\frac{d^4X}{dy^4} + 2k_3\frac{d^2X}{dy^2} + k_4X = 0$$

โดย
$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{(S_{2y}D_{12} - 2S_{4y}D_{66} + S_{3y}N_{xx}/2)}{S_{3y}D_{11}} \\ k_4 &= \frac{S_{1y}D_{22}}{S_{3y}D_{11}} \end{aligned} \qquad (4\text{-}20)$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ คือสมการ

$$S_{3y}D_{11}\frac{d^3X}{dx^3}+(S_{2y}D_{12}-4S_{4y}D_{66}+S_{3y}N_x)\frac{dX}{dx}-(2S_{5y}D_{26}-S_{6y}N_{xy})X=0 \qquad (4\text{-}21)$$

หรือ

$$X=0 \qquad (4\text{-}22)$$

และ

$$S_{3y}D_{11}\frac{d^2X}{dx^2}+2S_{6y}D_{16}\frac{dX}{dx}+S_{2y}D_{12}X=0 \qquad (4\text{-}23)$$

หรือ

$$\frac{dX}{dx}=0 \qquad (4\text{-}24)$$

สมการ (4-21) ถึง (4-24) เป็นสมการแสดงเงื่อนไขขอบเขต โดยการเลือกสมการต่างๆ สามารถทำทำนองเดียวกับกรณีก่อน นั้นคือ

กรณีการจับยึดแบบง่าย : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-22) และ (4-23)

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่น : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-22) และ (4-24)

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระ : สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องคือ (4-21) และ (4-23)

โดยผลเฉลยทั่วไปของฟังก์ชัน $X(x)$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 สมการที่ (4-20) เมื่อค่า $k_3>0$ และ $(k_3^2-k_4)>0$ คือ

$$X(x)=A_x\sin(p_3x)+B_x\cos(p_3x)+C_x\sin(p_4x)+D_x\cos(p_4x) \qquad (4\text{-}25)$$

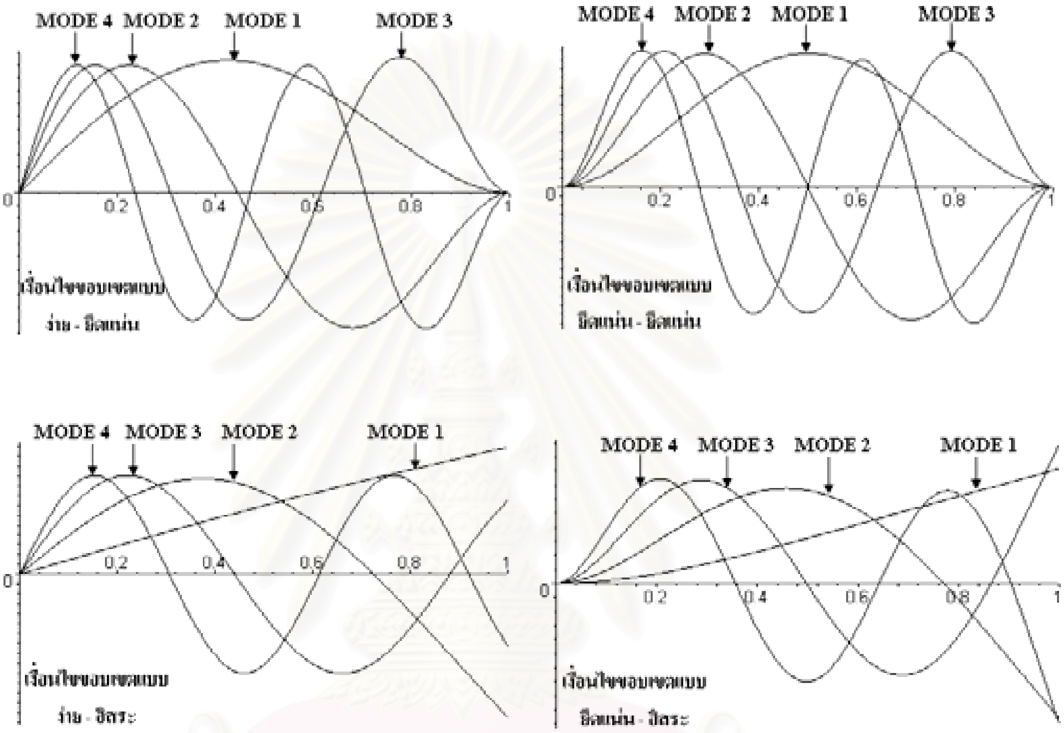
โดย

$$p_3=\sqrt{k_3+\sqrt{k_3^2-k_4}}\,, \qquad p_4=\sqrt{k_3-\sqrt{k_3^2-k_4}} \qquad (4\text{-}26)$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากงานวิจัยของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7]

การหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช [7] จะได้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสมการที่ (4-7) เพียงพจน์เดียวจึงทำให้ระเบียบวิธีนี้ใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น แต่ก็สามารถใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับยึดผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่ายแบบยึดแน่น หรือแบบอิสระ ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $Y(y)$ ที่โหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเพื่อนำมาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่

นอกระนาบพื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ ระเบียบวิธีที่นำเสนอนี้จะสามารถศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ โดยสามารถแสดงตัวอย่างรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นที่โหมดต่างๆ ของแผ่นบางที่ได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 รูปร่างโหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ
ที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นที่บริเวณขอบของแผ่นบางเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องการคือ

กรณีการจับยึดแบบง่ายการเคลื่อนที่และโมเมนต์ตลอดขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือ

$$w(x,y) = \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

กรณีการจับยึดแบบยึดแน่นการเคลื่อนที่และความชันตลอดขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือ

$$w(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 0$$

กรณีที่ขอบปล่อยอิสระโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ดังนั้น

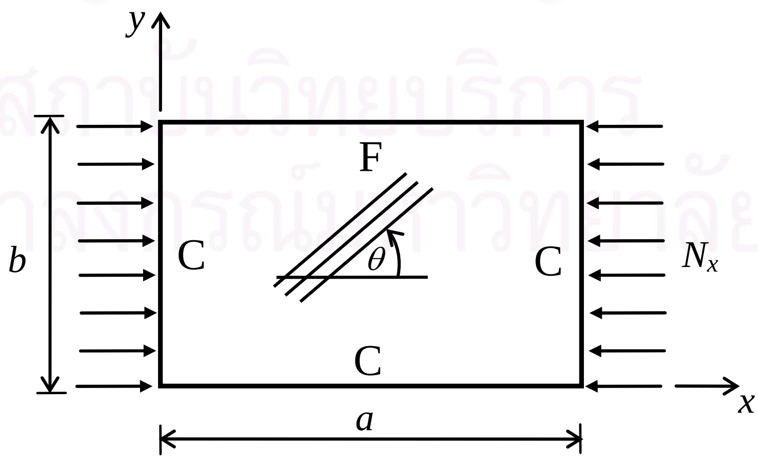
$$M_x = M_{xy} = Q_x = 0$$

4.3 ตัวอย่างการหาค่าภาระการโก่งงอ

ในหัวข้อนี้แสดงขั้นตอนการหาค่าภาระการโก่งงอโดยระเบียบวิธีที่นำเสนอที่ใช้สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีการนี้สามารถศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ได้โดยการใช้จำนวนพจน์ที่มากพอที่จะทำให้ค่าภาระการโก่งงอลู่เข้าสู่ผลลัพธ์และให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้อง คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตบางที่ใช้ในการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้แสดงในตารางที่ 4.1 โดยมีรูปแบบปัญหาการโก่งงอดังนี้ กำหนดให้แผ่นคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทำจากกราไฟต์ – อีพอกซี มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x มีขนาดความยาว a เท่ากับ 0.9 เมตร และขนาดความกว้าง b เท่ากับ 0.3 เมตร โดยมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นสามด้านร่วมกับที่ขอบปล่อยอิสระอีกหนึ่งด้าน (CCCF) ดังแสดงในรูปที่ 4.2

ตารางที่ 4-1 คุณสมบัติของแผ่นคอมโพสิตกราไฟต์ – อีพอกซี ที่ใช้ในการศึกษา

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	v_{12}	t (m)
131	10.3	6.9	0.22	0.000127



รูปที่ 4.2 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบางภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบ CCCF

4.3.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ในหัวข้อนี้เป็นการหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตกรณีการจับยึดของปัญหาในรูปที่ 4.2 โดยใช้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการดังกล่าวแสดงในหัวข้อที่ 4 ของเอกสารอ้างอิง [7] ซึ่งสามารถกล่าวโดยสรุปได้ดังนี้ เริ่มจากหาค่าฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตกรณีการจับยึดตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ หรือการจับยึดแบบ (C-F) และมีความยาวเท่ากับ 0.3 เมตร การศึกษานี้กำหนดให้ฟังก์ชัน $X(x)_1=\sin(x)$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$
\begin{aligned}
Y(y)_1 = {} & A_y \sin(\sqrt{\sqrt{-0.925+0.796N_x}-1.008}y)+B_y\cos(\sqrt{\sqrt{-0.925+0.796N_x}-1.008}y) \\
& +C_y\sinh(\sqrt{\sqrt{-0.925+0.796}N_x+1.008}y)+D_y\cosh(\sqrt{\sqrt{-0.925+0.796}N_x+1.008}y)
\end{aligned}
$$

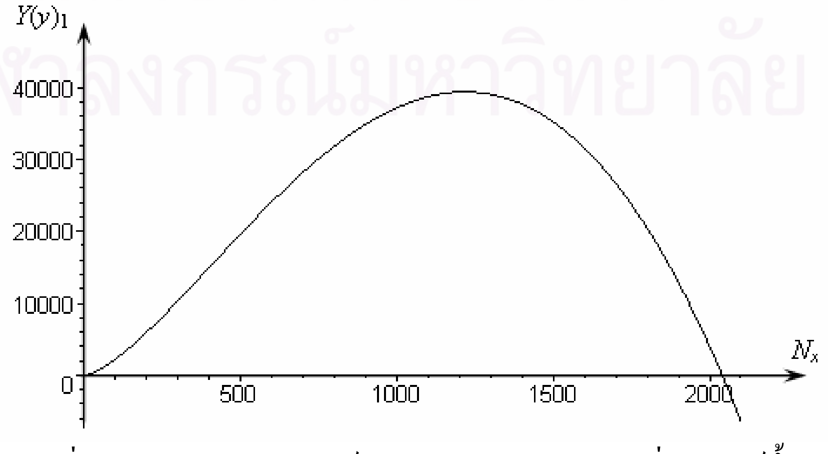
จากนั้นหาค่าเจาะจง N_x และค่าไอเก้นเวคเตอร์ของฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ (C-F) ได้โดยแก้สมการที่ (4-12) ถึงสมการที่ (4-15) ซึ่งจะสามารถจัดรูปแบบสมการให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$[F]\times[G]=0 \qquad (4\text{-}27)$$

โดย $[F]$ คือเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $[4\times 4]$ ที่มีตัวแปรภาระ N_x อยู่โดยคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$

$[G]$ คือเมตริกซ์แถวของค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า A_y, B_y, C_y, D_y

จากสมการที่ (4-27) จะได้ค่าสมาชิกของ $[G]$ ที่ไม่เป็นศูนย์ เมื่อค่าดีเทอมิแนนท์ (Determinants) ของเมตริกซ์ $[F]$ จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือค่าภาระการโก่งงอสามารถหาได้จากการแก้สมการ $\det[F]=0$ เมื่อเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\det[F]$ กับค่า N_x จะได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 การหารากของฟังก์ชัน $Y(y)_1$ จากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น

จากรูปที่ 4.3 จุดตัดบนแกน N_x คือค่าภาระการโก่งงอ ซึ่งหาได้โดยโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ผลลัพธ์ที่ได้คือ $N_{x,1} = 2040.34$ N/m เมื่อทราบค่า N_x แล้วแก้สมการที่ (4-27) เพื่อหาค่าไอเก้นเวคเตอร์ A_y, B_y, C_y, D_y ของฟังก์ชัน $Y(y)$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$Y(y)_1 = \sin(6.269y) - 1.301\cos(6.269y) - 0.9752\sinh(6.428y) + 1.301\cosh(6.428y)$$

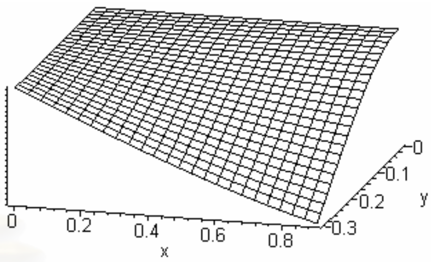
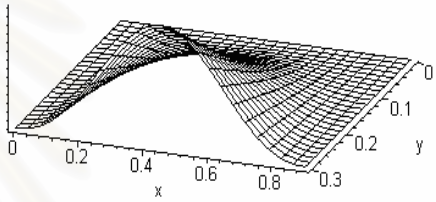
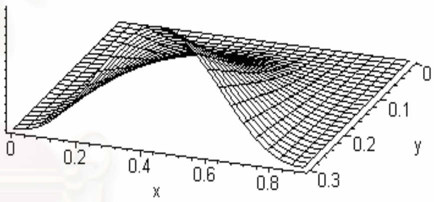
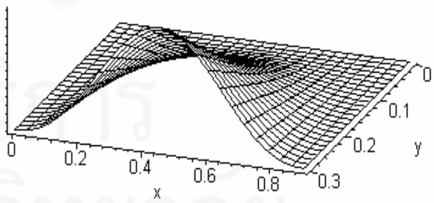
ในทำนองเดียวกันการหาค่าฟังก์ชัน $X(x)_2$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = a$ หรือการจับยึดแบบ (C-C) และมีความยาวเท่ากับ 0.9 เมตร สามารถทำได้โดยแก้สมการเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องสมการที่ (4-22) และสมการที่ (4-24) จัดรูปแบบสมการให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นสมการที่ (4-27) แก้สมการหาค่าเจาะจง $N_{x,2}$ และค่าไอเก้นเวคเตอร์ของฟังก์ชัน $X(x)_2$ ทำซ้ำจนกว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการสมมุติฟังก์ชัน $X(x)$ มีเท่ากับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการสมมุติฟังก์ชัน $Y(y)$ ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชแสดงในตารางที่ 4-2

ตารางที่ 4-2 แสดงผลการคำนวณหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบทั้งหมดสี่ครั้ง ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าภาระการโก่งงอซึ่งมีค่าเท่ากับ 890.73 N/m โดยมีฟังก์ชัน $X(x)_3$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ (C-C) ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งและมีความยาวเท่ากับ 0.9 เมตร และฟังก์ชัน $Y(y)_2$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ (C-F) ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งและมีความยาวเท่ากับ 0.3 เมตร สำหรับการหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่โหมดการโก่งงอโหมดต่างๆ เช่นโหมดที่ 2, 3, 4, … สามารถทำได้โดยการหาค่าของ det $([F])$ ที่จุดตัดบนแกน N_x และค่าไอเก้นเวคเตอร์ที่ได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสมการที่ (4-27) ที่จุดตัดที่ 2, 3, 4, … หมายถึงค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่เกิดขึ้นที่โหมดนั้นๆ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ (C-F) ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งและโหมดที่สองและมีความยาวเท่ากับ 0.3 เมตรคือ

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= \sin(6.284y) - 1.081\cos(6.284y) - 0.872\sinh(7.202y) + 1.081\cosh(7.202y) \\ Y_2(y) &= \sin(15.713y) - 0.960\cos(15.713y) - 0.975\sinh(16.102y) + 0.960\cosh(16.102y) \end{aligned} \quad (4\text{-}28)$$

$Y_i(y)$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่โหมดการโก่งงอโหมดที่ i

ตารางที่ 4-2 ค่าภาระการโก่งงอ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ และโหมดการโก่งงอที่ได้จากวิธีแคนโทโรวิช

Iteration no.	Assumed solution $X(x)$	Solution		
		Eigenvector Y(y)	Eigenvalue (N/m)	Buckling mode
1	$X(x)_1$	$Y(y)_1$	2040.34	
2	$X(x)_2$	$Y(y)_1$	892.15	
3	$X(x)_2$	$Y(y)_2$	890.73	
4	$X(x)_3$	$Y(y)_2$	890.73	

โดย $X(x)_1 = \sin(x)$

$$Y(y)_1 = \sin(6.269y)\text{-}1.301\cos(6.269y)\text{-}0.975\sinh(6.428y)+1.301\cosh(6.428y)$$

$$X(x)_2 = \sin(9.227x)+0.627\cos(9.227x)\text{-}3.037\sin(3.038x)\text{-}0.627\cos(3.038x)$$

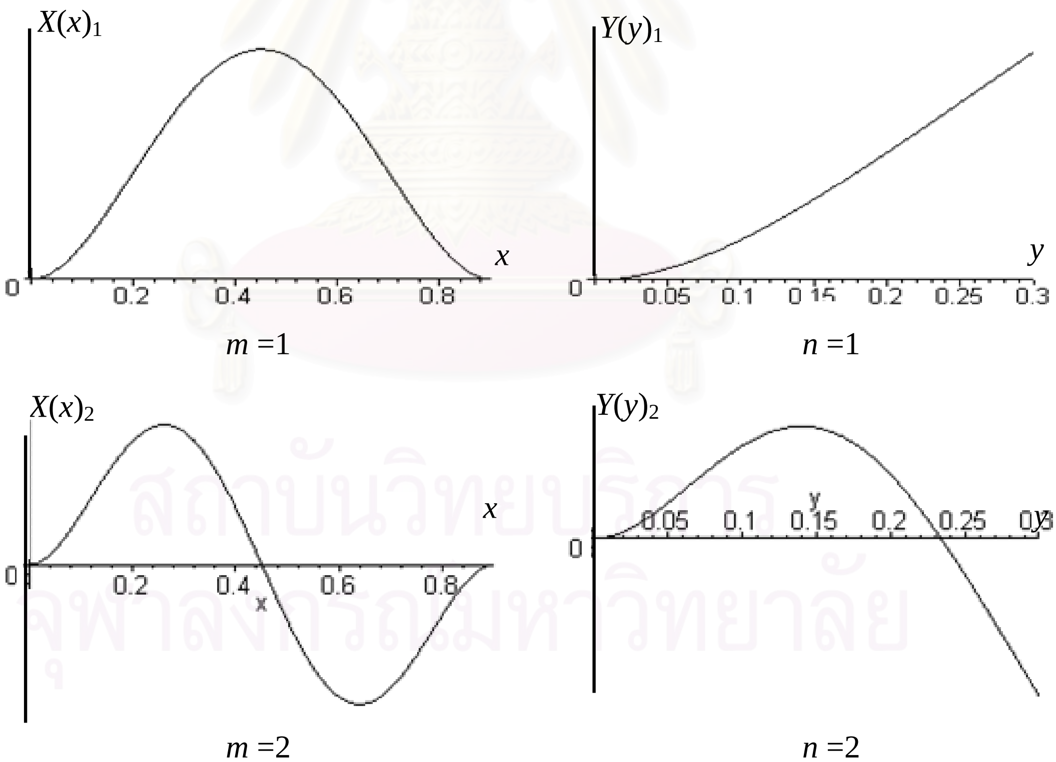
$$Y(y)_2 = \sin(6.284y)\text{-}1.081\cos(6.284y)\text{-}0.872\sinh(7.202y)+1.081\cosh(7.202y)$$

$$X(x)_3 = \sin(9.238x)+0.619\cos(9.238x)\text{-}3.036\sin(3.043x)\text{-}0.619\cos(3.043x)$$

ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $X(x)$ ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสมการที่ (4-5) สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับการหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $Y(y)$ ที่กล่าวมาแล้ว สำหรับปัญหาที่ยกตัวอย่างในรูปที่ 4.2 จะหาค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่ $X(x)$ โดยกำหนดให้ชิ้นงานมีเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ เป็นแบบยึดแน่นทั้งสองข้างและมีความยาวเท่ากับ 0.9 เมตร การศึกษานี้เลือกเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบยึดแน่นอีกสองด้าน (SCSC) และมีขนาดความยาว a และขนาดความกว้าง b เท่ากับ 0.9 เมตร โดยกำหนดคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการคำนวณดังแสดงในตารางที่ 4.1 ฟังก์ชัน $X(x)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ (C-C) ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งและโหมดที่สองโดยมีความยาวเท่ากับ 0.9 เมตรคือ

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \sin(4.759x)\text{-}0.642\cos(4.759x)\text{-}0.640\sinh(7.427x)+0.642\cosh(73427x) \\ X_2(x) &= \sin(8.522x)\text{-}0.830\cos(8.522x)\text{-}0.831\sinh(10.253x)+0.830\cosh(10.253x) \end{aligned} \quad (4\text{-}29)$$

ฟังก์ชัน $X_1(x),\ X_2(x)$ และ $Y_1(y),\ Y_2(y)$ ที่หาได้โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสามารถพล็อตรูปร่างโหมดการโก่งงอ ดังแสดงในรูปที่ 4.4



(ก) รูปร่างโหมดการโก่งงอบนแกน x (C-C) (ข) รูปร่างโหมดการโก่งงอบนแกน y (C-F)

รูปที่ 4.4 รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นในทิศ x และทิศ y จากฟังก์ชันที่ได้โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

4.3.2 ขั้นตอนการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์

ในส่วนนี้จะนำค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังตัวอย่างในรูปที่ 4.2 ที่หาได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ เพื่อแสดงให้เห็นว่าความแม่นยำของค่าภาระการโก่งงอจะขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ โดยมีรูปแบบปัญหาการโก่งงอเช่นเดียวกับตัวอย่างในรูปที่ 4.2 แต่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยเป็นแบบ $[\pm45]_{2S}$ การแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์สำหรับปัญหาการโก่งงอที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x นั่นคือ $N_y, N_{xy} = 0$ ดังนั้นพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นจากสมการ (4-4) คือ

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \begin{bmatrix} D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \\ +4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} dxdy \qquad (4\text{-}30)$$

พิจารณาให้จำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเท่ากับ 1 พจน์ ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐาน $w(x, y)$ ที่เกิดขึ้นในสมการ (4-5) คือ

$$w(x, y) = A_{11}X_1(x)Y_1(y) \qquad (4\text{-}31)$$

การนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ด้วยระเบียบวิธีการที่นำเสนอ สามารถทำได้โดยแทนค่าฟังก์ชัน $X_1(x)$, $Y_1(y)$ สมการที่ (4-28) และสมการที่ (4-29) ลงในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสมการ (4-31) แล้วแทนลงในสมการพลังงานศักย์รวมสมการที่ (4-30) แล้วอินทิเกรตและจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\Pi = \mathrm{A}^2{}_{11}\left[1436.42105 + 1.28162N_x\right]$$

ค่าพลังงานศักย์ Π จะมีค่าต่ำสุดเมื่ออนุพันธ์ย่อยของพลังงานศักย์รวม Π เทียบกับ A_{11} มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\frac{\partial \Pi}{\partial A_{11}} = 0$

หรือ $$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{11}} = A_{11}\left[2872.84210 + 2.56324N_x\right] = 0$$

แก้ปัญหาค่าเจาะจงสมการ (4-6) ได้ดังนี้

$$\left[2872.84210\right]\left[A_{11}\right]\text{-}N_x[\text{-}2.56324]\left[A_{11}\right]=0$$

$$\therefore \quad N_x = 1120.78 \quad \text{kN/m}$$

ดังนั้นค่าภาระการโก่งงอคือ 1120.78 kN/m

ความแม่นยำของค่าภาระการโก่งงอจะขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ โดยสามารถเพิ่มขึ้นเป็น 4, 9, 16, 25, … หรือเป็นค่า n^2 โดยที่ n เป็นค่าจำนวนเต็ม พิจารณาจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเท่ากับ 4 พจน์ ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่เกิดขึ้นในสมการ (4-5) คือ

$$w(x,y) = A_{11}X_1(x)Y_1(y) + A_{12}X_1(x)Y_2(y) + A_{21}X_2(x)Y_1(y) + A_{22}X_2(x)Y_2(y) \qquad (4\text{-}32)$$

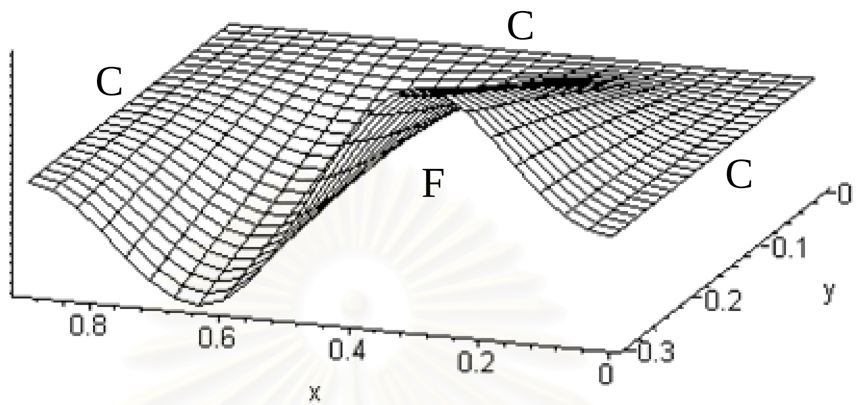
ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้เช่นเดียวกับการใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 1 พจน์ โดยค่าฟังก์ชัน $Y_1(y), Y_2(y), X_1(x), X_2(x)$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งและโหมดที่สอง สมการที่ (4-28) และสมการที่ (4-29) จะได้ค่าภาระการโก่งงอเท่ากับ 976.27 N/m ค่าภาระการโก่งงอสามารถหาได้โดยใช้จำนวนพจน์ต่างๆ กัน ดังแสดงในตารางที่ 4-3 และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.3

ตารางที่ 4-3 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นวัสดุคอมโพสิตบาง กรณีการจับยึดแบบ CCCF

จำนวนพจน์	ค่าภาระการโก่งงอ, (kN/m)
1	1.120
4	0.976
9	0.949
16	0.920
25	0.918
36	0.914
49	0.912
64	0.912

จากตารางที่ 4-3 พบว่าความแม่นยำของค่าภาระการโก่งงอขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่เพิ่มขึ้น สำหรับกรณีนี้ค่าภาระการโก่งงอจะเริ่มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เมื่อใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณเท่ากับ 49 พจน์ จากค่าไอเก้นเวคเตอร์ที่ได้สำหรับค่าไอเก้นที่เป็นค่า

ภาระการโก่งงอ สามารถนำมาแทนลงในสมการการเคลื่อนที่แล้วพล็อตลักษณะการเคลื่อนที่นอกระนาบได้ดังแสดงในรูปที่ 4.5 การเคลื่อนที่นอกระนาบนี้แสดงโหมดการโก่งงอโหมดที่ 2 เนื่องจากมีจำนวน half sine curve เป็น 2 ส่วนโค้งบริเวณขอบที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบอิสระ



รูปที่ 4.5 รูปร่างโหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งของแผ่นคอมโพสิตบาง กรณีการจับยึดแบบ CCCF ลำดับชั้นการวางตัวแบบ $[\pm 45]_{2S}$

บทที่ 5

การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในบทที่ 4 ได้แสดงตัวอย่างการหาค่าภาระการโก่งงอโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช โดยได้แสดงการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ของค่าภาระการโก่งงอสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งความถูกต้องของค่าภาระการโก่งงอขึ้นอยู่กับจำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ แต่เนื่องจากการใช้จำนวนพจน์ที่มากขึ้นทำให้เกิดความยุ่งยากในการแก้สมการทางคณิตศาสตร์และต้องใช้เวลาในการคำนวณนาน ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอ ซึ่งโปรแกรมดังกล่าวต้องผ่านการตรวจสอบความถูกต้องเพื่อให้แน่ใจว่าให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและเชื่อถือได้

ในส่วนของการนำเสนอเนื้อหาของบทนี้แบ่งเป็นสามส่วนประกอบด้วย ส่วนแรกกล่าวถึงรายละเอียดของแผ่นคอมโพสิตบางและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ศึกษา ส่วนที่สองเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทดสอบกับปัญหาการโก่งงอพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นตรงหรือปัญหาที่มีการศึกษามาก่อนหน้านี้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม และส่วนที่สามเป็นการเสนอผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกระทำทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ โดยการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน a/b ภาระดึงตามขวาง N_y และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ ว่ามีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงออย่างไร

5.1 รายละเอียดของแผ่นคอมโพสิตบางที่ศึกษา

ในวิทยานิพนธ์นี้จะศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีลักษณะเฉพาะดังต่อไปนี้

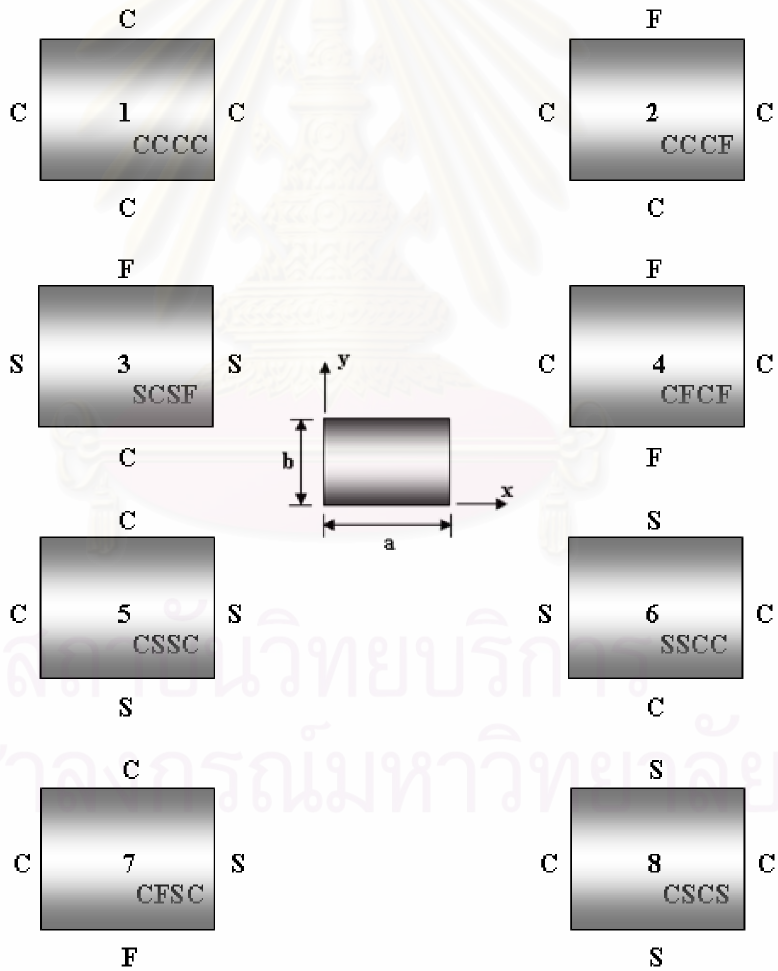
1. กำหนดให้แผ่นคอมโพสิตบางทำจากกราไฟต์ – อีพอกซี โดยมีคุณสมบัติของวัสดุดังแสดงในตารางที่ 4.1 มีขนาดความยาวตามแนวแกน x เท่ากับ a มีขนาดความกว้างตามแนวแกน y เท่ากับ b และกำหนดให้มีความกว้างคงที่คือ b เท่ากับ 0.3 เมตร ขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน a/b ทั้งหมดห้าสัดส่วนคือ 1, 1.5, 2, 2.5 และ 3 และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยเทียบกับแกน x เท่ากับ θ ดังแสดงในรูปที่ 3.5

2. แผ่นคอมโพสิตบางเป็นแบบแผ่นลามิเนตแบบสมมาตร โดยการโก่งงอของชิ้นงานเกิดจากภาระกดกระทำในแนวแกน x คือ N_x และมีภาระดึงซึ่งเป็นค่าคงที่กระทำในแนวแกน y คือ N_y

และไม่มีภาระตามขวางหรือภาระเฉือนกระทำ นั่นคือ $N_{xy} = q = 0$ ดังนั้นสมการพลังงานศักย์รวมจากสมการที่ (4-4) จะลดรูปเป็น

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint \begin{bmatrix} D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ +4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} dxdy \qquad (5\text{-}1)$$

3. วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาโครงสร้างที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด 8 กรณีคือ CCCC, CCCF, SCSF, CFCF, CSSC, SSCC, CFSC และ CSCS โดยใช้ตัวอักษรย่อแสดงลักษณะการจับยึดและระบบแกนพิกัด ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 เงื่อนไขขอบเขตทั้ง 8 กรณี และระบบแกนพิกัด
สำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

5.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการโก่งงอ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยนำเอาวิธีการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4.1 ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้โดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชที่แสดงในหัวข้อที่ 4.2 มาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นประกอบด้วยสามส่วนหลักๆ คือ

ส่วนที่ 1 : โปรแกรมคอมพิวเตอร์ส่วนที่ทำหน้าที่หาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดจากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ส่วนที่ 2 : โปรแกรมคอมพิวเตอร์ส่วนที่ทำหน้าที่คำนวณหาค่าพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นบนแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังสมการที่ (5-1) โดยการแทนฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากส่วนที่ 1 ของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

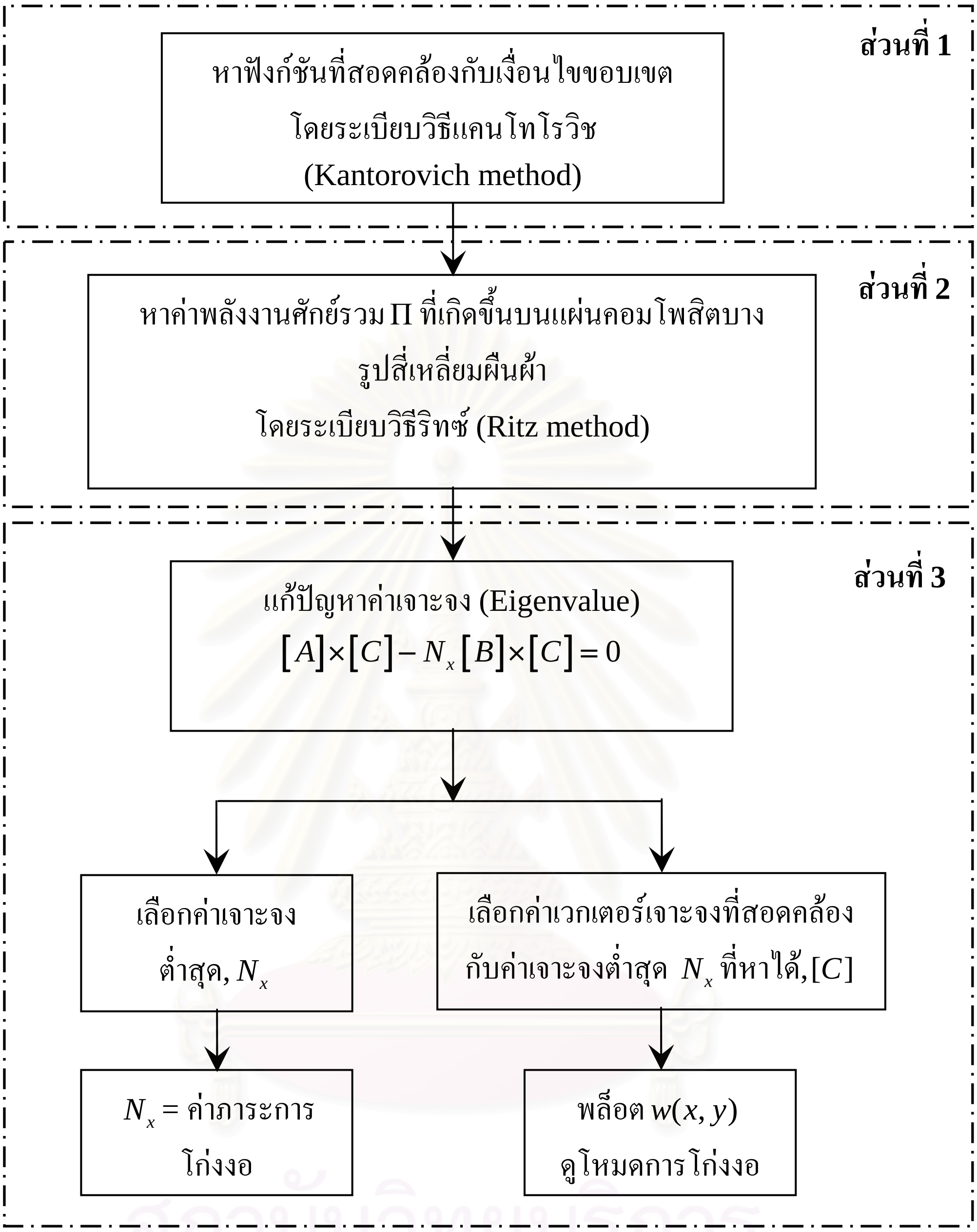
ส่วนที่ 3 : โปรแกรมคอมพิวเตอร์ส่วนที่ทำหน้าที่แก้ปัญหาเจาะจงสมการที่ (4-6) เพื่อหาค่าเจาะจงหรือค่าภาระการโก่งงอ และเลือกค่าเวกเตอร์เจาะจง ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจงต่ำสุดเพื่อนำค่าเวกเตอร์เจาะจงไปพล็อตรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น

ลำดับขั้นตอนต่างๆ นี้ สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 5.2 และรายละเอียดของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสามส่วน แสดงไว้ในภาคผนวก ก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสามส่วนดังแสดงในรูปที่ 5.2 ต้องผ่านการตรวจสอบความถูกต้องเพื่อให้แน่ใจว่าโปรแกรมดังกล่าวสามารถหาค่าภาระการโก่งงอและให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้องและมีความเชื่อถือได้ โดยมีขั้นตอนการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ดังนี้

5.2.1 การโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบง่าย

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการหาพลังงานศักย์รวมและแก้ปัญหาเจาะจงสามารถทำได้โดยเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอของโครงสร้างที่มีผลเฉลย จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่ากรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านสามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้จากผลเฉลยแม่นตรงและมีฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในรูปของฟังก์ชันซายน์ ดังนั้นการตรวจสอบความถูกต้องในส่วนนี้สามารถตรวจสอบได้โดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลลัพธ์ที่มีอยู่จากการศึกษาที่มีในอดีตภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน



รูปที่ 5.2 ขั้นตอนการหาค่าภาระการโก่งงอด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

การศึกษาของ Tuttle et al. [5] นำเสนอค่าภาระการโก่งงอและจำนวนโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกระทำกับแผ่นชิ้นงานในลักษณะสองทิศทางตั้งฉากกัน ซึ่งการโก่งงอเกิดขึ้นเนื่องจากภาระกด N_x กระทำในแนวแกน x และมีภาระดึงตามแนวขวาง N_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน y ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยต่างกันสี่แบบคือ $[0]_8$, $[0/90]_{2S}$, $[45]_8$ และ $[\pm 45]_{2S}$ ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างกันสามขนาดคือ 1, 1.5 และ 2 แผ่นคอมโพสิตบางทำจากกราไฟต์ – อีพอกซี โดยมีคุณสมบัติของวัสดุดังต่อไปนี้

$$E_{11} = 155 \text{ GPa}, \quad E_{22} = 7.6 \text{ GPa, Thickness} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ m}$$
$$G_{12} = 4.4 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.34, \quad a = b = 1.52 \times 10^{-3} \text{ m}$$

ตารางที่ 5-1 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่มีอยู่จากการศึกษาของ Tuttle et al. [5] กับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับกรณีที่แผ่นคอมโพสิตบางมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 1 และ 2 ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธี Galerkin แสดงในช่อง Tuttle ค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยระเบียบวิธีริทซ์จากการศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้แสดงในช่อง Present และเปรียบเทียบโหมดการโก่งงอดังแสดงในช่อง Buckling mode ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นทั้งหมด 34 กรณีพบว่ามีค่าเท่ากันทุกกรณีศึกษา ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ในส่วนที่ 2 และส่วนที่ 3 ให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้องและเชื่อถือได้

5.2.2 การโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบผสม

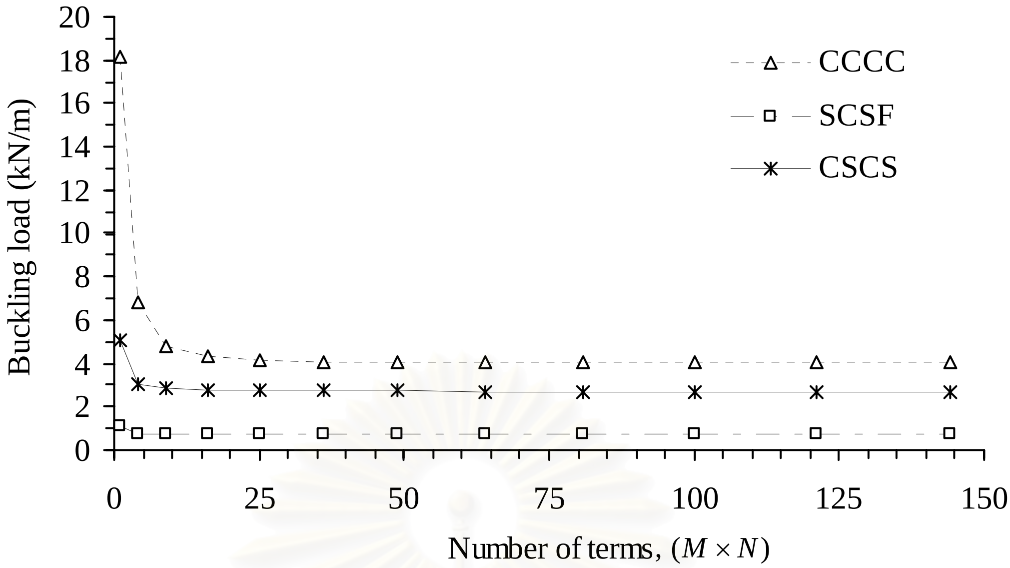
ในการศึกษานี้ได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิชขึ้น สำหรับใช้หาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบดังได้อธิบายในหัวข้อที่ 4.2 ซึ่งใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น แต่สามารถใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตในกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านมีการจับยึดผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือปล่อยอิสระ ดังนั้นปัญหาการโก่งงอสำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนนี้จึงเป็นปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ เพื่อตรวจสอบว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้ถูกต้องและสามารถใช้ร่วมกับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบได้จริง

การตรวจสอบที่ต้องทำอย่างหนึ่งก็คือการตรวจสอบการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เพื่อแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำมาใช้ให้ค่าภาระการโก่งงอที่มีความลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ การตรวจสอบดังกล่าวสามารถทำได้โดยพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันดังกล่าว ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่างกันสามแบบคือ CCCC, SCSF และ CSCS ดังแสดงในรูปที่ 5.3 และแสดงรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ ดังแสดงในรูปที่ 5.4 โดยพิจารณาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับ 3 ภายใต้ภาระกดกระทำใน

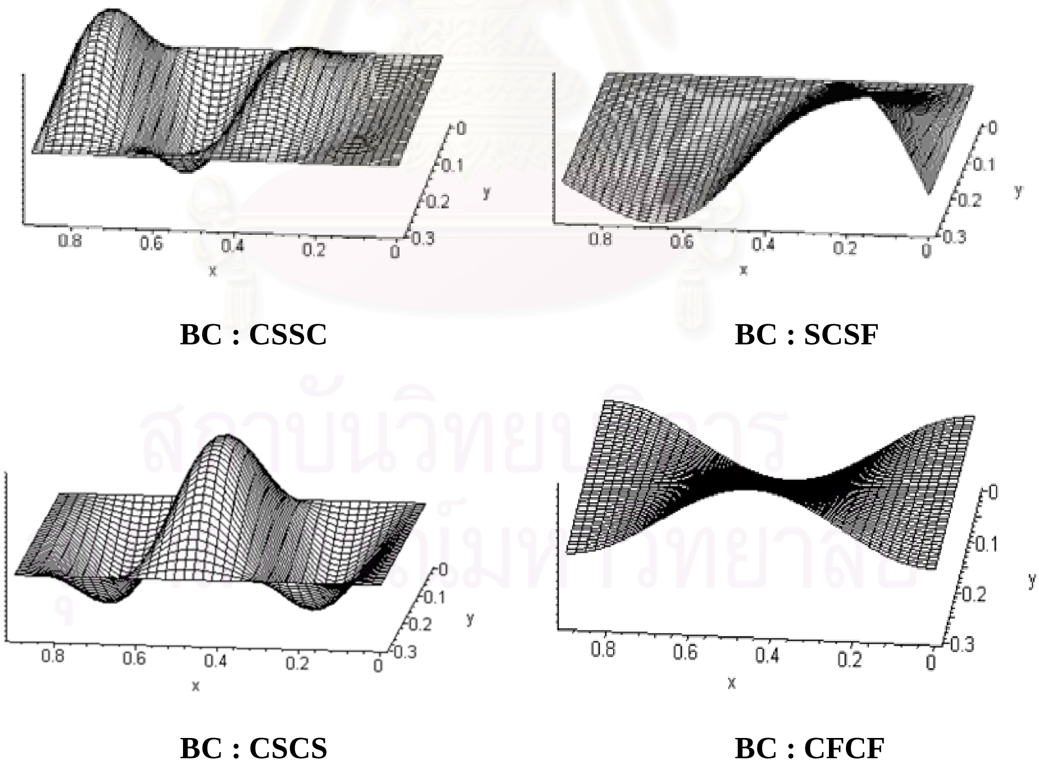
แนวแกนเดียวคือ N_x และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ จากรูปที่ 5.3 แสดงให้เห็นว่าค่าภาระการโก่งงอจะเริ่มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้ตั้งแต่ 25 พจน์ขึ้นไป เพื่อให้ได้ค่าภาระการโก่งงอที่มีความแม่นยำ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอค่าภาระการโก่งงอสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้จำนวนพจน์ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 100 พจน์ ($M = N = 10$) ซึ่งเป็นจำนวนพจน์ที่ให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่ค่าภาระการโก่งงอและใช้เวลาในการคำนวณประมาณ 10 นาทีโดยประมาณในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นเวลาที่ไม่นานจนเกินไป

ตารางที่ 5-1 ค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอจากการศึกษาของ Tuttle et al. [5] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

Stackling Sequence	Load Ratio	Aspect Ratio = 1			Aspect Ratio = 2		
		Buckling load (kN/m)		Buckling Mode:	Buckling load (kN/m)		Buckling Mode:
		Tuttle	Present study	Tuttle / Present	Tuttle	Present study	Tuttle / Present
$[0]_8$	0	23.3	23.3	1/1	11.6	11.6	1/1
	-0.238	30.6	30.6	1/1	30.6	30.6	2/2
$[0/90]_{2S}$	0	23.3	23.3	1/1	23.3	23.3	2/2
	-0.238	30.6	30.6	1/1	30.6	30.6	2/2
	-0.384	37.9	37.9	1/1	37.9	37.9	2/2
	-0.484	45.2	45.2	1/1	45.2	45.2	2/2
	-0.587	56.5	56.5	1/1	49.7	49.7	3/3
	-0.688	71.8	71.8	2/2	52.9	52.9	3/3
$[45]_8$	0	21.9	21.9	1/1	17.8	17.8	2/2
	-0.305	28.6	28.6	2/2	23.6	23.6	3/3
	-0.506	32.1	32.1	2/2	28.8	28.8	3/3
$[\pm45]_{2S}$	0	39.0	39.0	1/1	38.5	38.5	2/2
	-0.160	46.4	46.4	1/1	45.6	45.6	3/3
	-0.297	55.3	55.3	2/2	49.0	49.0	3/3
	-0.417	57.3	57.3	2/2	52.3	52.3	3/3
	-0.524	59.2	59.2	2/2	55.7	55.7	3/3
	-0.618	60.9	60.9	2/2	59.0	59.0	3/3

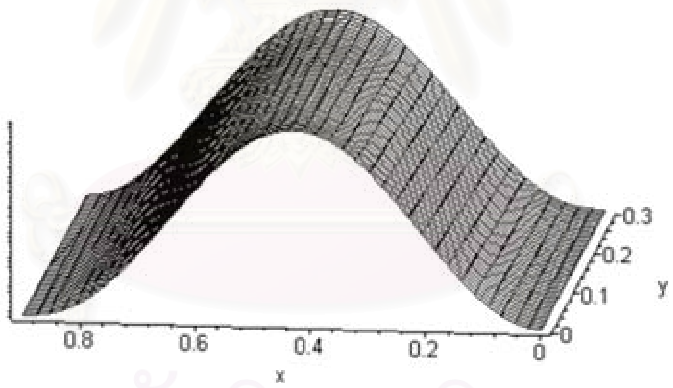


รูปที่ 5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์และค่าภาระการโก่งงอ
จากฟังก์ชันที่หาโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช



รูปที่ 5.4 ตัวอย่างรูปร่างโหมดการโก่งงอจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น
ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ

จากรูปที่ 5.4 พบว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอทั้งหมดมีความน่าเชื่อถือยกเว้นกรณีชิ้นงานแบบ CFCF กล่าวคือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชในกรณีการจับยึดแบบ F-F ให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ไม่เหมาะสม คือมีระยะการเคลื่อนที่ตลอดความยาวของขอบที่ปล่อยอิสระเป็นฟังก์ชันในรูปของตรีโกณมิติ ดังสมการ(4-16) โดยไม่มีค่าคงที่เลย เนื่องจากกรณีการจับยึดดังกล่าวมีรูปแบบปัญหาคล้ายกับปัญหาของเสา (Column problem) ดังนั้นรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นควรที่จะมีลักษณะโก่งงอคล้ายกับลักษณะการโก่งงอที่เกิดขึ้นในปัญหาของเสา จากปัญหาของเสาพบว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่ขึ้นกับตัวแปร x เพียงตัวเดียว ดังนั้นเพื่อให้ลักษณะการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถมีลักษณะการโก่งงอคล้ายกับลักษณะการโก่งงอที่เกิดขึ้นในปัญหาของเสาจึงกำหนดค่าฟังก์ชัน $Y(y)$ ที่หาได้จากวิธีระเบียบแคนโทโรวิช กำหนดให้โหมดใดโหมดหนึ่งเป็นค่าคงที่ สำหรับการศึกษานี้กำหนดให้ค่าฟังก์ชัน $Y(y)$ โหมดที่ 5 มีค่าเท่ากับ 1 หรือ $Y_5(y)=1$ พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมีค่าเท่ากับ1.739 kN/m และค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการกำหนดค่าฟังก์ชัน $Y_5(y)=1$ มีค่าเท่ากับ 0.162 kN/m โดยมีรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 รูปร่างโหมดการโก่งงอกรณีการจับยึดแบบ CFCF

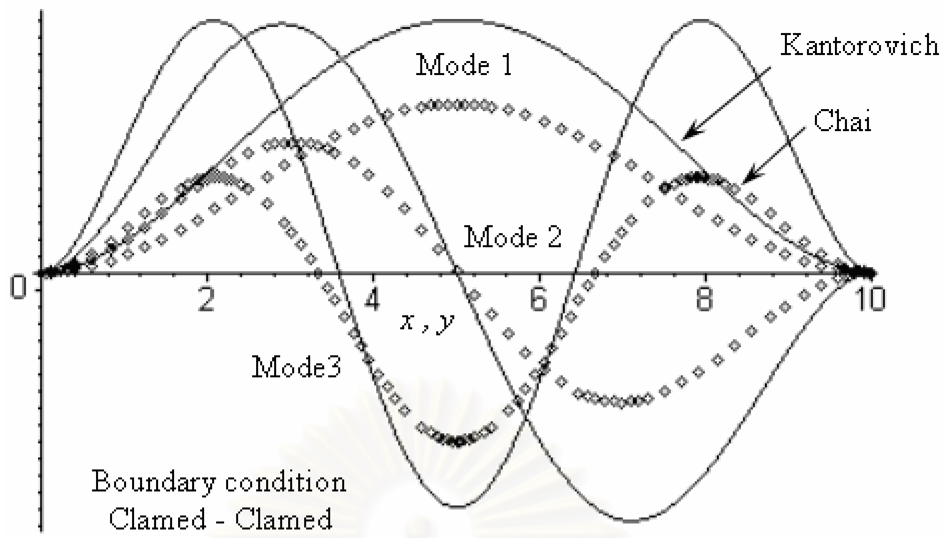
จากรูปที่ 5.5 พบว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอจากการกำหนดค่าฟังก์ชัน $Y_5(y)=1$ ให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่สมเหตุสมผลกว่ารูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากฟังก์ชันแคนโทโรวิช แต่เนื่องจากค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการกำหนดฟังก์ชันทั้งสองให้ค่าภาระการโก่งงอที่แตกต่างกันมาก ดังนั้นจากการศึกษาในส่วนนี้พบว่ากรณีการจับยึดแบบ CFCF ไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้จากการฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากวิธีแคนโทโรวิช แต่สำหรับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบอื่นๆ สามารถทำได้ด้วยวิธีที่นำเสนอเนื่องจากให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่มีความเชื่อได้

ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในส่วนที่ 1 มีความถูกต้องและเชื่อถือได้

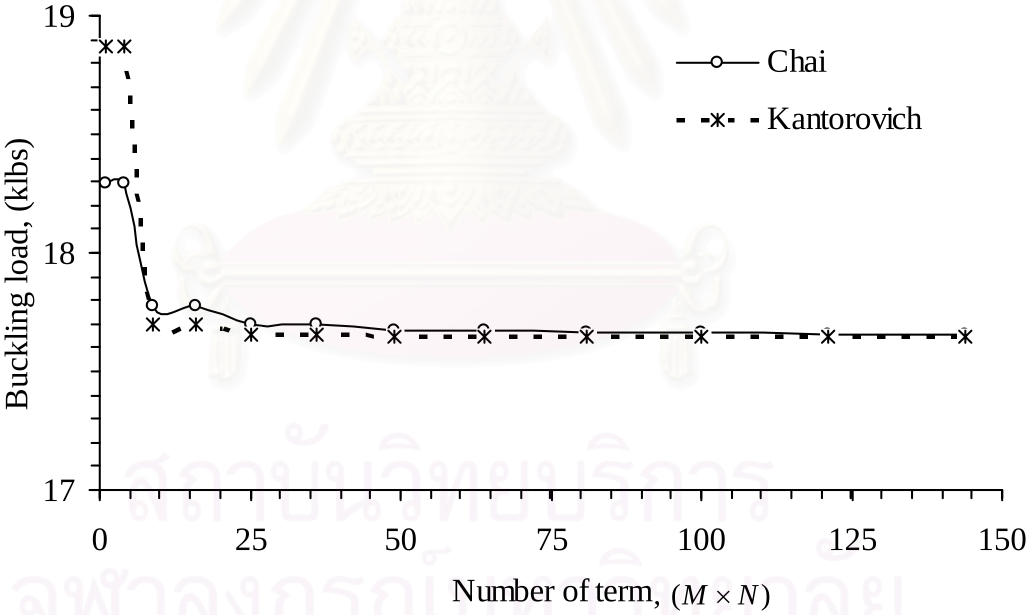
เพื่อเป็นการยืนยันความแม่นยำของระเบียบวิธีที่นำเสนอจึงนำค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีที่กล่าวมาเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาที่ผ่านมาในเอกสารอ้างอิง [3,7] โดยเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่างกันสองแบบคือ การจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน และการจับยึดแบบยึดแน่นสองด้านคือด้านที่รับภาระร่วมกับการจับยึดแบบง่ายอีกสองด้าน โดยแผ่นคอมโพสิตบางทำจากโบรอน – อีพอกซี ซึ่งมีคุณสมบัติของวัสดุดังต่อไปนี้

$$E_{11} = 31.18 \text{ Msi}, \quad E_{22} = 3.42 \text{ Msi}, \text{ Thickness} = 0.115 \text{ in}$$
$$G_{12} = 0.754 \text{ Msi}, \quad \nu_{12} = 0.28, \quad a = b = 10 \text{ in}$$

ค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Chai [3] ได้จากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบในรูปของฟังก์ชันซายน์ในรูปของ $X(x) = \sin(\pi x / a)\sin(m\pi x / a)$ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ C-C ในการคำนวณ ฟังก์ชันที่ใช้ในการศึกษาของ Chai [3] และฟังก์ชันที่ใช้ในวิทยานิพนธ์สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ C-C สามารถเปรียบเทียบกันได้ดังแสดงในรูปที่ 5.6 จะเห็นว่าฟังก์ชันทั้งสองให้ค่าการเคลื่อนที่นอกระนาบและความชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ในรูปที่ 5.6 เส้นทึบแสดงลักษณะโหมดการโก่งงอที่ 1 ถึง 3 ของฟังก์ชันที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และเส้นที่แสดงด้วยจุดสี่เหลี่ยมแสดงลักษณะโหมดการโก่งงอของฟังก์ชันที่ได้จากการศึกษาของ Chai [3] จากกราฟฟังก์ชันทั้งสองพบว่ากราฟมีลักษณะการโก่งงอถูกต้องตามเงื่อนไขขอบเขตคือ ระยะการเคลื่อนที่และความชันตลอดขอบที่ถูกยึดมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อหาค่าภาระการโก่งงอจากฟังก์ชันทั้งสองเพื่อตรวจสอบว่าฟังก์ชันใดให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าดีที่กว่า โดยพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากฟังก์ชันทั้งสองในกรณีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน และลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{5S}$ ดังแสดงในรูปที่ 5.7 พบว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชให้ค่าภาระการโก่งงอที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ได้ดีกว่าและให้ค่าที่มีความแม่นยำกว่าการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากการศึกษาของ Chai [3] เนื่องจากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ให้ค่าภาระการโก่งงอที่ต่ำกว่า



รูปที่ 5.6 ลักษณะโหมดการโก่งงอต่างๆ ของฟังก์ชันที่ได้จาก Chai [3]
และแคนโทโรวิช สำหรับกรณีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสองด้าน



รูปที่ 5.7 ค่าภาระการโก่งงอจากการใช้ฟังก์ชันของ Chai [3]
และแคนโทโรวิช ที่มีจำนวนพจน์ต่างๆ กัน

ตารางที่ 5-2 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [3,7] กับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอ ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอมีค่าใกล้เคียงกันทุกกรณี นอกจากนี้โหมดการโก่งงอก็มีรูปร่างเหมือนกันด้วย

นอกจากปัญหาในเอกสารอ้างอิง [3,7] แล้ว ยังมีอีกการศึกษาหนึ่งที่นำมาทดสอบความแม่นยำของระเบียบวิธีที่นำเสนอคือ ปัญหาการโก่งงอจากการศึกษาของ Ungbhakorn และ Singhatanadgid [7] โดยหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างคอมโพสิตแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสี่แบบคือ CCCF SCSF SCSC และ CSSC โดยมีคุณสมบัติของวัสดุดังต่อไปนี้

$$E_{11} = 10E_{22},\ G_{12} = 0.5E_{22}\ ,\nu_{12} = 0.25$$

การศึกษานี้ได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วย (Nondimensional) โดยคำนวณได้จาก

$$K_{cr} = (N_x^{cr} b^2 / \pi^2 D_{22}) \qquad (5\text{-}2)$$

ตารางที่ 5-3 เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [7] กับผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอมีความน่าเชื่อถือ

ดังนั้นการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ สามารถทำได้ด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอคือใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความเชื่อถือทั้งสามส่วน ในส่วนถัดไปของวิทยานิพนธ์นี้จะประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน ภาระดึงตามขวาง (N_y) และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการโก่งงอ รวมถึงนำเสนอค่าภาระการโก่งงอภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบ

5.3 พฤติกรรมการโก่งงอแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ

ในหัวข้อที่ 5.2 ได้แสดงการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสามส่วนพบว่าให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ถูกต้องและมีความเชื่อถือได้ ในหัวข้อนี้จะประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการนำเสนอค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอจากการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน ภาระดึงตามขวาง (N_y) และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการโก่งงอ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบ ดังนี้

ตารางที่ 5-2 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [3,7] กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ กรณีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ

Boundary condition	Stacking sequence	Thickness (in)	Buckling load ($\times 10^3$ lbs)		
			Ref . [7]	Ref . [3]	Present study
CCCC	$[0/90]_{5S}$	0.115	17.6505	17.5509	17.6462
		0.102	12.3159	12.2464	12.3128
		0.091	8.7456	8.6962	8.74345
	$[30]_{20}$	0.11	N/A	10.6874	10.7287
		0.106	N/A	9.5634	9.60039
	$[\pm 45]_{5S}$	0.102	N/A	11.6954	11.7472
		0.11	N/A	14.6687	14.7338
CSCS	$[0/90]_{5S}$	0.115	11.8328	11.7625	11.8312
		0.102	8.2565	8.2074	8.2553
		0.091	5.8630	5.8282	5.8622
	$[30]_{20}$	0.11	N/A	9.3453	9.3909
		0.106	N/A	8.3625	8.4149
	$[\pm 45]_{5S}$	0.102	N/A	8.3746	8.4230
		0.11	N/A	10.5036	10.5651

ตารางที่ 5-3 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาในเอกสารอ้างอิง [7] กับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ

Boundary condition	Method	Aspect ratio, (a/b)		
		1	2	3
CCCF	Ref. [7]	7.8494	2.4895	1.8747
	Present study	7.8492	2.4886	1.8737
SCSF	Ref. [7]	2.2294	1.2079	1.3489
	Present study	2.2294	1.2089	1.3491
SCSC	Ref. [7]	7.8342	7.3323	7.0500
	Present study	7.8342	7.3322	7.0500
CSSC	Ref. [7]	6.5576	5.4602	5.2368
	Present study	6.5571	5.4599	5.2368

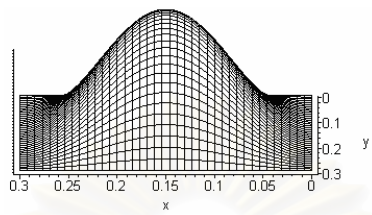
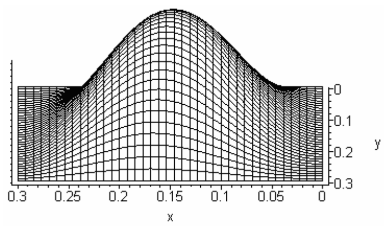
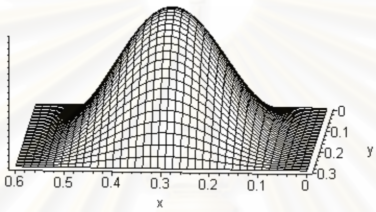
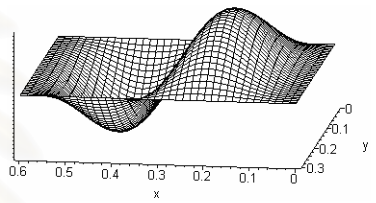
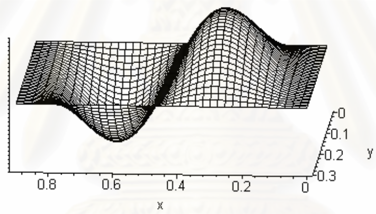
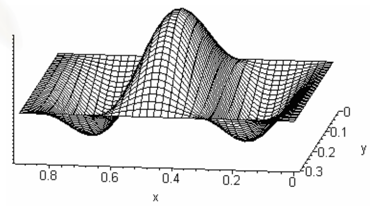
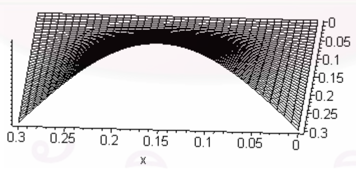
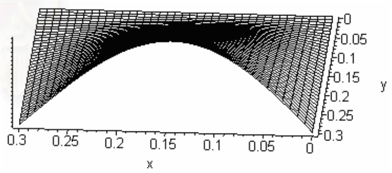
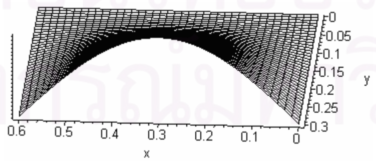
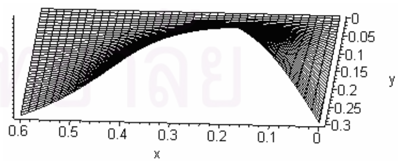
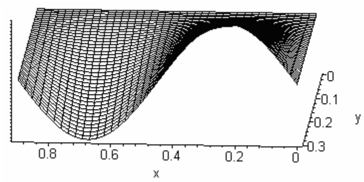
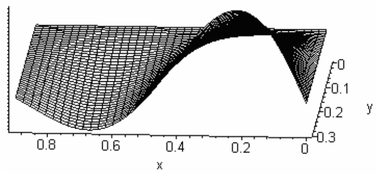
5.3.1 ผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

หัวข้อนี้นำเสนอพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน a/b ทั้งหมดห้าสัดส่วนคือ 1, 1.5, 2, 2.5 และ 3 และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสองแบบคือ $[0/90]_{2S}$ และ $[\pm45]_{2S}$ พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสี่แบบคือ CSCS, SCSF, SSCC และ CCCF ค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีที่เสนอแสดงในตารางที่ 5-4 รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSCS และ SCSF แสดงในตารางที่ 5-5 และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSCC และ CCCF แสดงในตารางที่ 5-6

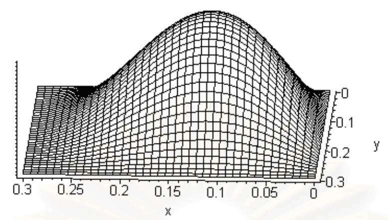
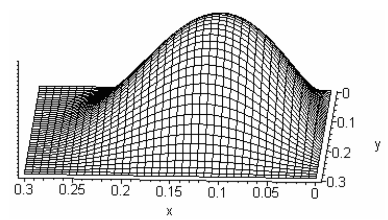
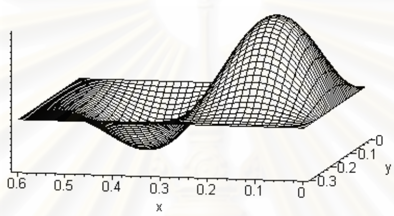
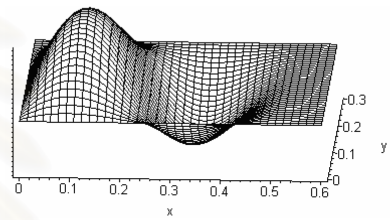
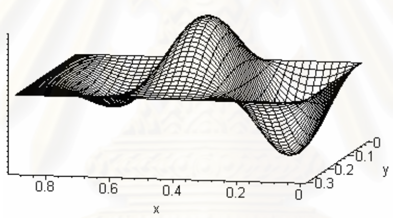
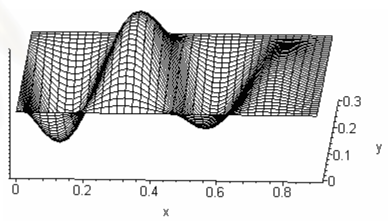
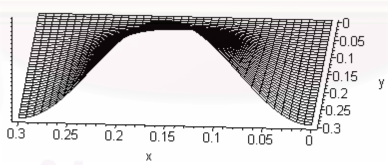
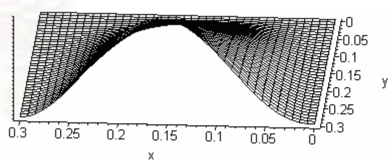
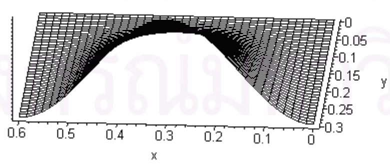
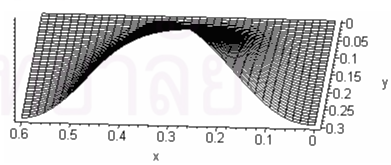
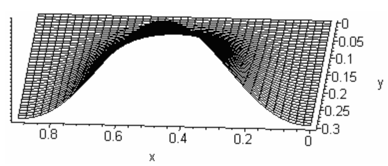
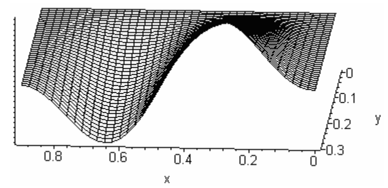
ตารางที่ 5-4 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน

Stackling sequence	Aspect ratio, (a/b)	Buckling load, N_x^{cr} (kN/m)			
		CSCS	SCSF	SSCC	CCCF
$[0/90]_{2S}$	1	4.242	1.066	3.091	3.741
	1.5	2.663	0.646	2.846	1.807
	2	2.454	0.577	2.566	1.187
	2.5	2.058	0.629	2.530	0.959
	3	1.927	0.646	2.459	0.890
$[\pm45]_{2S}$	1	3.689	0.885	3.640	2.054
	1.5	3.117	0.746	3.461	1.240
	2	2.896	0.747	3.383	1.014
	2.5	2.764	0.743	3.320	0.955
	3	2.715	0.730	3.305	0.907

ตารางที่ 5-5 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSCS และ SCSF ที่มีสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน

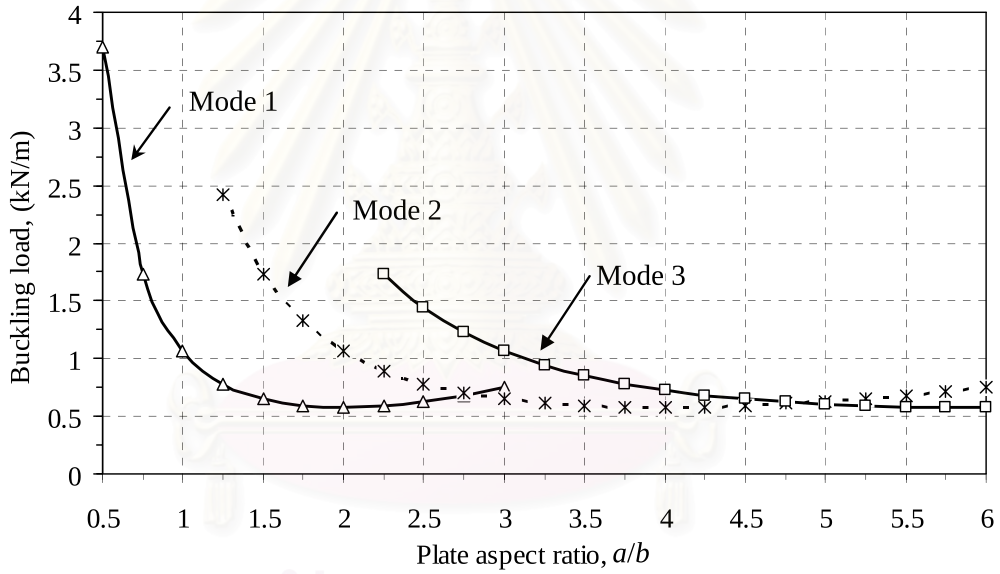
Boundary condition	Aspect ratio, (a/b)	Buckling mode	
		Stacking sequence, $[0/90]_{2S}$	Stacking sequence, $[\pm 45]_{2S}$
CSCS	1		
	2		
	3		
SCSF	1		
	2		
	3		

ตารางที่ 5-6 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ SSCC และ CCCF ที่มีสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน

Boundary condition	Aspect ratio, (a/b)	Buckling mode	
		Stacking sequence, $[0/90]_{2S}$	Stacking sequence, $[\pm 45]_{2S}$
SSCC	1		
	2		
	3		
CCCF	1		
	2		
	3		

จากตารางที่ 5-4 พบว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะไม่มีค่าลดลงเสมอไปเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้น ดังเช่นกรณีการจับยึดแบบ SCSF ที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ค่าภาระการโก่งงอมีค่าลดลงเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีขนาดเท่ากับ 1 ถึง 2 และมีค่าภาระการโก่งงอเพิ่มมากขึ้นเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีขนาดเท่ากับ 2 ถึง 3 โดยรูปร่างโหมดการโก่งงอมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้นโดยลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ จะเกิดรูปร่างโหมดการโก่งงอเท่ากับหรือมากกว่าการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ทั้งสี่กรณีการศึกษา

พฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอที่ขึ้นกับขนาดสัดส่วนของชิ้นงานสามารถอธิบายได้โดยการพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 5.8 ซึ่งแสดงค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการจับยึดแบบ SCSF และลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$



รูปที่ 5.8 ค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน

จากรูปที่ 5.8 เส้น Mode 1 แสดงค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากค่าเวกเตอร์เจาะจงจากการแก้สมการที่ (4-6) ที่สอดคล้องกับโหมดการโก่งงอที่หนึ่ง เส้น Mode 2 แสดงค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากค่าเวกเตอร์เจาะจงที่สอดคล้องกับโหมดการโก่งงอที่สอง ซึ่งจุดตัดของเส้นกราฟทั้งสองคือจุดเปลี่ยนโหมดการโก่งงอที่หนึ่งเป็นโหมดที่สอง จากกราฟพบว่าชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 1, 1.5, 2 และ 2.5 จะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นเป็นโหมดที่หนึ่ง แต่เมื่อชิ้นงานมีความยาวเพิ่มขึ้น เช่น ชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 2.75, 3, 3.5, 4 และ 4.5 เกิดการโก่งงอที่โหมดที่สอง ในทำนองเดียวกันเส้น Mode 3 แสดงค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากค่าเวกเตอร์เจาะจงที่สอดคล้องกับโหมดการโก่งงอที่สาม และจุดตัดระหว่างเส้น Mode 2 และเส้น Mode 3 คือจุดเปลี่ยนโหมดการโก่งงอที่

สองเป็นโหมดที่สาม จากกราฟพบว่าชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับ 4.75, 5, 5.5 และ 6 เกิดการโก่งงอที่โหมดที่สาม ซึ่งสอดคล้องกับค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 5-4 และตารางที่ 5-5 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าค่าภาระการโก่งงออาจจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดสัดส่วนเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เพราะว่ามีการเปลี่ยนโหมดการโก่งงอไปเป็นโหมดที่สูงขึ้น

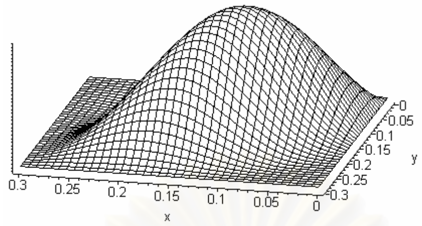
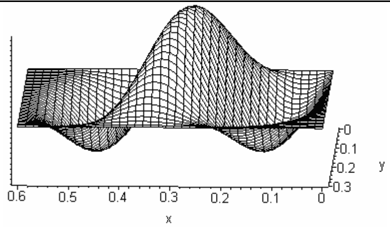
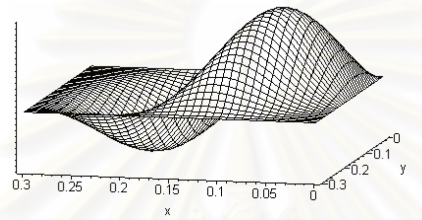
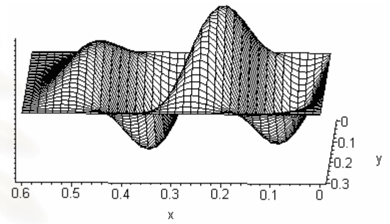
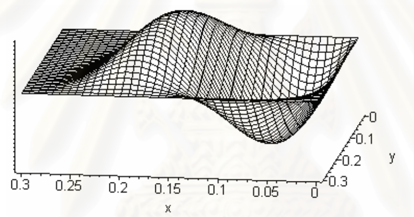
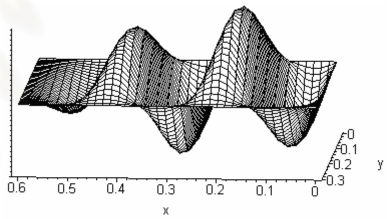
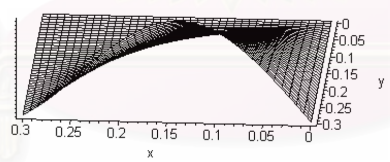
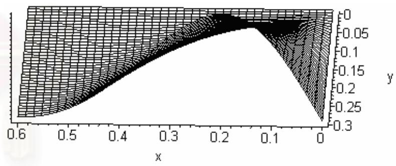
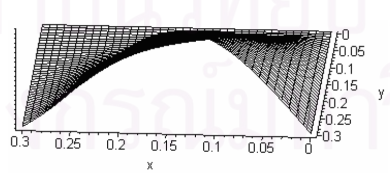
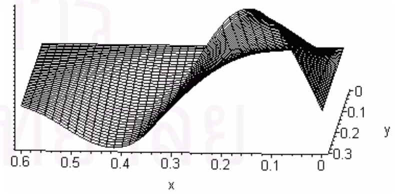
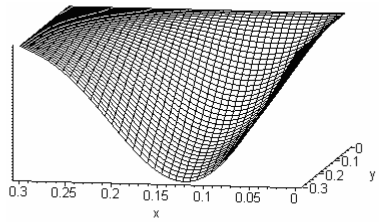
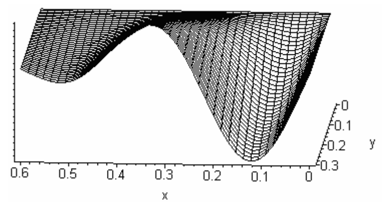
5.3.2 ผลกระทบของภาระดึงตามขวางที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

หัวข้อนี้จะนำเสนอพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระในสองแกน กล่าวคือมีภาระกด N_x กระทำในแนวแกน x และมีภาระดึงตามแนวขวาง N_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน y โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางที่มีสัดส่วนภาระ (Load ratio) N_y / N_x ทั้งหมดห้าสัดส่วนคือ 0, -0.5, -1, -1.5 และ -2 สำหรับชิ้นงานที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ และขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสี่แบบคือ SSCC, SCSF, CSSC และ CFSC ค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีที่เสนอแสดงในตารางที่ 5-7 รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SSCC และ SCSF แสดงในตารางที่ 5-8 และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC และ CFSC แสดงในตารางที่ 5-9

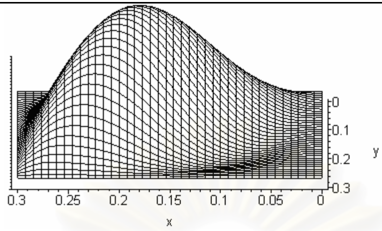
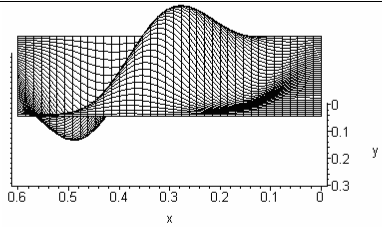
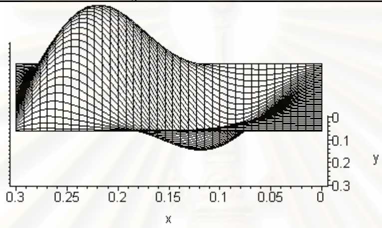
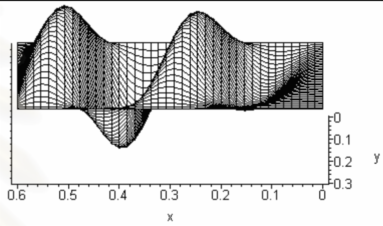
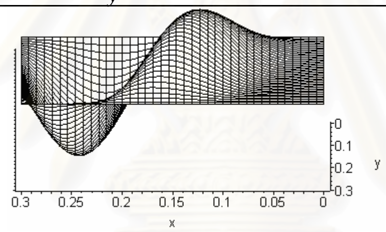
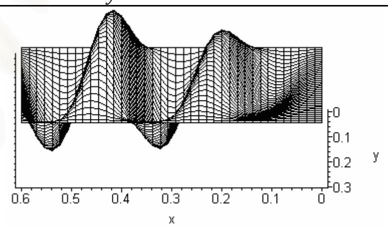
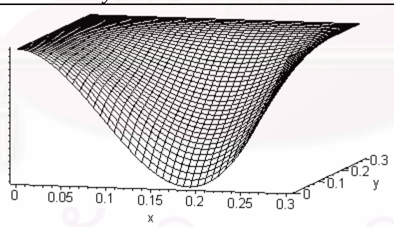
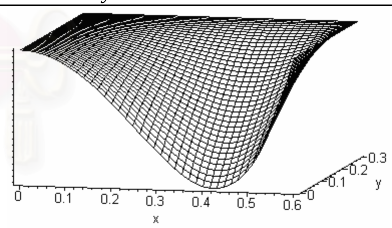
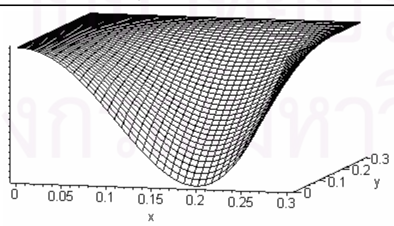
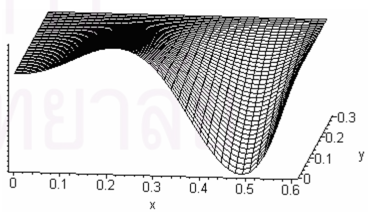
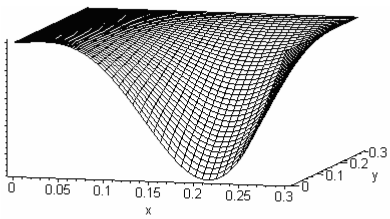
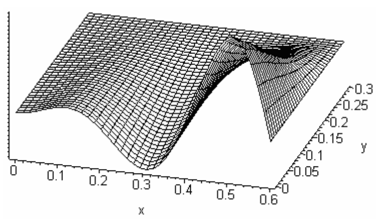
ตารางที่ 5-7 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบาง $[45]_8$ ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน

Aspect ratio, (a/b)	Load ratio, (N_y/N_x)	Buckling load, N_x^{cr} (kN/m)			
		SSCC	SCSF	CSSC	CFSC
1	0	2.331	0.535	2.140	0.885
	-0.5	3.237	0.677	3.087	1.087
	-1	4.019	0.864	3.917	1.371
	-1.5	4.928	1.115	4.826	1.756
	-2	5.915	1.434	5.821	2.205
2	0	1.925	0.360	1.879	0.564
	-0.5	2.769	0.592	2.713	0.923
	-1	3.648	0.824	3.609	1.276
	-1.5	4.581	1.067	4.545	1.651
	-2	5.474	1.293	5.447	2.018

ตารางที่ 5-8 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ SSCC และ SCSF ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน

Boundary condition	Load Ratio	Buckling mode	
		Aspect Ratio = 1	Aspect Ratio = 2
SSCC	0	 N_y = 0 kN/m	 N_y = 0 kN/m
	-1	 N_y = 4.019 kN/m	 N_y = 3.648 kN/m
	-2	 N_y = 11.830 kN/m	 N_y = 10.948 kN/m
SCSF	0	 N_y = 0 kN/m	 N_y = 0 kN/m
	-1	 N_y = 0.864 kN/m	 N_y = 0.824 kN/m
	-2	 N_y = 2.868 kN/m	 N_y = 2.586 kN/m

ตารางที่ 5-9 โหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CFSC ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน

Boundary condition	Load Ratio	Buckling mode	
		Aspect Ratio = 1	Aspect Ratio = 2
CSSC	0	 N_y = 0 kN/m	 N_y = 0 kN/m
	-1	 N_y = 3.917 kN/m	 N_y = 3.609 kN/m
	-2	 N_y = 11.642 kN/m	 N_y = 10.894 kN/m
CFSC	0	 N_y = 0 kN/m	 N_y = 0 kN/m
	-1	 N_y = 1.371 kN/m	 N_y = 1.276 kN/m
	-2	 N_y = 4.410 kN/m	 N_y = 4.036 kN/m

จากตารางที่ 5-7 ถึงตารางที่ 5-9 พบว่าความทนทานต่อการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมีภาระดึงตามแนวขวางมากระทำ ซึ่งความทนทานดังกล่าวจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของภาระดึงตามแนวขวางที่มากระทำ โดยกรณีการจับยึดแบบ SSCC มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุดและกรณีการจับยึดแบบ SCSF มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุดสำหรับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งสี่กรณีที่ศึกษา นอกจากนี้จะมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจากโหมดที่ต่ำ เช่นโหมดที่หนึ่งเป็นโหมดที่สอง และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ถ้าขนาดของภาระดึงตามแนวขวางที่กระทำมีค่ามากพอ สำหรับสัดส่วนภาระทั้งห้าสัดส่วนที่ศึกษาพบว่ากรณีการจับยึดแบบ SCSF และ CFSC และมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง ไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเนื่องจากมีด้านหนึ่งของเงื่อนไขขอบเขตปล่อยอิสระ แต่เมื่อเพิ่มขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับสองพบว่ามีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอ ซึ่งเป็นผลจากขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้

5.3.3 ผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

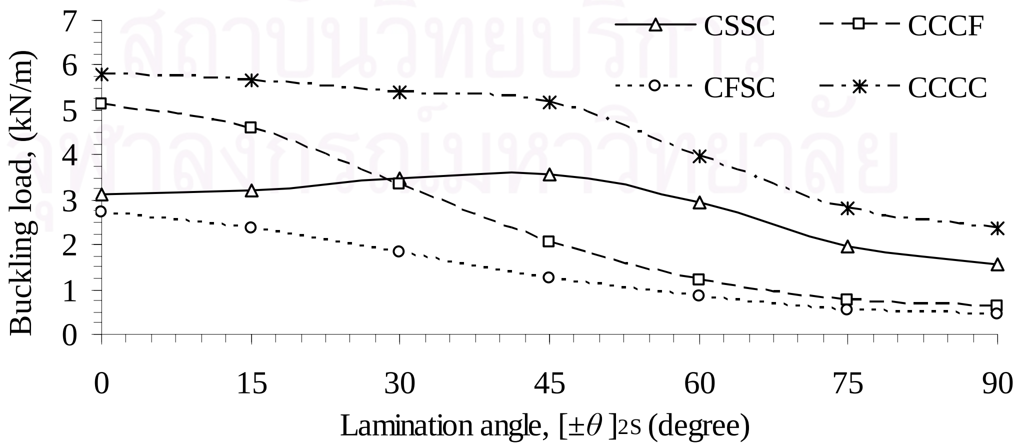
หัวข้อนี้นำเสนอพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ โดยมุม θ ต่างกัน 7 มุม คือเริ่มจาก $\theta = 0^{\circ}$ ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 15° และขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง พิจารณาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสี่แบบคือ CSSC, CCCF, CFSC และ CCCC ค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีที่เสนอแสดงในตารางที่ 5-10 ผลการศึกษารูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นเนื่องจากการวางตัวของเส้นใยที่ต่างกัน 7 มุมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC และ CCCF แสดงในตารางที่ 5-11 และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นเนื่องจากการวางตัวของเส้นใยที่ต่างกัน 7 มุมภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CFSC และ CCCC แสดงในตารางที่ 5-12

จากรูปที่ 5.9 คือการนำค่าภาระการโก่งงอในตารางที่ 5-11 มาพล็อตกราฟความสัมพันธ์กับมุมองศาการวางตัวของเส้นใย พบว่าแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการจับยึดแบบ CCCC มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุด และกรณีการจับยึดแบบ CFSC มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุด ซึ่งค่าภาระการโก่งงอจะไม่มีค่าลดลงเสมอไปเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใย θ มีค่าเพิ่มขึ้น ดังเช่นกรณีการจับยึดแบบ CCCF ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $0^{\circ} < \theta < 45^{\circ}$ และค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลดลงเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $45^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ จากรูปร่างโหมดการโก่งงอทีแสดงในตารางที่ 5-11 และตารางที่ 5-12 พบว่าเส้นรูปร่าง (Contour) โหมดการโก่งงอของด้านที่มีการจับยึดแบบง่ายจะมีความชันมากกว่าด้านที่มีการจับยึดแบบยึดแน่น และกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CCCC จะ

มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอถ้า θ มีค่ามากพอ ซึ่งการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจะมีมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วย ดังเช่นกรณีการจับยึดแบบ CCCC มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอมากกว่ากรณีการจับยึดแบบ CSSC แต่กรณีการจับยึดแบบ CCCF และ CFSC ไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเนื่องจากมีด้านหนึ่งของเงื่อนไขขอบเขตปล่อยอิสระ ซึ่งจะทำให้มีระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบตลอดความยาวของขอบเกิดขึ้นมากจึงส่งผลให้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของเส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอซึ่งขึ้นกับมุม θ ไม่เด่นชัดเมื่อเทียบกับกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CCCC ที่มีระยะการเคลื่อนนอกระนาบน้อยกว่า สำหรับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดทั้งสี่กรณีที่ศึกษา

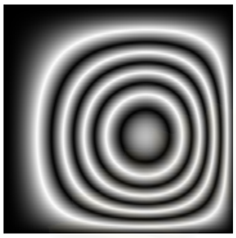
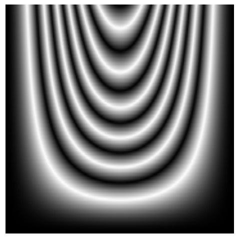
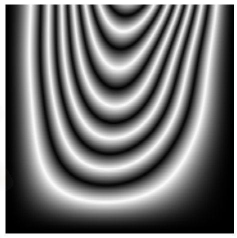
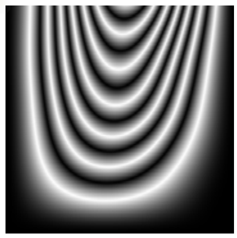
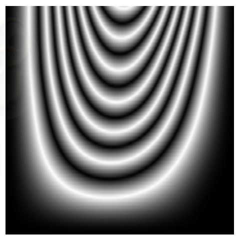
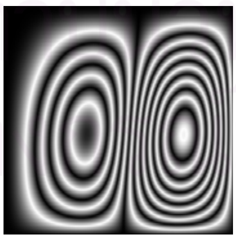
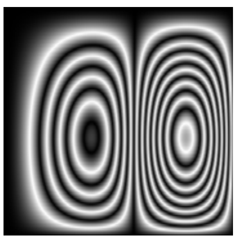
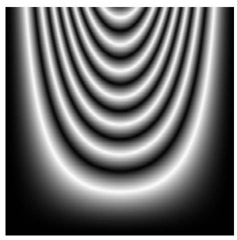
ตารางที่ 5-10 ค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ สำหรับชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนเท่ากับหนึ่ง

Stacking sequence	Buckling load, N_x^{cr} (kN/m)			
	CSSC	CCCF	CFSC	CCCC
$[0]_8$	3.125	5.144	2.703	5.797
$[\pm15]_{2S}$	3.232	4.584	2.380	5.650
$[\pm30]_{2S}$	3.466	3.324	1.817	5.390
$[\pm45]_{2S}$	3.552	2.054	1.259	5.179
$[\pm60]_{2S}$	2.944	1.183	0.826	3.963
$[\pm75]_{2S}$	1.949	0.750	0.546	2.795
$[\pm90]_{2S}$	1.552	0.627	0.446	2.374

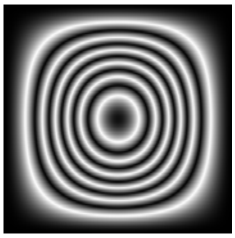
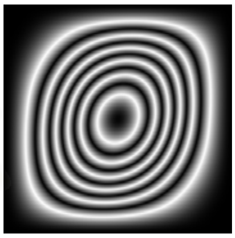
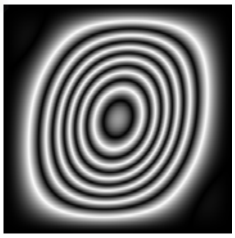
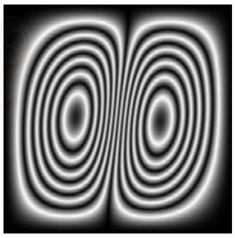
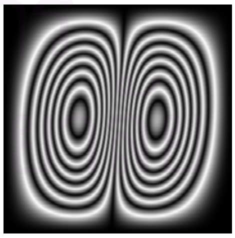
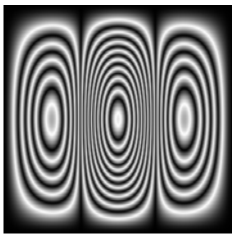


รูปที่ 5.9 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าภาระการโก่งงอและองศาการวางตัวของเส้นใย สำหรับกรณีการจับยึดแบบ CSSC, CCCF, CFSC และ CCCC

ตารางที่ 5-11 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CSSC และ CCCF ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ

Fiber angle	Buckling mode	
	CSSC	CCCF
$[0]_8$		
$[\pm 30]_{2S}$		
$[\pm 45]_{2S}$		
$[\pm 60]_{2S}$		
$[\pm 75]_{2S}$		
$[\pm 90]_{2S}$		

ตารางที่ 5-12 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบางกรณีการจับยึดแบบ CFSC และ CCCC ที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ

Fiber angle	Buckling mode	
	CFSC	CCCC
$[0]_8$		
$[\pm 30]_{2S}$		
$[\pm 45]_{2S}$		
$[\pm 60]_{2S}$		
$[\pm 75]_{2S}$		
$[\pm 90]_{2S}$		

บทที่ 6

การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

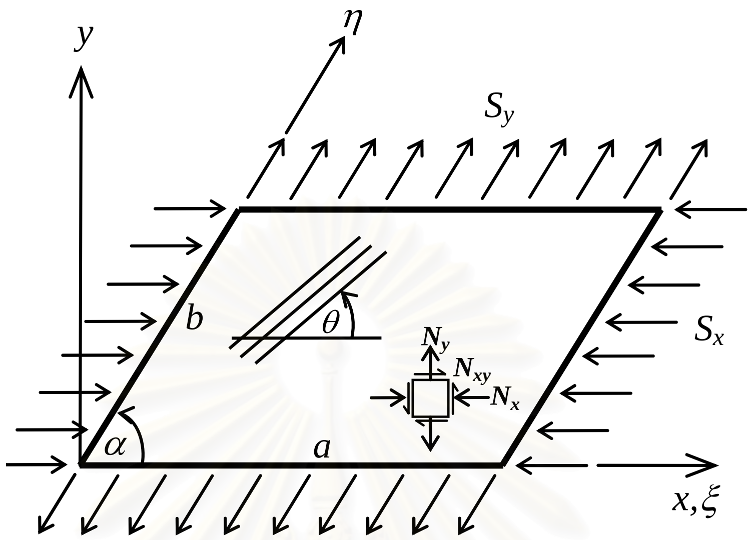
ในบทที่ 5 ได้แสดงการนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้ในการแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางโดยระเบียบวิธีริทซ์ ซึ่งพบว่าค่าภาระการโก่งงอสำหรับคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้มีความแม่นยำเมื่อใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบมากพอ ในบทที่แล้วยังได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอของคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดสัดส่วนและเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ รวมถึงผลของภาระดึงด้านขวางที่มีต่อภาระการโก่งงอและโหมดการโก่งงอ ในบทนี้จะได้แสดงการนำระเบียบวิธีการที่แสดงไว้ในบทก่อนมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การวิเคราะห์การโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทำได้โดยการแปลง (Transform) โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งอยู่ในพิกัด x-y ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดกว้าง 1 หน่วย และยาว 1 หน่วยในพิกัด ξ-η การแก้ปัญหาการโก่งงอสามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่หาได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชเช่นเดียวกับการแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การนำเสนอเนื้อหาในบทนี้แบ่งเป็นสามส่วน ประกอบด้วยการแก้ปัญหาการโก่งงอสำหรับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยการแปลงโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ส่วนที่สองเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปทดสอบกับปัญหาการโก่งงอที่มีการศึกษามาก่อนหน้านี้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม และศึกษาข้อจำกัดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำเสนอ และส่วนสุดท้ายเป็นการเสนอผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีภาระกระทำทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาผลกระทบของขนาดของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่น ภาระดึงตามขวาง (S_y) และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยว่ามีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงออย่างไร

6.1 การโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระในสองแกน ดังแสดงในรูปที่ 6.1 ซึ่งภาระที่ทำให้เกิดการโก่งงอคือภาระกดกระทำใน

แนวแกน ξ หรือ S_x ในขณะที่อาจจะมีภาระดึงกระทำในแนวแกน η หรือ S_y โดยภาระดึงนี้อาจเป็นค่าคงที่หรือเปลี่ยนไปตามภาระกด S_x ชิ้นงานแผ่นบางมีขนาดความยาวตามแนวแกน ξ เป็น a และความกว้างตามแนวแกน η เป็น b โดยมีมุมเอียง (Skew angle) เป็น α ดังแสดงในรูป



รูปที่ 6.1 การรับภาระในแนวระนาบของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ความสัมพันธ์ระหว่างภาระในระบบพิกัด $x-y$ และพิกัด $\xi-\eta$ หาได้จากการรวมแรงในแนวแกน x และแนวแกน y โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
N_x &= \left[S_x + S_y \cos^2(\alpha) \right] / \sin(\alpha) \\
N_y &= S_y \sin(\alpha) \\
N_{xy} &= S_y \cos(\alpha)
\end{aligned}
\tag{6-1}
$$

เมื่อ N_x คือแรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x

N_y คือแรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y

N_{xy} คือแรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือนบนระนาบ x-y

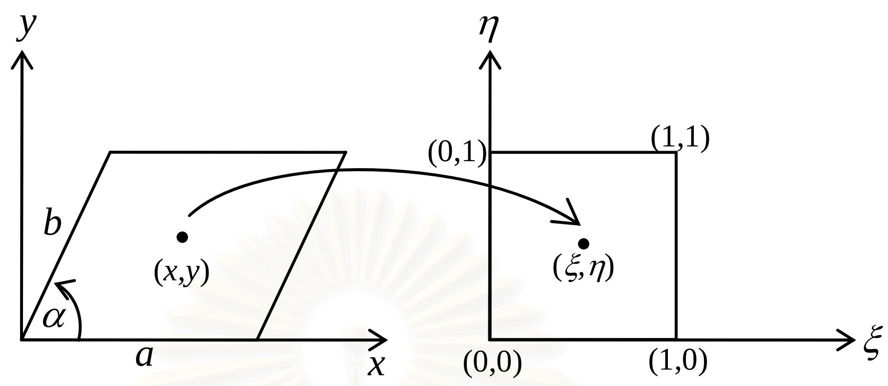
S_x คือค่าภาระการโก่งงอในระบบพิกัด $\xi-\eta$

S_y คือภาระดึงหรือภาระกดในแนวแกน η

6.2 การแปลงแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

การหาค่าพลังงานศักย์รวมโดยการอินทิเกรตบนพื้นที่ของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังแสดงในรูปที่ 6.1 นั้นทำได้ยาก ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงแปลงโครงสร้างคอมโพสิต

แผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความยาว a และความกว้าง b ซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยในพิกัด $\xi-\eta$ ดังแสดงในรูปที่ 6.2 เพื่อให้ง่ายต่อการอินทิเกรต โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหม่นี้มีมุมอยู่ที่พิกัด (0,0), (1,0), (1,1), และ (0,1) ตามลำดับ



(ก) พิกัด $x-y$ (ข) พิกัด $\xi-\eta$

รูปที่ 6.2 การแปลงแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปเป็นแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด $x-y$ และพิกัด $\xi-\eta$ คือ

$$x = a\xi + (b\cos\alpha)\eta \qquad (6\text{-}2)$$

$$y = (b\sin\alpha)\eta \qquad (6\text{-}3)$$

ดังนั้นการหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนพิกัด $\xi-\eta$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))Jd\xi d\eta \qquad (6\text{-}4)$$

โดยที่ J เป็นเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\cos\alpha \\ 0 & b\sin\alpha \end{bmatrix} = ab\sin\alpha \qquad (6\text{-}5)$$

เนื่องจากโครงสร้างคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานถูกแปลงให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัด $\xi-\eta$ ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(\xi,\eta)$ ที่มีในสมการพลังงานศักย์รวมสมการที่ (5-1) สามารถใช้ฟังก์ชันที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช โดยจะต้องแปลงสมการพลังงานศักย์รวมที่อยู่ในระบบพิกัด $x-y$ ให้อยู่ในระบบพิกัด $\xi-\eta$ การแปลงดังกล่าวทำได้โดยใช้

ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด $x-y$ และ $\xi-\eta$ สมการที่ (6-2) และสมการที่ (6-3) และใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) ดังนี้

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (6\text{-}6)$$

และ

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (6\text{-}7)$$

แทนค่า x และ y จากสมการที่ (6-2) และสมการที่ (6-3) ลงในสมการที่ (6-6) และสมการที่ (6-7) หาอนุพันธ์ของ w ในเทอมของ ξ และ η ดังนี้

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$=(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot a)+(\frac{\partial w}{\partial y}\cdot 0)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$=((\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi})\cdot(b\cos\alpha))+(\frac{\partial w}{\partial y}\cdot(b\sin\alpha))$$

$$\therefore \quad \frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{1}{b\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial \eta})-(\frac{1}{a\tan\alpha}\frac{\partial w}{\partial \xi})$$

ส่วนอนุพันธ์อันดับที่สองของ w คือ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi})(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi})$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=(-\frac{1}{a\tan\alpha}\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{1}{b\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial \eta})(-\frac{1}{a\tan\alpha}\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{1}{b\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial \eta})$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=(\frac{1}{b^2\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2})-(\frac{2}{ab\sin\alpha\tan\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta})+(\frac{1}{a^2\tan^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2})$$

และ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=(\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi})((\frac{1}{b\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial \eta})-(\frac{1}{a\tan\alpha}\frac{\partial w}{\partial \xi}))$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{ab\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) - \left(\frac{1}{a^2 \tan\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด $x-y$ และ $\xi-\eta$ ในสมการที่ (6-4) แทนค่า J , $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial x \partial y}$ ลงในสมการที่ (6-4) สามารถจัดรูปแบบสมการของพลังงานศักย์รวมใหม่ได้ดังนี้

$$\Pi = ab\sin\alpha \int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} K_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + K_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) + K_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 + K_4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right) \\ +K_5\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right) + K_6\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 + K_7\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + K_8\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + K_9\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) \end{bmatrix} d\xi d\eta \qquad (6\text{-}8)$$

โดย

$$K_1 = \frac{1}{a^4}\left[\frac{D_{11}}{2} + \frac{D_{12}}{\tan^2\alpha} + \frac{D_{22}}{2\tan^4\alpha} - \frac{2D_{16}}{\tan\alpha} - \frac{2D_{26}}{\tan^3\alpha} + \frac{2D_{66}}{\tan^2\alpha}\right]$$

$$K_2 = \frac{1}{b^2\sin^2\alpha}\left[\frac{D_{12}}{a^2} + \frac{D_{22}}{a^2\tan^2\alpha} - \frac{2D_{26}}{a^2\tan\alpha}\right]$$

$$K_3 = \frac{D_{22}}{2b^4\sin^4\alpha}$$

$$K_4 = \frac{2}{a^3 b\sin\alpha}\left[-\frac{D_{12}}{\tan\alpha} - \frac{D_{22}}{\tan^3\alpha} + D_{16} + \frac{3D_{26}}{\tan^2\alpha} - \frac{2D_{66}}{\tan\alpha}\right]$$

$$K_5 = \frac{2}{ab^3\sin^3\alpha}\left[-\frac{D_{22}}{\tan\alpha} + D_{26}\right]$$

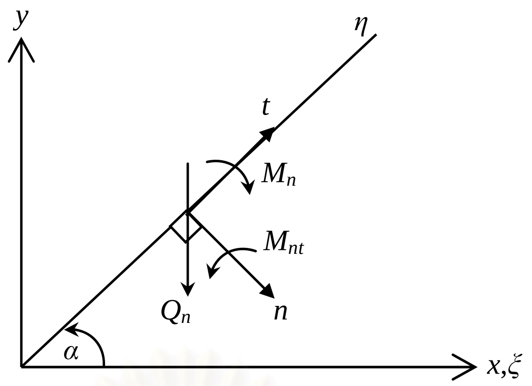
$$K_6 = \frac{2}{a^2b^2\sin^2\alpha}\left[\frac{D_{22}}{\tan^2\alpha} - \frac{2D_{26}}{\tan\alpha} + D_{66}\right]$$

$$K_7 = \frac{1}{2a^2}\left[N_x + \frac{N_y}{\tan^2\alpha} - \frac{2N_{xy}}{\tan\alpha}\right]$$

$$K_8 = \frac{N_y}{2b^2\sin^2\alpha}$$

$$K_9 = \frac{1}{ab\sin\alpha}\left[-\frac{N_y}{\tan\alpha} + N_{xy}\right]$$

ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ $w(\xi,\eta)$ ที่สมมุติขึ้นสำหรับหาพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นในสมการที่ (6-8) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่เกิดขึ้นที่บริเวณขอบของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังแสดงในรูปที่ 6.3 จากรูปที่ 6.3 เงื่อนไขขอบเขตที่เกิดขึ้นที่บริเวณขอบของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในระบบพิกัด $\xi-\eta$ ซึ่งนำเสนอโดย Karami et al. [16] สามารถสรุปได้ดังนี้



รูปที่ 6.3 เงื่อนไขขอบเขตของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในระบบพิกัด $\xi-\eta$

สำหรับกรณีการจับยึดที่ขอบแบบง่าย การเคลื่อนที่นอกระนาบและโมเมนต์ตลอดขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$w = 0, \quad M_n = 0 \tag{6-9}$$

โดย M_n คือโมเมนต์ตลอดความยาวของขอบที่ยึด

สำหรับกรณีการจับยึดที่ขอบแบบยึดแน่นการเคลื่อนที่นอกระนาบและความชันตลอดขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{6-10}$$

สำหรับกรณีที่ขอบปล่อยอิสระโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึดจะมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ

$$M_n = 0, \quad Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0 \tag{6-11}$$

โดย Q_n คือแรงเฉือนในแนวดิ่งตลอดความยาวของขอบที่ยึด

M_{nt} คือโมเมนต์ดัดตลอดความยาวของขอบที่ยึด

ดังนั้นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์สามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$w(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \tag{6-12}$$

โดย $w(\xi,\eta)$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบบนระนาบ $\xi-\eta$

$X_m(\xi)$ คือฟังก์ชันของ ξ อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\xi=0$ และ $\xi=1$

$Y_n(\eta)$ คือฟังก์ชันของ η อย่างเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $\eta=0$ และ $\eta=1$

A_{mn} คือค่าคงที่ที่จะต้องหาซึ่งมีทั้งหมด $M\times N$ ตัว

และฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับตัวแปร ξ และ η สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X_m(\xi) &= A_m \sin p_m\xi + B_m \cos p_m\xi + C_m \sinh q_m\xi + D_m \cosh q_m\xi \\ Y_n(\eta) &= A_n \sin p_n\eta + B_n \cos p_n\eta + C_n \sinh q_n\eta + D_n \cosh q_n\eta \end{aligned} \qquad (6\text{-}13)$$

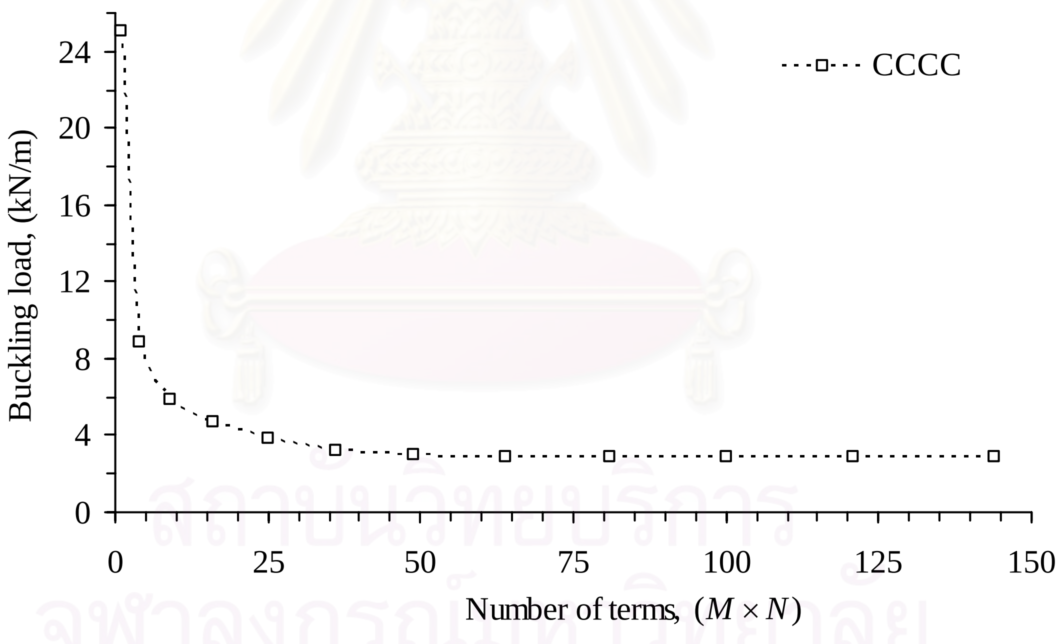
ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถหาได้จากฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบพื้นฐานที่แสดงในสมการที่ (6-13) โดยจะต้องแก้ปัญหาเจาะจงจากระเบียบวิธีริทซ์ เช่นเดียวกับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กล่าวคือเมื่อแก้สมการที่ (4-6) จะได้ค่าภาระการโก่งงอที่อยู่ในระบบพิกัด *x-y* ซึ่งอยู่ในรูปตัวแปร N_x จากความสัมพันธ์สมการที่ (6-1) ก็จะสามารถหาค่าภาระการโก่งงอ S_x ซึ่งอยู่ในระบบพิกัด $\xi-\eta$ ของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้

6.3 ข้อจำกัดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณหาค่าพลังงานศักย์รวมของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วยมาใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับระเบียบวิธีริทซ์ รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนนี้แสดงไว้ในภาคผนวก ก โดยได้มีการตรวจสอบความถูกต้องดังต่อไปนี้

การตรวจสอบข้อจำกัดของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำเสนอก็เพื่อตรวจสอบดูว่าฟังก์ชันที่นำเสนอสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่เกิดขึ้นที่บริเวณขอบของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในระบบพิกัด $\xi-\eta$ หรือไม่ ซึ่งทำได้โดยนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบแทนค่าลงในสมการที่ 6-9 ถึงสมการที่ 6-11 ผลการตรวจสอบพบว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเฉพาะในส่วนของระยะการโก่งงอและความชันตลอดขอบการจับยึดมีค่าเท่ากับศูนย์เท่านั้น แต่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในส่วนของโมเมนต์และแรงเฉือนที่

เกิดขึ้นตลอดขอบการจับยึดที่จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นการหาค่าภาระการโก่งงอจากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตเฉพาะในกรณีที่โครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านเท่านั้น แต่สำหรับกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านที่มีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย หรือปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วยจะได้ค่าภาระการโก่งงอที่เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น เพื่อเป็นการยืนยันว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านให้ค่าภาระการโก่งงอที่มีความลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ได้จริง จึงพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์ที่ใช้ในการคำนวณเทียบกับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากฟังก์ชันดังกล่าว ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ดังแสดงในรูปที่ 6.4 โดยพิจารณาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเอียงของแผ่นมีค่าเท่ากับ 45° และมีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_x ลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ ขนาดความยาว a เท่ากับ 0.9 เมตร และขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับ 0.3 เมตร



รูปที่ 6.4 การลู่เข้าของค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตด้านขนานที่มีมุมเอียง 45°

จากรูปที่ 6.4 แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันที่นำมาใช้ให้ค่าภาระการโก่งงอลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ได้จริง โดยที่ค่าภาระการโก่งงอจะเริ่มลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เมื่อจำนวนพจน์ที่ใช้ตั้งแต่ 49 พจน์ขึ้นไป เพื่อให้ได้ค่าภาระการโก่งงอที่มีความแม่นยำและใช้เวลาในการคำนวณไม่มากเกินไป วิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอค่าภาระการโก่งงอสำหรับแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบเท่ากับ 100 พจน์ ($M = N = 10$) การตรวจสอบความถูกต้องของ

โปรแกรมในส่วนนี้ทำโดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่มีอยู่จากการศึกษาที่มีในอดีตดังนี้

การศึกษาที่ผ่านมาในเอกสารอ้างอิง [9,11,13,18,19] นำเสนอค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_x ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดต่างกันสองแบบคือ การจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยมีคุณสมบัติทางกลของวัสดุเป็นแบบไอโซโทรปิคและมีมุมเอียงของชิ้นงานต่างกันสี่มุมคือ 45°, 60°, 75° และ 90° การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาเหล่านั้นแสดงในตารางที่ 6-1 ซึ่งค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยนิยามตามที่แสดงในสมการที่ 5-2

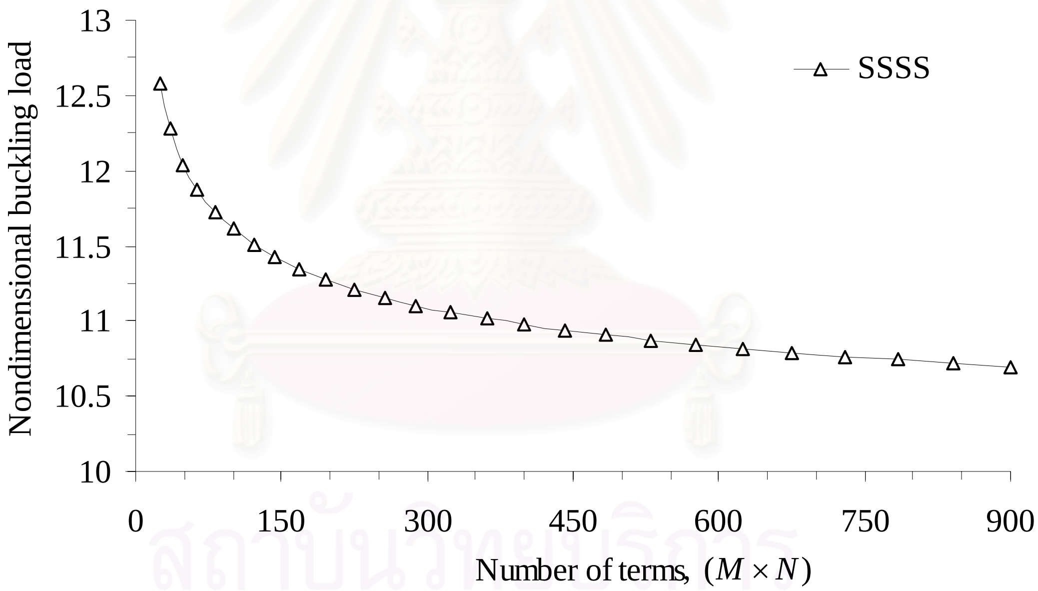
ตารางที่ 6-1 ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยของแผ่นบางที่มีมุมเอียงขนาดต่างๆ

Boundary condition	Method	Skew angle, (α)			
		90°	75°	60°	45°
SSSS	Durvasula [9]	4.00	4.48	6.41	12.30
	Reddy [11]	4.00	4.32	5.55	8.64
	Kennedy [13]	4.00	4.33	5.53	8.47
	Wang [18]	4.00	4.44	6.19	10.60
	Present study	4.00	4.41	6.02	10.70
CCCC	Reddy [11]	10.08	10.76	13.64	20.62
	Wang [18]	10.08	10.89	13.75	20.69
	Ashton [19]	-	11.01	13.79	20.67
	Present study	10.07	10.83	13.54	20.13

จากตารางที่ 6-1 ผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษาต่าง ๆ สำหรับแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมด แต่ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านมีค่าใกล้เคียงกันเฉพาะกรณีที่แผ่นบางมีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 75° เท่านั้น แต่สำหรับแผ่นบางที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 45° และ 60° มีความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงออยู่มาก ซึ่งมีสาเหตุมาจากการเลือกใช้

ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดอย่างสมบูรณ์ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ความสอดคล้องของค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษานี้กับการศึกษาในอดีตเป็นการยืนยันว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในส่วนนี้มีความถูกต้องและเชื่อถือได้

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชัน Double Fourier sine series (สมการที่ 3-26) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ โดยใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณสูงถึง 900 พจน์ ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยที่ได้เมื่อใช้จำนวนพจน์ในฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบต่างๆ กัน แสดงในรูปที่ 6.5 ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ 5-2 โดยทฤษฎีแล้วเมื่อใช้จำนวนพจน์ในการคำนวณที่มากเพียงพอจะได้ค่าภาระการโก่งงอที่มีการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์หากฟังก์ชันที่ใช้มีความเหมาะสม ในการศึกษานี้พิจารณาวัสดุที่เป็นไอโซโทรปิคบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้านและมีมุมเอียงของแผ่นคือ 45° ภาระกด S_x กระทำในแนวแกนเดียว แผ่นบางมีขนาดความยาว a เท่ากับ 0.9 เมตร และขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับ 0.3 เมตร



รูปที่ 6.5 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนพจน์และค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยสำหรับแผ่นที่มีมุมเอียงเท่ากับ 45°

จากรูปที่ 6.5 แสดงให้เห็นว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้ไม่มีการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ ดังนั้นฟังก์ชัน Double Fourier sine series ไม่เหมาะสมที่จะใช้เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบสำหรับหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายทั้งสี่ด้าน โดยเฉพาะปัญหาของแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าน้อยกว่า 60° แต่สำหรับแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าตั้งแต่ 60° ถึง 90° จะได้ค่าภาระการโก่งงอที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยลง เนื่องจากฟังก์ชันการ

เคลื่อนที่นอกระนาบที่ใช้มีเงื่อนไขขอบเขตที่ใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบง่ายมากขึ้น สำหรับชิ้นงานที่มีมุมเอียงมีค่ามาก

เพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถใช้แก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนได้อย่างถูกต้อง นอกจากการศึกษาการลู่เข้าสู่คำตอบโดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่มีจำนวนพจน์ต่างๆ กันแล้ว ในวิทยานิพนธ์นี้ยังเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลลัพธ์ที่มีอยู่จากการศึกษาที่มีในอดีตดังต่อไปนี้ การศึกษาของ Wang [12] นำเสนอค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน โดยมีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_y มุมเอียงของชิ้นงานต่างกันสองมุมคือ 45° และ 60° การวางตัวของเส้นทำมุมต่างกันสามแบบคือ 45°, 60° และ 90° ซึ่งมีคุณสมบัติของวัสดุดังต่อไปนี้

$$E_{11} / E_{22} = 10, \quad G_{12} / E_{22} = 0.5$$
$$\nu_{12} = 0.333 , \quad h/b = 0.001$$

การศึกษานั้นได้นำเสนอค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยโดยคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วย} = (S_y b^2 / \pi^2 E_{22} h^3)$$

ตารางที่ 6-2 เปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการศึกษาของ Wang [12] ส่วนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นเนื่องจากภาระกด S_y แสดงในตารางที่ 6-3 ความแตกต่างระหว่างผลการศึกษาทั้งสองแสดงในรูปของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่าง ซึ่งคำนวณได้จาก

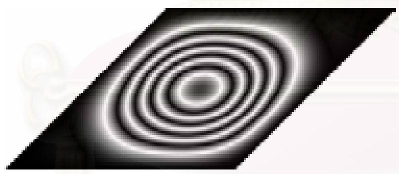
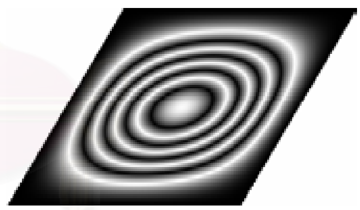
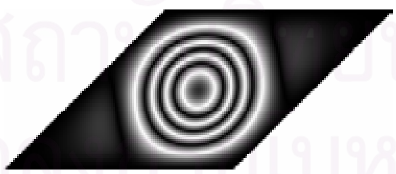
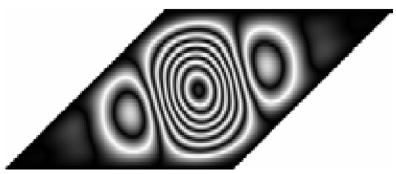
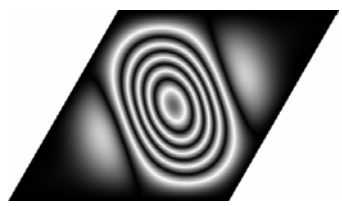
$$\%\ \text{difference} = \frac{\text{Present} - \text{Wang [12]}}{\text{Wang [12]}} \times 100\ \%$$

ผลการเปรียบเทียบพบว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงออยู่ในช่วง -4.315 ถึง +0.042 เปอร์เซ็นต์ แสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถใช้แก้ปัญหาการโก่งงอที่รับภาระในแนวแกน η ได้ นอกจากนี้การเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นจากตารางที่ 6-3 พบว่ามุมการวางตัวของเส้นใยมีผลต่อการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอ ดังเช่นกรณีที่ชิ้นงานมีการวางตัวของเส้นใยแบบ 90° การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดสาม ทำให้มีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าชิ้นงานที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 45° และ 60° ที่การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดหนึ่ง

ตารางที่ 6-2 ค่าภาระการโก่งงอแบบไร้หน่วยจากการศึกษาของ Wang [12] เทียบกับค่าจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สำหรับกรณีการจับยึดแบบ CCCC

Fiber angle, (θ)	Skew angle, (α)					
	45°			60°		
	Wang [12]	Present study	% difference	Wang [12]	Present study	% difference
45°	4.3871	4.3875	0.009	3.0507	3.0509	0.006
60°	5.4533	5.4544	0.020	4.0419	4.0420	0.002
90°	4.1062	3.9290	-4.315	3.9910	3.9927	0.042

ตารางที่ 6-3 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่แสดงในตารางที่ 6-2

Fiber angle, (θ)	Skew angle, (α)	
	45°	60°
45°		
60°		
90°		

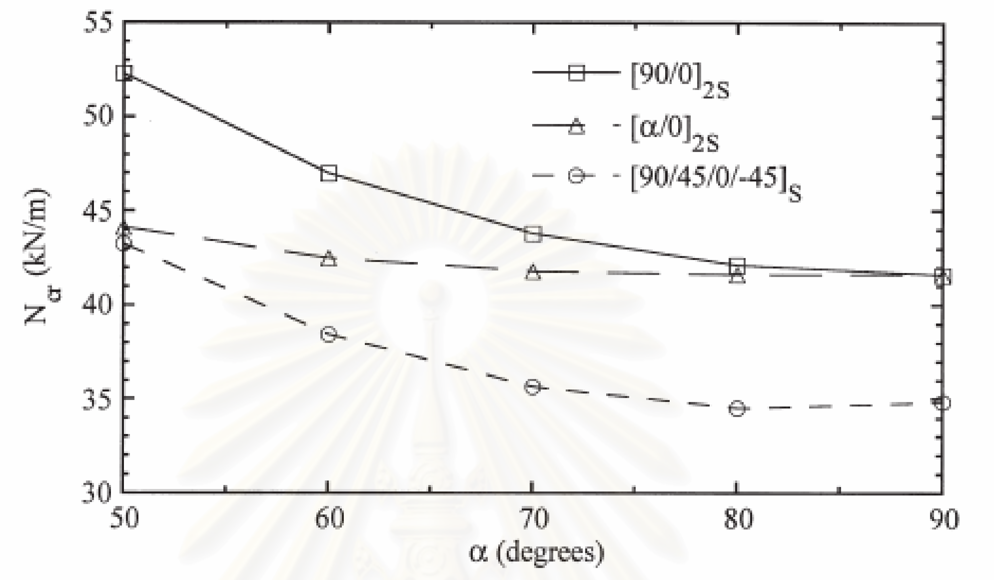
ปัญหาที่นำมาทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นอีกหนึ่งปัญหาคือ ปัญหาการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15] โดย Hu หาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้โปรแกรมไฟไนต์อิเลเมนต์ ABAQUS โดยพิจารณาแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_x โดยมีมุมเอียงของชิ้นงานต่างกันห้ามุมคือ 50°, 60°, 70°, 80° และ 90° และมีคุณสมบัติของวัสดุดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&E_{11} = 128 \text{ GPa},\ \ E_{22} = 11 \text{ GPa, Ply thickness} = 0.125\times10^{-3} \text{ m}\\
&G_{12} = G_{13} = 4.48 \text{ GPa},\ G_{23} = 1.53 \text{ GPa},\ \nu_{12} = 0.25\\
&a = b = 0.1 \text{ m}
\end{aligned}
$$

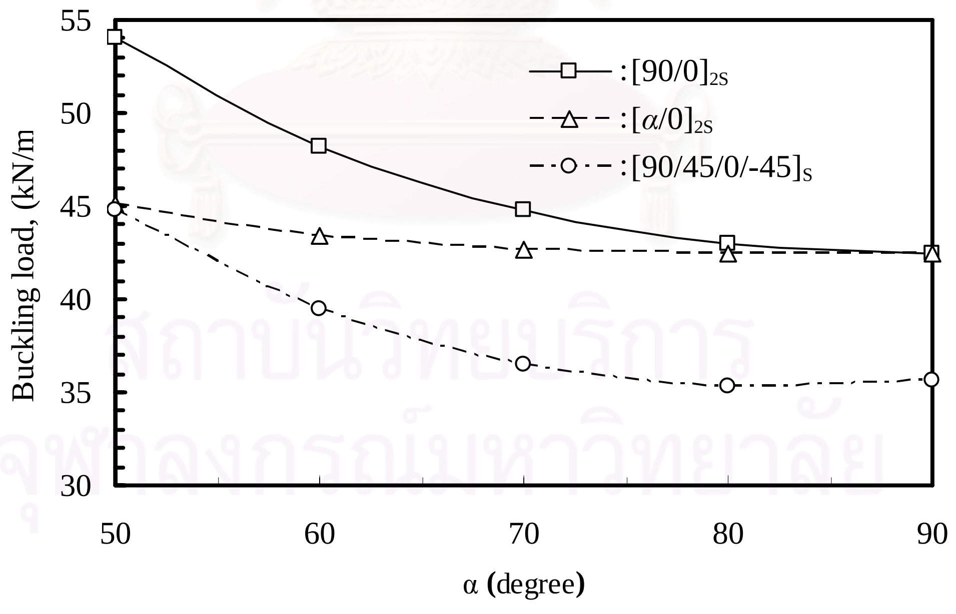
สิ่งที่ต้องการจากการศึกษานี้แบ่งได้เป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสามแบบคือ $[90/0]_{2S}, [\alpha/0]_{2S}$ และ $[90/45/0/-45]_S$ โดยผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษาของ Hu et al. [15] กับค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นแสดงในรูปที่ 6.6 ส่วนที่สองเป็นการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ โดยมุม θ ต่างกัน 19 มุม คือเริ่มจาก $\theta = 0^\circ$ ถึง 90° โดยเพิ่มมุมทีละ 5° โดยรูปค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษาของ Hu et al. [15] แสดงในรูปที่ 6.7 (ก) และค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นแสดงในรูปที่ 6.7 (ข) ผลการเปรียบเทียบทั้งสองส่วนแสดงให้เห็นว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมมีค่าใกล้เคียงและมีแนวโน้มของเส้นกราฟไปในทิศทางเดียวกับแนวโน้มของเส้นกราฟของค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากการศึกษาของ Hu et al. [15] กล่าวคือค่าภาระการโก่งงอจะมีค่ามากเมื่อมุมเอียงของแผ่นคอมโพสิตมีค่าน้อยและมีค่ามากสุดเมื่อลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ โดยที่ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $0^\circ < \theta < 45^\circ$ และค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลดลงเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $45^\circ < \theta < 90^\circ$

ผลการเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่ได้จากโปรแกรมคอมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากการศึกษาที่ผ่านมาในเอกสารอ้างอิง [9,11,12,13,15,18,19] สำหรับกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ทั้งในกรณีที่รับภาระกด S_x และรับภาระกด S_y พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมด แสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถใช้แก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนได้อย่างถูกต้องและให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เชื่อถือได้ ในส่วนถัดไปของวิทยานิพนธ์นี้จะประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่น

ภาระดึงตามขวาง (S_y) และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยต่อพฤติกรรมการโก่งงอ รวมถึงนำเสนอค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน

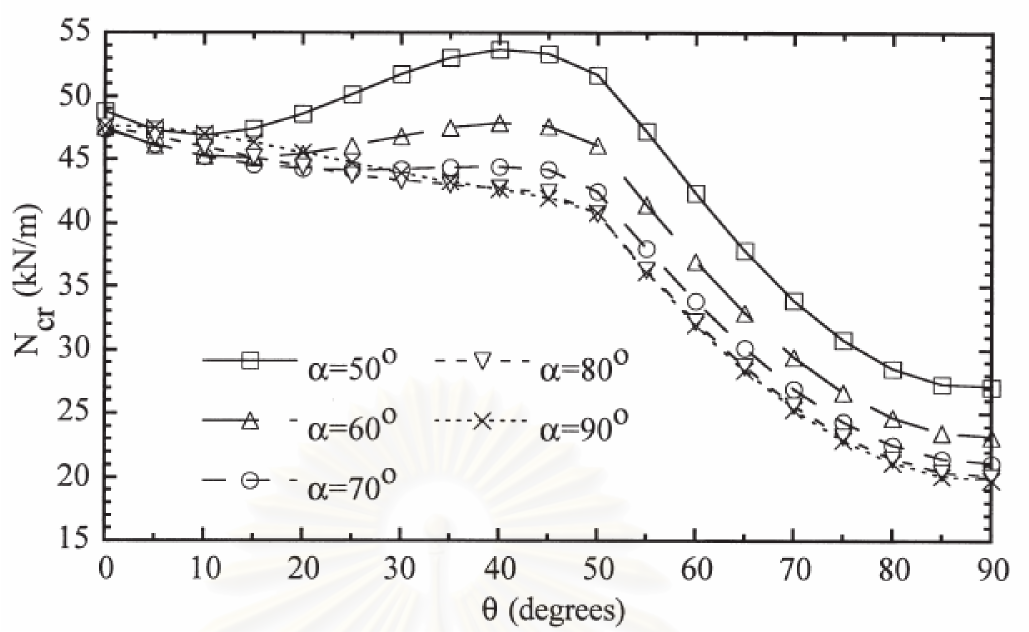


(ก) รูปค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15]

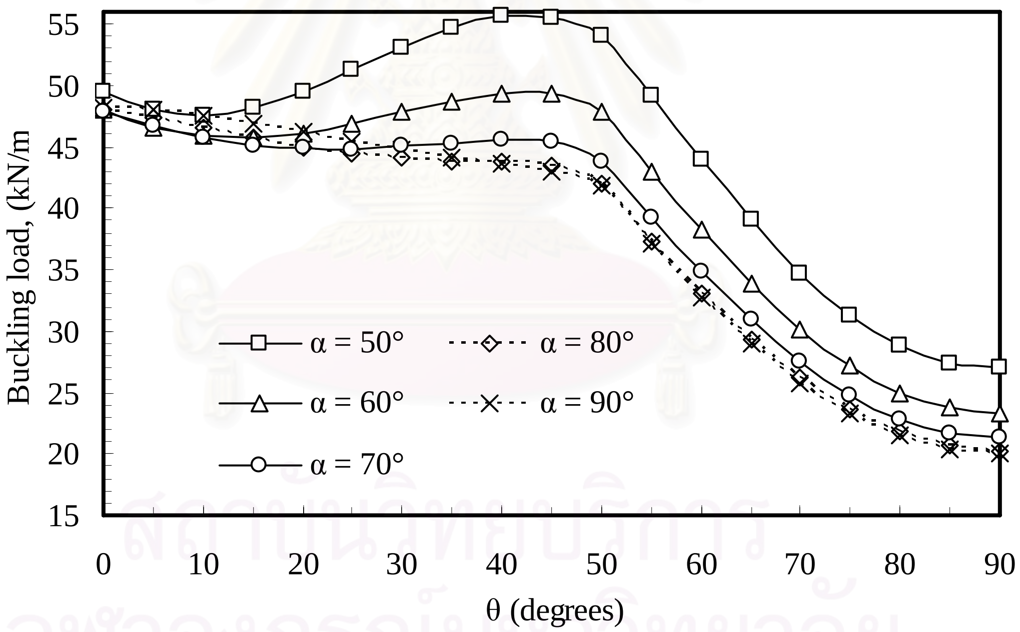


(ข) ค่าภาระการโก่งงอจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

รูปที่ 6.6 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15] (ก) กับค่าที่ได้จากโปรแกรม (ข) กรณีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกัน



(ก) รูปค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15]



(ข) ค่าภาระการโก่งงอจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

รูปที่ 6.7 การเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอจากการศึกษาของ Hu et al. [15] (ก) กับค่าที่ได้จากโปรแกรม (ข) กรณีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ

6.4 พฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นบางที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดแน่น

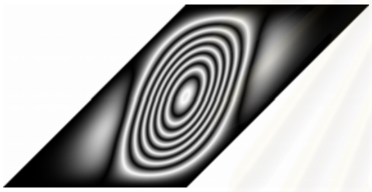
ในหัวข้อที่ 6.3 ได้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำมาใช้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านเท่านั้น ในส่วนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นพบว่าสามารถใช้แก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่รับภาระทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกนได้อย่างถูกต้องและให้ค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เชื่อถือได้ ในหัวข้อนี้จะนำโปรแกรมดังกล่าวมาประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอที่เกิดขึ้นจากผลกระทบต่างๆ ของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านดังนี้

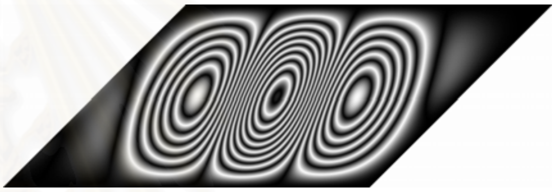
6.4.1 ผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

การศึกษาในส่วนนี้เพื่อศึกษาการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอที่เกิดขึ้นของชิ้นงานที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม $\alpha = 45^\circ$ และมีขนาดความยาว a เท่ากับ 0.3, 0.45, 0.6, 0.75 และ 0.9 เมตร โดยที่มีขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าคงที่เท่ากับ 0.3 เมตร ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_x และมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสามแบบคือ $[0/90]_{2S}$, $[45]_8$ และ $[\pm45]_{2S}$ ค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอ แสดงในตารางที่ 6-4 พบว่าสำหรับแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และ $[45]_8$ ความทนทานต่อการโก่งงอจะมีค่าลดลงเสมอเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้น แต่กรณีที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ ความทนทานต่อการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเฉพาะกรณีที่แผ่นบางมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้นจาก 0.424 เพิ่มเป็น 0.636 เท่านั้น แต่เมื่อแผ่นบางมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเพิ่มขึ้นจาก 0.636 เพิ่มเป็น 0.848, 1.060 และ 1.272 ความทนทานต่อการโก่งงอที่เกิดขึ้นมีค่าลดลง ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าความทนทานของแผ่นบางจะไม่มีค่าลดลงเสมอไปเมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้น และรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ ที่ขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน แสดงในรูปที่ 6.8 จะเห็นได้ว่ามีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นเมื่อแผ่นบางมีขนาดความยาวในแนวแกนที่รับภาระมีค่ามากพอ ดังเช่นการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจากโหมดที่หนึ่งเป็นโหมดที่สอง เมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.424 เพิ่มเป็น 0.636 นอกจากนี้ยังมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเพิ่มขึ้นอีกจากโหมดสองเป็นโหมดสาม และเปลี่ยนเป็นโหมดสี่ เมื่อขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.636 เป็น 0.848 และเพิ่มขึ้นจาก 0.848 เป็น 1.060 ตามลำดับ

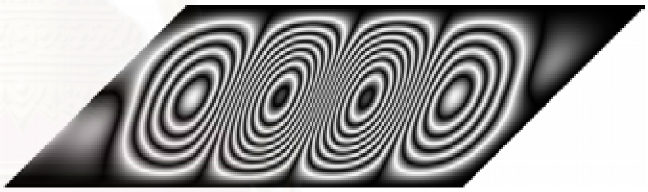
ตารางที่ 6-4 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีมุม $\alpha = 45^{\circ}$ และมีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน

Aspect ratio, (a/b)	Buckling load, S_x (kN/m)		
	$[0/90]_{2S}$	$[45]_8$	$[\pm 45]_{2S}$
0.424	3.932	1.791	3.612
0.636	2.990	1.649	3.809
0.848	2.700	1.601	2.941
1.060	2.572	1.572	2.877
1.272	2.502	1.558	2.846


Aspect ratio = 0.424


Aspect ratio = 0.848


Aspect ratio = 0.636


Aspect ratio = 1.060

รูปที่ 6.8 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบาง $[\pm 45]_{2S}$ ที่มีขนาดสัดส่วนต่างๆ กัน

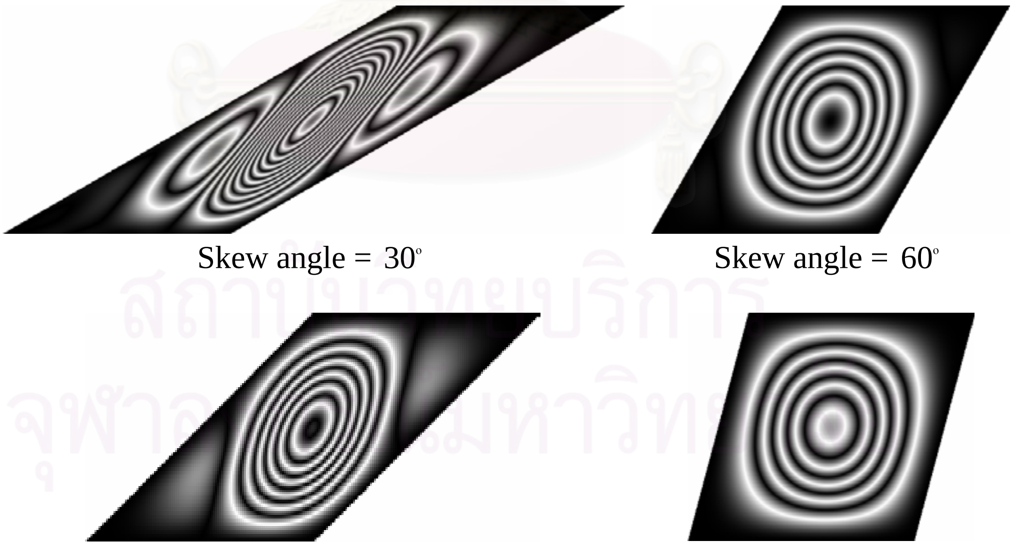
6.4.2 ผลกระทบของมุมเอียงของแผ่นคอมโพสิตที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

ในบทที่ 5 ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าพบว่าการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวของเส้นใยและเงื่อนไขขอบเขตการจับยึด การศึกษาในส่วนนี้เพื่อศึกษาผลของมุมเอียงของแผ่นบางจะมีผลอย่างไรต่อพฤติกรรมการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอ โดยมีลักษณะของปัญหาการโก่งงอที่คล้ายๆ กันคือแผ่นคอมโพสิตบางมีขนาดความยาว a และขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับ 0.3 เมตร มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสามแบบคือ $[0/90]_{2S}$, $[45]_8$ และ $[\pm 45]_{2S}$ โดยที่แผ่นบางมีมุมเอียงต่างกันสี่มุมคือ 30°, 45°, 60° และ 75° ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีภาระกด S_x กระทำในแนวแกนเดียว แสดงในตารางที่ 6-5 โดยหาได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอ พบว่าแผ่นบางที่

มีมุม α มีค่ามากจะมีความทนทานต่อการโก่งงอได้ดีกว่าแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าน้อยกว่าเสมอ ดังเช่นกรณีที่แผ่นบางมีมุม $\alpha = 75^{\circ}$ จะมีค่าภาระการโก่งงอมากกว่าแผ่นบางที่มีมุม $\alpha = 60^{\circ}$ และค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อมุม α มีค่าน้อยลง โดยที่กรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุดและกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุดสำหรับการวางตัวของเส้นใยทั้งสามแบบที่ศึกษา นอกจากนี้การศึกษาพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นสำหรับกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ ที่มุมเอียงของแผ่นแตกต่างกัน แสดงในรูปที่ 6.9

ตารางที่ 6-5 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีมุมเอียงแตกต่างกัน

Skew angle, (α)	Buckling load, S_x (kN/m)		
	$[0/90]_{2S}$	$[45]_8$	$[\pm 45]_{2S}$
75°	5.499	2.792	4.979
60°	4.907	2.275	4.456
45°	3.932	1.791	3.612
30°	2.607	1.255	2.507



รูปที่ 6.9 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นบาง $[0/90]_{2S}$ ที่มีมุมเอียงของแผ่นต่างกัน

จากรูปที่ 6.9 พบว่ามุม α ของแผ่นบางมีผลกระทบต่อพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอ โดยแผ่นบางที่มีมุม α มีค่ามากโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นจะเป็นโหมดต่ำดังเช่นกรณีโหมดที่หนึ่ง

สำหรับแผ่นบางมีมุม $\alpha =$ 60° และ 75° เมื่อแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าน้อยลงพอที่จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่นอกระนาบเกิดขึ้นที่มุมของชิ้นงาน จะทำให้เกิดโหมดการโก่งงอเพิ่มขึ้น ดังเช่นกรณีที่แผ่นบางมีมุม $\alpha =$ 30° และ 45° การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดที่สาม

6.4.3 ผลกระทบของภาระดึงตามขวาง (S_y) ที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

จากการศึกษาที่มีอยู่ในอดีตพบว่ามีเพียงการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวเท่านั้น การศึกษานี้จะนำเสนอผลการศึกษาของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีภาระกระทำสองแกนคือ มีภาระกด S_x กระทำในแนวแกน ξ และมีภาระดึงตามแนวขวาง S_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน η เพื่อดูว่ามีผลอย่างไรต่อพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอและค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบาง โดยศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม $\alpha = 45°$ และมีสัดส่วนภาระ S_y / S_x ทั้งหมดห้าสัดส่วนคือ 0, -0.5, -1, -1.5 และ -2 แผ่นบางมีขนาดความยาว a และขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับ 0.3 เมตร โดยมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยต่างกันสามแบบคือ $[0/90]_{2S}$ $[45]_8$ และ $[\pm45]_{2S}$ ตารางที่ 6-6 คือผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอ พบว่าแผ่นบางที่มีภาระดึง S_y กระทำอยู่จะมีความทนทานต่อการโก่งงอเพิ่มขึ้นเมื่อได้รับภาระกด S_x กล่าวคือมีความทนทานต่อการโก่งงอมากกว่าแผ่นบางที่ไม่มีภาระดึงตามขวางมากระทำหรือแผ่นบางที่มีสัดส่วนภาระมีค่าน้อยกว่า ดังเช่นกรณีที่แผ่นบางมีสัดส่วนภาระเท่ากับ -0.5 จะมีค่าภาระการโก่งงอมากกว่าแผ่นบางที่มีภาระกด S_x มากระทำเพียงอย่างเดียวคือมีสัดส่วนภาระเท่ากับ 0 แต่จะมีค่าภาระการโก่งงอน้อยกว่าเมื่อแผ่นบางมีสัดส่วนภาระมากกว่า -0.5 ดังเช่นกรณีที่สัดส่วนภาระเท่ากับ -1, -1.5 และ -2 โดยค่าภาระการโก่งงอเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามค่าสัดส่วนภาระที่เพิ่มขึ้น สำหรับการศึกษานี้การวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุดและกรณีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุด โดยที่รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และ $[45]_8$ แสดงในตารางที่ 6-7 พบว่าการวางตัวของเส้นใยมีผลต่อการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอ ดังเช่นกรณีที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ จะมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นจากโหมดที่สองเป็นโหมดที่สาม เมื่อสัดส่วนภาระมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก -1 เป็น -1.5 และแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ จะมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นจากโหมดที่หนึ่งเมื่อแผ่นบางมีภาระกด S_x กระทำในแนวแกนเดียวเปลี่ยนเป็นโหมดที่สองเมื่อแผ่นบางมีสัดส่วนภาระเท่ากับ -0.5 และจะเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ถ้าขนาดของภาระดึงตามขวางมีขนาดสูงพอ และยังพบว่าแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ จะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$

6.4.4 ผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ

นอกเหนือจากการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$, $[45]_8$ และ $[\pm 45]_{2S}$ แล้ว วิทยานิพนธ์นี้ยังได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางที่มีการวางของเส้นใยแบบต่างๆ คือ แผ่นบางมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ โดยที่มุมองศาการวางตัวของเส้นใยต่างกัน 7 มุม คือเริ่มจาก $\theta = 0^{\circ}$ ถึง 90° และเพิ่มมุมทีละ 15° แผ่นบางมีมุมเอียงของแผ่นคือ $\alpha = 45^{\circ}$ และมีความยาว a เท่ากับ 0.3 เมตร ขนาดความสูงตามแนวแกน y มีค่าเท่ากับ 0.3 เมตร ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียว คือ S_x ผลการศึกษาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากการศึกษานี้แสดงในตารางที่ 6-8 จากผลการศึกษาพบว่าแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ ความทนทานต่อการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อแผ่นบางมีมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $0^{\circ} < \theta < 45^{\circ}$ และเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใยอยู่ในช่วง $45^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ แผ่นบางจะมีความทนทานต่อการโก่งงอลดลง โดยที่แผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุด และแผ่นบางที่มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุดคือกรณีที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 90]_{2S}$ เนื่องจากเส้นใยมีการวางตัวในทิศทางตั้งฉากกับภาระกดที่กระทำจึงทำให้มีการโก่งงอเกิดขึ้นเมื่อได้รับภาระกดที่มีค่าน้อยกว่าค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ นอกจากนี้ยังพบว่าลักษณะการวางตัวของเส้นใยมีผลต่อพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นที่มุมของแผ่นบาง เช่นเดียวกับกรณีที่แผ่นบางมีระยะการเคลื่อนที่นอกระนาบเกิดขึ้นที่มุมเนื่องจากผลกระทบของมุม α ที่มีค่าน้อยพอจะทำให้เกิดโหมดการโก่งงอเพิ่มขึ้นที่มุมของชิ้นงานจากที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้ โดยแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0]_8$ และ $[\pm 30]_{2S}$ การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดหนึ่ง แต่เมื่อมีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ พบว่าจะมีโหมดการโก่งงอเกิดเพิ่มขึ้นที่มุมของแผ่นบางทำให้การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดสาม และมีโหมดการโก่งงอเพิ่มขึ้นอีกเมื่อแผ่นบางมีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 60]_{2S}$, $[\pm 75]_{2S}$ และ $[\pm 90]_{2S}$ เนื่องจากมุมการวางตัวของเส้นใยมีค่ามากกว่า 45° ทำให้ความทนทานต่อการโก่งงอของแผ่นบางเมื่อได้รับภาระกด S_x มีค่าลดลง จึงทำให้การโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดที่สูงกว่าโหมดการโก่งงอของแผ่นบางที่มีมุมการวางตัวของเส้นใยน้อยกว่าหรือเท่ากับ 45° นั่นคือการโก่งงอเกิดขึ้นที่โหมดสี่

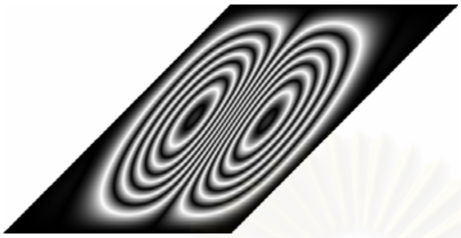
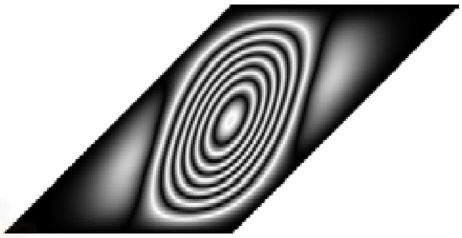
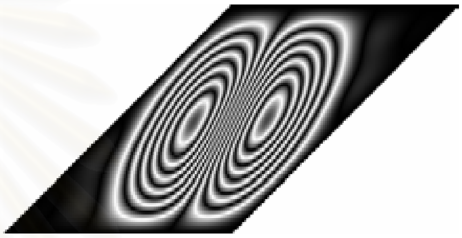
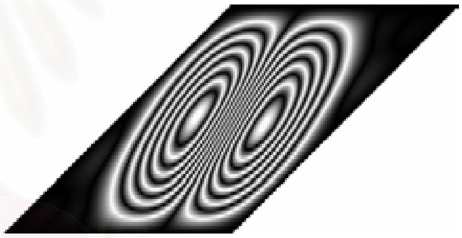
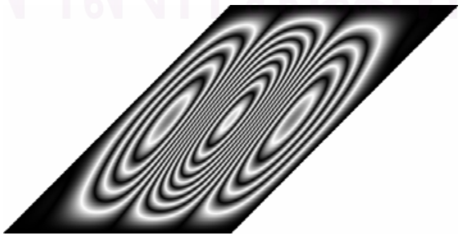
ในบทนี้ได้แสดงพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CCCC พบว่าแผ่นบางที่มีมุม α มีค่ามากเมื่อมีภาระกด S_x มากระทำจะมีความทนทานต่อการโก่งงอมากกว่าแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าน้อยกว่าเสมอ โดยที่การเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจะเกิดขึ้นที่มุมของแผ่นบาง ถ้าแผ่นบางนั้นมีมุม α ที่มีค่าน้อยพอที่จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่นอกระนาบเกิดขึ้นที่มุมของแผ่นบาง ดังเช่นผลจากการศึกษาใน

หัวข้อที่ 6.4.2 แต่ถึงอย่างไรก็ตามความทนทานต่อการโก่งงอก็ยังมีผลเนื่องจากลักษณะการวางตัวของเส้นใยของแผ่นบาง ดังเช่นกรณีศึกษาในหัวข้อที่ 6.4.1 แสดงให้เห็นว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนสูงกว่าไม่จำเป็นที่จะมีค่าภาระการโก่งงอน้อยกว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนน้อยกว่าเสมอไป เนื่องจากโหมดการโก่งงอของชิ้นงานทั้งสองอาจจะไม่เหมือนกัน โดยการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนสูงกว่าจะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนมีค่าน้อยกว่าเสมอ ซึ่งลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจะขึ้นอยู่กับขนาดความยาว a ที่มีค่ามากพอ โดยมีลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจากโหมดที่หนึ่งเป็นโหมดที่สอง และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ตามขนาดความยาว a ที่มีค่ามากพอที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนโหมดการโก่งงอเกิดขึ้น นอกจากนี้ลักษณะการวางตัวของเส้นใยของแผ่นบางยังมีผลต่อพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอด้วยเช่นกัน ดังแสดงในหัวข้อที่ 6.4.4 สำหรับแผ่นบางที่มีภาระกด S_x มากระทำและมีลักษณะการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ จะมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นจากโหมดที่หนึ่งเป็นโหมดที่สาม และเพิ่มเป็นโหมดที่สี่ โดยแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm45]_{2S}$ จะมีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุดและแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm90]_{2S}$ จะมีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุด ยังมีอีกหนึ่งการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่น่าสนใจ คือ กรณีที่แผ่นบางมีภาระกด S_x กระทำในแนวแกน ξ และในขณะเดียวกันมีภาระดึงตามแนวขวาง S_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน η ผลจากการศึกษาในส่วนนี้แสดงในหัวข้อที่ 6.4.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางที่มีขนาดของภาระดึง S_y ที่มากระทำมีขนาดมากๆ จะมีความทนทานต่อการโก่งงอและมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีขนาดของภาระดึง S_y ที่มากระทำมีขนาดน้อยกว่าเสมอ โดยที่การเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจะเกิดขึ้นเมื่อแผ่นบางมีขนาดของภาระดึงตามขวางที่มีขนาดสูงพอมากระทำ

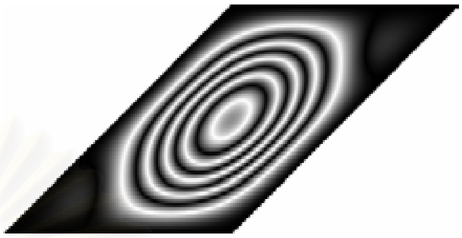
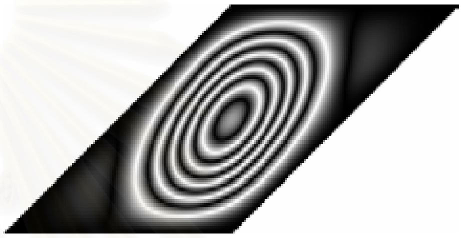
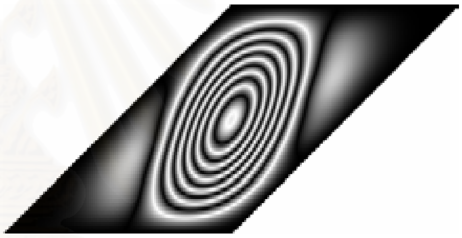
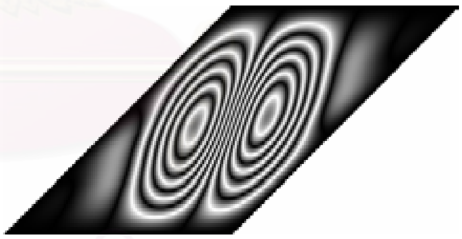
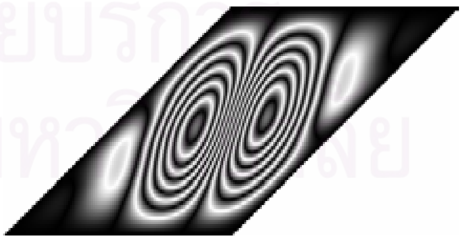
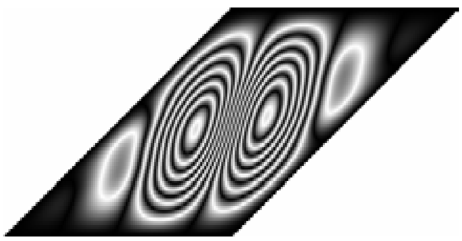
ตารางที่ 6-6 ค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน

Load ratio, (S_y/S_x)	Buckling load, S_x (kN/m)		
	$[0/90]_{2S}$	$[45]_8$	$[\pm45]_{2S}$
0	3.932	1.791	3.612
-0.5	5.857	2.059	4.870
-1	7.270	2.376	6.194
-1.5	8.859	2.661	7.800
-2	10.668	2.924	9.664

ตารางที่ 6-7 เส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน

Load ratio, (S_y/S_x)	Buckling load and Buckling mode	
	$[45]_8$	$[\pm 45]_{2S}$
0	 S_y = 0 kN/m	 S_y = 0 kN/m
-0.5	 S_y = 1.029 kN/m	 S_y = 2.435 kN/m
-1	 S_y = 2.376 kN/m	 S_y = 6.194 kN/m
-1.5	 S_y = 3.991 kN/m	 S_y = 11.700 kN/m
-2	 S_y = 5.848 kN/m	 S_y = 19.328 kN/m

ตารางที่ 6-8 ค่าภาระการโก่งงอและเส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตที่มีมุมเอียง 45° และมีการวางตัวของเส้นใยแบบต่างๆ

Stackling sequence	Buckling load, S_x (kN/m)	Buckling mode
$[0]_8$	3.038	
$[\pm 30]_{2S}$	3.431	
$[\pm 45]_{2S}$	3.612	
$[\pm 60]_{2S}$	2.884	
$[\pm 75]_{2S}$	2.032	
$[\pm 90]_{2S}$	1.738	

บทที่ 7

บทสรุป

7.1 บทสรุป

งานวิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ หลายๆ แบบ โดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ถึงแม้ระเบียบวิธีแคนโทโรวิชจะใช้ได้กับโครงสร้างแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ 0° หรือ 90° เท่านั้น แต่ระเบียบวิธีนี้สามารถใช้แก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย แบบยึดแน่น หรือที่ขอบปล่อยอิสระ ในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีริทซ์ เมื่อเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้จากระเบียบวิธีที่นำเสนอกับค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยในอดีตสำหรับกรณีการจับยึดแบบ CCCC และ CSCS พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้โดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชให้ค่าที่มีความแม่นยำกว่าการใช้ฟังก์ชันซายน์เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ นอกจากนี้พฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้จากการศึกษานี้ก็มีรูปร่างเหมือนกับผลการศึกษาในอดีตอีกด้วย อย่างไรก็ตามการศึกษาในส่วนนี้พบว่าสำหรับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากรณีที่มีการจับยึดแบบ F-F ร่วมอยู่ด้วยไม่สามารถหาค่าภาระการโก่งงอได้จากการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช เนื่องจากให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ไม่สมเหตุสมผล ในวิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอแนวทางการแก้ปัญหาในกรณีที่มีการจับยึดแบบ F-F ร่วมอยู่ด้วย โดยให้พิจารณาปัญหาเป็นการโก่งงอของเสา ทำให้ได้โหมดการโก่งงอที่น่าเชื่อถือกว่า เมื่อพิสูจน์ได้ว่าการหาค่าภาระการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอโดยใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชให้ค่าที่มีความแม่นยำกว่า การศึกษาในลำดับถัดมาเป็นการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกระทำทั้งแบบแกนเดียวและแบบสองแกน โดยได้ศึกษาการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ว่ามีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงออย่างไร ซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

การศึกษากรณีแรกเป็นการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอ สำหรับกรณีนี้ได้ศึกษาแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานขนาดต่างๆ กันทั้งหมดห้าสัดส่วน เมื่อแผ่นบางได้รับภาระกด N_x กระทำพบว่าที่ขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กันไม่มีผลทำให้แผ่นบางสามารถทนทานต่อการโก่งงอได้ดีขึ้นแต่ขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวของเส้นใย และเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดที่ทำให้แผ่นบางมีความ

ทนทานต่อการโก่งงอเพิ่มขึ้น แต่ถึงอย่างไรก็ตามขนาดสัดส่วนของชิ้นงานจะมีผลกระทบต่อพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นบาง โดยที่แผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่ามากจะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าน้อย ซึ่งจำนวนโหมดการโก่งงอจะขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวของเส้นใย และเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดด้วยเช่นกัน ดังเช่นรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นสำหรับกรณีการจับยึดแบบ CSCS ที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ จะเกิดรูปร่างโหมดการโก่งงอเท่ากับหรือมากกว่าการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0/90]_{2S}$ และจะมีจำนวนโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นบนแผ่นบางมากกว่ากรณีการจับยึดแบบ SCSF

การศึกษาในลำดับถัดมาเป็นการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีภาระกด N_x กระทำในแนวแกน x ในขณะเดียวกันมีภาระดึงตามแนวขวาง N_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน y โดยมีสัดส่วนภาระ N_y / N_x ที่กระทำกับแผ่นบางต่างกันทั้งหมดห้าสัดส่วน พฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นพบว่าแผ่นบางที่มีภาระดึง N_y กระทำอยู่จะมีความทนทานต่อการโก่งงอและมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่รับภาระกด N_x เพียงอย่างเดียว หรือแผ่นบางที่มีขนาดของภาระดึงตามแนวขวางมีขนาดน้อยกว่า โดยที่กรณีการจับยึดแบบ SCSF และ CFSC ที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานเท่ากับหนึ่ง ไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเมื่อเพิ่มภาระดึงตามขวาง เนื่องจากมีด้านหนึ่งของเงื่อนไขขอบเขตปล่อยอิสระ

การศึกษาในลำดับสุดท้ายสำหรับพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นจากผลกระทบต่างๆ ของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ การศึกษาผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ ภายใต้ภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ N_x สิ่งที่ได้จากการศึกษานี้พบว่ากรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ CSSC, CFSC และ CCCC จะมีค่าภาระการโก่งงอเพิ่มขึ้นเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใย θ มีค่าเพิ่มขึ้น แต่กรณีที่มีการจับยึดแบบ CCCF ค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าเพิ่มขึ้นเฉพาะ θ อยู่ในช่วง $0^{\circ} < \theta < 45^{\circ}$ และค่าภาระการโก่งงอจะมีค่าลดลงเมื่อ θ อยู่ในช่วง $45^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ ซึ่งค่าภาระการโก่งงอไม่จำเป็นจะต้องมีค่าลดลงเสมอไปเมื่อมุมองศาการวางตัวของเส้นใย θ มีค่าเพิ่มขึ้น โดยแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 90]_{2S}$ จะมีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุด สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอพบว่าเส้นรูปร่างโหมดการโก่งงอของด้านที่มีการจับยึดแบบง่ายจะมีความชันมากกว่าด้านที่มีการจับยึดแบบยึดแน่น โดยที่กรณีการจับยึดแบบ CCCC มีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่ากรณีการจับยึดแบบ CSSC แต่กรณีการจับยึดแบบ CCCF และ CFSC ไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเนื่องจากมีด้านหนึ่งของเงื่อนไขขอบเขตปล่อยอิสระ

นอกเหนือจากการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแล้ววิทยานิพนธ์นี้ยังได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทำโดยการนำฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วยมาประยุกต์ใช้ โดยการแปลงโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งอยู่ในพิกัด x-y ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในพิกัด ξ-η เมื่อตรวจสอบการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ของค่าภาระการโก่งงอจากการใช้ฟังก์ชันที่นำเสนอพบว่าได้ค่าภาระการโก่งงอที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เฉพาะกรณีการจับยึดแบบ CCCC เท่านั้น แต่สำหรับกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านที่มีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย หรือที่ขอบปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วยจะได้ค่าภาระการโก่งงอซึ่งเป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น โดยความคลาดเคลื่อนของค่าภาระการโก่งงอที่ได้จะมีมากขึ้นเมื่อมุมเอียงของชิ้นงานมีค่าน้อยลง และเมื่อเปรียบเทียบค่าภาระการโก่งงอที่มีอยู่จากงานวิจัยในอดีตสำหรับกรณีการจับยึดแบบ SSSS และ CCCC พบว่าค่าภาระการโก่งงอที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันเฉพาะกรณีการจับยึดแบบ CCCC เท่านั้น แต่สำหรับกรณีการจับยึดแบบ SSSS มีความแตกต่างของค่าภาระการโก่งงออยู่มากเนื่องจากฟังก์ชันที่ใช้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ด้วยเหตุนี้การศึกษาในลำดับถัดมาจึงเป็นการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดขึ้นจากผลกระทบต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านเท่านั้น

นอกจากนี้ยังมีการศึกษาผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงานที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเอียงของแผ่นคือ 45° โดยมีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างกันห้าสัดส่วน เมื่อแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กันมีภาระกด S_x มากระทำเพียงอย่างเดียว พบว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนสูงกว่าไม่จำเป็นที่จะมีค่าภาระการโก่งงอน้อยกว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนน้อยกว่าเสมอไป เนื่องจากโหมดการโก่งงอของชิ้นงานทั้งสองอาจจะไม่เหมือนกัน ซึ่งความทนทานดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับลักษณะการวางตัวของเส้นใยเช่นเดียวกับกรณีของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานต่างๆ กัน แต่รูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่ามากจะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีขนาดสัดส่วนของชิ้นงานมีค่าน้อยกว่าเสมอ

การศึกษาในลำดับถัดมาเป็นการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีภาระกดกระทำในแนวแกนเดียวคือ S_x โดยที่มีมุม α ต่างกันสี่มุม ผลจากการศึกษาพบว่าแผ่นบางที่มีมุม α มีค่ามากจะมีความทนทานต่อการโก่งงอมากกว่าแผ่นบางที่มีมุม α มีค่าน้อยกว่าเสมอ สามารถเรียงลำดับลักษณะการวางตัวของเส้นใยที่มีความทนทานต่อการโก่งงอจากมากที่สุดไปหาน้อยที่สุดได้ดังนี้ $[0/90]_{2S}$ > $[\pm45]_{2S}$ > $[45]_8$ สำหรับการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอจะเกิดขึ้นที่มุมของแผ่นบาง ถ้าแผ่นบางนั้นมีมุม α ที่มีค่าน้อยพอที่จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่นอกระนาบเกิดขึ้นที่มุมของชิ้นงาน

พฤติกรรมการโก่งงอที่น่าสนใจอีกอย่างและยังไม่มีการศึกษามาก่อนหน้านี้ของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานก็คือ พฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นเมื่อแผ่นบางมีมุมเอียงเท่ากับ

45° และมีภาระกระทำในสองแกนคือ มีภาระกด S_x กระทำในแนวแกน ξ และมีภาระดึงตามแนวขวาง S_y ซึ่งมีค่าคงที่กระทำในแนวแกน η ที่มีสัดส่วนภาระต่างๆ กัน ผลจากการศึกษาในส่วนนี้แสดงให้เห็นว่าความทนทานของแผ่นบางจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมีภาระดึงตามแนวขวางมากระทำ โดยที่ความทนทานต่อการโก่งงอจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของภาระดึงตามแนวขวางที่มากระทำ และจะมีการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นถ้าขนาดของภาระดึงตามแนวขวางมีค่ามากพอ ซึ่งโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นบนแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[45]_8$ จะมีมากกว่าแผ่นบางที่มีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$

การศึกษาในลำดับสุดท้ายสำหรับพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นจากผลกระทบต่างๆ ของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ ศึกษาผลกระทบของมุมองศาการวางตัวของเส้นใยที่มีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมเอียงของแผ่นเท่ากับ 45° และมีการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm\theta]_{2S}$ เมื่อแผ่นบางได้รับภาระกด S_x กระทำเพียงอย่างเดียว การศึกษานี้พบว่าแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 45]_{2S}$ มีความทนทานต่อการโก่งงอมากที่สุด และแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 90]_{2S}$ มีความทนทานต่อการโก่งงอน้อยที่สุด ในส่วนการศึกษาพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นพบว่าแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[\pm 60]_{2S}$, $[\pm 75]_{2S}$ และ $[\pm 90]_{2S}$ จะมีโหมดการโก่งงอเกิดขึ้นมากกว่าแผ่นบางที่มีลำดับชั้นการวางตัวของเส้นใยแบบ $[0]_8$, $[\pm 30]_{2S}$ และ $[\pm 45]_{2S}$

ผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ การหาค่าภาระการโก่งงอ และรูปร่างโหมดการโก่งงอด้วยวิธีการเชิงตัวเลขในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นข้อดีของการแก้ปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างคอมโพสิตแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้ระเบียบวิธีริทซ์ร่วมกับฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชสำหรับงานออกแบบทางด้านวิศวกรรมที่ต้องการเลือกใช้วัสดุคอมโพสิต ผู้ออกแบบสามารถคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอและดูรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นได้ง่าย โดยการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนที่จะตัดสินใจเลือกวัสดุคอมโพสิตที่มีความเหมาะสมที่สุดกับงานที่ต้องการออกแบบ

7.2 ประโยชน์ที่ได้รับและข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ผลการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ การหาค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหาการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบ และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้าน ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นประโยชน์ที่สำคัญดังนี้

ประโยชน์ข้อแรกซึ่งเป็นส่วนสำคัญของวิทยานิพนธ์นี้คือได้เข้าใจพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อแผ่นคอมโพสิตบางมีภาระที่มากระทำทั้งในทิศทางเดียวและมีลักษณะสองทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน รวมถึงผลกระทบของขนาดสัดส่วนของชิ้นงาน มุมเอียงของแผ่น ภาระดึงตามขวาง และมุมองศาการวางตัวของเส้นใยว่ามีผลต่อพฤติกรรมการโก่งงออย่างไร

ประโยชน์ส่วนถัดมาคือได้ทราบถึงข้อจำกัดของระเบียบวิธีที่นำเสนอคือการใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิชร่วมกับการแก้ปัญหาการโก่งงอโดยระเบียบวิธีริทซ์ว่าสามารถหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีการวางตัวของเส้นใยในมุมใดๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบได้ ยกเว้นกรณีที่มีการจับยึดแบบ F-F ร่วมอยู่ด้วยเนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวให้รูปร่างโหมดการโก่งงอที่ไม่เหมาะสม และสำหรับการหาค่าภาระการโก่งงอของแผ่นคอมโพสิตบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยระเบียบวิธีที่นำเสนอให้ค่าภาระการโก่งงอที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์เฉพาะกรณีที่มีการจับยึดแบบยึดแน่นทั้งสี่ด้านเท่านั้น แต่สำหรับกรณีที่ด้านใดด้านหนึ่งหรือหลายๆ ด้านที่มีการจับยึดชิ้นงานผสมกันระหว่างการจับยึดแบบง่าย หรือที่ขอบปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วยจะได้ค่าภาระการโก่งงอที่เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น

ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคตที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลและฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้สามารถสรุปได้ดังนี้คือ ส่วนแรกเป็นการหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธีการทดลองเพื่อศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอและหาค่าภาระการโก่งงอของชิ้นงานจริงซึ่งมีความไม่สมบูรณ์ทั้งความไม่สมบูรณ์ของชิ้นงานและความไม่สมบูรณ์ของเงื่อนไขขอบเขตของชิ้นงานรวมอยู่ด้วยเปรียบเทียบกับค่าภาระการโก่งงอและรูปร่างโหมดการโก่งงอที่ได้นำเสนอในงานวิทยานิพนธ์นี้ งานวิจัยในอนาคตที่น่าสนใจในส่วนที่สองเป็นการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ในการศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอ การหาค่าภาระการโก่งงอ และรูปร่างโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้นด้วยวิธีเชิงตัวเลข สำหรับแผ่นบางที่มีความซับซ้อน เช่น ชิ้นงานมีรูเจาะ ชิ้นงานที่มีความหนาไม่เท่ากันตลอดแผ่น เพื่อนำค่าภาระการโก่งงอไปใช้ประโยชน์ต่อไป และงานวิจัยในอนาคตที่น่าสนใจในส่วนที่สุดท้ายเป็นการหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่มีการจับยึดแบบง่าย หรือที่ขอบปล่อยอิสระร่วมอยู่ด้วยของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช เพื่อนำฟังก์ชันที่ได้มาศึกษาพฤติกรรมการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และนำค่าภาระการโก่งงอไปใช้ประโยชน์ต่อไป

รายการอ้างอิง

1. Gibson, R.F. Principles of Composite Material Mechanics. Singapore : McGraw-Hill, 1994.
2. Iyengar, N.G.R. Structural Stability of Columns and Plates. The United Kingdom: JOHN WILEY & SONS, 1988.
3. Chai, G.B., Hoon, K.H. Buckling of generally laminated composite plates with various edges support conditions. Composite Structures 29 (1994) : 299-310.
4. Ashton, J.E., Love, T.S. Experimental study of the stability of composite plates. Journal of Composite Materials 3 (1969) : 230-42.
5. Tuttle, M., Singhatanadgid P., Hinds, G. Buckling of Composite Panels Subject to Biaxial Loading. Experiment Mechanics 39 (1999) : 191-201.
6. Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R., Sharma, C.B. Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method). Composite Structures 63 (2004) : 69-74.
7. Ungbhakorn, V., Singhatanadgid, P. Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method. Composite Structures 73 (2005) : 120-128.
8. Reddy, J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates. The United States of America : Taylor & Francis, 1999.
9. Durvasula, S. Buckling of simply supported skew plates. Journal of the Engineering Mechanics Division 97 (1971) : 967-979.
10. Anderson, R.A. Chats giving Critical Compressive Stress of Continuous Flat Sheet Divided into Parallelogram-shaped Panels. National Advisory Committee for Aeronautics (1951)
11. Reddy, A.R.K., Palaninathan, R. Buckling of Laminated Skew Plates. Thin-Walled Structures 22 (1995) : 241-259.
12. Wang, S. Buckling of thin skew fibre-reinforced composite laminates. Thin-Walled Structures 28 (1997) : 21-41.
13. Kennedy, J.B., Prabhakara, M.K. Buckling of simply supported orthotropic skew plates. The Aeronautical Quarterly 29 (1978) : 161-74.

14. Srinivasan, R.S., Ramachandran, S.V. Stability of general orthotropic skew plate. Journal of the Engineering Mechanics Division 102 (1976) : 569-572.

15. Hu, H.T, Lin B.H. Buckling analysis of skew laminate plates subjected to uniaxial inplane loads. Thin-walled Structures 38 (2000) : 53-77.

16. Karami, G., Malekzadeh, P. Static and stability analysis of arbitrary straight sided quadrilateral thin plates by differential quadrature method. International Journal of Solids and Structures 39 (2002) : 4927–47.

17. Kennedy, J.B., Prabhakara, M.K. Buckling of simply supported orthotropic skew plates. The Aeronautical Quarterly 29 (1978) : 161-174.

18. Wang, C.M., Liew, K.M., Alwis, W.A.M. Buckling of skew plates and corner condition for simply supported edges. Journal of the Engineering Mechanics Division 118 (1992): 651-662.

19. Ashton, J.E. Stability of clamped skew plates under combined loads. Journal of Applied Mechanics 36 (1969) : 139-140.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ภาคผนวก ก

รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ภาคผนวก ก แสดงรายละเอียดและคำอธิบายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ ดังแสดงในรูปที่ 5.2 โดยเริ่มจากการหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช จากนั้นนำฟังก์ชันดังกล่าวมาคำนวณหาค่าพลังงานศักย์รวมที่เกิดขึ้นและหาค่าภาระการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีริทซ์โดยการแก้ปัญหาเจาะจงและพล็อตดูโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น

ก.1 โปรแกรมเพื่อหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่ด้วยระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

โปรแกรม “Kantorovich” ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบดังได้อธิบายในหัวข้อที่ 4.3 โดยประกอบด้วยโปรแกรมหลัก(Main Program) และ 9 โปรแกรมย่อย (Subroutine)โดยถูกจัดเก็บไว้ในไฟล์ข้อมูลนามสกุล .txt ผู้สนใจสามารถประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นมาใช้ได้เองโดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างโปรแกรมหลัก “Kantorovich” ในโปรแกรม Maple และโปรแกรมย่อยทั้ง 9 โปรแกรมโดยจัดเก็บไฟล์ข้อมูลให้ถูกต้องตามที่กำหนด (ดังแสดงรายละเอียดในโปรแกรมย่อยทั้ง 9 โปรแกรม)
2. กำหนดสิ่งที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต้องการให้ถูกต้องดังแสดงตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.4 ($E_1, E_2, v_{12}, G_{12}, XX$, Stacking sequence, Boundary_X, Boundary_Y, a, b , t N) และค่าที่ได้จากโปรแกรม “Kantorovich” แสดงในตารางที่ 4-2

หมายเหตุ ; - คำอธิบายที่แสดงในเครื่องหมายคอมเมนต์ # กับ # ในโปรแกรม Maple ใช้อธิบายรายละเอียดของโปรแกรมเท่านั้นไม่มีผลต่อการคำนวณ

- ถ้าต้องการหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบในกรณีเงื่อนไขขอบเขตอื่นๆ ก็สามารถทำได้ง่ายเพียงแค่เปลี่ยน Boundary_X และ Boundary_Y ให้เป็นเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องการยกตัวอย่างเช่น ต้องการหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบกรณีเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบ SCSF ทำได้โดยกำหนด Boundary_X := S_S และ Boundary_X := C_F ดังแสดงที่ตอนต้นของโปรแกรมหลัก

ตัวอย่างโปรแกรมหลัก “Kantorovich” ที่ดัดแปรด้วยโปรแกรม Maple ที่แสดงหน้าจอคอมพิวเตอร์มีรายละเอียดของโปรแกรมดังต่อไปนี้

```
> #--------------- KANTOROVICH PROGRAM (1)Pig 5.3 ----------------#
> #- Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates -#
>        # -----  by the extended Kantorovich Method   ----- #
> restart ;
> Digits:=40:
> #-- Input of all material properties = T300/934(graphite/epoxy)--#
> E1 := 131e9;          # -- Longitudanal modulus,E11= 131 GPa
> E2 := 10.3e9;         # -- Transverse modulus,E22= 10.3 GPa
> v12 := 0.22;          # -- Poisson ratio
> G12 := 6.9e9;         # -- In-plane shear modulus,G12= 6.9 GPa
> a:=0.9 ;              # -- Length of the plates,a=0.9 m
> b:=0.3 ;              # -- Width of the plates,b=0.3 m
> t := 0.000127 ;       # --  Ply thickness, m
> h:=t*N;               # --  thickness, m
> #-----  Assume function X(x) and Define Boundary Condition  -----#
> XX:=sin(x):                           #-- Assume function X(x)
> Ny:=0:                                #-- Tension load
> Nxy:=0:                               #-- Shear load
> Boundary_X:=C_C:                      #-- Boundary for axis-X
> Boundary_Y:=C_F:                      #-- Boundary for axis-Y
> N:=8:                                 #-- Number of ply
> phi := vector([0,90,0,90,90,0,90,0]): # Stacking sequence =[0,90]2S
> read "C:/ABD.txt":  #-- Calculate ABD matrix *(Subr. 1)*
> points:=40:
> Mode1 :=10:
> save XX, "C:/Kantorovich/Function/XX.txt":
> save Boundary_X, "C:/Kantorovich/Boundary_X.txt":
> save Boundary_Y, "C:/Kantorovich/Boundary_Y.txt":
> #----------------------------------------------------------------#
>                  #----- Iteration procedures (Mode 1) -----#
> for q from 1 to Mode1 do
>                  #-------------- ASSUME X(x) --------------#
> print(ASSUME_X(x)[q]);
> NxxL:=0:
> NcrL:=0:
> read "C:/Kantorovich/Function/XX.txt":
> read "C:/Kantorovich/Function/X(x).txt":              #(Subr. 2)
> read "C:/Kantorovich/Boundary/Boundary_Y.txt":        #(Subr. 3)
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Newton_Raphson_Y.txt": #(Subr. 4)
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Coefficients_Y.txt":   #(Subr. 5)
>                  #-------------- ASSUME Y(y) --------------#
> print(ASSUME_Y(y)[q]);
> read "C:/Kantorovich/Function/Y(y).txt":              #(Subr. 6)
> read "C:/Kantorovich/Boundary/Boundary_X.txt":        #(Subr. 7)
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Newton_Raphson_X.txt": #(Subr. 8)
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Coefficients_X.txt":   #(Subr. 9)
> if (abs(Nxx[q]-Ncr[q])< 10e-3)
>  then Eigenvalue_1:=Ncr[q]:
>       save Eigenvalue_1,"C:/Kantorovich/BC_CCCF/Nxx.txt":
>       save XX, "C:/Kantorovich/BC_CCCF/XXMode1.txt":
>       save YY, "C:/Kantorovich/BC_CCCF/YYMode1.txt":
>       q:=Mode1
>  end if:
> end do:
> #---------------------------------------------------------------#
```

```
>           #----- Iteration procedures (Mode 2 to 12) -----#
> restart ;
> Digits:=40:
> #-- Input of all material properties = T300/934(graphite/epoxy)---#
> E1 := 131e9;          # -- Longitudanal modulus,E11= 131 GPa
> E2 := 10.3e9;         # -- Transverse modulus,E22= 10.3 GPa
> v12 := 0.22;          # -- Poisson ratio
> G12 := 6.9e9;         # -- In-plane shear modulus,G12= 6.9 GPa
> a:=0.9 ;              # -- Length of the plates,a=0.9 m
> b:=0.3 ;              # -- Width of the plates,b=0.3 m
> t := 0.000127 ;       # --  Ply thickness, m
> h:=t*N;               # --  thickness, m
> Ny:=0:                               #-- Tension load
> Nxy:=0:                              #-- Shear load
> Boundary_X:=C_C:                      #-- Boundary for axis-X
> Boundary_Y:=C_F:                      #-- Boundary for axis-Y
> N:=8:                                 #-- Number of ply
> phi := vector([0,90,0,90,90,0,90,0]):  #Stacking sequence=[0,90]2S
> read "C:/ABD.txt":                    #-- Calculate ABD matrix
> points:=40:
> Mode1:=10:
> Ny:=0:
> Nxy:=0:
>     #-------------- Predict Function Y(y) -------------#
> for q from 2 to 2 do
> print(Predict_FunctionY(Y)[q]):
> read "C:/Kantorovich/BC_CCCF/XXMode1.txt":
> read "C:/Kantorovich/Function/X(x).txt":              #(Subr. 2)
> read "C:/Kantorovich/Boundary/Boundary_Y.txt":        #(Subr. 3)
> read "C:/Kantorovich/BC_CCCF/Nxx.txt":
>     if (q=2)
>           then NxxL:=Eigenvalue_1+1
>     end if:
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Newton_Raphson_Y.txt": #(Subr. 4)
> read "C:/Kantorovich/Numerical/Coefficients_Y.txt":   #(Subr. 5)
> end do:
>
> #---------------- END KANTOROVICH PROGRAM (1)Pig.3 --------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 1 โปรแกรม ABD.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/ABD.txt เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณ [ABD] สมการที่ 3-15 รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม ABD.txt

```
#---------------- ABD.txt (Subroutine 1) ---------------#
#Calculate the lamina stiffness matrix [Q] in material axis
 Q11:=E1^2/(E1-v12^2*E2):
 Q12:=v12*E1*E2/(E1-v12^2*E2):
 Q22:=E1*E2/(E1-v12^2*E2):
 Q66:=G12:
#Calculate invariants U
 U1:= (3*Q11+3*Q22+2*Q12+4*Q66)/8:
 U2:= (Q11-Q22)/2:
 U3:= (Q11+Q22-2*Q12-4*Q66)/8:
 U4:= (Q11+Q22+6*Q12-4*Q66)/8:
 U5:= (Q11+Q22-2*Q12+4*Q66)/8:
```

```
#Calculate the distance from midplane : z[1]to z[N+1]
 for i from 1 to N+1 do
    z[i]:=t*(i-1-N/2)
 od:
#Calculate the invariants V (a total of 15 invariants)
 VA0 := N*t: VB0:=0:
 VD0:=(N*t)^3/12:
 VA1:=0:
       for i from 1 to N do
          VA1:=VA1+cos(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
       od:
 VA2:=0:
       for i from 1 to N do
          VA2:=VA2+sin(Pi/180*2*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
       od:
 VA3:=0:
       for i from 1 to N do
          VA3:=VA3+cos(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
       od:
 VA4:=0:
       for i from 1 to N do
          VA4:=VA4+sin(Pi/180*4*phi[i])*(z[i+1]-z[i]);
       od:
 VB1:=0:
       for i from 1 to N do
          VB1:=VB1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
       od:
 VB1:=VB1/2:
 VB2:=0:
       for i from 1 to N do
          VB2:=VB2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
       od:
 VB2:=VB2/2:
 VB3:=0:
       for i from 1 to N do
          VB3:=VB3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
       od:
 VB3:=VB3/2:
 VB4:=0:
       for i from 1 to N do
          VB4:=VB4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^2-(z[i])^2);
       od:
 VB4:=VB4/2:
 VD1:=0:
       for i from 1 to N do
          VD1:=VD1+cos(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
       od:
 VD1:=VD1/3:
 VD2:=0:
       for i from 1 to N do
          VD2:=VD2+sin(Pi/180*2*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
       od:
 VD2:=VD2/3:
 VD3:=0:
       for i from 1 to N do
          VD3:=VD3+cos(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
       od:
 VD3:=VD3/3:
 VD4:=0:
      for i from 1 to N do
         VD4:=VD4+sin(Pi/180*4*phi[i])*((z[i+1])^3-(z[i])^3);
```

```
      od:
VD4:=VD4/3:
#This are the results: [ABD] w.r.t. the rotated axis.
#------------------------ Matrix [A] -----------------------------#
A11:=evalf(U1*VA0+U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VA2*sin(2*theta*Pi/18
0)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
A22:=evalf(U1*VA0-U2*VA1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA2*sin(2*theta*Pi
/180)+U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VA4*sin(4*theta*Pi/180)):
A12:=evalf(U4*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
/180)):
A66:=evalf(U5*VA0-U3*VA3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VA4*sin(4*theta*Pi
/180)):
A16:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)+2
*U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
A26:=evalf(U2*VA2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VA1*sin(2*theta*Pi/180)-2
*U3*VA4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VA3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
#------------------------ Matrix [B] -----------------------------#
B11:=evalf(U1*VB0+U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VB2*sin(2*theta*Pi
/180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
B22:=evalf(U1*VB0-U2*VB1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB2*sin(2*theta*Pi
/180)+U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VB4*sin(4*theta*Pi/180)):
B12:=evalf(U4*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
/180)):
B66:=evalf(U5*VB0-U3*VB3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VB4*sin(4*theta*Pi
/180)):
B16:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)+2
*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
B26:=evalf(U2*VB2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VB1*sin(2*theta*Pi/180)
-2*U3*VB4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VB3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
#------------------------ Matrix [D] -----------------------------#
D11:=evalf(U1*VD0+U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)+U2*VD2*sin(2*theta*Pi/18
0)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
D22:=evalf(U1*VD0-U2*VD1*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD2*sin(2*theta*Pi
/180)+U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)+U3*VD4*sin(4*theta*Pi/180)):
D12:=evalf(U4*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
/180)):
D66:=evalf(U5*VD0-U3*VD3*cos(4*theta*Pi/180)-U3*VD4*sin(4*theta*Pi
/180)):
D16:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)+2
*U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)-2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
D26:=evalf(U2*VD2*cos(2*theta*Pi/180)-U2*VD1*sin(2*theta*Pi/180)-2
*U3*VD4*cos(4*theta*Pi/180)+2*U3*VD3*sin(4*theta*Pi/180))/2:
 #----------------------- Matrix [ABD] ---------------------------#
ABD:=linalg[matrix](6,6,[[A11,A12,A16,B11,B12,B16],[A12,A22,A26,B12,B
22,B26],[A16,A26,A66,B16,B26,B66],[B11,B12,B16,D11,D12,D16],[B12,B22,
B26,D12,D22,D26],[B16,B26,B66,D16,D26,D66]]);

    #---------------- End ABD.txt (Subroutine 1) ---------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 2 โปรแกรม X(x).txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/X(x).txt เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าตัวแปรสมการที่ 4-10, 4-11, 4-17 รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม X(x).txt

```
#---------------- X(x).txt  (Subroutine 2) ---------------#

    S1x[q]:=int(diff(XX,x,x)^2,x=0..a);
    S2x[q]:=int(diff(XX,x,x)*XX,x=0..a);
    S3x[q]:=int(XX^2,x=0..a);
    S4x[q]:=int(diff(XX,x)^2,x=0..a);
    S5x[q]:=int(diff(XX,x)*diff(XX,x,x),x=0..a);
    S6x[q]:=int(diff(XX,x)*XX,x=0..a);
    k1[q]:=simplify((S2x[q]*D12-2*S4x[q]*D66)/S3x[q]/D22);
    k2[q]:=simplify((S1x[q]*D11-S4x[q]*Nxx[q])/S3x[q]/D22);
    p1[q]:=sqrt(sqrt(k1[q]^2-k2[q])+k1[q]);
    p2[q]:=sqrt(sqrt(k1[q]^2-k2[q])-k1[q]);

#---------------- End X(x).txt (Subroutine 2) ---------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 3 โปรแกรม Boundary_Y.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Boundary_Y.txt เขียนโปรแกรมเพื่อเลือกเงื่อนไขขอบเขตที่ยึดปลายด้าน y =0 และ y = b รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Boundary_Y.txt

```
#---------------- Boundary_Y.txt (Subroutine 3) ---------------#

YY:=Ay[q][1]*sin(p1[q]*y)+Ay[q][2]*cos(p1[q]*y)+Ay[q][3]*sinh(p2[q]*y)
+Ay[q][4]*cosh(p2[q]*y);
if (Boundary_Y=C_C)     #BC:  y=0=b=Clamped support
 then BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,diff(YY,y)));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,diff(YY,y)));
end if;
if (Boundary_Y=C_F)     #BC:  y=0=Clamped support, y=b=Free edge
 then Ny:=Ny:
      Nxy:=Nxy:
      BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D124*S4x
      [q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,diff(YY,y)));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff(
      YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
end if;
if (Boundary_Y=F_C)     #BC:  y=0=Free edge, y=b=Clamped support
 then Ny:=Ny:
      Nxy:=Nxy:
      BC[1]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D12-4
      *S4x[q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,diff(YY,y)));
```

```
end if;
if (Boundary_Y=F_F)     #BC:  y=0=b=Free edge
 then Ny:=Ny:
       Nxy:=Nxy:
       BC[1]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D12-4
      *S4x[q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
       BC[2]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D12-4
      *S4x[q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
        BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
       (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
        BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
       (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
end  if;
if (Boundary_Y=S_F)     #BC: y=0=Simple support, y=b=Free edge
 then  Ny:=Ny:
       Nxy:=Nxy:
       BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
       BC[2]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D124*S
       4x[q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
       BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*dif
       f(YY,y)+S2x[q]*D12*YY));

      BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
end  if;
if (Boundary_Y=F_S)     #BC: y=0=Free edge, y=b=Simple support
 then Ny:=Ny:
      Nxy:=Nxy:
      BC[1]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y,y)+(S2x[q]*D12-4
     *S4x[q]*D66+S3x[q]*Ny)*diff(YY,y)-(2*S5x[q]*D16-S6x[q]*Nxy)*Y));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
end if;
if (Boundary_Y=C_S)     #BC: y=0=Clamped support, y=b=Simple support
 then BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,diff(YY,y)));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
end if;
if (Boundary_Y=S_C)     #BC: y=0=Simple support, y=b=Clamped support
 then BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,diff(YY,y)));
end if;
if (Boundary_Y=S_S)     #BC: y=0=b=Simple support
 then BC[1]:=evalf(subs(y=0,YY));
      BC[2]:=evalf(subs(y=b,YY));
      BC[3]:=evalf(subs(y=0,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
      BC[4]:=evalf(subs(y=b,S3x[q]*D22*diff(YY,y,y)+2*S6x[q]*D26*diff
      (YY,y)+S2x[q]*D12*YY));
      end if;

#---------------- End Boundary_Y.txt (Subroutine 3) ---------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 4 โปรแกรม Newton_Raphson_Y.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Newton_Raphson_Y.txt เขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าเจาะจง N_x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y = 0$ และ $y = b$ รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Newton_Raphson_Y.txt

```
#---------------- Newton_Raphson_Y.txt (Subroutine 4) ---------------#

   A:=array(1..4,1..4);
   for i from 1 to 4 do
      for j from 1 to 4 do
         A[i,j]:=diff(BC[i],Ay[q][j]);
      end do:
   end do:
   save A, "C:/Thesis/Kantorovich/Coefficients/Assumed_XX/A.txt":
   with(linalg):
   Digits:=30:
   B:=evalf(det(A)):
   save B, "C:/Thesis/Kantorovich/Coefficients/Assumed_XX/B.txt":
   B[q]:= B;
   #print(B);
   A:=array(1..4,1..4);
      for i from 1 to 4 do
       for j from 1 to 4 do
         A[i,j]:=diff(BC[i],Ay[q][j]);
       end do:
      end do:
   save A, "C:/Kantorovich/Assumed_XX/A.txt":
   with(linalg):
   Digits:= points:
   B:=evalf(det(A)):
   save B, "C:/Kantorovich/Assumed_XX/B.txt":
   B[q]:= B;
   print(B);
            #--------- 1. False-position method  ---------#
   dB[q]:=diff(B[q],Nxx[q]):
   Nxx[q]:=NxL[q]:
   B[L][q]:=B[q]:
   NxL[q]:=NxR[q]:
   B[R][q]:=B[L][q]:
   NxR[q]:=Nx1[q]:
   B[111][q]:=B[R][q]:
   Nx1[q]:=Nx[q]:
   BBB[q]:=B[111][q]:
   NxL[q]:=NxxL:
   epsilon:=10e-3:
   Critical:=10e8:
      for i from 1 to Critical do
         NxR[q]:=NxL[q]+100:
         f[NxL][q]:=B[L][q]:
         f[NxR][q]:=B[R][q]:
         Nx1[q]:=((NxL[q]*f[NxR][q])-(NxR[q]*f[NxL][q]))/(f[NxR][q]-
         f[NxL][q]):
         f[Nx1][q]:=B[111][q]:
            if ((f[Nx1][q]*f[NxR][q])<0)
               then Nx1[q]:=NxL[q]
               else Nx1[q]:=NxR[q]
```

```
            end if:
            if (f[NxL][q] < 0 )
                then if (f[NxR][q] > 0 )
                        then Xk[q]:=NxL[q]:
                             i:=Critical
                     end if:
                        else NxL[q]:=NxR[q]
            end if:
            if (f[NxL][q] > 0 )
                then if (f[NxR][q] < 0 )
                         then Xk[q]:=NxL[q]:
                              i:=Critical
                      end if:
                         else NxL[q]:=NxR[q]
            end if:
      end do:
            #--------- 2. Newton-Raphson method ---------#
   Critical:=10e8:
      for i from 1 to Critical do
        Xk[q]:=NxL[q]:
        f[Xk][q]:=B[L][q]:
        df[Xk][q]:=dB[q]:
        Delta[Xk+1][q]:=-(f[Xk][q])/(df[Xk][q]):
        X[k+1][q]:=Xk[q]+Delta[Xk+1][q]:
           if ( abs(Delta[Xk+1][q]) < epsilon )
              then Nxx[q]:=X[k+1][q]:
                   i:=Critical
              else NxL[q]:=X[k+1][q]
           end if:
      end do:
   with(linalg):
   Digits:=points:
   print(plot(BBB[q],Nx[q]=NxxL..NxR[q],title="Buckling modes"));
   print(Eigenvalue_YY[q]=Nxx[q]);
   NxxL:=Nxx[q]+1;

#-------------- End Newton_Raphson_Y.txt (Subroutine 4) -------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 5 โปรแกรม Coefficients_Y.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Numerical/Coefficients_Y.txt: เขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าไอเก้นเวคเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=b$ รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Coefficients_Y.txt

```
#---------------- Coefficients_Y.txt (Subroutine 5) ---------------#

   Digits:=points:
   AA:=array(1..4,1..4):
      for i from 1 to 4 do
        for j from 1 to 4 do
           AA[i,j]:=A[i,j]:
        end do:
      end do:
   C:=[[Ay[q][1]],[Ay[q][2]],[Ay[q][3]],[Ay[q][4]]]:
   Ay[q][1]:=1:
   BB:=evalm(AA&*C):
```

```
   coefficients:=solve({BB[2,1]=0, BB[3,1]=0,
   BB[4,1]=0},{Ay[q][2],Ay[q][3],Ay[q][4]}):
   Ay[q][1]:=subs(coefficients,Ay[q][1]):
   Ay[q][2]:=subs(coefficients,Ay[q][2]):
   Ay[q][3]:=subs(coefficients,Ay[q][3]):
   Ay[q][4]:=subs(coefficients,Ay[q][4]):
YY:=Ay[q][1]*sin(p1[q]*y)+Ay[q][2]*cos(p1[q]*y)+Ay[q][3]*sinh(p2[q]*y)
+Ay[q][4]*cosh(p2[q]*y):
YY:=simplify(evalf(YY));
   save YY, "C:/Kantorovich/YY.txt":
   print(plot3d(XX*YY,x=0..a,y=0..b,title="Buckling mode"));
Function_YY[q]:=Ay[q][1]*sin(p1[q]*y)+Ay[q][2]*cos(p1[q]*y)+Ay[q][3]*
sinh(p2[q]*y)+Ay[q][4]*cosh(p2[q]*y);
print( Function_YY[q]=YY);

   if (Boundary_Y=S_S)
     then for NN from 1 to 12 do
              if (abs(evalf(NN*Pi/b)-p1[q])<  10e-3)
                 then print(Function_YY[q]=sin(NN*Pi*y/bb));
              end if;
          end do;
   end if;

#-------------- End Coefficients_Y.txt (Subroutine 5) -------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 6 โปรแกรม Y(y).txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Function/Y(y).txt เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าตัวแปรสมการที่ 4-19, 4-20, 4-26 รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Y(y).txt

```
#---------------- Boundary_X.txt (Subroutine 6) ---------------#

    read "C:/Kantorovich/Function/YY.txt":
    S1y[q]:=evalf(Int(diff(YY,y,y)^2,y=0..b));
    S2y[q]:=evalf(Int(diff(YY,y,y)*YY,y=0..b));
    S3y[q]:=evalf(Int(YY^2,y=0..b));
    S4y[q]:=evalf(Int(diff(YY,y)^2,y=0..b));
    S5y[q]:=evalf(Int(diff(YY,y)*diff(YY,y,y),y=0..b));
    S6y[q]:=evalf(Int(diff(YY,y)*YY,y=0..b));
    k3[q]:=simplify((S2y[q]*D12-2*S4y[q]*D66+S3y[q]*Ncr[q]/2)
    /S3y[q]/D11);
    k4[q]:=simplify(S1y[q]*D22/S3y[q]/D11);
    p3[q]:=sqrt(k3[q]+sqrt(k3[q]^2-k4[q]));
    p4[q]:=sqrt(k3[q]-sqrt(k3[q]^2-k4[q]));

#--------------- End Boundary_X.txt (Subroutine 6) --------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 7 โปรแกรม Boundary_X.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Boundary_X.txt เขียนโปรแกรมเพื่อเลือกเงื่อนไขขอบเขตที่ยึดปลายด้าน x = 0 และ x = a

ตัวอย่างโปรแกรม Boundary_X.txt

```
#---------------- Boundary_X.txt (Subroutine 7) ---------------#

read "C:/Kantorovich/Boundary_X.txt":
```

```
XX:=Ax[q][1]*sin(p3[q]*x)+Ax[q][2]*cos(p3[q]*x)+Ax[q][3]*sin(p4[q]*x)
+Ax[q][4]*cos(p4[q]*x):


if (Boundary_X=C_C)     #BC: x=0=aClamped support
 then BC[1]:=evalf(subs(x=0,XX));
      BC[2]:=evalf(subs(x=a,XX));
      BC[3]:=evalf(subs(x=0,diff(XX,x)));
      BC[4]:=evalf(subs(x=a,diff(XX,x)));
end if;
if (Boundary_X=C_S)     #BC: x=0=Clamped support, x=a=Simple support
 then BC[1]:=evalf(subs(x=0,XX));
      BC[2]:=evalf(subs(x=a,XX));
      BC[3]:=evalf(subs(x=0,diff(XX,x)));
      BC[4]:=evalf(subs(x=a,S3y[q]*D11*diff(XX,x,x)+2*S6y[q]*D16
      *diff(XX,x)+S2y[q]*D12*XX));
end if;
if (Boundary_X=S_S)     #BC: x=0=a=Simple support
 then BC[1]:=evalf(subs(x=0,XX));
      BC[2]:=evalf(subs(x=a,XX));
      BC[3]:=evalf(subs(x=0,S3y[q]*D11*diff(XX,x,x)+2*S6y[q]*D16
      *diff(XX,x)+S2y[q]*D12*XX));
      BC[4]:=evalf(subs(x=a,S3y[q]*D11*diff(XX,x,x)+2*S6y[q]*D16
      *diff(XX,x)+S2y[q]*D12*XX));
end if;
if (Boundary_X=S_C)     #BC: x=0=Simple support, x=a=Clamped support
 then BC[1]:=evalf(subs(x=0,XX));
      BC[2]:=evalf(subs(x=a,XX));
      BC[3]:=evalf(subs(x=0,S3y[q]*D11*diff(XX,x,x)+2*S6y[q]*D16
      *diff(XX,x)+S2y[q]*D12*XX));
      BC[4]:=evalf(subs(x=a,diff(XX,x)));
end if;

#---------------- End Boundary_X.txt (Subroutine 7) ---------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 8 โปรแกรม Newton_Raphson_X.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Newton_Raphson_X.txt เขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าเจาะจง N_x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x=0$ และ $x=a$ รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Newton_Raphson_X.txt

```
#---------------- Newton_Raphson_X.txt (Subroutine 8) ---------------#

F:=array(1..4,1..4);
  for i from 1 to 4 do
     for j from 1 to 4 do
        F[i,j]:=diff(BC[i],Ax[q][j]);
     end do:
  end do:
save F, "C:/Thesis/Kantorovich/Coefficients/Assumed_YY/F.txt":
with(linalg):
Digits:= points:
G:=evalf(det(F)):
save G, "C:/Thesis/Kantorovich/Coefficients/Assumed_YY/G.txt":
G[q]:=G;
F:=array(1..4,1..4);
 for i from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
```

```
      F[i,j]:=diff(BC[i],Ax[q][j]);
   end do:
end do:
save F, "C:/Kantorovich/F.txt":
with(linalg):
Digits:= points:
G:=evalf(det(F)):
save G, "C:/Kantorovich/G.txt":
G[q]:=G;
           #--------- 1. False-position method  ---------#
dG[q]:=diff(G[q],Ncr[q]):
Ncr[q]:=NcL[q]:
G[L][q]:=G[q]:
NcL[q]:=NcR[q]:
G[R][q]:=G[L][q]:
NcR[q]:=Nc1[q]:
G[111][q]:=G[R][q]:
Nc1[q]:=Nc[q]:
GGG[q]:=G[111][q]:
NcL[q]:=NcrL:
epsilon:=10e-12:
Critical:=10e12:
for i from 1 to Critical do
NcR[q]:=NcL[q]+100:
f[NcL][q]:=G[L][q]:
f[NcR][q]:=G[R][q]:
Nc1[q]:=((NcL[q]*f[NcR][q])-(NcR[q]*f[NcL][q]))/(f[NcR][q]
-f[NcL][q]):
f[Nc1][q]:=G[111][q]:
  if ((f[Nc1][q]*f[NcR][q])<0)
     then Nc1[q]:=NcL[q]
     else Nc1[q]:=NcR[q]
  end if:
  if (f[NcL][q] < 0 )
     then if (f[NcR][q] > 0 )
              then Xk[q]:=NcL[q]:
              i:=Critical
          end if:
     else NcL[q]:=NcR[q]
  end if:
  if (f[NcL][q] > 0 )
     then if (f[NcR][q] < 0 )
              then Xk[q]:=NcL[q]:
              i:=Critical
           end if:
      else NcL[q]:=NcR[q]
  end if:
  end do:
            #--------- 2. Newton-Raphson method ---------#
Critical:=10e8:
for i from 1 to Critical do
Xk[q]:=NcL[q]:
f[Xk][q]:=G[L][q]:
df[Xk][q]:=dG[q]:
Delta[Xk+1][q]:=-(f[Xk][q])/(df[Xk][q]):
X[k+1][q]:=Xk[q]+Delta[Xk+1][q]:
  if ( abs(Delta[Xk+1][q]) < epsilon )
     then Ncr[q]:=X[k+1][q]:
          i:=Critical
     else NcL[q]:=X[k+1][q]
  end if:
```

```
 end do:
 with(linalg):
 Digits:=points:
 print(plot(GGG[q],Nc[q]=NcrL..NcR[q],title="Buckling modes"));
 print(Eigenvalue_XX[q]=Ncr[q]);
 NcrL:=Ncr[q]+1:

#-------------- End Newton_Raphson_X.txt (Subroutine 8) -------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 9 โปรแกรม Coefficients_X.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Kantorovich/Numerical/Coefficients_X.txt: เขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าไอเก้นเวคเตอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = a$ รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Coefficients_X.txt

```
#----------------- Coefficients_X.txt (Subroutine 9) ----------------#

 Digits:=points:
 FF:=array(1..4,1..4):
 for i from 1 to 4 do
     for j from 1 to 4 do
         FF[i,j]:=F[i,j]:
     end do:
 end do:
 H:=[[Ax[q][1]],[Ax[q][2]],[Ax[q][3]],[Ax[q][4]]]:
 Ax[q][1]:=1:
 GG:=evalm(FF&*H);
 coefficientss:=solve({GG[2,1]=0, GG[3,1]=0, GG[4,1]=0},
 {Ax[q][2],Ax[q][3],Ax[q][4]});
 Ax[q][1]:=subs(coefficientss,Ax[q][1]);
 Ax[q][2]:=subs(coefficientss,Ax[q][2]);
 Ax[q][3]:=subs(coefficientss,Ax[q][3]);
 Ax[q][4]:=subs(coefficientss,Ax[q][4]);
 for I from 1 to 4 do
     If (abs(Ax[q][i] )< 10e-3)
        then Ax[q][i] := 0
      end  if :
 end do:
XX:=Ax[q][1]*sin(p3[q]*x)+Ax[q][2]*cos(p3[q]*x)+Ax[q][3]*sin(p4[q]*x)
+Ax[q][4]*cos(p4[q]*x);
 XX:=simplify(evalf(XX));
 save XX, "C:/Kantorovich/Function/XX.txt":
 print(plot3d(XX*YY,x=0..a,y=0..b,title="Buckling mode"));
 print(Function_XX[q+1]=XX);
  if (Boundary_X=S_S)
     then for NN from 1 to 12 do
               if (abs(evalf(NN*Pi/a)-p3[q])<  10e-3)
                  then print(Function_XX[q]=sin(NN*Pi*x/aa));
               end if;
            end do;
   end if;

#--------------- End Coefficients_X.txt (Subroutine 9) --------------#
```

ก.2 โปรแกรมเพื่อคำนวณหาพลังงานศักย์รวม

โปรแกรม “Total_Potentail_Energy” ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อคำนวณหาพลังงานศักย์รวม สมการที่ 6-8 ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก(Main Program) และ 2 โปรแกรมย่อย (Subroutine) โดยถูกจัดเก็บไว้ในไฟล์ข้อมูลนามสกุล .txt ผู้สนใจสามารถประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นมาใช้ได้เองดังนี้

1. สร้างโปรแกรมหลัก “Total_Potentail_Energy” ในโปรแกรม Maple
2. สร้าง 2 โปรแกรมย่อยได้โดยหาฟังก์ชันการเคลื่อนที่ด้ววิธีแคนโทโรวิชที่มีความยาวเท่ากับหนึ่งเนื่องจากได้แปลงแผ่นคอมโพสิตรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวเท่ากับหนึ่ง สำหรับการจับยึดชิ้นงานแบบ CCCF ฟังก์ชันที่ได้คือ

- กรณีการจับยึดแบบ C-C ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งคือ

$X_1(x) = \sin(4.58989x)\text{-}0.88443\cos(4.58989x)\text{-}0.87515\sinh(5.24467x)\text{+}0.88443\cosh(5.24467x)$

- กรณีการจับยึดแบบ C-F ที่โหมดการโก่งงอโหมดที่หนึ่งคือ

$Y_1(y) = \sin(1.84536y)\text{-}0.62916\cos(1.84536y)\text{-}0.58813\sinh(3.13765y)\text{+}0.62916\cosh(3.13765y)$

แทนค่าตัวแปรจากฟังก์ชันการเคลื่อนที่ลงในโปรแกรมย่อยได้ดังนี้

ตัวอย่างโปรแกรมย่อยที่ 1 โปรแกรม FunctionX_C_C.txt ถูกเก็บไว้ที่

C:/Kantorovich/Function/C_C/FunctionX_C_C.txt

```
#---------------- FunctionX_C_C.txt (Subroutine 1)---------------#
XX[i]:=(M[i]*cos(E[i]*xi))+(N[i]*cosh(F[i]*xi))
       +(P[i]*sin(G[i]*xi))+(R[i]*sinh(H[i]*xi)):
    P[1]:= 1           :
    G[1]:= 4.58989     :#p1
    M[1]:= -0.88443    :
    E[1]:= G[1]        : #p1
    R[1]:= -0.87515    :
    H[1]:= 5.24467     : #p2
    N[1]:= 0.88443     :
    F[1]:= H[1]        : #p2
#---------------- End FunctionX_C_C.txt (Subroutine 1)--------------#
```

ตัวอย่างโปรแกรมย่อยที่ 2 โปรแกรม FunctionY_C_F.txt ถูกเก็บไว้ที่

C:/Kantorovich/Function/C_F/FunctionY_C_F.txt

```
#---------------- FunctionY_C_F.txt (Subroutine 1)---------------#
YY[i]:=(J[i]*cos(S[i]*eta))+(L[i]*cosh(B[i]*eta))
      +(C[i]*sin(W[i]*eta))+(K[i]*sinh(Q[i]*eta));
    C[1]:= 1           :
    W[1]:= 1.84536     : #p1
    J[1]:= -0.62916    :
    S[1]:= W[1]        : #p1
    K[1]:= -0.58813    :
    Q[1]:= 3.13765     : #p2
    L[1]:= 0.62916     :
    B[1]:= Q[1]        : #p2
#---------------- End FunctionY_C_F.txt (Subroutine 1)--------------#
```

หมายเหตุ; สามารถเพิ่มจำนวนพจน์การเคลื่อนที่ได้โดยการเพิ่มตัวแปลลงในโปรแกรมย่อย1 และ 2

ตัวอย่างโปรแกรมหลัก “Total_Potentail_Energy” ที่ดัดแปรด้วยโปรแกรม Maple ที่แสดงหน้าจอคอมพิวเตอร์มีรายละเอียดของโปรแกรมดังต่อไปนี้

```
> #------------- Total_Potentail_Energy (2)Pig 5.3 --------------#
> restart;
> M_N:=1:                  # Define:M=N=1,2,3..12 :Number of Term
> Digits:=40:
> read "C:/Kantorovich/Function/C_C/FunctionX_C_C.txt":# (Subr. 1)
> read "C:/Kantorovich/Function/C_F/FunctionY_C_F.txt":# (Subr. 2)
> #-------------------------------------------------------------#
> for i from 1 to M_N do
>    for m from 1 to M_N do
> CC[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(cos(E[m]*xi)),xi=0..1):
> C_C[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(cos(S[m]*eta)),eta=0..1):
> CCh[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)+1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> C_Ch[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)+1/2
  *exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> CS[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(sin(G[m]*xi)),xi=0..1):
> C_S[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(sin(W[m]*eta)),eta=0..1):
> CSh[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)-1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> C_Sh[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)-1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> ChC[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(cos(E[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_C[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(cos(S[m]*eta)),eta=0..1):
> ChCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_Ch[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)+1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> ChS[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(sin(G[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_S[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(sin(W[m]*eta)),eta=0..1):
> ChSh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_Sh[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)-1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> SC[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(cos(E[m]*xi)),xi=0..1):
> S_C[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(cos(S[m]*eta)),eta=0..1):
> SCh[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)+1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> S_Ch[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)
  +1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> SS[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(sin(G[m]*xi)),xi=0..1):
> S_S[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(sin(W[m]*eta)),eta=0..1):
> SSh[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)-1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> S_Sh[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)-1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> ShC[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(cos(E[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_C[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(cos(S[m]*eta)),eta=0..1):
> ShCh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
```

```
  *(1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_Ch[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)+1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> ShS[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(sin(G[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_S[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(sin(W[m]*eta)),eta=0..1):
> ShSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_Sh[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)-1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> #------------- Diff 1 st -------------#
> CdC[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> C_dC[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> CdCh[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> C_dCh[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2
  *exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> CdS[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> C_dS[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> CdSh[i,m]:=int((cos(E[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> C_dSh[i,m]:=int((cos(S[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> ChdC[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_dC[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> ChdCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_dCh[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> ChdS[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_dS[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> ChdSh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)+1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> Ch_dSh[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)+1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> SdC[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> S_dC[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> SdCh[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> S_dCh[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2
  *exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> SdS[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> S_dS[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> SdSh[i,m]:=int((sin(G[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> S_dSh[i,m]:=int((sin(W[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> ShdC[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_dC[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> ShdCh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_dCh[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> ShdS[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
```

```
  *(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_dS[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> ShdSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)-1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> Sh_dSh[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)-1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> #------------------------------------------------------------------#
> dCdC[i,m]:=int((sin(E[i]*xi))*(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> dC_dC[i,m]:=int((sin(S[i]*eta))*(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> dCdCh[i,m]:=int((sin(E[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> dC_dCh[i,m]:=int((sin(S[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2
  *exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> dCdS[i,m]:=int((sin(E[i]*xi))*(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> dC_dS[i,m]:=int((sin(S[i]*eta))*(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> dCdSh[i,m]:=int((sin(E[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> dC_dSh[i,m]:=int((sin(S[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> dChdC[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> dCh_dC[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)-1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> dChdCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> dCh_dCh[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)-1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> dChdS[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> dCh_dS[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)-1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> dChdSh[i,m]:=int((1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi))
  *(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> dCh_dSh[i,m]:=int((1/2*exp(B[i]*eta)-1/2*exp(-B[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> dSdC[i,m]:=int((cos(G[i]*xi))*(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> dS_dC[i,m]:=int((cos(W[i]*eta))*(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> dSdCh[i,m]:=int((cos(G[i]*xi))*(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2
  *exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> dS_dCh[i,m]:=int((cos(W[i]*eta))*(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2
  *exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> dSdS[i,m]:=int((cos(G[i]*xi))*(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> dS_dS[i,m]:=int((cos(W[i]*eta))*(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> dSdSh[i,m]:=int((cos(G[i]*xi))*(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2
  *exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> dS_dSh[i,m]:=int((cos(W[i]*eta))*(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2
  *exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> dShdC[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(sin(E[m]*xi)),xi=0..1):
> dSh_dC[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)+1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(sin(S[m]*eta)),eta=0..1):
> dShdCh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(1/2*exp(F[m]*xi)-1/2*exp(-F[m]*xi)),xi=0..1):
> dSh_dCh[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)+1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(B[m]*eta)-1/2*exp(-B[m]*eta)),eta=0..1):
> dShdS[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi))
  *(cos(G[m]*xi)),xi=0..1):
> dSh_dS[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)+1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(cos(W[m]*eta)),eta=0..1):
> dShdSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi))
```

```
  *(1/2*exp(H[m]*xi)+1/2*exp(-H[m]*xi)),xi=0..1):
> dSh_dSh[i,m]:=int((1/2*exp(Q[i]*eta)+1/2*exp(-Q[i]*eta))
  *(1/2*exp(Q[m]*eta)+1/2*exp(-Q[m]*eta)),eta=0..1):
> dCC[m,i]:=int((sin(E[i]*xi))*(cos(E[m]*xi)),xi=0..1) :
> dCCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi))
  *(sin(E[i]*xi)),xi=0..1):
> dCS[i,m]:=int((sin(G[m]*xi))*(sin(E[i]*xi)),xi=0..1):
> dCSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi))
  *(sin(E[i]*xi)),xi=0..1):
> dChC[i,m]:=int((cos(E[m]*xi))*(1/2*exp(F[i]*xi)-1/2
  *exp(-F[i]*xi)),xi=0..1):
> dChCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi))
  *(1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi)),xi=0..1):
> dChS[i,m]:=int((sin(G[m]*xi))*(1/2*exp(F[i]*xi)-1/2
  *exp(-F[i]*xi)),xi=0..1):
> dChSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi))
  *(1/2*exp(F[i]*xi)-1/2*exp(-F[i]*xi)),xi=0..1):
> dSC[i,m]:=int((cos(E[m]*xi))*(cos(G[i]*xi)),xi=0..1):
> dSCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi))
  *(cos(G[i]*xi)),xi=0..1):
> dSS[i,m]:=int((sin(G[m]*xi))*(cos(G[i]*xi)),xi=0..1):
> dSSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi))
  *(cos(G[i]*xi)),xi=0..1):
> dShC[i,m]:=int((cos(E[m]*xi))*(1/2*exp(H[i]*xi)+1/2
  *exp(-H[i]*xi)),xi=0..1):
> dShCh[i,m]:=int((1/2*exp(F[m]*xi)+1/2*exp(-F[m]*xi))
  *(1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi)),xi=0..1):
> dShS[i,m]:=int((sin(G[m]*xi))*(1/2*exp(H[i]*xi)+1/2
  *exp(-H[i]*xi)),xi=0..1):
> dShSh[i,m]:=int((1/2*exp(H[m]*xi)-1/2*exp(-H[m]*xi))
  *(1/2*exp(H[i]*xi)+1/2*exp(-H[i]*xi)),xi=0..1):
>       end do:print(i);
> end do:
>        #---------- Integration Total Potentail Energy ----------#
>   #---------- Integration 1 ----------#
> Int1:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=((M[i]*(E[i]^2))*M[m]*(E[m]^2)*CC[i,m])+((M[i]*(E[i]^2))
 *N[m]*(F[m]^2)*(-CCh[i,m]))+((M[i]*(E[i]^2))*P[m]*(G[m]^2)*CS[i,m])
 +((M[i]*(E[i]^2))*R[m]*(H[m]^2)*(-CSh[i,m]))+((N[i]*(F[i]^2))*M[m]
 *(E[m]^2)*(-ChC[i,m]))+((N[i]*(F[i]^2))*N[m]*(F[m]^2)*ChCh[i,m])
 +((N[i]*(F[i]^2))*P[m]*(G[m]^2)*(-ChS[i,m]))+((N[i]*(F[i]^2))*R[m]
 *(H[m]^2)*ChSh[i,m])+((P[i]*(G[i]^2))*M[m]*(E[m]^2)*SC[i,m])+((P[i]
 *(G[i]^2))*N[m]*(F[m]^2)*(-SCh[i,m]))+((P[i]*(G[i]^2))*P[m]
 *(G[m]^2)*SS[i,m])+((P[i]*(G[i]^2))*R[m]*(H[m]^2)*(-SSh[i,m]))
 +((R[i]*(H[i]^2))*M[m]*(E[m]^2)*(-ShC[i,m]))+((R[i]*(H[i]^2))*N[m]
 *(F[m]^2)*ShCh[i,m])+((R[i]*(H[i]^2))*P[m]*(G[m]^2)*(-ShS[i,m]))
 +((R[i]*(H[i]^2))*R[m]*(H[m]^2)*ShSh[i,m]):
> int_y:=(J[j]*J[n]*C_C[j,n])+(J[j]*L[n]*C_Ch[j,n])+(J[j]*C[n]
 *C_S[j,n])+(J[j]*K[n]*C_Sh[j,n])+(L[j]*J[n]*Ch_C[j,n])+(L[j]*L[n]
 *Ch_Ch[j,n])+(L[j]*C[n]*Ch_S[j,n])+(L[j]*K[n]*Ch_Sh[j,n])+(C[j]
 *J[n]*S_C[j,n])+(C[j]*L[n]*S_Ch[j,n])+(C[j]*C[n]*S_S[j,n])+(C[j]
 *K[n]*S_Sh[j,n])+(K[j]*J[n]*Sh_C[j,n])+(K[j]*L[n]*Sh_Ch[j,n])
 +(K[j]*C[n]*Sh_S[j,n])+(K[j]*K[n]*Sh_Sh[j,n]):
> Int1:=Int1+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):
>          end do:
>       end do:
>    end do:print(i):
```

```
> end do:
> Int1:=evalf(Int1*K1):
> #print(Int1);
>   #---------- Integration 2 ----------#
> Int2:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=-((M[i]*(E[i]^2))*M[m]*CC[i,m])-
 ((M[i]*(E[i]^2))*N[m]*CCh[i,m])-((M[i]*(E[i]^2))*P[m]*CS[i,m])
 -((M[i]*(E[i]^2))*R[m]*CSh[i,m])+((N[i]*(F[i]^2))*M[m]*ChC[i,m])
 +((N[i]*(F[i]^2))*N[m]*ChCh[i,m])+((N[i]*(F[i]^2))*P[m]*ChS[i,m])
 +((N[i]*(F[i]^2))*R[m]*ChSh[i,m])-((P[i]*(G[i]^2))*M[m]*SC[i,m])
 -((P[i]*(G[i]^2))*N[m]*SCh[i,m])-((P[i]*(G[i]^2))*P[m]*SS[i,m])
 -((P[i]*(G[i]^2))*R[m]*SSh[i,m])+((R[i]*(H[i]^2))*M[m]*ShC[i,m])
 +((R[i]*(H[i]^2))*N[m]*ShCh[i,m])+((R[i]*(H[i]^2))*P[m]*ShS[i,m])
 +((R[i]*(H[i]^2))*R[m]*ShSh[i,m]);#print(int_x);
> int_y:=-((J[j])*J[n]*(S[n]^2)*C_C[j,n])+((J[j])*L[n]*(B[n]^2)
 *C_Ch[j,n])-((J[j])*C[n]*(W[n]^2)*C_S[j,n])+((J[j])*K[n]*(Q[n]^2)
 *C_Sh[j,n])-((L[j])*J[n]*(S[n]^2)*Ch_C[j,n])+((L[j])*L[n]*(B[n]^2)
 *Ch_Ch[j,n])-((L[j])*C[n]*(W[n]^2)*Ch_S[j,n])+((L[j])*K[n]*(Q[n]^2)
 *Ch_Sh[j,n])-((C[j])*J[n]*(S[n]^2)*S_C[j,n])+((C[j])*L[n]*(B[n]^2)
 *S_Ch[j,n])-((C[j])*C[n]*(W[n]^2)*S_S[j,n])+((C[j])*K[n]*(Q[n]^2)
 *S_Sh[j,n])-((K[j])*J[n]*(S[n]^2)*Sh_C[j,n])+((K[j])*L[n]*(B[n]^2)
 *Sh_Ch[j,n])-((K[j])*C[n]*(W[n]^2)*Sh_S[j,n])+((K[j])*K[n]*(Q[n]^2)
 *Sh_Sh[j,n]);#print(int_y);
> Int2:=Int2+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>       end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int2:=evalf(Int2*K2):
> #print(Int2);
>   #---------- Integration 3 ----------#
> Int3:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=(M[i]*M[m]*CC[i,m])+(M[i]*N[m]*CCh[i,m])+(M[i]*P[m]*CS[i,m])
  +(M[i]*R[m]*CSh[i,m])+(N[i]*M[m]*ChC[i,m])+(N[i]*N[m]*ChCh[i,m])
  +(N[i]*P[m]*ChS[i,m])+(N[i]*R[m]*ChSh[i,m])+(P[i]*M[m]*SC[i,m])
  +(P[i]*N[m]*SCh[i,m])+(P[i]*P[m]*SS[i,m])+(P[i]*R[m]*SSh[i,m])
  +(R[i]*M[m]*ShC[i,m])+(R[i]*N[m]*ShCh[i,m])+(R[i]*P[m]*ShS[i,m])
  +(R[i]*R[m]*ShSh[i,m]):#print(int_x);
> int_y:=((J[j]*(S[j]^2))*J[n]*(S[n]^2)*C_C[j,n])-((J[j]*(S[j]^2))
  *L[n]*(B[n]^2)*C_Ch[j,n])+((J[j]*(S[j]^2))*C[n]*(W[n]^2)*C_S[j,n])
  -((J[j]*(S[j]^2))*K[n]*(Q[n]^2)*C_Sh[j,n])-((L[j]*(B[j]^2))*J[n]
  *(S[n]^2)*Ch_C[j,n])+((L[j]*(B[j]^2))*L[n]*(B[n]^2)*Ch_Ch[j,n])
  -((L[j]*(B[j]^2))*C[n]*(W[n]^2)*Ch_S[j,n])+((L[j]*(B[j]^2))*K[n]
  *(Q[n]^2)*Ch_Sh[j,n])+((C[j]*(W[j]^2))*J[n]*(S[n]^2)*S_C[j,n])
  -((C[j]*(W[j]^2))*L[n]*(B[n]^2)*S_Ch[j,n])+((C[j]*(W[j]^2))*C[n]
  *(W[n]^2)*S_S[j,n])-((C[j]*(W[j]^2))*K[n]*(Q[n]^2)*S_Sh[j,n])
  -((K[j]*(Q[j]^2))*J[n]*(S[n]^2)*Sh_C[j,n])+((K[j]*(Q[j]^2))*L[n]
  *(B[n]^2)*Sh_Ch[j,n])-((K[j]*(Q[j]^2))*C[n]*(W[n]^2)*Sh_S[j,n])
  +((K[j]*(Q[j]^2))*K[n]*(Q[n]^2)*Sh_Sh[j,n]):#print(int_y);
> Int3:=Int3+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>       end do:
>    end do:print(i);
```

```
> end do:
> Int3:=evalf(Int3*K3):
> #print(Int3);
>   #---------- Integration 4 ----------#
> Int4:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=((M[i]*(E[i]^2))*M[m]*E[m]*CdC[i,m])-((M[i]*(E[i]^2))*N[m]
  *F[m]*CdCh[i,m])-((M[i]*(E[i]^2))*P[m]*G[m]*CdS[i,m])-((M[i]
  *(E[i]^2))*R[m]*H[m]*CdSh[i,m])-((N[i]*(F[i]^2))*M[m]*E[m]
  *ChdC[i,m])+((N[i]*(F[i]^2))*N[m]*F[m]*ChdCh[i,m])+((N[i]*(F[i]^2))
  *P[m]*G[m]*ChdS[i,m])+((N[i]*(F[i]^2))*R[m]*H[m]*ChdSh[i,m])+((P[i]
  *(G[i]^2))*M[m]*E[m]*SdC[i,m])-((P[i]*(G[i]^2))*N[m]*F[m]
  *SdCh[i,m])-((P[i]*(G[i]^2))*P[m]*G[m]*SdS[i,m])-((P[i]*(G[i]^2))
  *R[m]*H[m]*SdSh[i,m])-((R[i]*(H[i]^2))*M[m]*E[m]*ShdC[i,m])+((R[i]
  *(H[i]^2))*N[m]*F[m]*ShdCh[i,m])+((R[i]*(H[i]^2))*P[m]*G[m]
  *ShdS[i,m])+((R[i]*(H[i]^2))*R[m]*H[m]*ShdSh[i,m]):#print(int_x);
> int_y:=-((J[j])*J[n]*S[n]*C_dC[j,n])+((J[j])*L[n]*B[n]*C_dCh[j,n])
  +((J[j])*C[n]*W[n]*C_dS[j,n])+((J[j])*K[n]*Q[n]*C_dSh[j,n])-((L[j])
  *J[n]*S[n]*Ch_dC[j,n])+((L[j])*L[n]*B[n]*Ch_dCh[j,n])+((L[j])*C[n]
  *W[n]*Ch_dS[j,n])+((L[j])*K[n]*Q[n]*Ch_dSh[j,n])-((C[j])*J[n]*S[n]
  *S_dC[j,n])+((C[j])*L[n]*B[n]*S_dCh[j,n])+((C[j])*C[n]*W[n]
  *S_dS[j,n])+((C[j])*K[n]*Q[n]*S_dSh[j,n])-((K[j])*J[n]*S[n]
  *Sh_dC[j,n])+((K[j])*L[n]*B[n]*Sh_dCh[j,n])+((K[j])*C[n]*W[n]
  *Sh_dS[j,n])+((K[j])*K[n]*Q[n]*Sh_dSh[j,n]):#print(int_y);
> Int4:=Int4+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>       end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int4:=evalf(Int4*K4):
> #print(Int4);
>   #---------- Integration 5 ----------#
> Int5:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=-((M[i])*M[m]*E[m]*CdC[i,m])+((M[i])*N[m]*F[m]*CdCh[i,m])
  +((M[i])*P[m]*G[m]*CdS[i,m])+((M[i])*R[m]*H[m]*CdSh[i,m])-((N[i])
  *M[m]*E[m]*ChdC[i,m])+((N[i])*N[m]*F[m]*ChdCh[i,m])+((N[i])*P[m]
  *G[m]*ChdS[i,m])+((N[i])*R[m]*H[m]*ChdSh[i,m])-((P[i])*M[m]*E[m]
  *SdC[i,m])+((P[i])*N[m]*F[m]*SdCh[i,m])+((P[i])*P[m]*G[m]*SdS[i,m])
  +((P[i])*R[m]*H[m]*SdSh[i,m])-((R[i])*M[m]*E[m]*ShdC[i,m])+((R[i])
  *N[m]*F[m]*ShdCh[i,m])+((R[i])*P[m]*G[m]*ShdS[i,m])+((R[i])*R[m]
  *H[m]*ShdSh[i,m]):#print(int_x);
> int_y:=((J[j]*(S[j]^2))*J[n]*S[n]*C_dC[j,n])-((J[j]*(S[j]^2))*L[n]
  *B[n]*C_dCh[j,n])-((J[j]*(S[j]^2))*C[n]*W[n]*C_dS[j,n])-((J[j]
  *(S[j]^2))*K[n]*Q[n]*C_dSh[j,n])-((L[j]*(B[j]^2))*J[n]*S[n]
  *Ch_dC[j,n])+((L[j]*(B[j]^2))*L[n]*B[n]*Ch_dCh[j,n])+((L[j]
  *(B[j]^2))*C[n]*W[n]*Ch_dS[j,n])+((L[j]*(B[j]^2))*K[n]*Q[n]
  *Ch_dSh[j,n])+((C[j]*(W[j]^2))*J[n]*S[n]*S_dC[j,n])((C[j]*(W[j]^2))
  *L[n]*B[n]*S_dCh[j,n])-((C[j]*(W[j]^2))*C[n]*W[n]*S_dS[j,n])-((C[j]
  *(W[j]^2))*K[n]*Q[n]*S_dSh[j,n])-((K[j]*(Q[j]^2))*J[n]*S[n]
  *Sh_dC[j,n])+((K[j]*(Q[j]^2))*L[n]*B[n]*Sh_dCh[j,n])+((K[j]
  *(Q[j]^2))*C[n]*W[n]*Sh_dS[j,n])+((K[j]*(Q[j]^2))*K[n]*Q[n]
  *Sh_dSh[j,n]):#print(int_y);
> Int5:=Int5+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
```

```
>       end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int5:=evalf(Int5*K5):
> #print(Int5);
>   #---------- Integration 6 ----------#
> Int6:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=((M[i]*E[i])*M[m]*E[m]*dCdC[i,m])-((M[i]*E[i])*N[m]*F[m]
  *dCdCh[i,m])-((M[i]*E[i])*P[m]*G[m]*dCdS[i,m])-((M[i]*E[i])*R[m]
  *H[m]*dCdSh[i,m])-((N[i]*F[i])*M[m]*E[m]*dChdC[i,m])+((N[i]*F[i])
  *N[m]*F[m]*dChdCh[i,m])+((N[i]*F[i])*P[m]*G[m]*dChdS[i,m])
  +((N[i]*F[i])*R[m]*H[m]*dChdSh[i,m])-((P[i]*G[i])*M[m]*E[m]
  *dSdC[i,m])+((P[i]*G[i])*N[m]*F[m]*dSdCh[i,m])+((P[i]*G[i])*P[m]
  *G[m]*dSdS[i,m])+((P[i]*G[i])*R[m]*H[m]*dSdSh[i,m])-((R[i]*H[i])
  *M[m]*E[m]*dShdC[i,m])+((R[i]*H[i])*N[m]*F[m]*dShdCh[i,m])+((R[i]
  *H[i])*P[m]*G[m]*dShdS[i,m])+((R[i]*H[i])*R[m]*H[m]*dShdSh[i,m]):
> int_y:=((J[j]*S[j])*J[n]*S[n]*dC_dC[j,n])-((J[j]*S[j])*L[n]*B[n]
  *dC_dCh[j,n])-((J[j]*S[j])*C[n]*W[n]*dC_dS[j,n])-((J[j]*S[j])*K[n]
  *Q[n]*dC_dSh[j,n])-((L[j]*B[j])*J[n]*S[n]*dCh_dC[j,n])+((L[j]*B[j])
  *L[n]*B[n]*dCh_dCh[j,n])+((L[j]*B[j])*C[n]*W[n]*dCh_dS[j,n])+((L[j]
  *B[j])*K[n]*Q[n]*dCh_dSh[j,n])-((C[j]*W[j])*J[n]*S[n]*dS_dC[j,n])
  +((C[j]*W[j])*L[n]*B[n]*dS_dCh[j,n])+((C[j]*W[j])*C[n]*W[n]
  *dS_dS[j,n])+((C[j]*W[j])*K[n]*Q[n]*dS_dSh[j,n])-((K[j]*Q[j])*J[n]
  *S[n]*dSh_dC[j,n])+((K[j]*Q[j])*L[n]*B[n]*dSh_dCh[j,n])+((K[j]
  *Q[j])*C[n]*W[n]*dSh_dS[j,n])+((K[j]*Q[j])*K[n]*Q[n]*dSh_dSh[j,n]):
> Int6:=Int6+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>       end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int6:=evalf(Int6*K6):
> #print(Int6);
>   #---------- Integration 7 ----------#
> Int7:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=((M[i]*E[i])*M[m]*E[m]*dCdC[i,m])-((M[i]*E[i])*N[m]*F[m]
  *dCdCh[i,m])-((M[i]*E[i])*P[m]*G[m]*dCdS[i,m])-((M[i]*E[i])*R[m]
  *H[m]*dCdSh[i,m])-((N[i]*F[i])*M[m]*E[m]*dChdC[i,m])+((N[i]*F[i])
  *N[m]*F[m]*dChdCh[i,m])+((N[i]*F[i])*P[m]*G[m]*dChdS[i,m])+((N[i]
  *F[i])*R[m]*H[m]*dChdSh[i,m])-((P[i]*G[i])*M[m]*E[m]*dSdC[i,m])
  +((P[i]*G[i])*N[m]*F[m]*dSdCh[i,m])+((P[i]*G[i])*P[m]*G[m]
  *dSdS[i,m])+((P[i]*G[i])*R[m]*H[m]*dSdSh[i,m])-((R[i]*H[i])*M[m]
  *E[m]*dShdC[i,m])+((R[i]*H[i])*N[m]*F[m]*dShdCh[i,m])+((R[i]*H[i])
  *P[m]*G[m]*dShdS[i,m])+((R[i]*H[i])*R[m]*H[m]*dShdSh[i,m]):
> int_y:=(J[j]*J[n]*C_C[j,n])+(J[j]*L[n]*C_Ch[j,n])+(J[j]*C[n]
  *C_S[j,n])+(J[j]*K[n]*C_Sh[j,n])+(L[j]*J[n]*Ch_C[j,n])+(L[j]*L[n]
  *Ch_Ch[j,n])+(L[j]*C[n]*Ch_S[j,n])+(L[j]*K[n]*Ch_Sh[j,n])+(C[j]
  *J[n]*S_C[j,n])+(C[j]*L[n]*S_Ch[j,n])+(C[j]*C[n]*S_S[j,n])+(C[j]
  *K[n]*S_Sh[j,n])+(K[j]*J[n]*Sh_C[j,n])+(K[j]*L[n]*Sh_Ch[j,n])+(K[j]
  *C[n]*Sh_S[j,n])+(K[j]*K[n]*Sh_Sh[j,n]):#print(int_y);
> Int7:=Int7+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>        end do:
>    end do:print(i);
```

```
> end do:
> Int7:=evalf(Int7*K7):
> #print(Int7);
>   #---------- Integration 8 ----------#
> Int8:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=(M[i]*M[m]*CC[i,m])+(M[i]*N[m]*CCh[i,m])+(M[i]*P[m]*CS[i,m])
  +(M[i]*R[m]*CSh[i,m])+(N[i]*M[m]*ChC[i,m])+(N[i]*N[m]*ChCh[i,m])
  +(N[i]*P[m]*ChS[i,m])+(N[i]*R[m]*ChSh[i,m])+(P[i]*M[m]*SC[i,m])
  +(P[i]*N[m]*SCh[i,m])+(P[i]*P[m]*SS[i,m])+(P[i]*R[m]*SSh[i,m])
  +(R[i]*M[m]*ShC[i,m])+(R[i]*N[m]*ShCh[i,m])+(R[i]*P[m]*ShS[i,m])
  +(R[i]*R[m]*ShSh[i,m]):#print(int_x);
> int_y:=((J[j]*S[j])*J[n]*S[n]*dC_dC[j,n])-((J[j]*S[j])*L[n]*B[n]
  *dC_dCh[j,n])-((J[j]*S[j])*C[n]*W[n]*dC_dS[j,n])-((J[j]*S[j])*K[n]
  *Q[n]*dC_dSh[j,n])-((L[j]*B[j])*J[n]*S[n]*dCh_dC[j,n])+((L[j]*B[j])
  *L[n]*B[n]*dCh_dCh[j,n])+((L[j]*B[j])*C[n]*W[n]*dCh_dS[j,n])+((L[j]
  *B[j])*K[n]*Q[n]*dCh_dSh[j,n])-((C[j]*W[j])*J[n]*S[n]*dS_dC[j,n])
  +((C[j]*W[j])*L[n]*B[n]*dS_dCh[j,n])+((C[j]*W[j])*C[n]*W[n]
  *dS_dS[j,n])+((C[j]*W[j])*K[n]*Q[n]*dS_dSh[j,n])((K[j]*Q[j])*J[n]
  *S[n]*dSh_dC[j,n])+((K[j]*Q[j])*L[n]*B[n]*dSh_dCh[j,n])+((K[j]
  *Q[j])*C[n]*W[n]*dSh_dS[j,n])+((K[j]*Q[j])*K[n]*Q[n]*dSh_dSh[j,n]):
> Int8:=Int8+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>        end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int8:=evalf(Int8*K8):
>   #---------- Integration 9 ----------#
> Int9:=0:
> for i from 1 to M_N do
>    for j from 1 to M_N do
>       for m from 1 to M_N do
>          for n from 1 to M_N do
> int_x:=(-((M[i])*M[m]*E[i]*dCC[i,m])-((M[i])*N[m]*E[m]*dCCh[i,m])
  -((M[i])*P[m]*E[i]*dCS[i,m])-((M[i])*E[i]*R[m]*dCSh[i,m]))+(((N[i])
  *F[i]*M[m]*dChC[i,m])+((N[i])*F[i]*N[m]*dChCh[i,m])+((N[i])*F[i]
  *P[m]*dChS[i,m])+((N[i])*F[i]*R[m]*dChSh[i,m]))+(((P[i])*G[i]*M[m]
  *dSC[i,m])+((P[i])*G[i]*N[m]*dSCh[i,m])+((P[i])*G[i]*P[m]*dSS[i,m])
  +((P[i])*R[m]*G[i]*dSSh[i,m]))+(((R[i])*M[m]*H[i]*dShC[i,m])
  +((R[i])*N[m]*H[i]*dShCh[i,m])+((R[i])*P[m]*H[i]*dShS[i,m])+((R[i])
  *R[m]*H[i]*dShSh[i,m]));#print(int_x);
> int_y:=-((J[j])*J[n]*S[n]*C_dC[j,n])+((J[j])*L[n]*B[n]*C_dCh[j,n])
  +((J[j])*C[n]*W[n]*C_dS[j,n])+((J[j])*K[n]*Q[n]*C_dSh[j,n])-((L[j])
  *J[n]*S[n]*Ch_dC[j,n])+((L[j])*L[n]*B[n]*Ch_dCh[j,n])+((L[j])*C[n]
  *W[n]*Ch_dS[j,n])+((L[j])*K[n]*Q[n]*Ch_dSh[j,n])-((C[j])*J[n]*S[n]
  *S_dC[j,n])+((C[j])*L[n]*B[n]*S_dCh[j,n])+((C[j])*C[n]*W[n]
  *S_dS[j,n])+((C[j])*K[n]*Q[n]*S_dSh[j,n])-((K[j])*J[n]*S[n]
  *Sh_dC[j,n])+((K[j])*L[n]*B[n]*Sh_dCh[j,n])+((K[j])*C[n]*W[n]
  *Sh_dS[j,n])+((K[j])*K[n]*Q[n]*Sh_dSh[j,n]):#print(int_y);
> Int9:=Int9+(A[i,j]*A[m,n]*int_x*int_y):#print(i);
>          end do:
>        end do:
>    end do:print(i);
> end do:
> Int9:=evalf(Int9*K9):
>   #---------- Total potential energy ----------#
> J:=(a*b*sin(alpha)):
> Potential:=J*(Int1+Int2+Int3+Int4+Int5+Int6+Int7+Int8+Int9):
```

```
> save Potential, "C:/Skew_plates/BC_CCCF/Potential_CCCF144.txt":
> #------------- End Total_Potentail_Energy (2)Pig 5.3 ------------#
```

หมายเหตุ ; ค่าพลังงานศักย์รวมที่คำนวณได้ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกเก็บไว้ที่ C:/Skew_plates/BC_CCCF/Potential_CCCF144.txt โดยมีชื่อไฟล์ว่า Potential

ก.3 โปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอ

โปรแกรม "Ritz_Method" ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อหาค่าภาระการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีริทซ์ โดยการแก้ปัญหาเจาะจงและพล็อตดูโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main Program) และ 3 โปรแกรมย่อย (Subroutine) โดยถูกจัดเก็บไว้ในไฟล์ข้อมูลนามสกุล .txt ผู้สนใจสามารถประดิษฐ์โปรแกรมขึ้นมาใช้ได้เองโดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างโปรแกรมหลัก "Ritz_Method" ในโปรแกรม Maple และโปรแกรมย่อยทั้ง 3 โปรแกรมโดยจัดเก็บไฟล์ข้อมูลให้ถูกต้องตามที่กำหนด (ดังแสดงรายละเอียดในโปรแกรมย่อยทั้ง 3 โปรแกรม)
2. กำหนดสิ่งที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต้องการให้ถูกต้องดังแสดงตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.4 และแสดงที่ตอนต้นของโปรแกรมหลัก "Ritz_Method"
   (E_1, E_2, v_{12}, G_{12}, Stacking sequence, a, b, t, N, M_N)

ตัวอย่างโปรแกรมหลัก "Ritz_Method" ที่ดัดแปรด้วยโปรแกรม Maple ที่แสดงหน้าจอคอมพิวเตอร์มีรายละเอียดของโปรแกรมดังต่อไปนี้

```
> #------------------ Ritz_Method (3)Pig 5.3 ------------------#
> #--- Buckling Problem by Ritz method: BC=[C-C-C-F] ---#
> #---(1) Define Material Properties and Boundary Condition ---#
> #--- Define Material Properties ---#
> restart ;
> Digits:=40:
> #-- Input of all material properties = T300/934(graphite/epoxy)--#
> E1 := 131e9;          # -- Longitudanal modulus,E11= 131 GPa
> E2 := 10.3e9;         # -- Transverse modulus,E22= 10.3 GPa
> v12 := 0.22;          # -- Poisson ratio
> G12 := 6.9e9;         # -- In-plane shear modulus,G12= 6.9 GPa
> a:=0.9 ;              # -- Length of the plates,a=0.9 m
> b:=0.3 ;              # -- Width of the plates,b=0.3 m
> t := 0.000127 ;       # --  Ply thickness, m
> h:=t*N;               # --  thickness, m
> Load_Ratio:=0:              # Define: Load ratio = Sy/Sx
> alpha:=90:                  # Define: Skew Angle Plate
> M_N := 1 :                  # Define:M=N=1,2,3..12 :Number of Term
> #-----  Define Stacking Sequence  -----#
> N:=8 :                                  # Number of ply
> #phi := vector([0,0,0,0,0,0,0,0]):      # Angle Fiber: [0]8
> phi := vector([0,90,0,90,90,0,90,0]):   # Angle Fiber:[0,90]2S
> #phi := vector([+45,-45,+45,-45,-45,+45,-45,+45]): # [+45,-45]2S
> #phi := vector([45,45,45,45,45,45,45,45]):         # [45]8
```

```
> #--------------------------------------------------------------#
> alpha:=evalf(alpha*Pi/180):
> b:=b/sin(alpha):
> Sy:= Load_Ratio*Sx :          # Load ratio= Sy/Sx
> Nx:= (Sx+(Sy*cos(alpha)^2))/sin(alpha):
> Ny  :=  Sy*sin(alpha)  :
> Nxy :=  Sy*cos(alpha)  :
> Term:= (M_N)^2 :                          # A[m,n]=1,4,9,16,25..144
> read "C:/Thesis/ABD.txt":                 # Determine ABD Matrix
> read "C:/Thesis/Constant_K1_K9.txt":      # Determine K1-K9 (Subr. 1)
> #----- Define Boundary Condition -----#
> read"C:/Thesis/Kantorovich/Function/C_C/FunctionX_C_C.txt":
> read "C:/Thesis/Kantorovich/Function/C_F/FunctionY_C_F.txt
> read "C:/Thesis/Skew_plates/BC_CCCF/Potential_CCCF144Term.txt":
> #----- Check Function of Kantorovich -----#
> plot([XX[1],XX[2],XX[3],XX[4],XX[5],XX[6],XX[7],XX[8],XX[9],XX[10]
  ,XX[11],XX[12]],xi=0..1,title="Mode Shape of Kantorovich
  \naxis-X ");
> plot([YY[1],YY[2],YY[3],YY[4],YY[5],YY[6],YY[7],YY[8],YY[9],YY[10]
  ,YY[11],YY[12]],eta=0..1,title="Mode Shape of Kantorovich
  \naxis-Y ");
>     #----------------- (2) Eigenvalue problem -----------------#
> read "C:/Thesis/Eigenvalue_problem.txt";#Lowest Eigenvalue(Subr.2)
> buckling:=(1/(max_number));
>     #----------------- (3) Plot Buckling Mode -----------------#
> read "C:/Skew_plates/Plot_Mode_Shape.txt":            #-(Subr. 3)
> plot3d(w,xi=0..1,eta=0..1,orientation=[141,52],axes=frame
  ,title="Mode Shape \nC-S-C-S",grid=[25,25]);
> with(plots):
> contourplot(w,xi=0..1,eta=0..1,coloring=[black,black]
  ,title="Contour Plot",grid=[25,25]);
> #----------------- End Ritz_Method (3)Pig 5.3 ------------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 1 โปรแกรม Constant_K1_K9.txt ถูกเก็บไว้ที่

C:/Thesis/Constant_K1_K9.txt เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าตัวแปรในสมการที่ 6-8

รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Constant_K1_K9.txt

```
#---------------- Constant_K1_K9.txt (Subroutine 1) ---------------#
    K1:=evalf((D11/(2*a^4))+(D12/(a^4*tan(alpha)^2))+(D22/(2*a^4
    *tan(alpha)^4))-(2*D16/(a^4*tan(alpha)))-(2*D26/(a^4
    *tan(alpha)^3))+(2*D66/(a^4*tan(alpha)^2)));
    K2:=evalf((D12/(a^2*b^2*sin(alpha)^2))+(D22/(a^2*b^2*sin(alpha)^2
    *tan(alpha)^2))-(2*D26/((a^2*b^2*sin(alpha)^2*tan(alpha)))));
    K3:=evalf(D22/(2*b^4*(sin(alpha)^4)));
    K4:=evalf((-2*D12/(a^3*b*sin(alpha)*tan(alpha)))-(2*D22/(a^3*b
    *sin(alpha)*tan(alpha)^3))+(2*D16/(a^3*b*sin(alpha)))+(6*D26/(a^3
    *b*sin(alpha)*tan(alpha)^2))-(4*D66/(a^3*b*sin(alpha)
    *tan(alpha))));
    K5:=evalf((-4*D22/(2*a*b^3*sin(alpha)^3*tan(alpha)))+(2*D26/(a
    *b^3*sin(alpha)^3)));
    K6:=evalf((2*D22/(a^2*b^2*sin(alpha)^2*tan(alpha)^2))-(4*D26/(a^2
    *b^2*sin(alpha)^2*tan(alpha)))+(2*D66/(a^2*b^2*sin(alpha)^2)));
    K7:=evalf((Nx/(2*a^2))+(Ny/(2*a^2*tan(alpha)^2)));
    K8:=evalf((Ny)/(2*b^2*sin(alpha)^2));
    K9:=evalf((-Ny)/(a*b*sin(alpha)*tan(alpha)));
```

```
#--------------- End Constant_K1_K9.txt (Subroutine 1) --------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 2 โปรแกรม Eigenvalue_problem.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Thesis/Eigenvalue_problem.txt เขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าภาระการโก่งงอด้วยระเบียบวิธีริทซ์โดยการแก้ปัญหาเจาะจงรายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Eigenvalue_problem.txt

```
#--------------- Eigenvalue_problem.txt (Subroutine 2) --------------#
   #----------  [A][C]-Sx[B][C]=0 ----------#
for m from 1 to sqrt(Term) do
   for n from 1 to sqrt(Term) do
      A[m,n]:=Amn[((-sqrt(Term))*(1-m))+n];
   end do:
 end do:
 for i from 1 to 12 do
    for j from 1 to 12 do
       for m from 1 to 12 do
          for n from 1 to 12 do
 if ( n > sqrt(Term)  )
    then A[m,n]:=0
    else n:=n
 end if:
 if ( m > sqrt(Term)  )
    then A[m,n]:=0
    else m:=m
 end if:
  if ( j > sqrt(Term)  )
    then A[i,j]:=0
    else j:=j
 end if:
 if ( i > sqrt(Term)  )
    then A[i,j]:=0
    else i:=i
 end if:
          end do:
       end do:
    end do:
 end do:
 #----------  Determint ∏/Amn=0 ----------#
 for i from 1 to Term do
 dPotential[i]:=simplify(diff(Potential,Amn[i]));
 #print(dPotential[i]);
 end do:
#----------  Determint [C]=[MxN] ----------#
 C:=array(1..Term,1..1):
 for i from 1 to Term do
    C[i,1]:=Amn[i]:
 end do:
 #print(C);
#----------  Determint [A]=[MxN] ----------#
    #---------- Define Nx=0 ----------#
 A:=array(1..Term,1..Term):
 for i from 1 to Term do
    for j from 1 to Term do
       A[i,j]:= subs(Sx=0,diff(dPotential[i],C[j,1])):
    end do:
```

```
 end do:
 #print(A);
#----------  Determint [B]=[MxN] ----------#
B:=array(1..Term,1..Term):
 for i from 1 to Term do
    for j from 1 to Term do
       B[i,j]:=diff(-dPotential[i],Sx,C[j,1]):
    end do:
 end do:
 #print(B);
 for i from 1 to 144 do
     if ((145-i) > Term)  then lambda[145-i]:=0
     end if;#print(lambda[145-i]);
 end do:
 max_number:=min(lambda[1],lambda[2],lambda[3],lambda[4],lambda[5]
,lambda[6],lambda[7],lambda[8],lambda[9],lambda[10],lambda[11]
,lambda[12],lambda[13],lambda[14],lambda[15],lambda[16],lambda[17]
,lambda[18],lambda[19],lambda[20],lambda[21],lambda[22],lambda[23]
,lambda[24],lambda[25],lambda[26],lambda[27],lambda[28],lambda[29]
,lambda[30],lambda[31],lambda[32],lambda[33],lambda[34],lambda[35]
,lambda[36],lambda[37],lambda[38],lambda[39],lambda[40],lambda[41]
,lambda[42],lambda[43],lambda[44],lambda[45],lambda[46],lambda[47]
,lambda[48],lambda[49],lambda[50],lambda[51],lambda[52],lambda[53]
,lambda[54],lambda[55],lambda[56],lambda[57],lambda[58],lambda[59]
,lambda[60],lambda[61],lambda[62],lambda[63],lambda[64],lambda[65]
,lambda[66],lambda[67],lambda[68],lambda[69],lambda[70],lambda[71]
,lambda[72],lambda[73],lambda[74],lambda[75],lambda[76],lambda[77]
,lambda[78],lambda[79],lambda[80],lambda[81],lambda[82],lambda[83]
,lambda[84],lambda[85],lambda[86],lambda[87],lambda[88],lambda[89]
,lambda[90],lambda[91],lambda[92],lambda[93],lambda[94],lambda[95]
,lambda[96],lambda[97],lambda[98],lambda[99],lambda[100],lambda[101]
,lambda[102],lambda[103],lambda[104],lambda[105],lambda[106]
,lambda[107],lambda[108],lambda[109],lambda[110],lambda[111]
,lambda[112],lambda[113],lambda[114],lambda[115],lambda[116]
,lambda[117],lambda[118],lambda[119],lambda[120],lambda[121]
,lambda[122],lambda[123],lambda[124],lambda[125],lambda[126]
,lambda[127],lambda[128],lambda[129],lambda[130],lambda[131]
,lambda[132],lambda[133],lambda[134],lambda[135],lambda[136]
,lambda[137],lambda[138],lambda[139],lambda[140],lambda[141]
,lambda[142],lambda[143],lambda[144]):
lambda:=evalf(Eigenvals(B, A, vecs));
#---------- Choose max number ----------#
max_number:=min(lambda[1],lambda[2],lambda[3],lambda[4],lambda[5]
,lambda[6],lambda[7],lambda[8],lambda[9],lambda[10],lambda[11]
,lambda[12],lambda[13],lambda[14],lambda[15],lambda[16],lambda[17]
,lambda[18],lambda[19],lambda[20],lambda[21],lambda[22],lambda[23]
,lambda[24],lambda[25],lambda[26],lambda[27],lambda[28],lambda[29]
,lambda[30],lambda[31],lambda[32],lambda[33],lambda[34],lambda[35]
,lambda[36],lambda[37],lambda[38],lambda[39],lambda[40],lambda[41]
,lambda[42],lambda[43],lambda[44],lambda[45],lambda[46],lambda[47]
,lambda[48],lambda[49],lambda[50],lambda[51],lambda[52],lambda[53]
,lambda[54],lambda[55],lambda[56],lambda[57],lambda[58],lambda[59]
,lambda[60],lambda[61],lambda[62],lambda[63],lambda[64],lambda[65]
,lambda[66],lambda[67],lambda[68],lambda[69],lambda[70],lambda[71]
,lambda[72],lambda[73],lambda[74],lambda[75],lambda[76],lambda[77]
,lambda[78],lambda[79],lambda[80],lambda[81],lambda[82],lambda[83]
,lambda[84],lambda[85],lambda[86],lambda[87],lambda[88],lambda[89]
,lambda[90],lambda[91],lambda[92],lambda[93],lambda[94],lambda[95]
,lambda[96],lambda[97],lambda[98],lambda[99],lambda[100],lambda[101]
,lambda[102],lambda[103],lambda[104],lambda[105],lambda[106]
,lambda[107],lambda[108],lambda[109],lambda[110],lambda[111]
```

```
,lambda[112],lambda[113],lambda[114],lambda[115],lambda[116]
,lambda[117],lambda[118],lambda[119],lambda[120],lambda[121]
,lambda[122],lambda[123],lambda[124],lambda[125],lambda[126]
,lambda[127],lambda[128],lambda[129],lambda[130],lambda[131]
,lambda[132],lambda[133],lambda[134],lambda[135],lambda[136]
,lambda[137],lambda[138],lambda[139],lambda[140],lambda[141]
,lambda[142],lambda[143],lambda[144]):

#------------- End Eigenvalue_problem.txt (Subroutine 2) ------------#
```

โปรแกรมย่อยที่ 3 โปรแกรม Plot_Mode_Shape.txt ถูกเก็บไว้ที่ C:/Skew_plates/Plot_Mode_Shape.txt เขียนโปรแกรมเพื่อเลือกค่าเวกเตอร์เจาะจงที่สอดคล้องกับค่าเจาะจงต่ำสุดเพื่อนำค่าเวกเตอร์เจาะจงไปพล็อตดูโหมดการโก่งงอที่เกิดขึ้น รายละเอียดโปรแกรมมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรม Plot_Mode_Shape.txt

```
#------------- Plot_Mode_Shape.txt (Subroutine 3) ------------#
#---------- Position of max-number in lambda ----------#
 for i from 1 to Term do
   if (max_number=lambda[i])  then pos:=i
   end if;
  end do;
 pos;
 ANS := linalg[submatrix](vecs, 1..Term, pos..pos):
 for m from 1 to sqrt(Term) do
   for n from 1 to sqrt(Term) do
      A[m,n]:=ANS[((-sqrt(Term))*(1-m))+n,1];#print(H[m,n]=A[m,n]);
    end do;
 end do;
 w:=0:
 for m from 1 to sqrt(Term) do
    for n from 1 to sqrt(Term) do
      w:=w+A[m,n]*XX[m]*YY[n]:
    end do:
 end do:
 #print(w);
#------------- End Plot_Mode_Shape.txt (Subroutine 3) -----------#
```

ภาคผนวก ข

ค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบ
จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช

ภาคผนวก ข

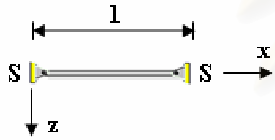
ฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบจากวิธีแคนโทโรวิช

ภาคผนวก ข แสดงค่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่นอกระนาบที่ได้จากระเบียบวิธีแคนโทโรวิช ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดแบบต่างๆ หลายๆ แบบ โดยมีรูปแบบของฟังก์ชันดังนี้

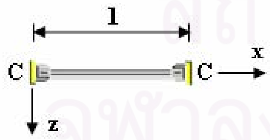
$$X(x)_m = Ax_m \sin(p1_m x) + Bx_m \cos(p1_m x) + Cx_m \sinh(p2_m x) + Dx_m \cosh(p2_m x)$$

เมื่อ ; m =1,2,3,4

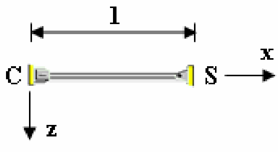
ตารางที่ ข-1 กรณีการจับยึดแบบ S-S

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	0	0	0	0
	Cx_m	0	0	0	0
	Dx_m	0	0	0	0
	$p1_m$	3.14159	6.28318	9.42477	12.56637
	$p2_m$	0	0	0	0

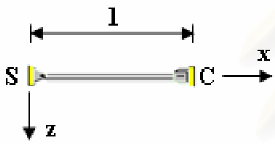
ตารางที่ ข-2 กรณีการจับยึดแบบ C-C

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-0.88443	-0.95045	-0.97429	-0.98423
	Cx_m	-0.87515	-0.95097	-0.97427	-0.98423
	Dx_m	0.88443	0.95045	0.97429	0.98423
	$p1_m$	4.58989	7.80319	10.96953	14.12127
	$p2_m$	5.24467	8.20544	11.25922	14.34747

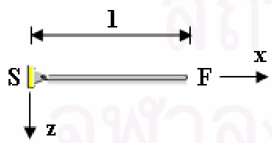
ตารางที่ ข-3 กรณีการจับยึดแบบC-S

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	*m* = 1	*m* = 2	*m* = 3	*m* = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-0.58614	-0.94071	-0.97039	-0.98239
	Cx_m	-0.58615	-0.94072	-0.97039	-0.98239
	Dx_m	0.58614	0.94071	0.97039	.98239
	$p1_m$	3.67176	7.03804	10.19515	13.34288
	$p2_m$	6.26417	7.48155	10.50621	13.58205

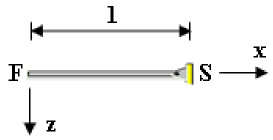
ตารางที่ ข-4 กรณีการจับยึดแบบ S-C

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	*m* = 1	*m* = 2	*m* = 3	*m* = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-0.11477	-0.12677	-0.17059	-0.17930
	Cx_m	0.10475	-0.68194	0.34898	-0.16534
	Dx_m	-0.80231	-0.11200	-0.16043	-0.17289
	$p1_m$	3.81514	7.02983	10.19097	13.34038
	$p2_m$	4.77992	7.59684	10.59005	13.64768

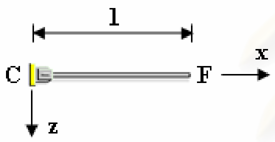
ตารางที่ ข-5 กรณีการจับยึดแบบ S-F

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	*m* = 1	*m* = 2	*m* = 3	*m* = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	0	0	0	0
	Cx_m	0.31930	0	0	0
	Dx_m	0	0	0	0
	$p1_m$	5.99176	7.13376	10.24285	13.3711
	$p2_m$	7.85234	0	0	0

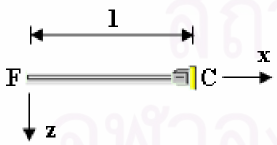
ตารางที่ ข-6 กรณีการจับยึดแบบ F-S

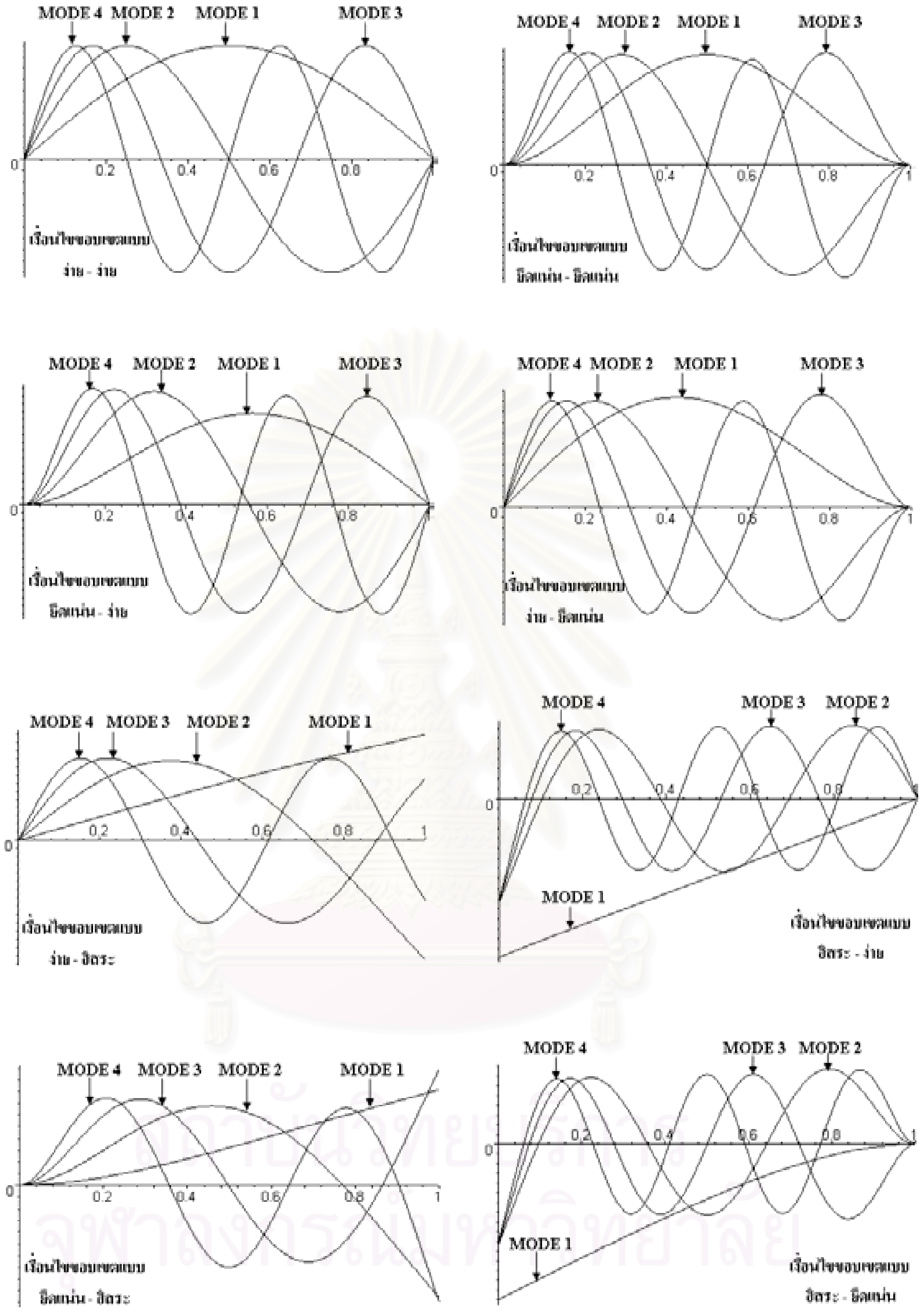
เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-2.12308	-1.06758	-1.03961	-1.02598
	Cx_m	1.08181	1.01796	1.01063	1.00700
	Dx_m	-1.05059	-1.01796	-1.01063	-1.00700
	$p1_m$	1.13060	10.24285	13.37118	16.50618
	$p2_m$	2.11198	10.55251	13.60985	16.70010

ตารางที่ ข-7 กรณีการจับยึดแบบ C-F

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-0.62916	-0.87531	-0.95238	-0.97443
	Cx_m	-0.58813	-0.88309	-0.95190	-0.97445
	Dx_m	0.62916	0.87531	0.95238	0.97443
	$p1_m$	1.84536	4.77610	7.88384	11.01100
	$p2_m$	3.13765	5.40839	8.28217	11.29963

ตารางที่ ข-8 กรณีการจับยึดแบบ F-C

เงื่อนไขขอบเขต	สัมประสิทธิ์	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
	Ax_m	1	1	1	1
	Bx_m	-1.92752	-1.05843	-1.03538	-1.02368
	Cx_m	1.06785	1.01559	1.00951	1.00639
	Dx_m	-1.27424	-1.01556	-1.00951	-1.00639
	$p1_m$	1.77797	11.0110	14.14663	17.28513
	$p2_m$	2.51861	11.29963	14.37243	17.47041



รูปที่ ข.1 ลักษณะโหมดการโก่งงอภายใต้เงื่อนไขขอบเขตหลายแบบ

ภาคผนวก ค

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์

The 20th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand
18-20 October 2006, Nakhon Ratchasima, Thailand

Buckling analysis of composite laminate rectangular and skew plates with various edge support conditions

Chainarin Pannok and Pairod Singhatanadgid

Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University,
Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand
Tel: 0-2218-6595, Fax: 0-2252-2889, E-mail: Pairod.S@chula.ac.th

Abstract

This research paper studies the buckling behavior of rectangular and skew thin composite plates with various boundary conditions using the Ritz method along with the proposed out-of-plane displacement functions. The boundary conditions considered in this study are combinations of simple support, clamped support and free edge. The out-of-plane displacement functions in form of trigonometric and hyperbolic functions are determined from the Kantorovich method. In addition to rectangular plates, the proposed method was applied to the skew plates by transforming the domain of skew plate in *x-y* coordinate to a square plate of size 1 unit by 1 unit in the ξ-η coordinate. For rectangular plates with any combination of simple, clamped, and free support, the proposed displacement function yields very good results compared with the available solutions. However, for skew plates, the accurate results are obtained only for plates with clamped support. The solutions of plates with simple support or free support do not have a good convergence. So, the proposed out-of-plane displacement functions can be used to solve the buckling problem of rectangular panels with all combinations of boundary conditions and skew panels with clamped support. Only an approximate solution is obtained if the proposed function is employed to skew plates with simple or free support. Buckling load and modes of specimens with various skew angles and levels of transverse loading are also presented.

Keywords: Buckling, Composite, Rectangular Plate, Skew Plate, Ritz Method

1. Introduction

Recently, composite materials are increasingly used in many mechanical, civil, and aerospace engineering applications due to their high specific stiffness (stiffness per unit density) and high specific strength (strength per unit density). Buckling of composite thin plates is in the interest of many researchers in the past decades. A lot of theoretical and experimental studies are available in the literatures [1-5]. Besides a simple plate configuration such as rectangular plates, several cases of irregular plates are also investigated in many studies. Heitzer and Feuch [6] employed the Rayleigh-Ritz method to analyze the buckling and postbuckling behavior of thin elliptical anisotropic plates. Triangular anisotropic plates were also studied by Jaunky *et al*. [7]. The skew or parallelogram plates which are in the scope of this study were also explored in several studies [8-10]. Most of the studies focused on plates with either simple support or clamped support on all four edges. In this study, the out-of-plane displacement functions for a variety of boundary conditions are employed along with the Ritz method to determine the buckling load and mode of composite laminated plates with a variety of boundary conditions. The buckling behavior of the skew plates are determined and compared to available solutions. The effects of skew angle and transverse tensile loading on the buckling load and mode are also investigated.

2. Problem Statement

This study involves in buckling behavior of rectangular and skew laminated composite plates, as shown in Fig 1. The skew plate can be described by either orthogonal coordinate *x-y* or oblique coordinate ξ-η. The specimen is composed of a number of orthotropic plies with symmetric stacking sequence. The fiber angle θ is measured with respected to the *x*-axis. The skew angle of the specimen α is also measured from the *x*-axis, as shown in the figure. Since a rectangular plate is a special case of skew plates, i.e. in case of α = 90°, all of the derivation in this paper is carried out in form of skew plate configuration. The length of the skewed edges in the ξ and η directions are *a* and *b*, respectively. The specimen is biaxially loaded by in-plane forces in the oblique coordinate system of S_x and S_y. It should be noted that the in-plane forces are in term of force per unit length of plate. In this study, buckling is caused by the in-plane force S_x, which is always a compressive load. The in-plane load in the other direction, S_y, can be either tension or compression. It can be a specified or known load or be a ratio of the unknown buckling load S_x. The boundary conditions of the specimen can be any combinations of the simple support (S), clamped support (C), and free or no support (F).

Besides the oblique loads, the orthogonal in-plane loads N_x, N_y, and N_{xy} are also shown in the figure. These loading will be used later in the Ritz method. The orthogonal loads are also in term of force per unit length.

With a simple derivation using equilibrium equations, the orthogonal in-plane loads are related to the oblique loads as follows;

$$N_x = \left[S_x + S_y \cos^2\alpha\right]/\sin\alpha \tag{1}$$

$$N_y = S_y \sin\alpha \tag{2}$$

$$N_{xy} = S_y \cos\alpha \tag{3}$$

It should be noted that $S_x = N_x$, $S_y = N_y$, and $N_{xy} = 0$ for rectangular plates subjected to biaxial loading.

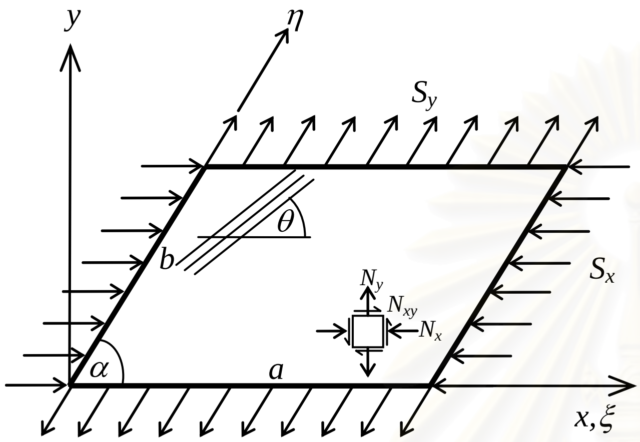


Figure 1. The skew plate with in-plane loading

3. Total Potential Energy Π

To use the Ritz method to determine the buckling load, the total potential energy of the loaded plate must be determined. The total potential energy of the specimen is summation of the strain energy and the potential energy due to the applied loads. For symmetric laminated plate, the total potential energy for a thin composite plate in orthogonal coordinate is written as [3];

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint \left\{ D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \right\} dxdy \tag{4}$$

where D_{ij} is the bending stiffness of the plate
w is the out-of-plane displacement

The out-of-plane displacement function $w(x,y)$ is easier determined for rectangular plate configuration than that of the skew configuration. So, the skew plate configuration is mapped into a unit square as shown in Fig 2. The relationship between the x-y coordinate and the ξ-η coordinate is written as;

$$x = a\xi + (b\cos\alpha)\eta \tag{5a}$$

$$y = (b\sin\alpha)\eta \tag{5b}$$

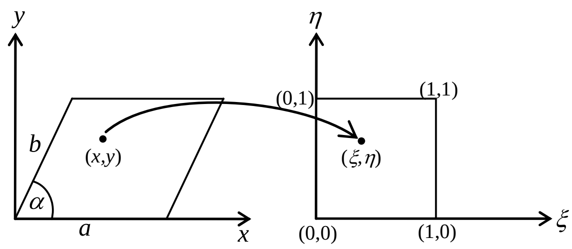


Figure 2. Mapping of the skew plate into a unit square

That is the relationship of an integral of a function in the x-y coordinate is determined in the ξ-η coordinate as;

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))Jd\xi d\eta \tag{6}$$

where J is the Jacobian matrix defined as;

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\cos\alpha \\ 0 & b\sin\alpha \end{bmatrix} = ab\sin\alpha \tag{7}$$

So, the total potential energy of the plates in the ξ-η coordinate is simplify to;

$$\Pi = ab\sin\alpha \int_0^1\int_0^1 K_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + K_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) + K_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 + K_4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right) + K_5\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right) + K_6\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 + K_7\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + K_8\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 + K_9\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) d\xi d\eta \tag{8}$$

where;

$$K_1 = \frac{1}{a^4}\left[\frac{D_{11}}{2} + \frac{D_{12}}{\tan^2\alpha} + \frac{D_{22}}{2\tan^4\alpha} - \frac{2D_{16}}{\tan\alpha} - \frac{2D_{26}}{\tan^3\alpha} + \frac{2D_{66}}{\tan^2\alpha}\right]$$

$$K_2 = \frac{1}{b^2\sin^2\alpha}\left(\frac{D_{12}}{a^2} + \frac{D_{22}}{a^2\tan^2\alpha} - \frac{2D_{26}}{a^2\tan\alpha}\right)$$

$$K_3 = \frac{D_{22}}{2b^4\sin^4\alpha}$$

$$K_4 = \frac{2}{a^3 b\sin\alpha}\left(-\frac{D_{12}}{\tan\alpha} - \frac{D_{22}}{\tan^3\alpha} + D_{16} + \frac{3D_{26}}{\tan^2\alpha} - \frac{2D_{66}}{\tan\alpha}\right)$$

$$K_5 = \frac{2}{ab^3\sin^3\alpha}\left(-\frac{D_{22}}{\tan\alpha} + D_{26}\right)$$

$$K_6 = \frac{2}{a^2b^2\sin^2\alpha}\left(\frac{D_{22}}{\tan^2\alpha} - \frac{2D_{26}}{\tan\alpha} + D_{66}\right)$$

$$K_7 = \frac{1}{2a^2}\left(N_x + \frac{N_y}{\tan^2\alpha} - \frac{2N_{xy}}{\tan\alpha}\right)$$

$$K_8 = \frac{N_y}{2b^2\sin^2\alpha}$$

$$K_9 = \frac{1}{ab\sin\alpha}\left(-\frac{N_y}{\tan\alpha} + N_{xy}\right)$$

4. The displacement function

The approximate displacement functions used in this study are written in form of the finite series as;

$$w(\xi,\eta)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}A_{mn}X_m(\xi)Y_n(\eta) \tag{9}$$

where $X_m(\xi)$ and $Y_n(\eta)$ are the basis functions satisfied the geometric boundary condition of the plate, and A_{mn} are the unknown coefficients to be determined. These basic functions are determined from the solutions of the buckling load of the specially orthotropic plates using the Kantorovich method [11]. Generally, the basis functions are the summation of the trigonometry and hyperbolic functions in form of;

$$\begin{aligned}X_m(\xi)&=A_m\sin p_m\xi+B_m\cos p_m\xi\\&\quad+C_m\sinh q_m\xi+D_m\cosh q_m\xi\end{aligned} \tag{10}$$

This form of function is used for both $X_m(\xi)$ and $Y_n(\eta)$ basis functions. The subscript "m" refers to the mode of displacement. The first four modes of the basis function for clamped-free boundary conditions are shown in Fig 3. The boundary conditions are clamped support and free at the left end and right end, respectively.

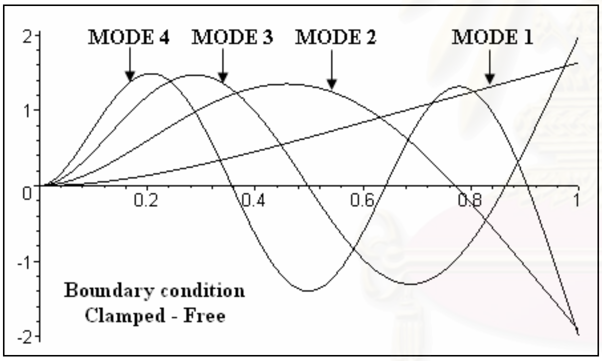


Figure 3. Displacement functions for clamped-free boundary conditions

5. Solution approach

The Ritz method is used in the present study to determine the buckling load and mode of the skew plate. This method begins with obtaining the total potential energy in term of displacement functions by substituting the approximate displacement functions Eq.(9) into the total potential energy, Eq.(8). The displacement functions must be selected such that the geometric boundary conditions of the plate are satisfied. After performing several integrations, the total potential energy is written in term of the undetermined coefficients A_{mn} and the buckling load S_x, given that the transverse load S_y is prescribed or varied with S_x. It is possible to describe to total potential energy in term of the orthogonal loading, but oblique loading is more practical. According to the principle of minimum total potential energy, the total potential energy is minimized with respect to the unknown coefficients A_{mn} according to;

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}}=0 \tag{11}$$

This procedure gives a system of $M \times N$ linear equations, which can be reduced to a matrix form of generalized eigenvalue problem as

$$[A]\times[C]-S_x[B]\times[C]=0 \tag{12}$$

where [A] and [B] are square matrices whose elements are determined from the plate properties. [C] is a column matrix of an eigenvector, A_{mn}. S_x is the eigenvalue representing the buckling load of the problem. A number of eigenvalues will be obtained after the generalized eigenvalue problem equation, Eq. (12), is solved. The lowest eigenvalue is the buckling load which is of interest. The corresponding eigenvector of that lowest eigenvalue is substituted in the displacement function Eq.(9) to determine the buckling mode.

The convergence study was performed to ensure that the number of term used in the displacement function is enough to give a converged solution. A $[\pm 45]_{2S}$ graphite-epoxy rectangular plate is selected for convergence study. The mechanical ply properties of the graphite-epoxy composite are E_{11} = 131 GPa, E_{22} = 10.3 GPa, G_{12} = 6.9 GPa, v_{12} = 0.22, and ply thickness = 0.127 mm. There are two rectangular plates with aspect ratio of 3, i.e. a = 0.9 m and b = 0.3 m., and the boundary condition of SCCS and CCCC. For SCCS boundary condition, the first letter S and third letter C represent the boundary condition on the ξ = 0 and ξ = 1 edges, respectively. Similarly, the second and fourth letters represent the boundary condition on the η = 0, and η = 1 edges, respectively. The buckling loads of both specimens are determined using different number of terms in the approximate displacement function, Eq.(9). The number of terms used in the convergence study are 1, 4, 9, ..144, i.e. M and N are 1, 2, 3,..12. The buckling loads of both plates are plotted versus the number of terms, as shown in Fig 4. It is seen that the convergence of the buckling load is achieved very well with fairly low number of terms. Thus, in this study, the number of term used in the approximate displacement function is selected as 100, i.e. $M = N = 10$ are used in Eq.(9).

A similar convergence study for skew plate was also performed for both isotropic and composite skew plates. It is found that the convergence of the buckling load is very slow for the specimens with simple support or free edge. For the case of CCCC plates, the buckling load is converged similar to that of the rectangular plate shown in Fig.4. The convergence study for SSSS skew aluminum plate with skew angle of 45° is shown in Fig. 5. A total of 900 terms of the displacement functions, i.e. M=N=30, are used. It is seen that the convergence is very sluggish, even with such a high number of term in the displacement function. So, the proposed functions are not recommended for skew plates with simple support or free boundary conditions.

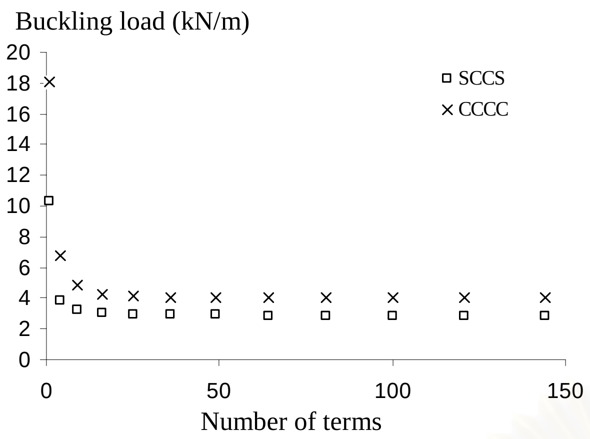


Figure 4. Convergence of the buckling load of $[\pm 45]_{2S}$ rectangular plates

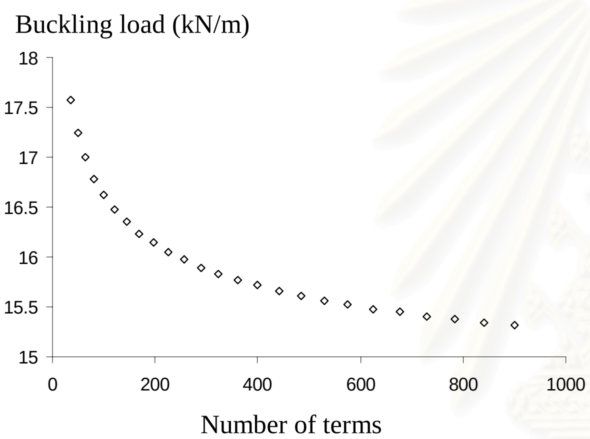


Figure 5. Convergence of the buckling load of aluminum skew plates with skew angle, $\alpha = 45°$

6. Numerical verification

In this section, the buckling loads determined from the proposed displacement functions are verified with the available solutions. Table 1 presents the buckling load of a square composite plate (α = 90°) compared with solutions from other two studies. The boundary conditions of the specimens in this case are CSCS. It can be seen that the differences between buckling loads of the present and past studies are less than one percent. Similarly, buckling loads of $[0/90]_{2s}$ rectangular plates with various combination of boundary conditions are verified with the solution from Kantorovich method [11] in Table 2. The nondimensional buckling load is defined by

$$K_{cr} = \frac{N_x^{cr} b^2}{\pi^2 D_{22}} \tag{13}$$

The boundary conditions are CCCF, SCSF, and SCSC with plate aspect ratios of 1,2, and 3. The buckling loads from this study and the past study match very well with each other.

The solution for skew plate is also compared with the solution from Wang [8] in Table 3. In this comparison, the buckling is initiated by the uniaxial loading with compressive force S_y. To compare with the solutions of the previous study, the obtained buckling loads are transformed to the buckling stress parameter which is defined as;

$$K_{cru} = \frac{S_y b^2}{\pi^2 E_{22} h^3} \tag{14}$$

The material properties of the ply are E_{11}/E_{22} = 10.0, G_{12}/E_{22} =0.5, v_{12} = 0.333, h/b = 0.001. The fiber angles of the specimens are unidirectional of 45°, 60° and 90° with the skew angle of 45° and 60°. The specimens are supported by CCCC boundary conditions. Again, the solutions of the present study are compared very well with those of the previous study.

Table 1. Buckling loads of CSCS square plates compared with the previous studies.

Stacking Sequence	Plate Thickness (in)	Buckling load ($\times 10^3$ lbs)		
		Ref. [11]	Ref. [12]	Present study
$[0/90]_{5S}$	0.115	11.8328	11.7625	11.8312
	0.102	8.2565	8.2074	8.2553
	0.091	5.8630	5.8282	5.8622
$[30]_{20}$	0.110	N/A	9.3453	9.3909
	0.106	N/A	8.3625	8.4149
$[\pm 45]_{2S}$	0.102	N/A	8.3746	8.4230
	0.110	N/A	10.5036	10.5651

Note. E_{11} = 215 GPa (31.18 Msi), E_{22} = 23.6 GPa (3.42 Msi), G_{12} = 5.2 GPa (0.754 Msi), v_{12} = 0.28, $a = b$ = 25.4 cm (10 in.)

Table 2. Nondimensional buckling load factor of $[0/90]_{2s}$ rectangular plates.

B.C.	Method	Aspect ratio, (a/b)		
		1.0	2.0	3.0
CCCF	Ref. [11]	7.8494	2.4895	1.8747
	Present	7.8492	2.4886	1.8737
SCSF	Ref.[11]	2.2294	1.2079	1.3489
	Present	2.2294	1.2089	1.3491
SCSC	Ref. [11]	7.8342	7.3323	7.0500
	Present	7.8342	7.3322	7.0500

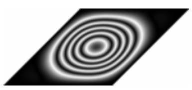
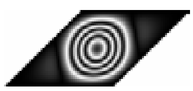
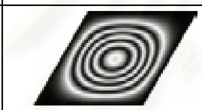
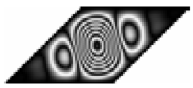
Note. $E_{11} = 10E_{22}$, $G_{12} = 0.5E_{22}$, v_{12} = 0.25

In addition to the buckling load, the buckling mode is also determined from the eigenvector corresponding to the lowest eigenvalue. From the eigenvector, the out of plane displacement configuration of the buckled plate in the ξ-η coordinate is determined from Eq.(9). The out-of-plane displacement $w(\xi,\eta)$ is transformed back to that of the x-y coordinate, and then plotted in form of a contour, as shown in Table 4. Each line on the contour represents a line of constant out-of-plane displacement. It is noticed that the buckling mode configuration depends on both fiber angle and skew angle.

Table 3. Buckling stress parameter of skew plates compared with the previous study.

Fiber angle	Skew angle			
	45°		60°	
	Ref. [8]	Present	Ref. [8]	Present study
45°	4.3871	4.3875	3.0507	3.0509
60°	5.4533	5.4544	4.0419	4.0420
90°	4.1062	3.9290	3.9910	3.9927

Table 4. Buckling mode skew composite plates

Fiber angle	Skew angle	
	45°	60°
45°		
60°		
90°		

As shown in the convergence study that the convergence in case of simple support is very slow, the buckling loads of an isotropic skew plate with $a/b = 1$ are compared with other studies, as shown in Table 5. The numbers of terms used for the case of SSSS boundary condition are 900 terms. The specimens considered is uniaxially loaded by S_x and the buckling load is presented in term of nondimensional buckling load, Eq.(13). The buckling loads of specimens with CCCC boundary conditions are also presented for comparison. It should be noted that, for CCCC boundary condition, only $M=N=10$ is used. For case of SSSS boundary condition, the variation of buckling loads from each researcher is fairly high, ranging from 8.47 to 12.30 for skew angle of 45°. Kennedy's solutions are exact solutions since the problem is solved by satisfying the natural boundary conditions. Other solutions used the functions that are not exactly satisfied the natural solutions. In the present study, the double sine series are used as an approximate displacement functions for SSSS boundary conditions, i.e. coefficients B_m, C_m, and D_m are all zero in the displacement functions, Eq.(10). With the double sine series, only the kinematic boundary condition $w = 0$ is satisfied. The force boundary condition $M_n = 0$ (n is a direction normal to the plate boundary) is not satisfied since the proposed function yield the zero moment only in the oblique directions or in direction of ξ and η. In case of CCCC boundary condition, the proposed functions yields zero displacement on the boundary and zero slope in the normal direction, so the obtained buckling load are more accurate and match very well with other studies.

Therefore, the proposed approximate displacement functions are capable of predict the buckling load of rectangular composite plate with various boundary conditions. For skew plates, the proposed function yields an accurate result for only clamped support. Only an approximate solution are obtained for cases of simple or free supports because the force boundary conditions are not satisfied

Table 5. Nondimensional buckling load (K_{cr}) for isotropic skew plates ($a/b = 1$)

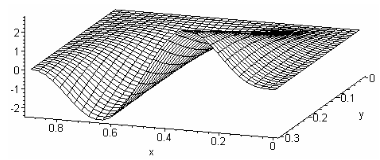
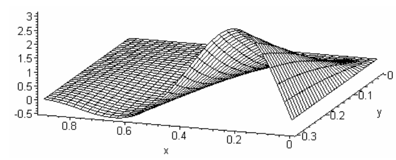
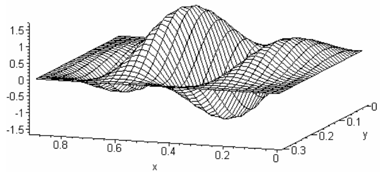
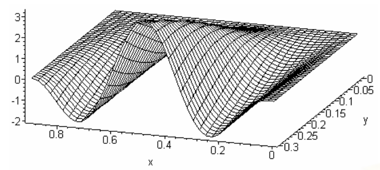
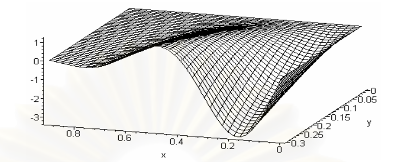
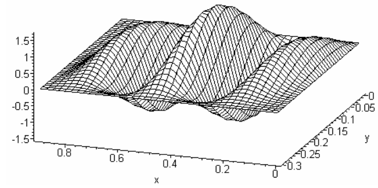
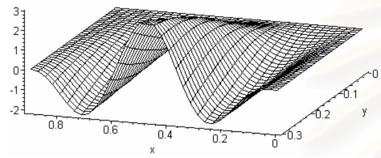
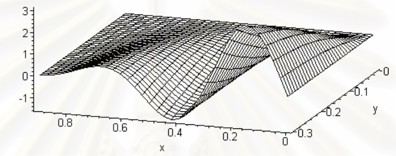
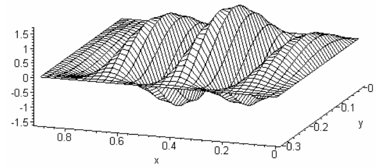
B.C.	Solutions	Skew angle (α)			
		90°	75°	60°	45°
SSSS	Durvasula [13]	4.00	4.48	6.41	12.30
	Kennedy [14]	4.00	4.33	5.53	8.47
	Wang [15]	4.00	4.44	6.19	10.60
	Reddy [16]	4.00	4.32	5.55	8.64
	Present	4.00	4.41	6.02	10.70
CCCC	Ashton [17]	-	11.01	13.79	20.67
	Wang [15]	10.08	10.89	13.75	20.69
	Reddy [16]	10.08	10.76	13.64	20.62
	Present	10.07	10.83	13.54	20.13

7. Additional Solution

The buckling loads and modes of $[45]_8$ graphite-epoxy rectangular plates with CCCF, SCSF, and SSCC boundary conditions are presented in Table 6. The specimen aspect ratio is 3; that is the dimensions of the specimen are a = 0.9 m. and b = 0.3 m. The specimens are loaded with either uniaxial loading, i.e. load ratio = 0, or biaxially loading. The buckling is initiated by the compression loading in the x direction, S_x, with tensile load S_y in the other direction. It can be seen that the buckling loads are increased with the applied transverse tensile loading. Similarly, the buckling modes for uniaxial and biaxial loading are different. If the buckling mode is indicated by the number of half-sine curves of the out-of plane displacement. For example, the bucking mode of SSCC plate is increased from mode 4 to mode 5 if the applied transverse tension is half the compressive load. Similar behavior is observed for CCCF and SCSF specimens. If the buckling mode is plotted as a contour plot, the contour will be inclined with respected to the plate boundary because of the inclined fiber angle.

For skew plates, the buckling loads of laminated plates with various skew angles are studied. Buckling loads and buckling modes of graphite-epoxy laminate with stacking sequence of $[0/90]_{2S}$ are shown in Table 7. The boundary condition of the specimens is CCCC with skew angle varied from 75° to 30°. In order to compare the buckling load between each specimen, the area of the plate is kept constant, i.e. the width a and height $b\sin\alpha$ are unchanged for each specimen. In this study, both the width and height of the specimens are 0.3 m. It is found that the buckling load of the specimen with higher skew

Table 6. Buckling loads and modes of $[45]_8$ rectangular plates

Load Ratio	CCCF	SCSF	SSCC
0	 N_x^{cr} = 0.5138 kN/m	 N_x^{cr} = 0.3671 kN/m	 N_x^{cr} = 1.8222 kN/m
-0.5	 N_x^{cr} = 0.7760 kN/m	 N_x^{cr} = 0.5977 kN/m	 N_x^{cr} = 2.6581 kN/m
-1	 N_x^{cr} = 1.0098 kN/m	 N_x^{cr} = 0.8339 kN/m	 N_x^{cr} = 3.5667 kN/m

angle is higher than that of the lower skew angle. This implies that the rectangular panel has higher load capacity than the skew plate of the same size. For specimens with skew angles of 60° and 75°, the buckling mode is said to be mode 1 since the number of half-sine wave in the direction of the applied load is 1. For specimen with skew angle of 45°, the buckling mode is a little different from other two specimens. There is a small out-of-plane displacement in the corner of the plate. The buckling mode of 30°-skew-angle plate is said to be mode 3 since there are two small contours on the buckled configuration.

Another study involves biaxial loading of the skew composite plates where both S_x and S_y loads are applied simultaneously. The buckling is initiated by the compressive loading S_x while the tensile load S_y is also presented. In this study, the transverse tensile load S_y is assumed to be a ratio of the compressive load S_x. The buckling loads of $[45]_8$ composite plates with boundary conditions of CCCC are presented in Table 8. The specimens are loaded biaxially with the load ratio of 0, -1, and -2, respectively. Similar to the rectangular plates, it can be seen that the buckling load is higher with the applied transverse tension. That is the specimen is reinforced by the transverse tensile loading because the transverse load trends to keep the panel flat. In addition to the buckling loads, buckling modes of the specimens with different load ratio are compared in the third column of the table. The buckling mode is mode 2 for uniaxial loading specimen. The buckling mode changes from mode 2 to mode 3 if the load ratio is increased to load ratio of -2. The buckling mode can be higher than mode 2, i.e. mode 3 or mode 4, if the transverse tensile load is increased.

Table 7. Buckling loads of CCCC $[0/90]_{2S}$ laminates with various skew angle

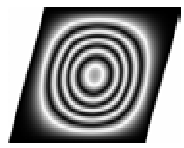
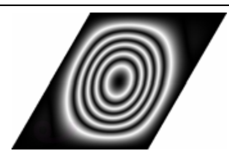
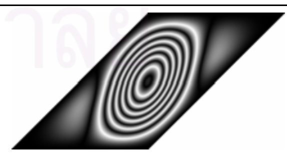
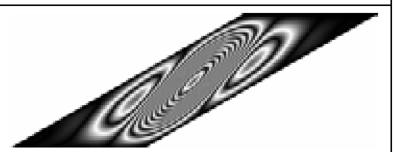
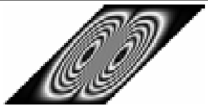
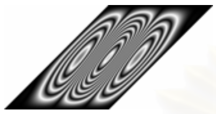
Skew angle	Buckling Load, S_x (kN/m)	Buckling mode
75°	5.4998	
60°	4.9076	
45°	3.9328	
30°	2.6068	

Table 8. Buckling load and mode of $[45]_8$ biaxially-loaded panels

Load Ratio	Buckling Load, S_x (kN/m)	Buckling mode
0	1.791	
-1	2.376	
-2	2.924	

8. Conclusion

In this study, the bucking behavior of rectangular and skew laminate plates with any combinations of simple, clamped, and free boundary conditions is investigated. Both bucking load and buckling mode are examined. The Ritz method along with the proposed approximate out-of-plane displacement functions is adopted. Displacement functions are determined from the buckling problem of a specially orthotropic plate solved by the Kantorovich method. The buckling loads obtained from the present method are verified with the previous studies. A very good agreement between the present solutions and the available solutions is obtained for rectangular plates with any combination of the boundary conditions and the skew plate with CCCC boundary condition. The proposed functions yield only approximate solutions for skew panel with simple support or free boundary condition because the proposed function does not yield the zero moment in the normal direction of the plate's boundary. Addition studies were performed to study the effect of skew angle and the transverse loading to the buckling behaviors. It is found that the buckling load is decreased with the decrease of the skew angle. The buckling mode may change a little bit with the skew angle. For biaxial loading, the buckling load is increase with the magnitude of the transverse tensile loading. The buckling mode may completely change, i.e. mode 2 to mode 3, if the transverse load is high enough.

References

[1] Tung, T. K., and Surdenas, J., 1987. Buckling of rectangular orthotropic plates under biaxial loading. Journal of Composite Materials, Vol. 21, pp.124-128.

[2] Narita, Y., and Leissa, A.W., 1990. Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 32, pp.909-924.

[3] Chai, G.B., and Hoon, K.H., 1992. Buckling of generally laminated composite plates. Composites Science and Technology, Vol. 45, pp.125-133.

[4] Tuttle, M., Singhatanadgid P., and Hinds, G., 1999. Buckling of Composite Panels Subjected to Biaxial Loading. Experimental Mechanics, Vol. 39, pp.191-201.

[5] Singer, J., Arbocz, J., and Weller, T., 2002. Buckling Experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures, John Wiley & Sons Inc., New York,

[6] Heitzer, J., and Feuch, M., 1993. Buckling and postbuckling of thin elliptical anisotropic plates. Computers and Structures, Vol. 48, No. 6, pp. 983-992.

[7] Jaunky, N., Knight, Norman F., Jr., and Ambur, D.R., 1995. Buckling analysis of general triangular anisotropic plates using polynomials. AIAA Journal, Vol. 33, No.12, pp.2414-2417.

[8] Wang, S., 1997. Buckling of thin skew fibre-reinforced composite laminates. Thin-Walled Structures, Vol. 28, No. 1, pp. 21-41.

[9] Reddy, A.R. Krishna, and Palaninathan, R., 1995. Buckling of laminated skew plates. Thin-Walled Structures, Vol. 22, No. 4, pp. 241-259.

[10]York, C.B. and Williams, F.W., 1995. Buckling analysis of skew plate assemblies: classical plate theory results incorporating Lagrangian multipliers. Computers and Structures. Vol. 56, No. 4, pp. 625-635.

[11]Ungbhakorn V., and Singhatanadgid P., 2005. Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method. Composite Structures. Vol. 73, pp.120-128.

[12]Chai GB., 1994. Buckling of generally laminated composite plates with various edge support conditions. Computer and Structures, Vol.29, No.3, pp.299–310.

[13]Durvasula, S., 1971. Buckling of simply supported skew plates. J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol 97, No 3, pp.967-979.

[14]Kennedy, J.B., and Prabhakara, M.K.,1978. Buckling of simply supported orthotropic skew plates. Aeronautical Quarterly, Vol.29, pp. 161-174

[15]Wang, C.M., Liew, K.M., and Alwis, W.A.M., 1992. Buckling of skew plates and corner condition for simply supported edges, J. Engng Mech. Div., ASCE, Vol. 118, No 4, pp. 651-662.

[16]Reddy, A.R. Krishna, and Palaninathan, R., 1995. Buckling of laminated skew plates, Thin-Walled Structures, Vol. 22, No 4, pp. 241-259.

[17] Ashton, J.E., 1969. Stability of clamped skew plates under combined loads, Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 139-140.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายชัยนรินทร์ แปนนอก เกิดเมื่อวันที่ 29 มิถุนายน 2524 ที่จังหวัดชัยภูมิ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เมื่อปีการศึกษา 2546 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547