วิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ

นางสาวเอื้ออารี บุญเพิ่ม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

MINIMAL ANGLED METHOD FOR 3-DIMENSIONAL LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Miss Aua-aree Boomperm

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computational Science
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	วิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ
โดย	นางสาวเอื้ออารี บุญเพิ่ม
สาขาวิชา	วิทยาการคณนา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

วนิดา เหมะกุล .... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตรวาหา)

เอื้ออารี บุญเพิ่ม: วิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ. (MINIMAL ANGLED METHOD FOR 3-DIMENSIONAL LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS) อ. ที่ปรึกษา: ผศ. ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ, 88 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีใหม่สองวิธีคือวิธี Minimal Angled Projection (MAP) และวิธี KKT- Minimal Angled Projection (KKT-MAP) โดยใช้มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของเงื่อนไขบังคับอสมการเชิงเส้นกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด วิธีนี้ลดปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 3 มิติไปเป็นปัญหาย่อยใน 2 มิติและใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติแก้ปัญหานั้น วิธี MAP จะทำซ้ำทีละหนึ่งเงื่อนไขบังคับไปจนครบทุกเงื่อนไขและในแต่ละครั้งจะประยุกต์ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติเพื่อสร้างผลเฉลยสำหรับปัญหา 3 มิติ จากนั้นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจะถูกเลือกจากกลุ่มผลเฉลยนี้ซึ่งมีค่าดีที่สุดและสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ ในขณะที่วิธี KKT-MAP จะเรียงลำดับเงื่อนไขบังคับตามมุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ จากนั้นใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติสร้างผลเฉลย โดยผลเฉลยที่ได้นี้จะถูกตรวจสอบกับเงื่อนไข KKT ถ้าสอดคล้องจะได้ว่าผลเฉลยนี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด มิเช่นนั้นเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดถัดไปจะถูกใช้จนกว่าจะได้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด จากการทดสอบกับปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับ 4 ถึง 20 เงื่อนไข พบว่าวิธี KKT-MAP ให้ผลลัพธ์เร็วกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ และวิธี MAP มาก นอกจากนี้วิธี MAP จะเร็วกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ในปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับ 4 ถึง 18 เงื่อนไขเท่านั้น

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ.....เอื้ออารี บุญเพิ่ม.....
สาขาวิชา วิทยาการคณนา ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..........
ปีการศึกษา 2550

4772582523: MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEY WORD: LINEAR PROGRAMMING/ GRADIENT VECTOR/ MINIMAL ANGLED ALGORITHM/ MAP/ KKT-MAP

AUA-AREE BOONPERM: MINIMAL ANGLED METHOD FOR 3-DIMENSIONAL LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. KRUNG SINAPIROMSARAN, Ph.D., [88] pp.

This thesis proposes two new algorithms to solve a 3-dimensional linear programming problem: The Minimal Angled Projection (MAP) algorithm and the KKT-Minimal Angled Projection (KKT-MAP) algorithm based on an angle between normal vector of linear inequality constraints and the gradient of the objective function for solving 3-dimensional linear programming (LP) with an optimal solution. Both algorithms reduce a 3-dimensional LP problem into 2-dimensional LP sub-problems and uses the minimal angled algorithm for solving sub-problems. The MAP method iteratively binds one constraint and applies the minimal angled algorithm in 2-dimension for generating the optimal solution of the original 3-dimensional LP problem. The optimal solution is then selected among these candidates with the best objective value and satisfies all constraints. While, the KKT-MAP method sorts constraints according to the angles between their normal vectors and the gradient of the objective function. Then it applies the minimal angled algorithm in 2-dimension for generating a candidate solution which will be checked with the KKT conditions of the original 3-dimensional LP problem. If the candidate solution satisfies the KKT conditions, that solution is the optimal solution. Otherwise, the next minimal angled from the constraint will be used until the optimal solution is found. By our experiments with 4 up to 20 constraints, the KKT-MAP algorithm is faster than the simplex method and the MAP algorithm. Moreover, MAP algorithm is faster than the simplex method for problems with 4 up to 18 constraints.

Department Mathematics

Field of study Computational Science

Academic year 2007

Student's signature ....

Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กรุง สินอภิรมย์สราญ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้ความรู้ คำแนะนำ และคำปรึกษาต่างๆที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตรวาหา กรรมการ ที่ได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ในงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่สนับสนุนทุนการศึกษาและทุนการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณมารดา ตลอดจนพี่น้องในครอบครัวและเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจและช่วยเหลือผู้วิจัยมาโดยตลอด

และสุดท้ายขออุทิศงานวิจัยนี้แด่นายคำเพียร บุญเพิ่ม และนายจีระศักดิ์ บุญเพิ่ม ผู้เป็นบิดาและน้องชายที่จากไป

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (linear programming problem) [1, 2, 3, 4] เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization problem) ที่มีฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขบังคับเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรอิสระ วัตถุประสงค์ของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น คือการหาค่าของตัวแปรอิสระทั้งหมดในระบบที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าสูงสุด หรือต่ำสุดตามเงื่อนไขที่กำหนด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด สินค้าชนิดแรกแต่ละชิ้นใช้เวลาในการผลิตขั้นต้น 4 ชั่วโมง ขั้นที่สอง 1 ชั่วโมง และขายได้กำไรชิ้นละ 600 บาท ส่วนสินค้าชนิดที่สองแต่ละชิ้นใช้เวลาในการผลิตขั้นต้น 3 ชั่วโมง ขั้นที่สอง 2 ชั่วโมง และขายได้กำไรชิ้นละ 800 บาท โรงงานสำหรับผลิตขั้นต้นและขั้นที่สองทำงานสัปดาห์ละไม่เกิน 120 และ 60 ชั่วโมงตามลำดับ ถ้าบริษัทต้องการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้ขายได้กำไรมากที่สุด บริษัทจะต้องผลิตสินค้าทั้งสองชนิดอย่างละกี่ชิ้น

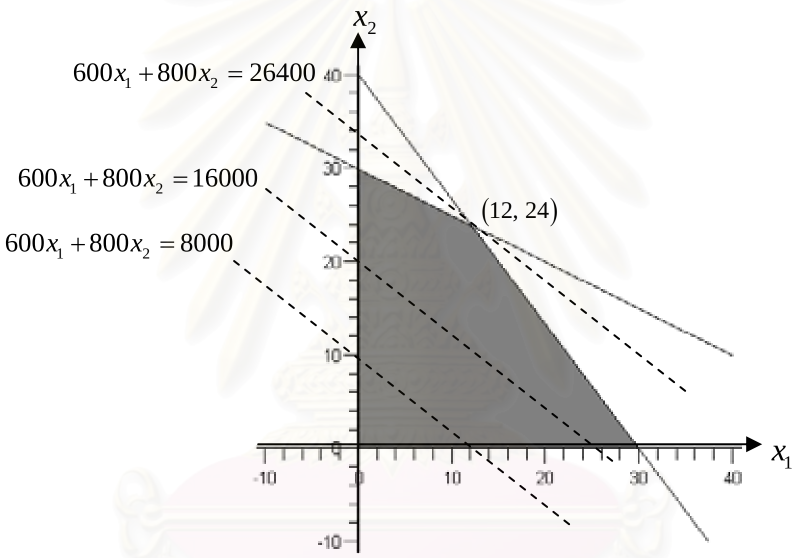
ให้ x_1 แทนจำนวนสินค้าชนิดที่หนึ่ง
x_2 แทนจำนวนสินค้าชนิดที่สอง

ตัวอย่างนี้สามารถเขียนในรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้นได้เป็น

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $600x_1 + 800x_2$
ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้ด้วยวิธีเชิงกราฟ (graphical method) [1] นั่นคือการหาค่าเหมาะที่สุดจะพิจารณาจากกราฟ โดยเริ่มจากการวาดบริเวณที่เป็นไปได้ และกำหนดเส้นค่าคงที่ให้กับฟังก์ชันจุดประสงค์ และเคลื่อนเส้นดังกล่าวให้ขนานกับเส้นเดิมในทิศทางที่ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์เพิ่มขึ้น ในกรณีหาค่าสูงสุด (หรือในทิศทางที่ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ลดลง ในกรณีหาค่าต่ำสุด) จนกระทั่งเส้นค่าคงที่ของฟังก์ชันจุดประสงค์นั้นตัดกับจุดสุดท้ายของบริเวณที่เป็นไปได้ ซึ่งจุดดังกล่าวคือผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา และเนื่องจากปัญหานี้เป็นการหาค่าสูงสุดดังนั้นจะได้ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 การหาค่าเหมาะที่สุดโดยวิธีเชิงกราฟ

จากรูปจะเห็นว่าจุดที่เส้นค่าคงที่ฟังก์ชันจุดประสงค์ตัดเป็นจุดสุดท้ายคือจุด $(x_1, x_2) = (12,\ 24)$ ซึ่งให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มากที่สุดคือ $26,400$ ดังนั้นถ้าบริษัทต้องการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้ขายได้กำไรมากที่สุด บริษัทจะต้องผลิตสินค้าชนิดที่หนึ่ง 12 ชิ้น และสินค้าชนิดที่สอง 24 ชิ้นและให้กำไรมากที่สุดคือ $26,400$ บาท

□

จากตัวอย่างจะเห็นว่าปัญหามีขนาดเล็กซึ่งสามารถใช้วิธีเชิงกราฟในการหาผลเฉลยได้ แต่เนื่องจากวิธีเชิงกราฟต้องวาดบริเวณที่เป็นไปได้ เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้นความยุ่งยากในการวาดบริเวณที่เป็นไปได้ก็ยากขึ้น ดังนั้นวิธีเชิงกราฟจึงเหมาะกับปัญหาขนาดเล็ก

สำหรับปัญหาขนาดใหญ่ที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัว จะมีรูปแบบทั่วไปเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \\
x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, n&
\end{aligned}
$$

หรือเขียนในรูปของเวกเตอร์ และเมทริกซ์ได้เป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} &\le \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)
$$

เมื่อ $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรตัดสินใจ

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})_{m\times n}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับมีขนาด $m \times n$

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$ คือเวกเตอร์ค่าคงที่ทางขวามือ

Dantzig, G. (1947) ได้คิดค้นวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) [1, 2, 4, 5, 6, 7] ซึ่งเป็นขบวนการทำซ้ำเพื่อเข้าหาจุดที่เหมาะที่สุด โดยจะดำเนินการอย่างมีระบบและแบบแผน และทุกครั้งของการกระทำซ้ำ คำตอบที่ได้รับจะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ไม่ด้อยไปกว่า

คำตอบครั้งก่อน ซึ่งสามารถรับประกันการลู่เข้าสู่จุดเหมาะที่สุดเสมอ วิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมแต่เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้นจะใช้เวลาในการหาผลเฉลยนาน ซึ่งมีงานวิจัยแสดงให้เห็นว่าวิธีซิมเพล็กซ์ใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยเป็นแบบ exponential time [8] และต่อมา Naum Z. Shor, Arkady Nemirovsky และ David B. Yudin (1972) ได้คิดค้นวิธีสำหรับการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของเซตนูน (convex optimization problems) นั่นคือวิธีทรงรี (ellipsoid method) [9, 10] Leonid Khachiyan (1979) ได้วิจัยพบว่าวิธีทรงรีนี้ใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นฟังก์ชันพหุนาม [10, 11] ถึงแม้วิธีทรงรีจะใช้เวลาในการคำนวณหาน้อยกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ แต่ค่อนข้างใช้ยากในทางปฏิบัติ ต่อมา Narendra Karmarkar (1984) ได้นำเสนอ Karmarkar's algorithm [12, 13, 14] ขั้นตอนวิธีนี้เกิดจากการศึกษาวิธีจุดภายใน (interior point method) [15, 17, 18] ซึ่งคิดค้นโดย Fiacco และ McCormick (1968) [19] เพื่อแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของเซตนูน โดย Karmarkar's algorithm นี้สามารถคำนวณหาผลเฉลยสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยใช้เวลาเป็นฟังก์ชันพหุนามและมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ สำหรับปัญหาขนาดใหญ่

ในปัจจุบันนักวิจัยพยายามวิเคราะห์วิธีจุดภายในและได้นำเสนอการปรับปรุงวิธีจุดภายในมากมายหลายวิธี [15, 17, 20, 21] เพื่อนำมาพัฒนาวิธีที่สามารถหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้นให้มีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามวิธีซิมเพล็กซ์ก็ยังเป็นที่นิยมและมีนักวิจัยพยายามปรับปรุงวิธีซิมเพล็กซ์ [5, 6, 7, 16] ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วยเช่นกัน

นอกจากการวิจัยเพื่อปรับปรุงวิธีซิมเพล็กซ์และวิธีจุดภายในแล้วยังมีการวิจัยเกี่ยวกับวิธีใหม่ที่ใช้ในการหาผลเฉลยด้วยเช่น ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ [22, 23] ซึ่งเป็นวิธีใหม่ที่ใช้หาผลเฉลยของปัญหา 2 มิติ โดยขั้นตอนวิธีนี้ใช้มุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์มาช่วยในการหาผลเฉลย และเพื่อพัฒนาวิธีใหม่ให้สามารถแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่และมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอวิธีซึ่งสามารถหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ โดยเน้นการแก้ปัญหา ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 &\le b_m \end{aligned}$$

ไม่จำกัดค่าของ x_1, x_2, x_3

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ และเมทริกซ์ได้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ ………… …….(1.2)

ไม่จำกัดค่าของเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$

วิธีใหม่ที่นำเสนอนี้จะเป็นการลดปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 3 มิติไปเป็นปัญหาย่อยใน 2 มิติและใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติแก้ปัญหานั้น ซึ่งมีสองวิธีที่จะนำเสนอคือวิธี Minimal Angled Projection (MAP) และวิธี KKT - Minimal Angled Projection (KKT-MAP)

ในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎีบท งานวิจัยที่เกี่ยวข้องรวมทั้งการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่จะนำไปใช้ในงานวิจัยนี้ในบทที่ 2 และบทที่ 3 จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธี อธิบายวิธีการทำงาน ตัวอย่าง และบทวิเคราะห์การทำงาน และในบทที่ 4 จะแสดงผลการทดสอบหลังจากได้นำไปสร้างเป็นชุดคำสั่งและเปรียบเทียบเวลาการทำงานระหว่างวิธีทั้งสองกับวิธีซิมเพล็กซ์โดยใช้ซอฟต์แวร์ GLPK [24] ในการแก้ปัญหา และสุดท้ายจะกล่าวถึงข้อสรุป ปัญหาและงานวิจัยที่สนใจในอนาคต

1.2 ข้อตกลงเกี่ยวกับเมทริกซ์

ในงานวิจัยนี้ตัวแปรที่เป็นเวกเตอร์ทั้งหมดจะเสนอในรูปแบบเวกเตอร์หลัก (column vector) ดังรูปแบบต่อไปนี้

กำหนดให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนระบุหรืออ้างอิงถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวเดียวกันของเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ คือ $\boldsymbol{A}_{i*}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$ เช่น $\boldsymbol{A}_{1*}$ หมายถึงสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่อยู่ในแถวที่ 1 และในทำนองเดียวกันการระบุหรืออ้างอิงถึงสมาชิกในหลักเดียวกันของเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ คือ $\boldsymbol{A}_{*j}$ เมื่อ $j = 1, \ldots, n$ เช่น $\boldsymbol{A}_{*2}$ หมายถึงสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ ที่อยู่ในสดมภ์ที่ 2 ดังนั้นเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ สามารถให้เขียนอยู่ในรูปชุดของหลักหรือชุดของแถวดังนี้

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{*1} \ \ \boldsymbol{A}_{*2} \ \ \ldots \ \boldsymbol{A}_{*n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \boldsymbol{A}_{2*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m*} \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}_{*1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_{*2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_{*3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_{1*} = (2, -1, 1)$, $\boldsymbol{A}_{2*} = (-3, -1, 2)$, $\boldsymbol{A}_{3*} = (5, 2, 0)$, $\boldsymbol{A}_{4*} = (-1, 2, 1)$
และ $\boldsymbol{A}_{5*} = (2, 1, -1)$

□

จากปัญหาในรูปแบบ (1.2) เมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ จะสังเกตได้ว่าเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่ i ใดๆ คือเวกเตอร์ $\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ เราจะเรียกเวกเตอร์ $\boldsymbol{x} = \left(x_1,\, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทั้งหมดว่าเป็น*ผลเฉลยที่เป็นไปได้* (feasible solution หรือ feasible point) เรียกเซตของผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดว่าเป็น*บริเวณที่เป็นไปได้* (feasible region) และเรียกเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ ว่าเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น (1.2) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้และมีค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ มากที่สุด

เกรเดียนต์ (Gradient)

เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ คือเวกเตอร์ $\left(c_1,\, c_2,\, c_3\right)^{\mathrm{T}}$ ที่ชี้ไปในทิศทางการเพิ่มค่าของ z และตั้งฉากกับระนาบ $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

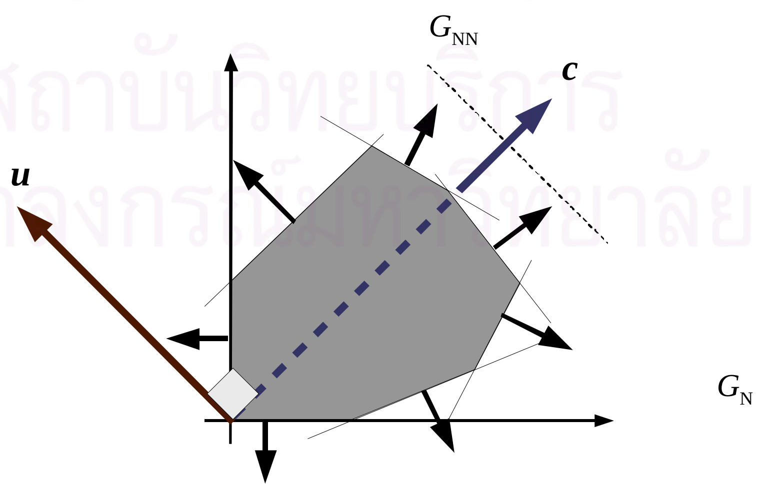
เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i$ คือเวกเตอร์ $\left(a_{i1},\, a_{i2},\, a_{i3}\right)^{\mathrm{T}}$ ที่ชี้ไปในทิศทางการเพิ่มค่าของ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ และตั้งฉากกับระนาบ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$

บทที่ 2
งานวิจัย นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดโดยใช้วิธีมุมน้อยที่สุด นิยาม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องและแนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบท

2.1 ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นสองมิติ (A minimal angled algorithm for solving a 2-dimensional linear programming problem)

หรือเรียกสั้นๆว่า ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ ขั้นตอนวิธีนี้มุ่งเน้นการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้ไม่เป็นเซตว่าง โดยแบ่งเงื่อนไขบังคับออกเป็นสองกลุ่ม การแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับแบ่งได้โดยการกำหนดเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และกลุ่มของเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมแหลมและตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์เรียกกลุ่มนี้ว่า G_{NN} และกลุ่มของเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมป้านกับเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์เรียกกลุ่มนี้ว่า G_N ในแต่ละรอบของการวนซ้ำจะเลือกเงื่อนไขบังคับ 2 เงื่อนไขที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มโดยที่ 2 เงื่อนไขบังคับดังกล่าวจะนำไปสู่ผลเฉลยที่เหมาะที่สุด



รูปที่ 2.1 การแบ่งกลุ่มเงื่อนไขบังคับ

ในขั้นตอนวิธีนี้จะเน้นการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้ไม่เป็นเซตว่างและมีจุดที่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดอย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m \end{aligned} \qquad \text{.... ....} \ (2.1)$$

ไม่จำกัดค่า $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$

ในขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิตินี้มีนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังนี้

นิยาม 2.1 สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นสองมิติดังรูปแบบ (2.1)

กำหนด

$$G_{\mathrm{NN}} = \{ j \in \mathbb{N} \mid 1 \le j \le m \text{ และ } \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A}_{j*}^{\mathrm{T}} \ge 0 \}$$

และ

$$G_{\mathrm{N}} = \{ i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le m \text{ และ } \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}} < 0 \}$$

เมื่อ $\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}}$ และ $\boldsymbol{A}_{j*}^{\mathrm{T}}$ คือเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่ i และ j ตามลำดับ และ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -c_2 & c_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\boldsymbol{c}$

สำหรับแต่ละเงื่อนไขบังคับของปัญหาจะถูกจำแนกว่าอยู่ใน G_{NN} หรือ G_{N} อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจะได้ว่า $G_{\mathrm{NN}} \cup G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$ ซึ่งสามารถแบ่งเป็นสามกรณีคือ

1. $G_{\mathrm{NN}} \ne \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$
2. $G_{\mathrm{NN}} = \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} \ne \varnothing$
3. $G_{\mathrm{NN}} \ne \varnothing$ และ $G_{\mathrm{N}} = \varnothing$

ทฤษฎีบท 2.1

กำหนดให้ $\boldsymbol{A}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด $m \times 2,$ $\boldsymbol{b}$ คือเวกเตอร์ค่าคงที่ด้านขวามือ และ $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ เป็นเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอดังรูปแบบ (2.1) และ G_{NN} และ G_{N} คือเซตที่กำหนดในนิยาม 2.1

ถ้ามี $k \in G_{\mathrm{N}}$ และ $l \in G_{\mathrm{NN}}$ ที่ $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}_{k*}^{\mathrm{T}} > 0$ และ $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}_{l*}^{\mathrm{T}} > 0$ แล้วปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเสมอ

บทแทรก 2.1

กำหนดให้ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{b}$ คือเวกเตอร์ค่าคงที่ด้านขวามือ และ $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้เสมอดังรูปแบบ (2.1) G_{NN} และ G_{N} คือเซตที่กำหนดในนิยาม 2.1

ถ้าไม่มี $k \in G_{\mathrm{N}}$ และ $l \in G_{\mathrm{NN}}$ ที่ $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}_{k*}^{\mathrm{T}} > 0$ และ $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}_{l*}^{\mathrm{T}} > 0$ แล้วปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขตเสมอ

ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิตินี้ประกอบไปด้วยขั้นตอนย่อยดังต่อไปนี้

1. normalization เป็นขั้นตอนที่ทำให้ b_i มีค่าเท่ากับ 1 หรือเท่ากับ -1 สำหรับ $b_i \neq 0$ ด้วยการหารตลอดเงื่อนไขบังคับที่ i ด้วย $|b_i|$ และทำให้ c_j มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับ $c_j \neq 0$ โดยการหารด้วย c_j จากการ normalize c_j ดังนั้น $\boldsymbol{A}_{*j}$ จะถูกหารด้วย c_j ตลอดหลักที่ j

2. classification เป็นขั้นตอนการแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับออกเป็นสองกลุ่ม โดยอาศัยผลคูณเชิงสเกลาร์ของเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

3. sorting เป็นขั้นตอนการจัดเรียงเงื่อนไขบังคับในแต่ละกลุ่มที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 ในการจัดเรียงได้อาศัยมุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยจัดเรียงข้อมูลจากเงื่อนไขบังคับที่มีเกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ไปยังเงื่อนไขบังคับที่มีเกรเดียนต์ทำมุมมากที่สุดกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์สำหรับแต่ละกลุ่ม

4. domination ขั้นตอนนี้จะลดทอนเงื่อนไขบังคับที่ไม่จำเป็นสำหรับการหาผลเฉลย ที่มีเกรเดียนต์ขนานกันและมีทิศทางเดียวกันเพื่อกำจัดเงื่อนไขบังคับที่ไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลยของปัญหาเดิม

5. ขั้นตอนการกระทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาโดยอาศัยข้อมูลจากสมาชิกทั้งสองกลุ่มดังกล่าว

ซึ่งขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติมีระยะเวลาการทำงานรวมทั้งหมดเป็น $O(m^2)$

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้นสองมิติที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $x_1 + x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

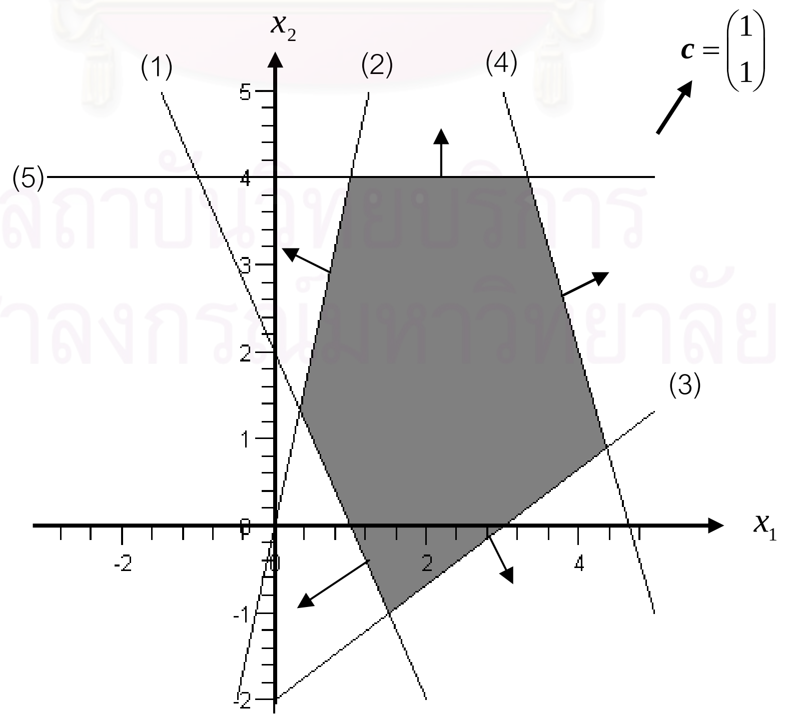
$-2x_1 - x_2 \le -2$ .... (1)

$-4x_1 + x_2 \le 0$ .... (2)

$2x_1 - 3x_2 \le 6$ .... (3)

$3x_1 + x_2 \le 14$ .... (4)

$x_2 \le 4$ .... (5)



รูปที่ 2.2 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา

จะได้เมทริกซ์ สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{A}$ และเวกเตอร์ค่าคงที่ด้านขวามือ $\boldsymbol{b}$ ดังนี้

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ขั้นตอนวิธีนี้จะส่งค่าเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และเวกเตอร์ $\boldsymbol{b}$ เข้าไปในขั้นตอน normalization เนื่องจากเวกเตอร์ $\boldsymbol{c}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้นจะได้เมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ และเวกเตอร์ $\boldsymbol{b}$ ที่ผ่านการ normalize ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2/2 & -1/2 \\ -4 & 1 \\ 2/6 & -3/6 \\ 3/14 & 1/14 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -4 & -1 \\ 1/3 & -1/2 \\ 3/14 & 1/14 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2/2 \\ 0 \\ 6/6 \\ 14/14 \\ 4/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ต่อไปทำ classification นั่นคือแบ่งกลุ่มของเงื่อนไขบังคับออกเป็นสองกลุ่ม โดยใช้เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ นั่นคือ $\boldsymbol{c}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ กำหนดให้ $\boldsymbol{u}=(-1,1)^{\mathrm{T}}$ เวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่มีผลคูณเชิงสเกลาร์กับเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ แล้วเป็นบวกจะเป็นสมาชิกของกลุ่ม G_{NN} และเวกเตอร์เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับที่มีผลคูณเชิงสเกลาร์กับเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ แล้วเป็นลบจะเป็นสมาชิกของกลุ่ม G_N จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -4 & -1 \\ 1/3 & -1/2 \\ 3/14 & 1/14 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \boldsymbol{A}_{2*} \\ \boldsymbol{A}_{3*} \\ \boldsymbol{A}_{4*} \\ \boldsymbol{A}_{5*} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

ตาราง 2.1 ค่าผลคูณเชิงสเกลาร์และการจัดกลุ่มของเงื่อนไขบังคับ

เงื่อนไขที่ i	$\boldsymbol{A}_{i*}$	$\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{u}$	เป็นสมาชิกของกลุ่ม G_{NN} หรือ G_N
1	$(-1, -1/2)$	$1/2$	G_{NN}
2	$(-4, 1)$	5	G_{NN}
3	$(1/3, -1/2)$	$-5/6$	G_N
4	$(3/14, 1/14)$	$-1/7$	G_N
5	$(0, 1/14)$	$1/4$	G_{NN}

เพราะฉะนั้น

$$G_{NN} = \{1, 2, 5\} \text{ และ } G_N = \{3, 4\}$$

ขั้นตอนต่อไปเป็นการคำนวณมุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเรียงลำดับมุมของเงื่อนไขบังคับจากกลุ่ม G_{NN} และกลุ่ม G_N จะได้

กลุ่ม G_{NN}

$$\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{1*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{1*}\| . \|\boldsymbol{c}\|}\right) = \arccos\left(\frac{(-1, -1/2)\cdot(1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1/2)^2} \cdot \sqrt{2}}\right) = 2.306$$

$$\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{2*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{2*}\| . \|\boldsymbol{c}\|}\right) = \arccos\left(\frac{(-4, 1)\cdot(1, 1)}{\sqrt{(-4)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}\right) = 1.943$$

$$\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{5*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{5*}\| . \|\boldsymbol{c}\|}\right) = \arccos\left(\frac{(0, 1/4)\cdot(1, 1)}{\sqrt{(1/4)^2} \cdot \sqrt{2}}\right) = 1.047$$

ดังนั้นเรียงลำดับเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์จากน้อยไปหามากในกลุ่ม G_{NN} ได้ดังนี้ $\{5, 2, 1\}$

และกลุ่ม G_N

$$\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{3*}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{3*}\|\cdot\|\boldsymbol{c}\|}\right)=\arccos\left(\frac{(1/3,\ -1/2)\cdot(1,\ 1)}{\sqrt{(1/3)^2+(-1/2)^2}\cdot\sqrt{2}}\right)=1.710$$

$$\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{4*}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{4*}\|\cdot\|\boldsymbol{c}\|}\right)=\arccos\left(\frac{(3/14,\ 1/14)\cdot(1,\ 1)}{\sqrt{(3/14)^2+(1/14)^2}\cdot\sqrt{2}}\right)=0.886$$

ดังนั้นเรียงลำดับเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์จากน้อยไปหามากในกลุ่ม G_N คือ $\{4,3\}$ และเนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับใดที่ทำมุมเท่ากันดังนั้นปัญหากำหนดการเชิงเส้นนี้ไม่มีเงื่อนไขบังคับที่ไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลยของปัญหาเดิม

ลำดับถัดไปเลือกเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดจากทั้งสองกลุ่มนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่ 5 จากกลุ่ม G_{NN} และเงื่อนไขบังคับที่ 4 จากกลุ่ม G_N และหาจุดตัดจากสมการของเงื่อนไขบังคับที่ 5 และ 4 นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 &= 14 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

ได้ $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{10}{3},\ 4\right)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเมื่อนำไปตรวจสอบกับทุกเงื่อนไขบังคับแล้วพบว่าจุด $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{10}{3},\ 4\right)^{\mathrm{T}}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ ดังนั้น $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{10}{3}, 4\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหานี้

□

ในงานวิจัยนี้เป็นขั้นตอนวิธีใหม่ที่ใช้หาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติซึ่งจะนำมาใช้ในงานวิจัยนี้ด้วย โดยงานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

P1: หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 &\le b_m \end{aligned}$$

ไม่จำกัดค่าของ x_1, x_2, x_3

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ และเมทริกซ์ได้

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$

ไม่จำกัดค่าของเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$

ให้ $F_3 = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}} \mid a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, ..., a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \le b_m \right\}$

เรียก F_3 ว่าเป็นเซตของบริเวณที่เป็นไปได้

ในงานวิจัยนี้มีนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

2.2 นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่สนใจอาจมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหรือไม่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดขึ้นอยู่กับบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นนั้น ซึ่งปัญหากำหนดการเชิงเส้นหนึ่งปัญหาจะมีลักษณะที่เป็นไปได้อย่างใดอย่างหนึ่งดังทฤษฎีบท 2.2 [1]

ทฤษฎีบท 2.2 ปัญหากำหนดการเชิงเส้นจะสอดคล้องกับกรณีต่อไปนี้

1. เป็นปัญหาที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ (infeasible)
2. เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต (unbounded)
3. เป็นปัญหาที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

นั่นคือในปัญหากำหนดการเชิงเส้นหนึ่งปัญหาอาจเป็นปัญหาที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ หรือเป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต หรือเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะปัญหาที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเท่านั้น

เนื่องจากในงานวิจัยนี้พิจารณาเฉพาะปัญหาที่มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ดังนั้นจะมี $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของ P1 นั่นคือ $F_3 \neq \varnothing$

ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดของงานวิจัยนี้

นิยาม 2.2 ระนาบเกิน (Hyperplane)

ระนาบเกิน (Hyperplane) H ในปริภูมิแบบยุคลิด (Euclidean space) n มิติ (หรือ E^n) คือเซตของจุด $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ที่สอดคล้องสมการ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ a_i เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมดไม่ได้ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$

จากนิยามจะได้ว่าระนาบเกินใน E^3 (หรือปริภูมิ 3 มิติ) อยู่ในรูปดังนี้ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ ซึ่งเป็นสมการระนาบในปริภูมิ 3 มิติ แบ่ง E^3 ออกเป็นสองส่วนคือ

$$H^- = \{\boldsymbol{x} = \left(x_1,\, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}} \;|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b\}$$ และ

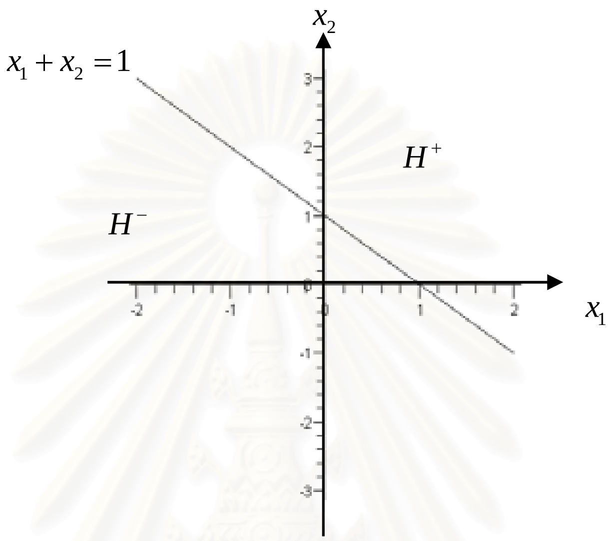
$$H^+ = \{\boldsymbol{x} = \left(x_1,\, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}} \;|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ge b\}$$

โดยเรียก H^- และ H^+ ว่า กึ่งปริภูมิ (half space)

อสมการเชิงเส้นในงานวิจัยนี้เป็นอสมการเชิงเส้นในสามมิติที่อยู่ในรูปแบบดังนี้ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b$ เมื่อ $a_1,\; a_2,\; a_3$ และ b เป็นค่าคงที่ใดๆ ถ้า a_1 หรือ a_2 หรือ a_3 เป็นศูนย์จะต้องเป็นศูนย์ไม่พร้อมกัน

ตัวอย่าง 2.2 เพื่อให้เห็นภาพขอยกตัวอย่างของระนาบเกินในปริภูมิ 2 มิติดังนี้

เส้นตรง $x_1 + x_2 = 1$ คือระนาบเกินในปริภูมิ 2 มิติ และแบ่งปริภูมิ 2 มิติออกเป็นสองกึ่งปริภูมิ (H^- และ H^+) ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3

นิยาม 2.3

เวกเตอร์ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ ในปริภูมิ n มิติ เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้นต่อกัน (linearly independent) ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ แล้ว $\lambda_j = 0$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, k$

และเรียกระนาบเกิน k ระนาบในปริภูมิ n มิติ ว่าเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แนวฉากของระนาบเหล่านั้นเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

นิยาม 2.4

จุด $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in F_3$ เป็นจุดสุดขีด ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{y}$ อยู่บนระนาบเกินอย่างน้อย 3 ระนาบที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ทฤษฎีบท 2.3

ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้นมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุดแล้วผลเฉลยที่เหมาะที่สุดนั้นจะเป็นจุดสุดขีด

เนื่องจากผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเป็นจุดสุดขีด ดังนั้นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจะอยู่บนระนาบเกินอย่างน้อย 3 ระนาบที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน นั่นคือ ถ้า $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ เป็นผลเฉลยของ P1 จะได้ว่า $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, ..., m\}$ ซึ่งนำมาใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่จะนำเสนอในงานวิจัยนี้ นั่นคือถ้ากำหนด $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ จะสามารถลดรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติได้

พิจารณา $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติ $a_{i3} \neq 0$ จะได้

$$x_3 = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}$$

แทน x_3 กลับไปที่ปัญหา P1 นั่นคือ

P2: หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}\right)$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}\right) \leq b_1 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + a_{i-1,3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}\right) \leq b_{i-1} \\
a_{i+1,1}x_1 + a_{i+1,2}x_2 + a_{i+1,3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}\right) \leq b_{i+1} \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}\right) \leq b_m
\end{array}$$

ไม่จำกัดค่า x_1, x_2

หรือ

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $(c_1 - \frac{c_3 a_{i1}}{a_{i3}})x_1 + (c_2 - \frac{c_3 a_{i2}}{a_{i3}})x_2 + \frac{c_3 b_i}{a_{i3}}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - \frac{a_{13}a_{i1}}{a_{i3}})x_1 \quad &+ (a_{12} - \frac{a_{13}a_{i2}}{a_{i3}})x_2 \quad \le b_1 - \frac{a_{13}b_i}{a_{i3}} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(a_{i-1,1} - \frac{a_{i-1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1 &+ (a_{i-1,2} - \frac{a_{i-1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2 \le b_{i-1} - \frac{a_{i-1,3}b_i}{a_{i3}} \\
(a_{i+1,1} - \frac{a_{i+1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1 &+ (a_{i+1,2} - \frac{a_{i+1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2 \le b_{i+1} - \frac{a_{i+1,3}b_i}{a_{i3}} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(a_{m1} - \frac{a_{m3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1 \quad &+ (a_{m2} - \frac{a_{m3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2 \quad \le b_m - \frac{a_{m3}b_i}{a_{i3}}
\end{aligned}
$$

ไม่จำกัดค่า x_1, x_2

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีที่รับประกันความถูกต้องของขั้นตอนวิธีที่จะนำเสนอ รวมทั้งพิสูจน์ว่าการลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น P1 ด้วยเงื่อนไขบังคับสมการที่ทำให้ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$ จะได้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 ด้วย

จาก $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ จะได้ว่า $a_{r1}x_1^* + a_{r2}x_2^* + a_{r3}x_3^* = b_r$ สำหรับบาง $r \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $a_{s1}x_1^* + a_{s2}x_2^* + a_{s3}x_3^* < b_s$ สำหรับบาง $s \in \{1, 2, ..., m\}$ และได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ P1 ถูกลดรูปให้อยู่ในรูปแบบของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ P2 ให้ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 ซึ่ง $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$ และปัญหา P2 มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แล้วผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1

พิสูจน์ สมมติให้ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 และ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$

พิจารณา

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติ $a_{i3} \neq 0$ ดังนั้น

$x_3 = \dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}$ แทน x_3 ในปัญหา P1 จะได้ดังปัญหา P2

ให้ $F_2 = \left\{\left(y_1,\quad y_2\right)^{\mathrm{T}} \mid \left(y_1,\quad y_2\right)^{\mathrm{T}}\right.$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับของ P2 $\}$
และให้ $\left(y_1^*,\quad y_2^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 ดังนั้น

สำหรับทุก $\left(y_1,\quad y_2\right)^{\mathrm{T}} \in F_2$ จะได้ว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์

$$(c_1 - \frac{c_3 a_{i1}}{a_{i3}})y_1 + (c_2 - \frac{c_3 a_{i2}}{a_{i3}})y_2 + \frac{c_3 b_i}{a_{i3}} \leq (c_1 - \frac{c_3 a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* + (c_2 - \frac{c_3 a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* + \frac{c_3 b_i}{a_{i3}}$$

เนื่องจาก $\left(y_1^*,\quad y_2^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 ดังนั้น $\left(y_1^*,\quad y_2^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_2$
นั่นคือ

$$\begin{array}{rcl}
(a_{11} - \dfrac{a_{13}a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* & +(a_{12} - \dfrac{a_{13}a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* & \leq b_1 - \dfrac{a_{13}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots & & \vdots \\
(a_{i-1,1} - \dfrac{a_{i-1,3}a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* & +(a_{i-1,2} - \dfrac{a_{i-1,3}a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* & \leq b_{i-1} - \dfrac{a_{i-1,3}b_i}{a_{i3}} \\
(a_{i+1,1} - \dfrac{a_{i+1,3}a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* & +(a_{i+1,2} - \dfrac{a_{i+1,3}a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* & \leq b_{i+1} - \dfrac{a_{i+1,3}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots & & \vdots \\
(a_{m1} - \dfrac{a_{m3}a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* & +(a_{m2} - \dfrac{a_{m3}a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* & \leq b_m - \dfrac{a_{m3}b_i}{a_{i3}}
\end{array}$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1^* + \quad a_{12}y_2^* + \ & a_{13}\left(\frac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}\right) \le b_1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{i-1,1}y_1^* + a_{i-1,2}y_2^* + & a_{i-1,3}\left(\frac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}\right) \le b_{i-1} \\
a_{i+1,1}y_1^* + a_{i+1,2}y_2^* + & a_{i+1,3}\left(\frac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}\right) \le b_{i+1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}y_1^* + \ a_{m2}y_2^* + \ & a_{m3}\left(\frac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}\right) \le b_m
\end{aligned}
$$

ให้ $y_3^* = \dfrac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
a_{i1}y_1^* + \quad a_{i2}y_2^* + \quad a_{i3}y_3^* &= b_i \\
a_{11}y_1^* + \quad a_{12}y_2^* + \quad a_{13}y_3^* &\le b_1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad & \vdots \\
a_{i-1,1}y_1^* + a_{i-1,2}y_2^* + a_{i-1,3}y_3^* &\le b_{i-1} \\
a_{i+1,1}y_1^* + a_{i+1,2}y_2^* + a_{i+1,3}y_3^* &\le b_{i+1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad & \vdots \\
a_{m1}y_1^* + \ a_{m2}y_2^* + \ a_{m3}y_3^* &\le b_m
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับใน P1 นั่นคือ $\left(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$

ต่อไปจะแสดงว่า $\left(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1

สมมติว่า $\left(y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของ P1

เนื่องจาก $\left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของ P1 และ $\left(y_1^*,\, y_2^*,\, y_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ ดังนั้น

$$c_1y_1^* + c_2y_2^* + c_3y_3^* \le c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_3x_3^*$$

แต่เนื่องจาก $\left(y_1^*,\, y_2^*,\, y_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของ P1 ดังนั้น

$$c_1y_1^* + c_2y_2^* + c_3y_3^* < c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_3x_3^*$$

หรือ

$$c_1y_1^* + c_2y_2^* + c_3\left(\frac{b_i - a_{i1}y_1^* - a_{i2}y_2^*}{a_{i3}}\right) < c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_3\left(\frac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}\right)$$

นั่นคือ

$$(c_1 - \frac{c_3a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* + (c_2 - \frac{c_3a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* + \frac{c_3b_i}{a_{i3}} < (c_1 - \frac{c_3a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* + (c_2 - \frac{c_3a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* + \frac{c_3b_i}{a_{i3}} \quad \text{—— } *$$

จาก $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ จะได้

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^* + \quad a_{12}x_2^* + \quad a_{13}x_3^* &\le b_1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & \\
a_{i-1,1}x_1^* + a_{i-1,2}x_2^* + a_{i-1,3}x_3^* &\le b_{i-1} \\
a_{i1}x_1^* + \quad a_{i2}x_2^* + \quad a_{i3}x_3^* &= b_i \\
a_{i+1,1}x_1^* + a_{i+1,2}x_2^* + a_{i+1,3}x_3^* &\le b_{i+1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & \\
a_{m1}x_1^* + \quad a_{m2}x_2^* + \quad a_{m3}x_3^* &\le b_m
\end{aligned}$$

จาก $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$ จะได้ว่า $x_3^* = \dfrac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}$ และ

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^* + \quad a_{12}x_2^* + \ a_{13}\left(\frac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}\right) &\le b_1 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{i-1,1}x_1^* + a_{i-1,2}x_2^* + a_{i-1,3}\left(\frac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}\right) &\le b_{i-1} \\
a_{i+1,1}x_1^* + a_{i+1,2}x_2^* + a_{i+1,3}\left(\frac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}\right) &\le b_{i+1} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1^* + \ a_{m2}x_2^* + \ a_{m3}\left(\frac{b_i - a_{i1}x_1^* - a_{i2}x_2^*}{a_{i3}}\right) &\le b_m
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \frac{a_{13}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* \quad + (a_{12} - \frac{a_{13}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* \quad &\le b_1 - \frac{a_{13}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
(a_{i-1,1} - \frac{a_{i-1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* + (a_{i-1,2} - \frac{a_{i-1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* &\le b_{i-1} - \frac{a_{i-1,3}b_i}{a_{i3}} \\
(a_{i+1,1} - \frac{a_{i+1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* \ + (a_{i+1,2} - \frac{a_{i+1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* &\le b_{i+1} - \frac{a_{i+1,3}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
(a_{m1} - \frac{a_{m3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* \quad + (a_{m2} - \frac{a_{m3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* \quad &\le b_m - \frac{a_{m3}b_i}{a_{i3}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(x_1^*,\, x_2^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_2$ แต่เนื่องจาก $\left(y_1^*,\, y_2^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 ดังนั้น

$$(c_1 - \frac{c_3a_{i1}}{a_{i3}})y_1^* + (c_2 - \frac{c_3a_{i2}}{a_{i3}})y_2^* + \frac{c_3b_i}{a_{i3}} > (c_1 - \frac{c_3a_{i1}}{a_{i3}})x_1^* + (c_2 - \frac{c_3a_{i2}}{a_{i3}})x_2^* + \frac{c_3b_i}{a_{i3}}$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $*$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\left(y_1^*,\, y_2^*,\, y_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 นั่นคือ ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1

□

ทฤษฎีบท 2.5 ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ P1 ถูกลดรูปให้อยู่ในรูปแบบของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ P2 ตามเงื่อนไขบังคับสมการที่ i ให้ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 และ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* < b_i$

1. ถ้าปัญหา P2 มีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แล้วจะได้ว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 จะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์จากผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1
2. ถ้าปัญหา P2 มีบริเวณที่เป็นไปได้เป็นเซตว่าง แล้วจะได้ว่าไม่มีจุด $\boldsymbol{x}' = \left(x_1',\ x_2',\ x_3'\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ ที่ $a_{i1}x_1' + a_{i2}x_2' + a_{i3}x_3' = b_i$

พิสูจน์ สมมติให้ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 และ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* < b_i$

พิจารณา

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติ $a_{i3} \neq 0$

ดังนั้น

$x_3 = \dfrac{b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2}{a_{i3}}$ แทน x_3 ในปัญหา P1 จะได้ดังปัญหา P2

ให้ $F_2 = \{ (z_1,\quad z_2)^{\mathrm{T}} \mid (z_1,\quad z_2)^{\mathrm{T}}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับของ P2 $\}$

1. ให้ $\left(z_1^*,\quad z_2^*\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2

จะแสดงว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 จะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์จากผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1

จาก $\left(z_1^*,\quad z_2^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_2$ ดังนั้น

$$
\begin{array}{lll}
(a_{11}-\frac{a_{13}a_{i1}}{a_{i3}})z_1^* & +(a_{12}-\frac{a_{13}a_{i2}}{a_{i3}})z_2^* & \le b_1-\frac{a_{13}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots & \vdots & \\
(a_{i-1,1}-\frac{a_{i-1,3}a_{i1}}{a_{i3}})z_1^* & +(a_{i-1,2}-\frac{a_{i-1,3}a_{i2}}{a_{i3}})z_2^* & \le b_{i-1}-\frac{a_{i-1,3}b_i}{a_{i3}} \\
(a_{i+1,1}-\frac{a_{i+1,3}a_{i1}}{a_{i3}})z_1^* & +(a_{i+1,2}-\frac{a_{i+1,3}a_{i2}}{a_{i3}})z_2^* & \le b_{i+1}-\frac{a_{i+1,3}b_i}{a_{i3}} \\
\vdots & \vdots & \\
(a_{m1}-\frac{a_{m3}a_{i1}}{a_{i3}})z_1^* & +(a_{m2}-\frac{a_{m3}a_{i2}}{a_{i3}})z_2^* & \le b_m-\frac{a_{m3}b_i}{a_{i3}}
\end{array}
$$

หรือ

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}z_1^* + & a_{12}z_2^* + & a_{13}\left(\frac{b_i-a_{i1}z_1^*-a_{i2}z_2^*}{a_{i3}}\right) & \le b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1}z_1^* + & a_{i-1,2}z_2^* + & a_{i-1,3}\left(\frac{b_i-a_{i1}z_1^*-a_{i2}z_2^*}{a_{i3}}\right) & \le b_{i-1} \\
a_{i+1,1}z_1^* + & a_{i+1,2}z_2^* + & a_{i+1,3}\left(\frac{b_i-a_{i1}z_1^*-a_{i2}z_2^*}{a_{i3}}\right) & \le b_{i+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}z_1^* + & a_{m2}z_2^* + & a_{m3}\left(\frac{b_i-a_{i1}z_1^*-a_{i2}z_2^*}{a_{i3}}\right) & \le b_m
\end{array}
$$

ให้ $z_3^* = \frac{b_i-a_{i1}z_1^*-a_{i2}z_2^*}{a_{i3}}$ จะได้

$$
\begin{array}{llll}
a_{i1}z_1^* + & a_{i2}z_2^* + & a_{i3}z_3^* & = b_i \\
a_{11}z_1^* + & a_{12}z_2^* + & a_{13}z_3^* & \le b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{i-1,1}z_1^* + & a_{i-1,2}z_2^* + & a_{i-1,3}z_3^* & \le b_{i-1} \\
a_{i+1,1}z_1^* + & a_{i+1,2}z_2^* + & a_{i+1,3}z_3^* & \le b_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{m1}z_1^* + & a_{m2}z_2^* + & a_{m3}z_3^* & \le b_m
\end{array}
$$

ดังนั้น $\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับในปัญหา P1 นั่นคือ $\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ จะได้ว่า

$$c_1 z_1^* + c_2 z_2^* + c_3 z_3^* \le c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + c_3 x_3^*$$

นั่นคือผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P2 จะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์จากผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1

2. ให้ปัญหา P2 มีบริเวณที่เป็นไปได้เป็นเซตว่าง จะแสดงว่าไม่มีจุด $\boldsymbol{x}^{'} = \left(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ ที่ $a_{i1}x_1^{'} + a_{i2}x_2^{'} + a_{i3}x_3^{'} = b_i$ บนเงื่อนไขบังคับที่ i

สมมติ มี $\left(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ ซึ่ง $a_{i1}x_1^{'} + a_{i2}x_2^{'} + a_{i3}x_3^{'} = b_i$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติ $a_{i3} \neq 0$ จะได้ $x_3^{'} = \dfrac{b_i - a_{i1}x_1^{'} - a_{i2}x_2^{'}}{a_{i3}}$ แปลงปัญหา P1 จะได้

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1^{'} & + & a_{12}x_2^{'} & + & a_{13}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1^{'} - a_{i2}x_2^{'}}{a_{i3}}\right) & \le & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{i-1,1}x_1^{'} & + & a_{i-1,2}x_2^{'} & + & a_{i-1,3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1^{'} - a_{i2}x_2^{'}}{a_{i3}}\right) & \le & b_{i-1} \\
a_{i+1,1}x_1^{'} & + & a_{i+1,2}x_2^{'} & + & a_{i+1,3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1^{'} - a_{i2}x_2^{'}}{a_{i3}}\right) & \le & b_{i+1} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1^{'} & + & a_{m2}x_2^{'} & + & a_{m3}\left(\dfrac{b_i - a_{i1}x_1^{'} - a_{i2}x_2^{'}}{a_{i3}}\right) & \le & b_m
\end{array}$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-\frac{a_{13}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^{'} &&+(a_{12}-\frac{a_{13}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^{'} &&\le b_1-\frac{a_{13}b_i}{a_{i3}}\\
& &&\vdots && \vdots\\
&(a_{i-1,1}-\frac{a_{i-1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^{'} &&+(a_{i-1,2}-\frac{a_{i-1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^{'} &&\le b_{i-1}-\frac{a_{i-1,3}b_i}{a_{i3}}\\
&(a_{i+1,1}-\frac{a_{i+1,3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^{'} &&+(a_{i+1,2}-\frac{a_{i+1,3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^{'} &&\le b_{i+1}-\frac{a_{i+1,3}b_i}{a_{i3}}\\
& &&\vdots && \vdots\\
&(a_{m1}-\frac{a_{m3}a_{i1}}{a_{i3}})x_1^{'} &&+(a_{m2}-\frac{a_{m3}a_{i2}}{a_{i3}})x_2^{'} &&\le b_m-\frac{a_{m3}b_i}{a_{i3}}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\left(x_1^{'},\quad x_2^{'}\right)^{\mathrm{T}} \in F_2$ ขัดแย้งกับปัญหา P2 ที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ ดังนั้นเงื่อนไขบังคับที่ i ไม่มีจุด $\boldsymbol{x}^{'}=\left(x_1^{'},\, x_2^{'},\, x_3^{'}\right)^{\mathrm{T}} \in F_3$ ที่ $a_{i1}x_1^{'}+a_{i2}x_2^{'}+a_{i3}x_3^{'}=b_i$

$\square$

จากทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่าปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติซึ่งเกิดจากการลดรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติโดยเลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ $a_{i1}x_1^*+a_{i2}x_2^*+a_{i3}x_3^*=b_i$ เมื่อเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*=\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหา P1 จะได้ว่าผลเฉลยที่ได้จากปัญหา 2 มิติจะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติด้วย ซึ่งจากทฤษฎีบทนี้จะรับประกันว่าขั้นตอนวิธีที่นำเสนอจะหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดได้ ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้นนั้นมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

แต่ถ้าเลือกเงื่อนไขบังคับที่ $a_{i1}x_1^*+a_{i2}x_2^*+a_{i3}x_3^*<b_i$ เป็นตัวลดรูปปัญหา ผลเฉลยที่ได้ยังไม่รับประกันว่าเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด เพื่อตรวจสอบว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหรือไม่ สามารถตรวจสอบได้ด้วยเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT [25, 26, 27] และก่อนที่จะกล่าวถึงเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT จะขอกล่าวถึงปัญหาควบคู่ (Dual problem) ซึ่งเป็นอีกหนึ่งปัญหาที่สำคัญในเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT

ทุกปัญหากำหนดการเชิงเส้นจะมีปัญหาที่เกี่ยวข้องกันเสมอ นั่นคือทุกปัญหาจะประกอบด้วยปัญหาเดิม (Primal problem) และปัญหาควบคู่ (Dual problem) [1] โดยที่ปัญหาควบคู่จะใช้พารามิเตอร์เดียวกันกับปัญหาเดิม แต่มีเป้าหมายที่ตรงข้ามกัน เช่น ถ้าปัญหาเดิมมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นการหาค่าต่ำสุด ปัญหาควบคู่จะมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นการหาค่าสูงสุด หรือถ้าปัญหาเดิมมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นการหาค่าสูงสุด ปัญหาควบคู่จะมีฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นการหาค่าต่ำสุด เงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมจะสอดคล้องกับแต่ละตัวแปรในปัญหาควบคู่ นั่นคือจำนวนเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมจะเท่ากับจำนวนตัวแปรในปัญหาควบคู่ และจำนวนเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะเท่ากับจำนวนตัวแปรในปัญหาเดิม ในส่วนของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์เดิมจะกลายเป็นค่าคงที่ทางขวามือของเงื่อนไขบังคับในปัญหาควบคู่ และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรควบคู่ในฟังก์ชันจุดประสงค์ของปัญหาควบคู่จะได้จากค่าคงที่ทางขวามือของเงื่อนไขบังคับในปัญหาเดิม

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดปัญหากำหนดการเชิงเส้น ในรูปแบบทั่วไป:

ปัญหาเดิม : หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$

แล้วปัญหาควบคู่จะถูกกำหนดโดย

ปัญหาควบคู่ : หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w} \ge \boldsymbol{0}$

เมื่อ $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_m)^{\mathrm{T}}$ คือตัวแปรควบคู่

การสร้างปัญหาควบคู่สามารถทำได้ดังนี้

พิจารณาปัญหาเดิมที่เป็นการหาค่าสูงสุด

ฟังก์ชันจุดประสงค์

ปัญหาเดิมเป็นการหาค่าสูงสุด $\longrightarrow$ ปัญหาควบคู่เป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุด

เงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมจะสัมพันธ์กับตัวแปรของปัญหาควบคู่ดังนี้

- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะไม่จำกัดค่า

ตัวแปรของปัญหาเดิมจะสัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่ดังนี้

- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับ
- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับ
- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบไม่จำกัดค่าจะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบเท่ากับ

พิจารณาปัญหาเดิมที่เป็นการหาต่ำสุด

ฟังก์ชันจุดประสงค์

ปัญหาเดิมเป็นการหาค่าต่ำสุด $\longrightarrow$ ปัญหาควบคู่เป็นปัญหาการหาค่าสูงสุด

เงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมจะสัมพันธ์กับตัวแปรของปัญหาควบคู่ดังนี้

- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- ถ้าเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบเท่ากับจะได้ว่าตัวแปรของปัญหาควบคู่จะไม่จำกัดค่า

ตัวแปรของปัญหาเดิมจะสัมพันธ์กับเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่ดังนี้

- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับ
- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบมากกว่าหรือเท่ากับ
- ถ้าตัวแปรของปัญหาเดิมอยู่ในรูปแบบไม่จำกัดค่าจะได้ว่าเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่จะอยู่ในรูปแบบเท่ากับ

ซึ่งการสร้างปัญหาควบคู่สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่

	ปัญหาการหาค่าต่ำสุด		ปัญหาการหาค่าสูงสุด	
	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
ตัวแปร	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	เงื่อนไขบังคับ
	ไม่จำกัดค่า	$\longleftrightarrow$	$=$	
	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
เงื่อนไขบังคับ	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	ตัวแปร
	$=$	$\longleftrightarrow$	ไม่จำกัดค่า	

ตัวอย่าง 2.3 การเขียนรูปแบบปัญหาควบคู่จากปัญหากำหนดการเชิงเส้นเดิม

ปัญหาเดิม : หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $6x_1 + 8x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ปัญหาควบคู่ : หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $4w_1 + 7w_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 3w_1 + 5w_2 &\leq 6 \\ w_1 + 2w_2 &\leq 8 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

□

ในงานวิจัยนี้ศึกษาปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบ (1.2) ดังนั้นสามารถแปลงเป็นปัญหาควบคู่ได้ดังนี้

ปัญหาเดิม หาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$

ไม่จำกัดค่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$

ปัญหาควบคู่ หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$

เมื่อ $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ คือตัวแปรควบคู่

ต่อไปจะกล่าวถึงเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT ซึ่งมีการนำผลเฉลยของปัญหาควบคู่มาใช้ในเงื่อนไขนี้ด้วย

เงื่อนไขเหมาะที่สุด Karush - Kuhn - Tucker (The Karush - Kuhn - Tucker Optimality Conditions) หรือเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT

ในปัญหากำหนดการเชิงเส้นเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงสำหรับเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ ที่จะเป็นจุดเหมาะที่สุดของปัญหาการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ และไม่จำกัดค่าของเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$ ก็ต่อเมื่อมีเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\boldsymbol{Ax}^* \le \boldsymbol{b}$
2. $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{w}^* \ge \boldsymbol{0}$ .... (2.2)
3. $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$

   $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$

จะเห็นว่าเงื่อนไขที่ 1 เป็นเงื่อนไขบังคับของปัญหาเดิม นั่นคือจุดเหมาะที่สุด $\boldsymbol{x}^*$ ต้องอยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม ส่วนเงื่อนไขที่ 2 จะเห็นว่าเป็นเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่ นั่นคือเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ ต้องอยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่ แต่เนื่องจากยังไม่ทราบค่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ จากทฤษฎีบทในปัญหากำหนดการเชิงเส้น เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$ และ เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}$ เป็นผลเฉลยที่เป็นไปได้ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นและปัญหาควบคู่ตามลำดับ แล้วเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$ และเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}$ จะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาทั้งคู่ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าเท่ากัน นั่นคือ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ [1] ดังนั้น $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ และ $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$

จาก $\boldsymbol{w}^* \ge \boldsymbol{0}$ และ $\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{0}$ แล้ว $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ จะได้ว่า $w_i^*(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* - b_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ ในทำนองเดียวกัน $(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ จะได้ว่า $(c_j - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{*j})x_j^* = 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$

ซึ่งเขียนได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.7 (Complementary Slackness Theorem)

ให้เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ และเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ เป็นผลเฉลยที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ แล้วทั้งคู่จะเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดของปัญหาเดิมและปัญหาควบคู่ตามลำดับก็ต่อเมื่อ

$$(c_j - \boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{*j})x_j^* = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

และ

$$w_i^*(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* - b_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

ทฤษฎีนี้มีความสำคัญอย่างมากซึ่งทำให้ทราบว่าสองพจน์นี้ในแต่ละสมการจะต้องมีตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์

ในงานวิจัยนี้เราต้องการตรวจสอบว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดหรือไม่ด้วยเงื่อนไข KKT เนื่องจากเงื่อนไขบังคับของปัญหาควบคู่คือ $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ ดังนั้นเราสามารถหาเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ ได้จากการแก้สมการ $\boldsymbol{w}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ นั่นคือ

$$\left(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*\right)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} = \left(c_1, c_2, c_3\right)^{\mathrm{T}}$$

หรือ

$$\begin{aligned} a_{11}w_1^* + a_{21}w_2^* + \cdots + a_{m1}w_m^* &= c_1 \\ a_{12}w_1^* + a_{22}w_2^* + \cdots + a_{m2}w_m^* &= c_2 \\ a_{13}w_1^* + a_{23}w_2^* + \cdots + a_{m3}w_m^* &= c_3 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากระบบสมการนี้มี m ตัวแปร 3 สมการ ถ้าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ 1 แล้วจะได้ว่า $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* < b_i$ หรือ $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* = b_i$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ จากทฤษฎีบท 2. สามารถหา $\boldsymbol{w}^*$ ได้จาก $w_i^*(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* - b_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ ในกรณีที่ $\boldsymbol{A}_{r*}\boldsymbol{x}^* = b_r$, $\boldsymbol{A}_{s*}\boldsymbol{x}^* = b_s$, $\boldsymbol{A}_{t*}\boldsymbol{x}^* = b_t$ และ $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* < b_i$ ทุก $i \neq r, s, t$ จะได้ว่า $w_i^* = 0$ ดังนั้นระบบสมการที่ได้จะเป็น

$$
\begin{aligned}
a_{r1}w_r^* + a_{s1}w_s^* + a_{t1}w_t^* &= c_1 \\
a_{r2}w_r^* + a_{s2}w_s^* + a_{t2}w_t^* &= c_2 \\
a_{r3}w_r^* + a_{s3}w_s^* + a_{t3}w_t^* &= c_3
\end{aligned}
\qquad \text{……………………. (2.3)}
$$

ถ้า $w_r^* \geq 0, w_s^* \geq 0$ และ $w_t^* \geq 0$ จะได้ว่า เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

ตัวอย่าง 2.4 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x_1 + x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\
-3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq -6 \\
5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq -4 \\
2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2
\end{aligned}
$$

ตรวจสอบว่าจุด $(1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ เป็นจุดเหมาะที่สุดหรือไม่ ตรวจสอบด้วยเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT

เงื่อนไขที่ 1 เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ ต้องอยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาที่พิจารณา

$$
\begin{aligned}
2(1.5) - (-3.5) + (-2.5) &= 4 = 4 \\
-3(1.5) - (-3.5) + 2(-2.5) &= -6 = -6 \\
5(1.5) + 2(-3.5) &= 0.5 < 10 \\
-(1.5) + 2(-3.5) + (-2.5) &= -11 < -4 \\
2(1.5) + (-3.5) - (-2.5) &= 2 = 2
\end{aligned}
\qquad \text{……………..(2.4)}
$$

เนื่องจากจุด $(1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ ดังนั้นจุด $(1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม

เงื่อนไขที่ 2 เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

ปัญหาควบคู่ของปัญหานี้คือ

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $4w_1 - 6w_2 + 10w_3 - 4w_4 + 2w_5$
ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 2w_1 - 3w_2 + 5w_3 - w_4 + 2w_5 &= 1 \\ -w_1 - w_2 + 2w_3 + 2w_4 + w_5 &= 1 \\ w_1 + 2w_2 \qquad + w_4 - w_5 &= 1 \\ w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{.............(2.5)}$$

สร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ จากเงื่อนไขที่ 3 ความหย่อนเติมเต็ม (complementary slackness)

นั่นคือ พิจารณา $w_i^*(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^* - b_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 5$

จาก 2.4 จะได้ว่า $\boldsymbol{A}_{3*}\boldsymbol{x}^* < b_3$ และ $\boldsymbol{A}_{4*}\boldsymbol{x}^* < b_4$ ดังนั้น $w_3^* = 0$ และ $w_4^* = 0$

จะหา w_1^*, w_2^* และ w_5^* จาก 2.4 และ $w_3^* = 0$, $w_4^* = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 2w_1 - 3w_2 + 5(0) - 0 \quad + 2w_5 &= 1 \\ -w_1 - w_2 + 2(0) + 2(0) + w_5 &= 1 \\ w_1 + 2w_2 \qquad + 0 \quad - w_5 &= 1 \end{aligned}$$

จากการแก้ระบบสมการนี้ได้ $w_1^* = \dfrac{1}{4},\ w_2^* = 2$ และ $w_5^* = \dfrac{13}{4}$ ดังนั้น $\boldsymbol{w}^* = \left(\dfrac{1}{4},\ 2,\ 0,\ 0,\ \dfrac{13}{4}\right)^{\mathrm{T}}$

ซึ่ง $\boldsymbol{w}^* \geq \boldsymbol{0}$ สอดคล้องกับ (2.5) นั่นคือเงื่อนไขที่ 2 เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

ดังนั้น จุด $(1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ เป็นจุดเหมาะที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น

□

บทที่ 3
วิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีใหม่ที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้หาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่มีรูปแบบดัง (1.2) ซึ่งปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้ไม่เป็นเซตว่างและมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด เรียกขั้นตอนวิธีดังกล่าวว่าวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จากทฤษฎีบทของปัญหากำหนดการเชิงเส้น ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเป็นจุดสุดขีดซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับสมการอย่างน้อย 3 เงื่อนไข เมื่อตรึงเงื่อนไขบังคับสมการหนึ่งเงื่อนไข กำหนดตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ให้อยู่ในรูปของสองตัวแปรที่เหลือ แล้วแทนตัวแปรดังกล่าวในฟังก์ชันจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติเดิม จะสามารถลดเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ และหาผลเฉลยโดยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติได้

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x_1 + x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \qquad \text{………………(1)}$$
$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \le -6 \qquad \text{………………(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \qquad \text{………………(3)}$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le -4 \qquad \text{………………(4)}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \qquad \text{………………(5)}$$

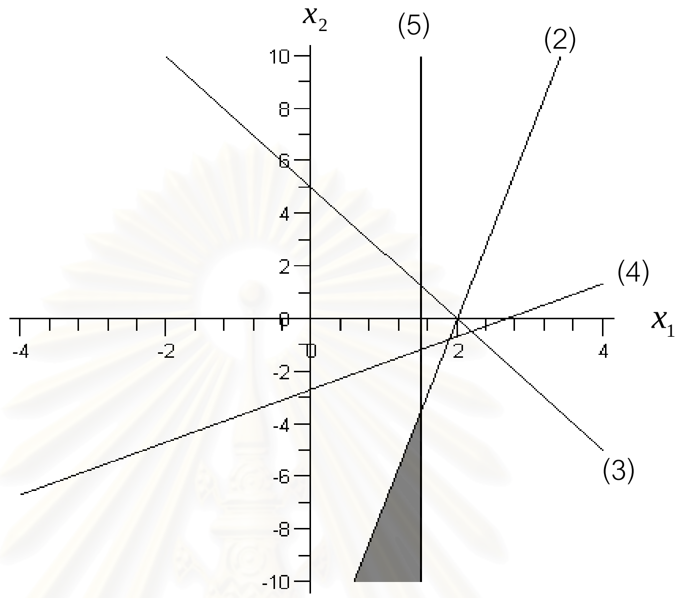
เลือกเงื่อนไขบังคับอสมการที่ (1) เปลี่ยนให้เป็นสมการ จะได้ $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$ เขียนแทนตัวแปร x_3 ในรูปของตัวแปร x_1, x_2 จะได้ $x_3 = 4 - 2x_1 + x_2$ แทนค่า x_3 กลับไปที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติจะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-x_1 + 2x_2 + 4$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$-7x_1 + x_2 \le -14 \qquad \text{………………(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \qquad \text{………………(3)}$$
$$-3x_1 + 3x_2 \le -8 \qquad \text{………………(4)}$$
$$4x_1 \le 6 \qquad \text{………………(5)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 บริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหากำหนดการเชิงเส้นหลังถูกลดรูป

และสุดท้ายก็จะนำปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิตินี้ไปหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ

$\square$

จากตัวอย่าง 3.1 เป็นการลดรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติโดยเลือกเงื่อนไขบังคับสมการแรก แล้วลดรูปของปัญหานั้นไปเป็นปัญหาย่อยคือปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งจะสามารถหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้นนี้ด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ

ในงานวิจัยนี้ศึกษาปัญหาที่มีผลเฉลยเสมอ ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^* = \left(x_1^*,\, x_2^*,\, x_3^*\right)^{\mathrm{T}}$ ที่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ถ้าเลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ i นั่นคือ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$

โดยที่ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* = b_i$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติ $a_{i1} \neq 0$ และให้ $x_1 = \left(b_i - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3\right)/a_{i1}$

แทน x_1 กลับไปที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติเดิม ปัญหาจะกลายเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ จากทฤษฎีบท 2.4 รับประกันว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาลดรูปเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหาเดิมด้วยเช่นกัน [28]

และสำหรับอสมการ $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + a_{i3}x_3^* < b_i$ เราพบว่าการลดรูปโดยใช้เงื่อนไขบังคับสมการ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ในทฤษฎีบท 2.5 ยังคงรับประกันว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดในปัญหาที่ลดรูป จะมีค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ไม่เกิน $c_1x_1^* + c_2x_2^* + c_3x_3^*$ เสมอ

ในงานวิจัยนี้นำการลดรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติด้วยเงื่อนไขบังคับมาใช้เพื่อช่วยหาผลเฉลย โดยมีวิธีที่นำเสนอ 2 วิธี คือวิธี Minimal Angled Projection (MAP) และวิธี KKT-Minimal Angled Projection (KKT-MAP)

3.1 **วิธี** Minimal Angled Projection (MAP)

วิธี MAP จะพิจารณาผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดทั้งหมด โดยขั้นตอนจะเริ่มจากการเลือกเงื่อนไขบังคับสมการแรกและลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ และหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ และทำซ้ำกับทุกเงื่อนไขบังคับที่เหลือเพื่อหาผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดทั้งหมด และสุดท้ายผลเฉลยที่เหมาะที่สุดคือผลเฉลยที่มีค่ามากที่สุดจากกลุ่มดังกล่าว

การทำงานของวิธีการนี้แสดงได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

กำหนดให้ m = จำนวนของเงื่อนไขบังคับ

e_i แทนเงื่อนไขบังคับสมการที่ i

C = เซตของผลเฉลยที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ

1. $C = \{\}$
2. $i = 1$
3. กระทำซ้ำขั้นตอนที่ 4 – 6 สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$
    4. สร้างปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ e_i

5. หาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติและเพิ่มผลเฉลยดังกล่าวลงในเซต C
6. $i = i + 1$

7. จบการทำซ้ำ
8. หาผลเฉลยที่มีค่ามากที่สุดและสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ

บรรทัดที่ 1 เป็นการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับเซต C นั่นคือเซตของผลเฉลยที่อาจเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดโดยกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นเซตว่าง

บรรทัดที่ 2 เป็นการเริ่มกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับดัชนี $i = 1$ ลดรูปปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยเงื่อนไขบังคับสมการที่ 1

บรรทัดที่ 3 ถึงบรรทัดที่ 7 เป็นการทำซ้ำตามดัชนีของเงื่อนไขบังคับที่แตกต่างกันตั้งแต่เงื่อนไขบังคับที่ 1 ถึงเงื่อนไขบังคับที่ m โดยในการวนซ้ำนี้จะเริ่มจากการสร้างปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้เงื่อนไขบังคับสมการที่ i ในบรรทัดที่ 4 โดยการกำหนดตัวแปรตัวที่หนึ่ง ให้อยู่ในรูปของสองตัวแปรที่เหลือเมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่หนึ่งไม่เป็นศูนย์ ($a_{i1} \neq 0$) แต่ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวที่หนึ่งเป็นศูนย์จะเลือกตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ตัวถัดไป และในบรรทัดที่ 5 เป็นการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ และเพิ่มผลเฉลยในเซต C

และเมื่อจบการวนซ้ำแล้วในบรรทัดที่ 8 จะเป็นการหาผลเฉลยที่ดีที่สุดจากเซต C ที่มีค่ามากที่สุดและสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับจะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

ตัวอย่าง 3.3 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x_1 + x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \qquad \text{.....................(1)}$$
$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -6 \qquad \text{.....................(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \qquad \text{.....................(3)}$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -4 \qquad \text{.....................(4)}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \qquad \text{.....................(5)}$$

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (1) จะได้ $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$ เขียนตัวแปร x_1 ในรูป x_2 และ x_3 นั่นคือ $x_1 = 2 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

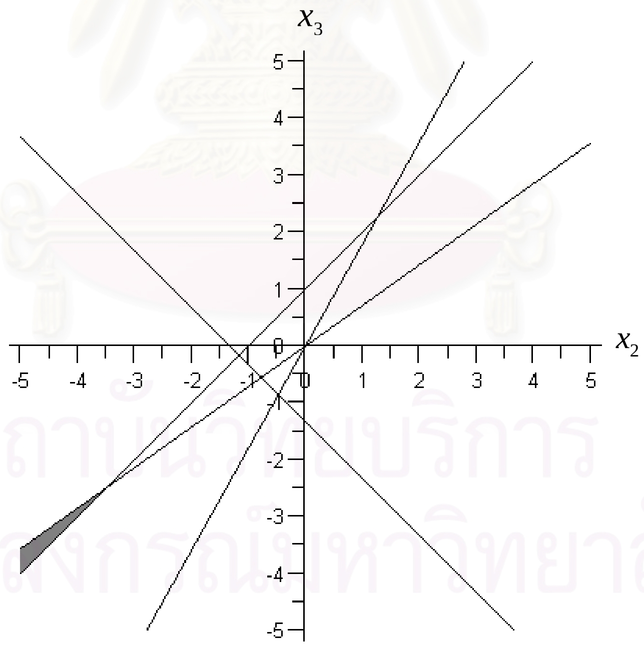
$$-\frac{5}{2}x_2 + \frac{7x_3}{2} \le 0 \quad \text{(2)}$$

$$\frac{9}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 \le 0 \quad \text{(3)}$$

$$\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \le -2 \quad \text{(4)}$$

$$2x_2 - 2x_3 \le -2 \quad \text{(5)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.2

เมื่อปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติเดิมลดรูปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ จะสามารถหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติได้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้คือ $(x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (-3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น $x_1 = 1.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

ต่อไปเลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (2) จะได้ $-3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$ เขียนตัวแปร x_1 ในรูป x_2 และ x_3 นั่นคือ $x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + 2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

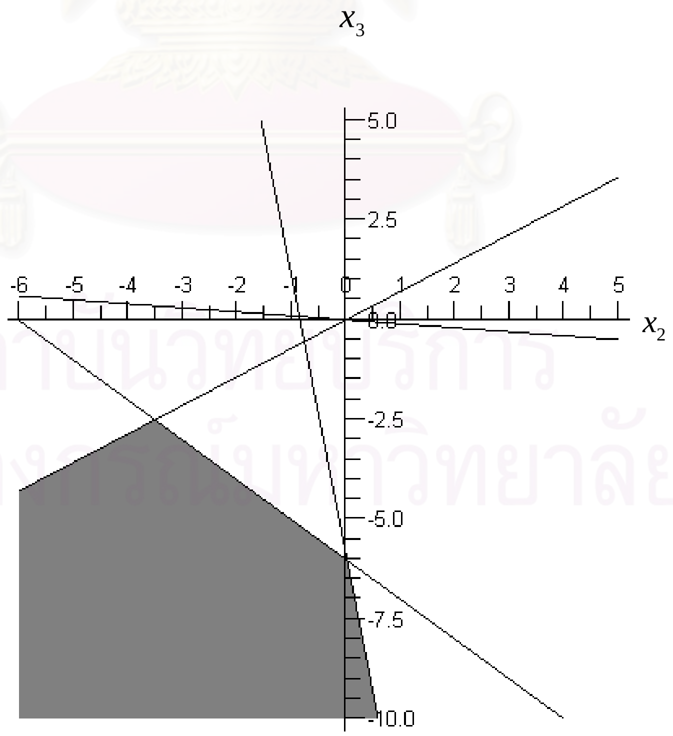
$-\frac{5}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 0$ ....(1)

$\frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_3 \le 0$ ....(3)

$\frac{7}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le -2$ ....(4)

$\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le -2$ ....(5)

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.3

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (-3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น $x_1 = 1.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (3) จะได้ $5x_1 + 2x_2 = 10$ เขียนตัวแปร x_1 ในรูป x_2 นั่นคือ $x_1 = 2 - \frac{2}{5}x_2$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\frac{3}{5}x_2 + x_3 + 2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$-\frac{9}{5}x_2 + x_3 \le 0 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$-\frac{1}{5}x_2 + 2x_3 \le 0 \qquad \text{.....................(2)}$$

$$\frac{12}{5}x_2 + x_3 \le -2 \qquad \text{.....................(4)}$$

$$\frac{1}{5}x_2 - x_3 \le -2 \qquad \text{.....................(5)}$$

ซึ่งไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (4) จะได้ $-x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$ เขียนตัวแปร x_1 ในรูป x_2 และ x_3 นั่นคือ $x_1 = 4 + 2x_2 + x_3$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x_2 + 2x_3 + 4$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

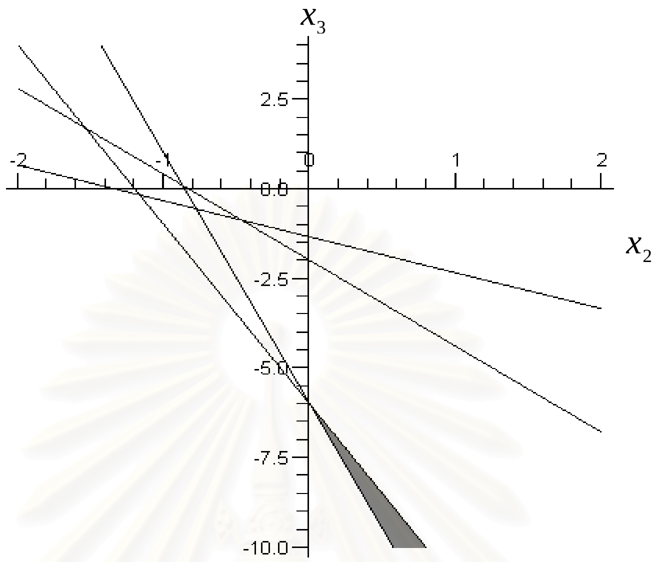
$$3x_2 + 3x_3 \le -4 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$-7x_2 - x_3 \le 6 \qquad \text{.....................(2)}$$

$$12x_2 + 5x_3 \le -10 \qquad \text{.....................(3)}$$

$$5x_2 + x_3 \le -6 \qquad \text{.....................(5)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.4

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, -6)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น $x_1 = -2$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -8

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (5) จะได้ $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$ เขียน x_1 ในรูป x_2 และ x_3 นั่นคือ $x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

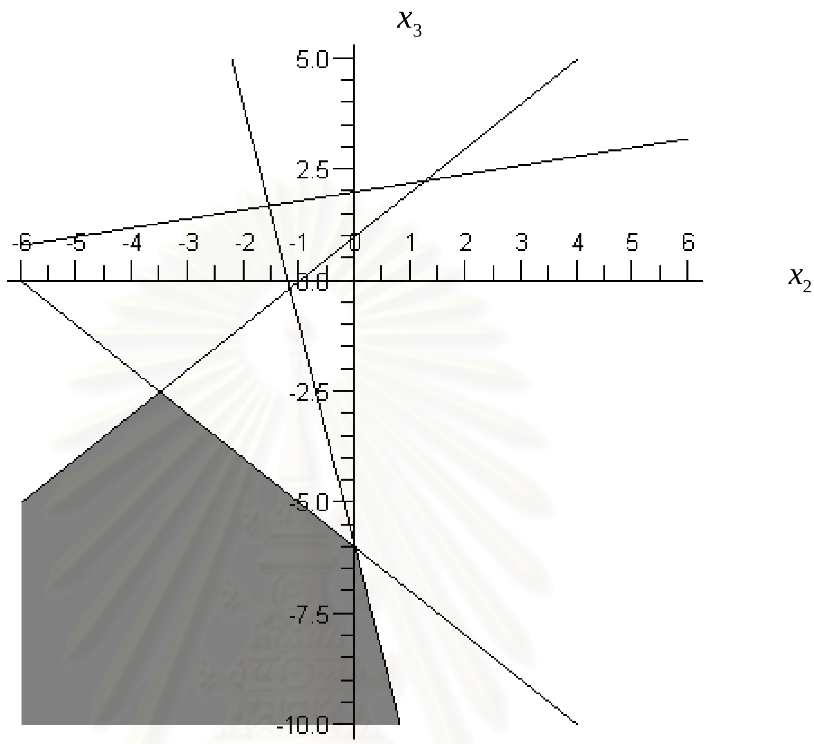
$$-2x_2 + 2x_3 \le 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le -3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 \le 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le -3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.5

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (-3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น $x_1 = 1.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

จะเห็นว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มากที่สุดคือ -4.5 และการลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ ด้วยเงื่อนไขสมการที่ (1), (2) และ (5) ให้ค่าของฟังก์ชันมากที่สุด และผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$

และเมื่อตรวจสอบจุดนี้กับทุกเงื่อนไขบังคับพบว่าจุดนี้อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ ดังนั้นผลเฉลยเหมาะที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1.5, -3.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5 และจากการหาผลเฉลยของปัญหานี้ด้วย GLPK พบว่าคำตอบที่ได้ตรงกันและเงื่อนไขบังคับที่นำไปสู่ผลเฉลยคือเงื่อนไขบังคับ (1), (2) และ (5)

$\square$

การเลือกตัวแปรที่ต่างกันเพื่อลดรูปปัญหานั้นให้ผลเฉลยที่เหมือนกันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x_1 + x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \quad \text{.....................(1)}$$
$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 \le -6 \quad \text{.....................(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \quad \text{.....................(3)}$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le -4 \quad \text{.....................(4)}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \quad \text{.....................(5)}$$

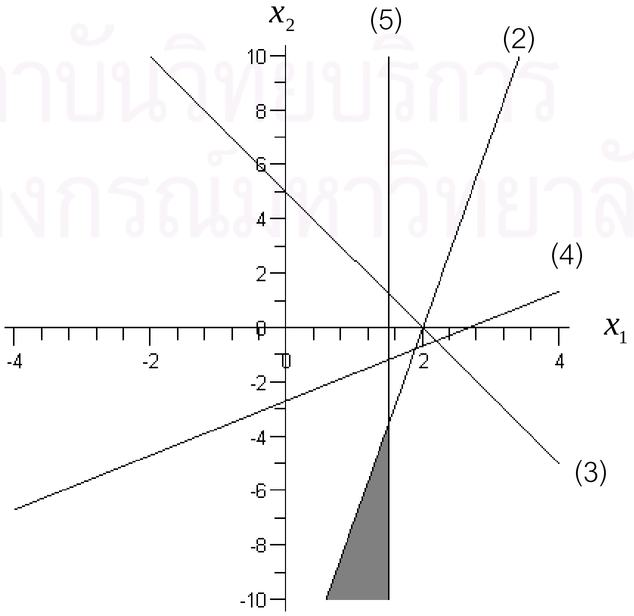
เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (1) จะได้ $2x_1 - x_2 + x_3 = 4$ เขียนตัวแปร x_3 ในรูป x_1 และ x_2 นั่นคือ $x_3 = 4 - 2x_1 + x_2$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-x_1 + 2x_2 + 4$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$-7x_1 + x_2 \le -14 \quad \text{....................(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \quad \text{....................(3)}$$
$$-3x_1 + 3x_2 \le -8 \quad \text{....................(4)}$$
$$4x_1 \le 6 \quad \text{....................(5)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.6

เมื่อปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติเดิมลดรูปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ จะสามารถหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติได้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้คือ $(x_1, x_2)^T = (1.5, -3.5)^T$ ซึ่งเกิดจากเงื่อนไขบังคับ (2) และ (5) ดังนั้น $x_3 = -2.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

ต่อไปเลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (2) จะได้ $-3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$ เขียนตัวแปร x_2 ในรูป x_1 และ x_3 นั่นคือ $x_2 = 6 - 3x_1 + 2x_3$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติจะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-2x_1 + 3x_3 + 6$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

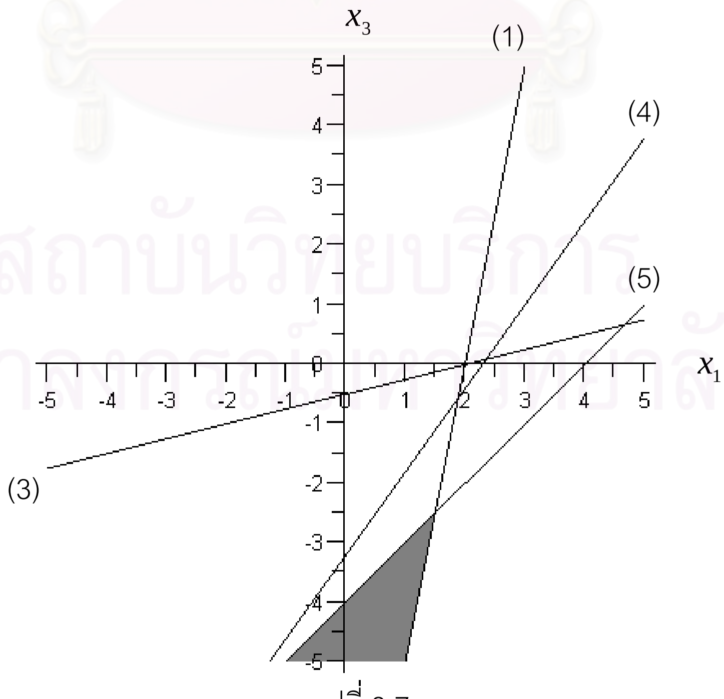
$5x_1 - x_3 \le 10$ ....(1)

$-x_1 + 4x_3 \le -2$ ....(3)

$-7x_1 + 5x_3 \le -16$ ....(4)

$-x_1 + x_3 \le -4$ ....(5)

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.7

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_1, x_3)^{\mathrm{T}} = (1.5, -2.5)^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเกิดจากเงื่อนไขบังคับ (1) และ (5) ดังนั้น $x_2 = -3.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (3) จะได้ $5x_1 + 2x_2 = 10$ เขียนตัวแปร x_2 ในรูป x_1 จะได้ $x_2 = 5 - \frac{5}{2}x_1$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $5 - \frac{3}{2}x_1 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\frac{9}{2}x_1 + x_3 \le 9 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + 2x_3 \le -1 \qquad \text{.....................(2)}$$

$$-6x_1 + x_3 \le -14 \qquad \text{.....................(4)}$$

$$-\frac{1}{2}x_1 - x_3 \le -3 \qquad \text{.....................(5)}$$

ซึ่งไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (4) จะได้ $-x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$ เขียนตัวแปร x_3 ในรูป x_1 และ x_2 นั่นคือ $x_3 = -4 + x_1 - 2x_2$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-4 + x_1 - x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

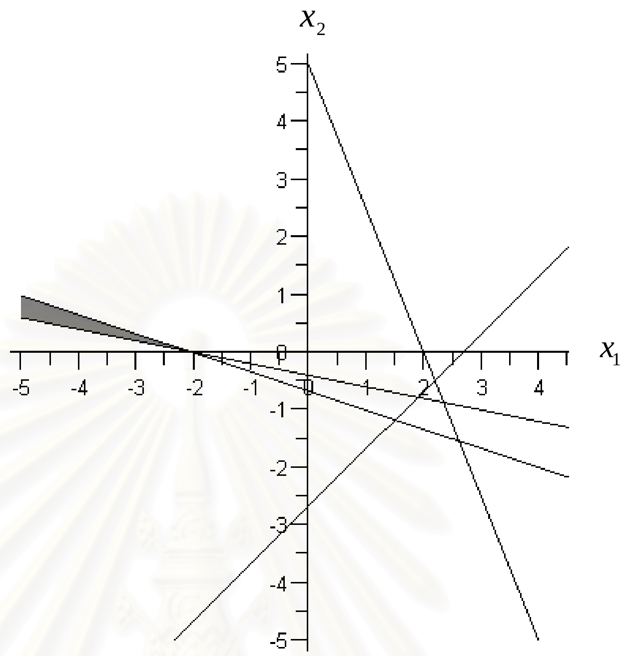
$$3x_1 - 3x_2 \le 8 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$-x_1 - 5x_2 \le 2 \qquad \text{.....................(2)}$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \qquad \text{.....................(3)}$$

$$x_1 + 3x_2 \le -2 \qquad \text{.....................(5)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.8

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (-2, 0)^{\mathrm{T}}$ ดังนั้น $x_3 = -6$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -8

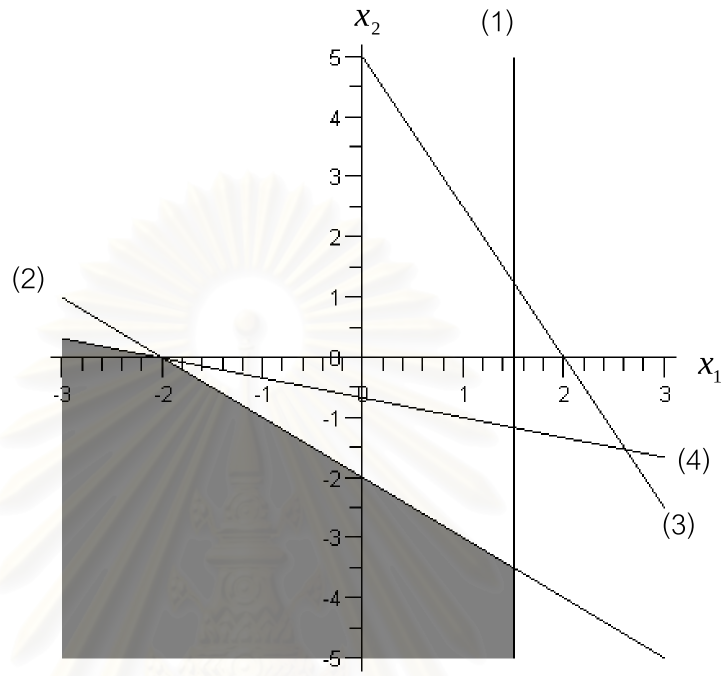
เลือกเงื่อนไขบังคับสมการที่ (5) จะได้ $2x_1 + \ x_2 - \ x_3 = 2$ เขียน x_3 ในรูป x_1 และ x_2 จะได้ $x_3 = -2 + 2x_1 + x_2$ ลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x_1 + 2x_2 - 2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$4x_1 \leq 6 \quad \text{.....................(1)}$$
$$x_1 + x_2 \leq -2 \quad \text{.....................(2)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \text{.....................(3)}$$
$$x_1 + 3x_2 \leq -2 \quad \text{.....................(4)}$$

ซึ่งมีบริเวณที่เป็นไปได้ดังนี้



รูปที่ 3.9

ผลเฉลยที่ได้คือ $(x_1, x_2)^T = (1.5, -3.5)^T$ ดังนั้น $x_3 = -2.5$ และค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.5

จะเห็นว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่มากที่สุดคือ -4.5 และการลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ ด้วยเงื่อนไขบังคับสมการที่ (1), (2) และ (5) และผลเฉลยที่เหมาะที่สุดคือ $(x_1, x_2, x_3)^T = (1.5, -3.5, -2.5)^T$

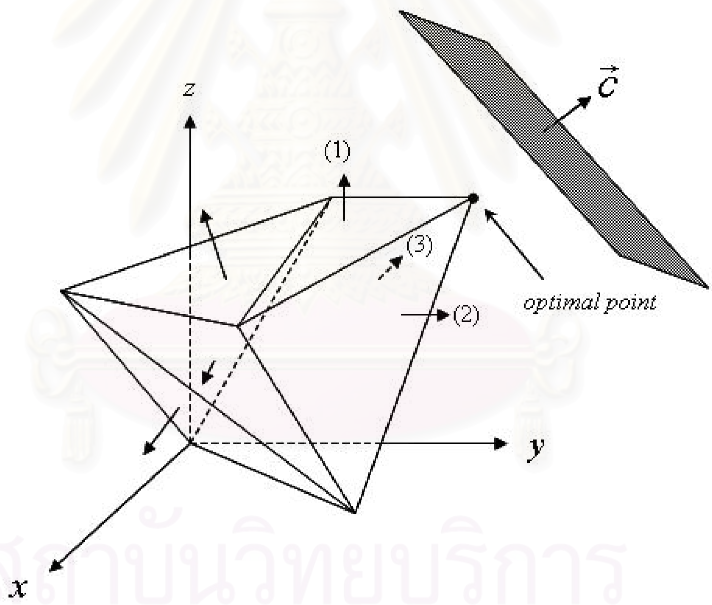
□

จะเห็นว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดจากการเลือกตัวแปรที่ต่างกันมีผลเฉลยเหมือนกัน ถึงแม้ผลเฉลยที่ได้ให้ผลเหมือนกันแต่อาจใช้เวลาในการหาผลเฉลยมากน้อยต่างกัน

3.2 วิธี KKT- Minimal Angled Projection (KKT-MAP)

สำหรับวิธี MAP นั้นต้องพิจารณาทุกเงื่อนไขบังคับเพื่อที่จะหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ถ้าปัญหามีจำนวนของเงื่อนไขบังคับเป็นจำนวนมากก็จะใช้เวลาในการทำงานมากขึ้นทั้งที่ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดอาจจะได้จากการลดรูปปัญหาตั้งแต่เงื่อนไขบังคับแรก เพื่อปรับปรุงวิธี MAP ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น การตรวจสอบผลเฉลยที่ได้ด้วยเงื่อนไข KKT จะช่วยหยุดการทำงานได้ทันทีถ้าผลเฉลยนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT และสามารถรับประกันได้ว่าผลเฉลยนั้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด

นอกจากนี้การเลือกเงื่อนไขบังคับเริ่มต้นอาศัยแนวคิดของมุมน้อยที่สุด พิจารณารูปประกอบต่อไปนี้



รูปที่ 3.10 เกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับและเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

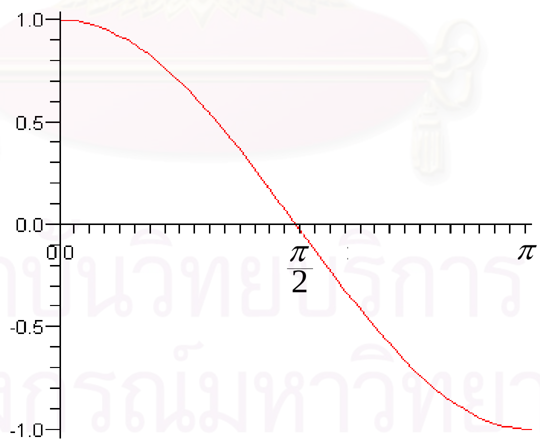
จากรูปจะเห็นว่าผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเกิดจากเงื่อนไขบังคับที่มีเกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ดังนั้นการเลือกเงื่อนไขบังคับเริ่มต้นก่อนการลดรูปปัญหาไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติควรเลือกเงื่อนไขที่ทำมุมน้อยที่สุดระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับนั้นกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ และตรวจสอบผลเฉลยที่ได้จากการใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ด้วยเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT เรียกวิธีการนี้ว่าวิธี KKT- Minimal Angled Projection (KKT-MAP)

วิธีการหาผลเฉลยของวิธี KKT-MAP จะเริ่มด้วยการคำนวณมุมระหว่างเกรเดียนต์ของทุกเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขบังคับที่มีมุมน้อยที่สุดจะถูกเลือกมาใช้ในการลดรูปของปัญหาเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ และใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติเพื่อหาผลเฉลย นำผลเฉลยที่ได้ตรวจสอบกับเงื่อนไข KKT ถ้าผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT จะได้ว่าผลเฉลยนั้นเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และหยุดการทำงาน แต่ถ้าผลเฉลยนั้นไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขเหมาะที่สุด KKT ก็จะทำซ้ำโดยการเลือกเงื่อนไขบังคับที่มีมุมน้อยที่สุดลำดับถัดไป

ในการคำนวณมุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันโคไซน์ในการพิจารณามุม สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\theta = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{i*}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\|}\right)$$

เนื่องจากฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง 0 ถึง π ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ค่าของฟังก์ชันโคไซน์บนช่วง 0 ถึง π

จะเห็นว่าถ้าผลคูณเชิงสเกลาร์มีค่ามาก ค่าของมุมที่ได้จะมีค่าน้อย และถ้าผลคูณเชิงสเกลาร์มีค่าน้อย ค่าของมุมที่ได้จะมีค่ามาก ดังนั้นเพื่อลดระยะเวลาการคำนวณจะใช้ค่า

ของผลคูณเชิงสเกลาร์แทนการคำนวณค่ามุม และการเรียงลำดับมุมจากน้อยไปมากสามารถใช้การเรียงค่าของผลคูณเชิงสเกลาร์ $\dfrac{\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{i*}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\|}$ จากมากไปน้อยแทนได้

การทำงานของวิธีการนี้แสดงตามขั้นตอนต่อไปนี้

กำหนดให้ m = จำนวนของเงื่อนไขบังคับ

e_i แทนเงื่อนไขบังคับสมการที่ i

C = เซตของเงื่อนไขบังคับที่เรียงลำดับตามค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับและเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์จากมากไปน้อย

1. คำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์
2. เรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของแต่ละเงื่อนไขบังคับจากมากไปน้อยเก็บในเซต C
3. $i = 1$
4. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 4 – 9 สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$
    5. สร้างปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ e_i
    6. หาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ได้เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$
    7. สร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ และตรวจสอบเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ และ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ กับเงื่อนไข KKT
    8. ถ้าผลเฉลยเดิมและผลเฉลยควบคู่สอดคล้องกับเงื่อนไข KKT หยุดการทำงาน
    9. $i = i + 1$
10. จบการทำซ้ำ

บรรทัดที่ 1 ลำดับแรกของการทำงานของวิธีนี้คือการคำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

บรรทัดที่ 2 คือการเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์จากมากไปหาน้อย ซึ่งขั้นตอนวิธีที่ใช้ในการเรียงลำดับเราใช้การเรียงแบบเร็ว (quick sort) เมื่อเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์

จากมากไปหาน้อยซึ่งจะมีลำดับเดียวกับการเรียงมุมจากน้อยไปหามาก นำข้อมูลดังกล่าวเก็บไว้ในเซต C

บรรทัดที่ 3 เป็นการเลือกเงื่อนไขบังคับโดยเงื่อนไขบังคับที่เลือกเริ่มจากเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยสุด

บรรทัดที่ 4 เป็นการตรวจสอบว่าการวนซ้ำจนครบตามจำนวนเงื่อนไขบังคับแล้วหรือไม่ ถ้าตรวจสอบยังไม่ครบทำต่อในบรรทัดที่ 5 ถึงบรรทัดที่ 9

บรรทัดที่ 5 เป็นการลดรูปของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ โดยใช้เงื่อนไขบังคับสมการที่ i (ซึ่งเรียงแล้ว)

บรรทัดที่ 6 หาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ และจะได้เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ได้จากการลดรูปปัญหาด้วยสมการเงื่อนไขบังคับที่ i

บรรทัดที่ 7 สร้างตัวแปรควบคู่เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ และตรวจสอบเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ และ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ กับเงื่อนไข KKT โดยเริ่มจากตรวจสอบ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ ด้วยเงื่อนไข KKT-1 นั่นคือเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม แล้วหาเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ ด้วยความหย่อนเติมเต็ม (complementary slackness)

บรรทัดที่ 8 ตรวจสอบว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(i)}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ 2 หรือไม่ ถ้าสอดคล้องหยุดการทำงานและเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(i)}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด ถ้าไม่สอดคล้องไปบรรทัดที่ 9

บรรทัดที่ 9 เลือกเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดถัดไปและกลับไปที่บรรทัดที่ 4

บรรทัดที่ 10 จบการทำงาน

ตัวอย่าง 3.4 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $-13x_1 - x_2 + 11x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$x_1 - 9x_2 - 8x_3 \le -14 \quad \text{.....................(1)}$$
$$-5x_1 - 7x_2 \le -13 \quad \text{.....................(2)}$$
$$-2x_1 - 8x_3 \le 14 \quad \text{.....................(3)}$$
$$-x_1 - 6x_2 - 7x_3 \le -11 \quad \text{.....................(4)}$$
$$-6x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le -4 \quad \text{.....................(5)}$$
$$-7x_2 - 7x_3 \le 1 \quad \text{.....................(6)}$$
$$-x_1 - 7x_2 \le 0 \quad \text{.....................(7)}$$
$$3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \le -10 \quad \text{.....................(8)}$$
$$x_1 - 9x_2 - 5x_3 \le -5 \quad \text{.....................(9)}$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le -4 \quad \text{.....................(10)}$$
$$6x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le -6 \quad \text{.....................(11)}$$
$$-5x_1 - 7x_2 + 6x_3 \le 5 \quad \text{.....................(12)}$$
$$6x_1 + x_2 \le -4 \quad \text{.....................(13)}$$
$$-x_1 + x_2 + 6x_3 \le -11 \quad \text{.....................(14)}$$
$$7x_1 + 6x_2 \le 11 \quad \text{.....................(15)}$$

วิธีทำ ขั้นแรกเริ่มจากการคำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\frac{\boldsymbol{A}_{1*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{1*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.304559 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{6*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{6*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.282843 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{11*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{11*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.605146$$

$$\frac{\boldsymbol{A}_{2*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{2*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = 0.334793 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{7*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{7*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = 0.113137 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{12*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{12*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = 0.526311$$

$$\frac{\boldsymbol{A}_{3*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{3*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.300744 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{8*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{8*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.588571 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{13*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{13*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.519501$$

$$\frac{\boldsymbol{A}_{4*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{4*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.250172 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{9*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{9*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.228150 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{14*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{14*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.350398$$

$$\frac{\boldsymbol{A}_{5*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{5*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = 0.337143 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{10*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{10*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.646220 \qquad \frac{\boldsymbol{A}_{15*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{A}_{15*}\|.\|\boldsymbol{c}\|} = -0.420845$$

ถัดไปคือเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์เหล่านี้จากมากไปหาน้อย จะได้เงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดไปหามุมมากที่สุดดังนี้ $12, 5, 2, 7, 9, 4, 6, 3, 1, 14, 15, 13, 8, 11$ และ 10 ตามลำดับ

เลือกเงื่อนไขบังคับ ที่ทำมุมน้อยที่สุดกับฟังก์ชันจุดประสงค์คือเงื่อนไขบังคับที่ 12 แล้วเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการจะได้ $-5x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 5$ หรือ $x_1 = -1 - (7/5)x_2 + (6/5)x_3$ แทนค่ากลับไปที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $17.2x_2 - 4.6x_3 + 13$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$-10.4x_2 - 6.8x_3 \le -13 \quad \text{.............................(1)}$$
$$-6x_3 \le -18 \quad \text{.............................(2)}$$
$$2.8x_2 - 10.4x_3 \le 12 \quad \text{.............................(3)}$$
$$-4.6x_2 - 8.2x_3 \le -12 \quad \text{.............................(4)}$$
$$5.4x_2 - 9.2x_3 \le -10 \quad \text{.............................(5)}$$
$$-7x_2 - 7x_3 \le 1 \quad \text{.............................(6)}$$
$$-5.6x_2 - 1.2x_3 \le -1 \quad \text{.............................(7)}$$
$$-6.2x_2 + 2.4x_3 \le -7 \quad \text{.............................(8)}$$
$$-10.4x_2 - 3.8x_3 \le -4 \quad \text{.............................(9)}$$
$$-3.6x_2 + 1.8x_3 \le 0 \quad \text{.............................(10)}$$
$$-3.4x_2 + 1.2x_3 \le 0 \quad \text{.............................(11)}$$
$$-7.4x_2 + 7.2x_3 \le 2 \quad \text{.............................(13)}$$
$$2.4x_2 - 7.2x_3 \le -12 \quad \text{.............................(14)}$$
$$-3.8x_2 + 8.4x_3 \le 18 \quad \text{.............................(15)}$$

แล้วนำปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิตินี้ไปแก้ด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยสุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ นั่นคือ

$$c = \begin{pmatrix} 17.2 \\ -4.6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10.4 & -6.8 \\ 0 & -6 \\ 2.8 & -10.4 \\ -4.6 & -8.2 \\ 5.4 & -9.2 \\ -7 & -7 \\ -5.6 & -1.2 \\ -6.2 & -2.4 \\ -10.4 & -\ 3.8 \\ -3.6 & 1.8 \\ -3.4 & 1.2 \\ -7.4 & 7.2 \\ 2.4 & -7.2 \\ -3.8 & 8.4 \end{pmatrix} \text{ และ } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -13 \\ -18 \\ 12 \\ -12 \\ -10 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 1 normalization

normalize เวกเตอร์ $\boldsymbol{c}$ ให้ $x_2' = 17.2x_2,\ x_3' = -4.6x_3$

จะได้

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 17.2/17.2 \\ -4.6/(-4.6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10.4/17.2 & -6.8/(-4.6) \\ 0/17.2 & -6/(-4.6) \\ 2.8/17.2 & -10.4/(-4.6) \\ -4.6/17.2 & -8.2/(-4.6) \\ 5.4/17.2 & -9.2/(-4.6) \\ -7/17.2 & -7/(-4.6) \\ -5.6/17.2 & -1.2/(-4.6) \\ -6.2/17.2 & -2.4/(-4.6) \\ -10.4/17.2 & -\ 3.8/(-4.6) \\ -3.6/17.2 & 1.8/(-4.6) \\ -3.4/17.2 & 1.2/(-4.6) \\ -7.4/17.2 & 7.2/(-4.6) \\ 2.4/17.2 & -7.2/(-4.6) \\ -3.8/17.2 & 8.4/(-4.6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.605 & 1.478 \\ 0 & 1.304 \\ 0.163 & 2.261 \\ -0.267 & 1.783 \\ 0.314 & 2 \\ -0.407 & 1.522 \\ -0.326 & 0.261 \\ -0.360 & 0.522 \\ -0.605 & 0.826 \\ -0.209 & -0.391 \\ -0.198 & -0.261 \\ -0.430 & -1.565 \\ 0.140 & 1.565 \\ -0.221 & -.1826 \end{pmatrix}$$

normalize เวกเตอร์ $\boldsymbol{b}$ จะได้

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -0.605/13 & 1.478/13 \\ 0 & 1.304/18 \\ 0.163/12 & 2.261/12 \\ -0.267/12 & 1.783/12 \\ 0.314/10 & 2/10 \\ -0.407 & 1.522 \\ -0.326 & 0.261 \\ -0.360/7 & 0.522/7 \\ -0.605/4 & 0.826/4 \\ -0.209 & -0.391 \\ -0.198 & -0.261 \\ -0.430/2 & -1.565/2 \\ 0.140/12 & 1.565/12 \\ -0.221/18 & -.1826/18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.047 & 0.114 \\ 0 & 0.072 \\ 0.014 & 0.188 \\ -0.022 & 0.149 \\ 0.031 & 0.2 \\ -0.407 & 1.522 \\ -0.326 & 0.261 \\ -0.051 & 0.075 \\ -0.151 & 0.207 \\ -0.209 & -0.391 \\ -0.198 & 0.261 \\ -0.215 & -0.783 \\ 0.012 & 0.130 \\ -0.012 & -0.101 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1*} \\ \boldsymbol{A}_{2*} \\ \boldsymbol{A}_{3*} \\ \boldsymbol{A}_{4*} \\ \boldsymbol{A}_{5*} \\ \boldsymbol{A}_{6*} \\ \boldsymbol{A}_{7*} \\ \boldsymbol{A}_{8*} \\ \boldsymbol{A}_{9*} \\ \boldsymbol{A}_{10*} \\ \boldsymbol{A}_{11*} \\ \boldsymbol{A}_{13*} \\ \boldsymbol{A}_{14*} \\ \boldsymbol{A}_{15*} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -13/13 \\ -18/18 \\ 12/12 \\ -12/12 \\ -10/10 \\ 1 \\ -1 \\ -7/7 \\ -4/4 \\ 0 \\ 0 \\ 2/2 \\ -12/12 \\ 18/18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ต่อไป Classification นั่นคือแบ่งกลุ่มเงื่อนไขบังคับออกเป็นสองกลุ่มตามนิยาม 2.1

เนื่องจาก $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ให้ $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ จะได้

ตาราง 3.1 ค่าผลคูณเชิงสเกลาร์และการจัดกลุ่มของเงื่อนไขบังคับ

เงื่อนไขที่ i	$\boldsymbol{A}_{i*}$	$\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}$	เป็นสมาชิกของกลุ่ม G_{NN} หรือ G_{N}
1	$(-0.047,\ 0.114)$	0.160	G_{NN}
2	$(0,\ 0.072)$	0.072	G_{NN}
3	$(0.014,\ 0.188)$	0.175	G_{NN}
4	$(-0.022,\ 0.149)$	0.171	G_{NN}
5	$(0.031,\ 0.2)$	0.169	G_{NN}
6	$(-0.407,\ 1.522)$	1.929	G_{NN}
7	$(-0.326,\ 0.261)$	0.587	G_{NN}

เงื่อนไขที่ i	$\boldsymbol{A}_{i*}$	$\boldsymbol{A}_{i*}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{u}$	เป็นสมาชิกของกลุ่ม G_{NN} หรือ G_{N}
8	$(-0.051,\ 0.075)$	0.126	G_{NN}
9	$(-0.151,\ 0.207)$	0.358	G_{NN}
10	$(-0.209,\ -0.391)$	-0.182	G_{N}
11	$(-0.198,\ 0.261)$	-0.063	G_{N}
13	$(-0.215,\ -0.783)$	-0.568	G_{N}
14	$(0.012,\ 0.130)$	0.118	G_{NN}
15	$(-0.012,\ -0.101)$	-0.089	G_{N}

เพราะฉะนั้น

$$G_{\mathrm{NN}} = \{1,\ 2, \ldots,\ 9,\ 14\} \text{ และ } G_N = \{10, 11,\ 13,\ 15\}$$

ขั้นตอนต่อไปเป็นการคำนวณมุมระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์และเรียงลำดับมุมของเงื่อนไขบังคับจากกลุ่ม G_{NN} และกลุ่ม G_N ซึ่งในที่นี้จะใช้การเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์จากมากไปน้อยแทนการเรียงลำดับมุมเช่นกัน

ดังนั้นเมื่อเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์จากมากไปน้อยในกลุ่ม G_{N} คือ $\{15,\ 13,\ 10, 11\}$ และในกลุ่ม G_{NN} ได้ดังนี้ $\{5,\ 14,\ 3,\ 2,\ 4,\ 6,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7\}$

ลำดับถัดไปเลือกเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดจากทั้งสองกลุ่มนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่ 5 จากกลุ่ม G_{NN} และเงื่อนไขบังคับที่ 15 จากกลุ่ม G_N และหาจุดตัดจากสมการของทั้งสองได้ $x_2' = 134.953846$ และ $x_3' = -26.1846153$ เมื่อตรวจสอบกับเงื่อนไขบังคับพบว่าสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ ดังนั้น $x_2' = 134.953846$ และ $x_3' = -26.1846153$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติด้านบน

และจาก $x_2' = 17.2x_2,\ x_3' = -4.6x_3$ ดังนั้น

$$x_2^{(1)} = \frac{x_2'}{17.2} = 7.846154 \text{ และ } x_3^{(1)} = \frac{x_3'}{-4.6} = 5.692308$$

ซึ่งได้ผลเฉลยคือ $\left(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = (7.846154, 5.692308)^{\mathrm{T}}$ เมื่อแทนค่ากลับไปยัง x_1 และ ฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ $x_1^{(1)} = -5.153846$ และค่าฟังก์ชันจุดประสงค์คือ 121.769231 ดังนั้น เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-5.153846, 7{,}86154, 5.692308\right)^{\mathrm{T}}$ จะถูกนำไปตรวจสอบว่าจุดนี้เป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดหรือไม่ด้วยเงื่อนไข KKT

เงื่อนไขที่ KKT-1 เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม

$$x_1^{(1)} - 9x_2^{(1)} - 8x_3^{(1)} = -121.307692 \le -14 \quad \text{.......(1)}$$
$$-5x_1^{(1)} - 7x_2^{(1)} = -29.153846 \le -13 \quad \text{.......(2)}$$
$$-2x_1^{(1)} - 8x_3^{(1)} = -35.230769 \le 14 \quad \text{.......(3)}$$
$$-x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} - 7x_3^{(1)} = -81.769231 \le -11 \quad \text{.......(4)}$$
$$-6x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)} = -4 = -4 \quad \text{.......(5)}$$
$$-7x_2^{(1)} - 7x_3^{(1)} = -94.769231 \le 1 \quad \text{.......(6)}$$
$$-x_1^{(1)} - 7x_2^{(1)} = -49.769231 \le 0 \quad \text{.......(7)}$$
$$3x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} - 6x_3^{(1)} = -65.307692 \le -10 \quad \text{.......(8)}$$
$$x_1^{(1)} - 9x_2^{(1)} - 5x_3^{(1)} = -104.230769 \le -5 \quad \text{.......(9)}$$
$$4x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)} = -22 \le -4 \quad \text{.......(10)}$$
$$6x_1^{(1)} + 5x_2^{(1)} - 6x_3^{(1)} = -25.846154 \le -6 \quad \text{.......(11)}$$
$$-5x_1^{(1)} - 7x_2^{(1)} + 6x_3^{(1)} = 5 = 5 \quad \text{.......(12)}$$
$$6x_1^{(1)} + x_2^{(1)} = -23.076923 \le -4 \quad \text{.......(13)}$$
$$-x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 6x_3^{(1)} = -21.153846 \le -11 \quad \text{.......(14)}$$
$$7x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} = 11 = 11 \quad \text{.......(15)}$$

จะเห็นว่า $\boldsymbol{x}^{(1)}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

ดังนั้นจะได้ว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม

เงื่อนไขที่ KKT-2 เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่หรือไม่

2. สร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(1)}$ จาก $\boldsymbol{w}^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ แล้วตรวจสอบ

พิจารณา $\boldsymbol{w}^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
& w_1^{(1)} - 5w_2^{(1)} - 2w_3^{(1)} - w_4^{(1)} - w_5^{(1)} - w_7^{(1)} + 3w_8^{(1)} \\
& \quad + w_9^{(1)} + 4w_{10}^{(1)} + 6w_{11}^{(1)} - 5w_{12}^{(1)} + 6w_{13}^{(1)} - w_{14}^{(1)} + 7w_{15}^{(1)} = -13 \\
& -9w_1^{(1)} - 7w_2^{(1)} - 6w_4^{(1)} - 3w_5^{(1)} - 7w_6^{(1)} - 7w_7^{(1)} - 2w_8^{(1)} \\
& \quad - 9w_9^{(1)} + 2w_{10}^{(1)} + 5w_{11}^{(1)} - 7w_{12}^{(1)} + w_{13}^{(1)} + w_{14}^{(1)} + 6w_{15}^{(1)} = -1 \\
& -8w_1^{(1)} - 8w_3^{(1)} - 7w_4^{(1)} - 2w_5^{(1)} - 7w_6^{(1)} - 6w_8^{(1)} \\
& \quad - 5w_9^{(1)} - 3w_{10}^{(1)} - 6w_{11}^{(1)} + 6w_{12}^{(1)} + 6w_{14}^{(1)} = 11
\end{aligned}
$$

จากการแทนเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ ลงบนเงื่อนไขบังคับพบว่าเงื่อนไขบังคับที่มีเครื่องหมายเท่ากับมี 3 เงื่อนไขบังคับนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่แรเงาซึ่งคือ เงื่อนไขบังคับที่ 5 12 และ 15 โดยเงื่อนไขบังคับที่เหลือมีค่าเป็น $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} < b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, 15$ แต่ $i \neq 5, 12, 15$ แต่จากเงื่อนไขที่ 3 ของเงื่อนไข KKT คือความหย่อนเติมเต็ม (complementary slackness) ซึ่งกล่าวว่า $w_i^{(1)}(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} - b_i) = 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, 15$ และเนื่องจาก $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} < b_i$ ดังนั้น $w_i^{(1)} = 0$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, 15$ เมื่อ $i \neq 5, 12, 15$ เพราะฉะนั้นจะเหลือตัวแปรที่ต้องการหาเพียงสามตัวคือ $w_5^{(1)}, w_{12}^{(1)}$ และ $w_{15}^{(1)}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
-6w_5^{(1)} - 5w_{12}^{(1)} + 7w_{15}^{(1)} &= -13 \\
-3w_5^{(1)} - 7w_{12}^{(1)} + 6w_{15}^{(1)} &= -1 \\
-2w_5^{(1)} + 6w_{12}^{(1)} &= 11
\end{aligned}
$$

แก้ระบบสมการจะได้

$w_5^{(1)} = 5.903846,\ w_{12}^{(1)} = 12.826923$ และ $w_{15}^{(1)} = 12.211538$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ทุกตัว

ดังนั้น

$$\boldsymbol{w}^{(1)} = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5.903846,\ 0,\ 0, 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 12.826923,\ 0,\ 0,\ 12.211538\right)^{\mathrm{T}}$$

อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

3. สรุปได้ว่า $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-5.153846,\ 7,86154,\ 5.692308\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

อย่างไรก็ตามในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติด้วยวิธี KKT-MAP พบว่า การใช้เงื่อนไขบังคับสมการที่เกรเดียนต์ทำมุมน้อยที่สุดกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ลดรูปเป็นปัญหา 2 มิติแล้วหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุด 2 มิติ ไม่ให้ผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเสมอไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5 หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $6x_1 + 13x_2 - x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\le 5 && \text{.....................(1)}\\
3x_1 - 6x_3 &\le -4 && \text{.....................(2)}\\
8x_1 - 9x_2 - 3x_3 &\le 6 && \text{.....................(3)}\\
3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &\le -1 && \text{.....................(4)}\\
6x_1 + 8x_2 - 1x_3 &\le -11 && \text{.....................(5)}\\
3x_1 + 9x_2 + 3x_3 &\le 4 && \text{.....................(6)}\\
4x_1 - 5x_2 - 2x_3 &\le -1 && \text{.....................(7)}\\
2x_1 + 7x_2 - 7x_3 &\le -3 && \text{.....................(8)}
\end{aligned}$$

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการคำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ และเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ที่ได้จากมากไปน้อย ซึ่งจะได้เงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดไปมุมมากที่สุดดังนี้ 5, 6, 8, 1, 4, 2, 3 และ 7 ตามลำดับ

เลือกเงื่อนไขบังคับ ที่ทำมุมน้อยที่สุดกับฟังก์ชันจุดประสงค์คือเงื่อนไขบังคับที่ 5 แล้วเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการจะได้ $6x_1+8x_2-x_3=-11$ หรือ $x_1=(-11-8x_2+x_3)/6$ แทนค่ากลับไปที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $5x_2-11$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$0.333x_2 + 8.333x_3 \le 8.667 \quad \text{.....(1)}$$
$$-4x_2 - 5.5x_3 \le 1.5 \quad \text{.....(2)}$$
$$-19.667x_2 - 1.667x_3 \le 20.667 \quad \text{.....(3)}$$
$$-2x_2 + 9.5x_3 \le 4.5 \quad \text{.....(4)}$$
$$5x_2 + 3.5x_3 \le 9.5 \quad \text{.....(6)}$$
$$-10.333x_2 - 1.333x_3 \le 6.333 \quad \text{.....(7)}$$
$$4.333x_2 - 6.667x_3 \le 0.667 \quad \text{.....(8)}$$

แล้วนำปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิตินี้ไปแก้ด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยสุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งได้ผลเฉลยคือ $\left(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}=(1.305389, 0.748503)^{\mathrm{T}}$ เมื่อแทนค่ากลับไปยัง x_1 และ ฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ $x_1^{(1)}=-3.449102$ และค่าฟังก์ชันจุดประสงค์คือ –4.473054

นำเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}=\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}=(-3.449120, 1.305389, 0.748503)^{\mathrm{T}}$ ไปตรวจสอบว่าเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดด้วยเงื่อนไข KKT

1. ตรวจสอบเงื่อนไข KKT-1 เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิมหรือไม่ดังนี้

$$2x_1^{(1)}+3x_2^{(1)}+8x_3=3.005988 \quad <5 \quad \text{.....(1)}$$
$$3x_1^{(1)} \quad -6x_3=-14.838323<-4 \quad \text{.....(2)}$$
$$8x_1^{(1)}-9x_2^{(1)}-3x_3^{(1)}=-41.586826<6 \quad \text{.....(3)}$$
$$3x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}+9x_3^{(1)}=-1 \quad =-1 \quad \text{.....(4)}$$
$$6x_1^{(1)}+8x_2^{(1)}-1x_3^{(1)}=-11=-11 \quad \text{.....(5)}$$
$$3x_1^{(1)}+9x_2^{(1)}+3x_3^{(1)}=3.646707 \quad <4 \quad \text{.....(6)}$$
$$4x_1^{(1)}-5x_2^{(1)}-2x_3^{(1)}=-21.820359<-1 \quad \text{.....(7)}$$
$$2x_1^{(1)}+7x_2^{(1)}-7x_3^{(1)}=-3=-3 \quad \text{.....(8)}$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ

ดังนั้นจะได้ว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม

เงื่อนไข KKT- 2 เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(1)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

2. สร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(1)}$ จาก $\boldsymbol{w}^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
2w_1^{(1)} + 3w_2^{(1)} + 8w_3^{(1)} + 3w_4^{(1)} + 6w_5^{(1)} + 3w_6^{(1)} + 4w_7^{(1)} + 2w_8^{(1)} &= 6 \\
3w_1^{(1)} \qquad\quad - 9w_3^{(1)} + 2w_4^{(1)} + 8w_5^{(1)} + 9w_6^{(1)} - 5w_7^{(1)} + 7w_8^{(1)} &= 13 \\
8w_1^{(1)} - 6w_2^{(1)} - 3w_3^{(1)} + 9w_4^{(1)} - w_5^{(1)} + 3w_6^{(1)} - 2w_7^{(1)} - 7w_8^{(1)} &= -1
\end{aligned}$$

จากการแทนเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(1)}$ ลงบนเงื่อนไขบังคับพบว่าเงื่อนไขบังคับที่มีเครื่องหมายเท่ากับมี 3 เงื่อนไขบังคับนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่แรเงาซึ่งคือ เงื่อนไขบังคับที่ 4 5 และ 8 โดยเงื่อนไขบังคับที่เหลือมีค่าเป็น $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} < b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 6, 7$ แต่จากเงื่อนไขที่ 3 ของเงื่อนไข KKT คือความหย่อนเติมเต็ม (complementary slackness) ซึ่งกล่าวว่า $w_i^{(1)}(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} - b_i) = 0$ ทุก $i = 1, 2, ..., 8$ และเนื่องจาก $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(1)} < b_i$ ดังนั้น $w_i^{(1)} = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3, 6, 7$ เพราะฉะนั้นจะเหลือตัวแปรที่ต้องการหาเพียงสามตัวคือ $w_4^{(1)}, w_5^{(1)}$ และ $w_8^{(1)}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3w_4^{(1)} + 6w_5^{(1)} + 2w_8^{(1)} &= 6 \\
2w_4^{(1)} + 8w_5^{(1)} + 7w_8^{(1)} &= 13 \\
9w_4^{(1)} - w_5^{(1)} - 7w_8^{(1)} &= -1
\end{aligned}$$

แก้ระบบสมการนี้จะได้

$$w_4^{(1)} = -0.167665,\ w_5^{(1)} = 1.197605 \quad \text{และ} \quad w_8^{(1)} = 1.706587$$

เนื่องจาก $w_4^{(1)} = -0.167665 < 0$ ดังนั้นเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(1)}$ ไม่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่ ดังนั้น $\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = (-3.449120, 1.305389, 0.748503)^{\mathrm{T}}$ ไม่เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

เลือกเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยที่สุดถัดไปนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่ 6 แล้วเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการจะได้ $3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 4$ หรือ $x_1 = \frac{4}{3} - 3x_2 - x_3$ แทนค่ากลับไปที่ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ จะได้

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $8-5x_2-7x_3$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$-3x_2+6x_3 \le 2.333 \quad \text{.............................(1)}$$
$$-9x_2-9x_3 \le -8 \quad \text{.............................(2)}$$
$$-33x_2-11x_3 \le -4.667 \quad \text{.............................(3)}$$
$$-7x_2+6x_3 \le -5 \quad \text{.............................(4)}$$
$$-10x_2-7x_3 \le -19 \quad \text{.............................(5)}$$
$$-17x_2-6x_3 \le -6.333 \quad \text{.............................(7)}$$
$$x_2-9x_3 \le -5.667 \quad \text{.............................(8)}$$

แล้วนำปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิตินี้ไปแก้ด้วยขั้นตอนวิธีมุมน้อยสุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งได้ผลเฉลยคือ $\left(x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} = (1.385965, 0.783626)^{\mathrm{T}}$ เมื่อแทนค่ากลับไปยัง x_1 และฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ $x_1^{(2)} = -3.608187$ และค่าฟังก์ชันจุดประสงค์คือ -4.415205

นำเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} = (-4.415205, 1.385965, 0.783626)^{\mathrm{T}}$ ไปตรวจสอบว่าเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดด้วยเงื่อนไข KKT

1. ตรวจสอบเงื่อนไข KKT-1 เวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิมหรือไม่ดังนี้

$$2x_1^{(2)}+3x_2^{(2)}+8x_3^{(2)} = 3.210526 \le 5 \quad \text{.............................(1)}$$
$$3x_1^{(2)} -6x_3^{(2)} = -15.526316 \le -4 \quad \text{.............................(2)}$$
$$8x_1^{(2)}-9x_2^{(2)}-3x_3^{(2)} = -43.690058 \le 6 \quad \text{.............................(3)}$$
$$3x_1^{(2)}+2x_2^{(2)}+9x_3^{(2)} = -1 = -1 \quad \text{.............................(4)}$$
$$6x_1^{(2)}+8x_2^{(2)}-1x_3^{(2)} = -11.345029 \le -11 \quad \text{.............................(5)}$$
$$3x_1^{(2)}+9x_2^{(2)}+3x_3^{(2)} = 4 = 4 \quad \text{.............................(6)}$$
$$4x_1^{(2)}-5x_2^{(2)}-2x_3^{(2)} = -22.929825 \le -1 \quad \text{.............................(7)}$$
$$2x_1^{(2)}+7x_2^{(2)}-7x_3^{(2)} = -3 = -3 \quad \text{.............................(8)}$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ

ดังนั้นจะได้ว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเดิม

เงื่อนไข KKT- 2 เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(2)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

2. สร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(2)}$ จาก $\boldsymbol{w}^{(2)\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
2w_1^{(2)} + 3w_2^{(2)} + 8w_3^{(2)} + 3w_4^{(2)} + 6w_5^{(2)} + 3w_6^{(2)} + 4w_7^{(2)} + 2w_8^{(2)} &= 6 \\
3w_1^{(2)} \qquad - 9w_3^{(2)} + 2w_4^{(2)} + 8w_5^{(2)} + 9w_6^{(2)} - 5w_7^{(2)} + 7w_8^{(2)} &= 13 \\
8w_1^{(2)} - 6w_2^{(2)} - 3w_3^{(2)} + 9w_4^{(2)} - w_5^{(2)} + 3w_6^{(2)} - 2w_7^{(2)} - 7w_8^{(2)} &= -1
\end{aligned}$$

จากการแทนเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^{(2)}$ ลงบนเงื่อนไขบังคับพบว่าเงื่อนไขบังคับที่มีเครื่องหมายเท่ากับมี 3 เงื่อนไขบังคับนั่นคือเงื่อนไขบังคับที่แรเงาซึ่งคือ เงื่อนไขบังคับที่ 4 5 และ 8 โดยเงื่อนไขบังคับที่เหลือมีค่าเป็น $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(2)} < b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 5, 7$ แต่จากเงื่อนไขที่ 3 ของเงื่อนไข KKT คือความหย่อนเติมเต็ม (complementary slackness) ซึ่งกล่าวว่า $w_i^{(2)}(\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(2)} - b_i) = 0$ ทุก $i = 1, 2, ..., 8$ และเนื่องจาก $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x}^{(2)} < b_i$ ดังนั้น $w_i^{(2)} = 0$ ทุก $i = 1, 2, 3, 5, 7$ เพราะฉะนั้นจะเหลือตัวแปรที่ต้องการหาเพียงสามตัวคือ $w_4^{(2)}, w_6^{(2)}$ และ $w_8^{(2)}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3w_4^{(2)} + 3w_6^{(2)} + 2w_8^{(2)} &= 6 \\
2w_4^{(2)} + 9w_6^{(2)} + 7w_8^{(2)} &= 13 \\
9w_4^{(2)} + 3w_6^{(2)} - 7w_8^{(2)} &= -1
\end{aligned}$$

แก้ระบบสมการนี้จะได้

$w_4^{(2)} = 0.163743,\ w_6^{(2)} = 1.385965$ และ $w_8^{(2)} = 0.912281$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ทุกตัว

ดังนั้นเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^{(2)}$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาควบคู่

3. สรุปได้ว่า

$\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-4.415205,\ 1.385965,\ 0.783626\right)^{\mathrm{T}}$ เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น

□

3.3 บทวิเคราะห์การทำงาน

สำหรับวิธี Minimal Angled Projection (MAP) มีระยะเวลาการทำงานดังต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1 และบรรทัดที่ 2 เป็นการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับเซต C ที่เป็นเซตว่าง และเป็นการเริ่มกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับดัชนี $i=1$ ดังนั้นมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(1)$

บรรทัดที่ 3 ถึงบรรทัดที่ 7 เป็นการทำซ้ำตามดัชนีที่แตกต่างกันตั้งแต่เงื่อนไขบังคับที่ 1 ถึงเงื่อนไขบังคับที่ m โดยบรรทัดที่ 4 เมีการแทนค่าของตัวแปรที่เกิดจากอสมการเงื่อนไขบังคับที่ถูกเปลี่ยนเป็นสมการเพื่อสร้างปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติลงบนเงื่อนไขบังคับเหลือ $m-1$ เงื่อนไข รวมกับฟังก์ชันจุดประสงค์ดังนั้นจึงมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m)$

บรรทัดที่ 5 เป็นการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m^2)$ และจากการทำซ้ำจากบรรทัดที่ 4 ถึงบรรทัดที่ 7 m ครั้ง ดังนั้นในการวนซ้ำนี้มีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m^3)$

ในบรรทัดที่ 8 จะเป็นการหาผลเฉลยที่ดีที่สุดนั่นคือผลเฉลยที่มีค่ามากที่สุดและสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับจะเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด นั่นคือมีการเข้าถึงข้อมูล m ครั้งดังนั้นบรรทัดนี้มีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m)$

เมื่อพิจารณาระยะเวลารวมทั้งหมดจะได้

$$O(1)+O(m)+O(m^3)+O(m)\le O(m^3)$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าระยะเวลาการทำงานของวิธี Minimal Angled Projection (MAP) ไม่เกิน $O(m^3)$

สำหรับวิธี KKT-Minimal Angled Projection (MAP) มีระยะเวลาการทำงานดังต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1 การคำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m)$

บรรทัดที่ 2 การเรียงลำดับค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเกรเดียนต์ของเงื่อนไขบังคับกับเกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์ จากมากไปหาน้อยซึ่งขั้นตอนวิธีที่ใช้ในการเรียงลำดับเราใช้การเรียงแบบเร็ว (quick sort) มีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m^2)$

บรรทัดที่ 3 เป็นการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับดัชนี $i=1$ ดังนั้นมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(1)$

บรรทัดที่ 5 การแทนค่าของตัวแปรที่เกิดจากอสมการเงื่อนไขบังคับที่ถูกเปลี่ยนเป็นสมการเพื่อสร้างปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติลงบนเงื่อนไขบังคับที่เหลือ $m-1$ เงื่อนไขบังคับ รวมกับฟังก์ชันจุดประสงค์ดังนั้นจึงมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m)$

บรรทัดที่ 6 เป็นการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติโดยใช้ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งมีระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m^2)$

บรรทัดที่ 7 และบรรทัดที่ 8 สร้างตัวแปรควบคู่เวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ และตรวจสอบเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}^*$ และเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ ด้วยเงื่อนไข KKT ซึ่งใช้ระยะเวลาการทำงานเป็น $O(m)$

ซึ่งในวิธีการนี้กรณีระยะเวลาการทำงานแย่ที่สุด (worst case) คือการใช้ $m-2$ เงื่อนไขบังคับแปลงปัญหา ดังนั้นระยะเวลาการทำงานคือ $O(m^3)$

เมื่อพิจารณาระยะเวลารวมทั้งหมดจะได้

$$O\left(m\right)+O(m^2)+O(1)+O(m^3)+O(m)\le O(m^3)$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าระยะเวลาการทำงานของวิธี KKT-Minimal Angled Projection (KKT-MAP) ไม่เกิน $O(m^3)$

บทที่ 4
ผลการวิจัยและบทสรุป

4.1 ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่สนใจคือเวลาที่หน่วยประมวลผลกลางของเครื่องคอมพิวเตอร์ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยโดยวิธีการที่นำเสนอกับวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้ไม่เป็นเซตว่าง และมีผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งจุด เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยมาจากการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์เครื่องเดียวกันที่ประกอบด้วย

1. หน่วยประมวลผลกลาง Intel Pentium 4
2. ความเร็วของหน่วยประมวลผลกลางเท่ากับ 2 GHz
3. ระบบปฏิบัติการวินโดว์ XP service pack 2
4. หน่วยความจำสำรอง (Random Access Memory: RAM) เท่ากับ 256 MB

ภาษาที่ใช้ในการเขียนเพื่อคำนวณหาผลเฉลยจากการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์คือโปรแกรมภาษาซี สำหรับวิธีการเขียนโปรแกรมภาษาซีที่ใช้ในการวัดเวลาของหน่วยประมวลผลกลางปรากฏในภาคผนวก ก และปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่นำมาใช้ในการทดสอบเกิดจากการจำลองปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับตั้งแต่ 4 เงื่อนไขบังคับถึง 20 เงื่อนไขบังคับ และแต่ละเซตของเงื่อนไขบังคับประกอบไปด้วยปัญหาที่แตกต่างกัน 100 ปัญหา และทุกปัญหากำหนดการเชิงเส้นจะมีบริเวณที่เป็นไปได้และมีผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวที่จำลองขึ้นมาจะเป็นจำนวนเต็มและมีค่าระหว่าง -100 ถึง 100 ในการวัดเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาในแต่ละจำนวนเงื่อนไขบังคับ เฉลี่ยเวลาจากการหาผลเฉลยทั้ง 100 ปัญหา และทำการทดสอบแต่ละปัญหา 10000 ครั้ง

สำหรับการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยเราจะเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยด้วยวิธีที่นำเสนอทั้งสองวิธีกับวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งซอฟต์แวร์ที่ใช้วิธีซิมเพล็กซ์หาผลเฉลยคือโปรแกรม GLPK (GNU Linear Programming Kit) และจะเปรียบเทียบจำนวนเงื่อนไขบังคับเฉลี่ยที่ใช้ในการลดรูปปัญหาจาก MAP กับวิธี KKT-MAP

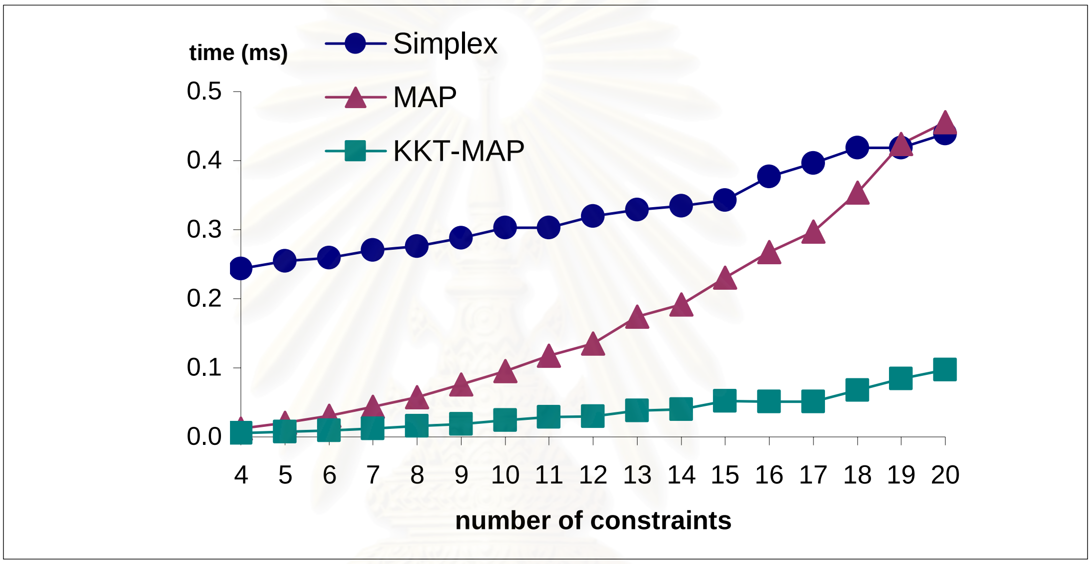
ผลการวัดระยะเวลาเฉลี่ยของหน่วยประมวลผลกลางที่ใช้ในการประมวลผลคำสั่งของวิธีซิมเพล็กซ์ วิธี MAP และวิธี KKT-MAP เพื่อหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่ได้จำลองขึ้นมาปรากฏดังตาราง 4.1

ตาราง 4.1 แสดงเวลาเฉลี่ยที่หน่วยประมวลผลกลางทำงานตามจำนวนเงื่อนไขบังคับด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ วิธี MAP และวิธี KKT-MAP โดยเวลาที่แสดงนี้อยู่ในหน่วยมิลลิวินาที

จำนวนเงื่อนไขบังคับ	วิธีซิมเพล็กซ์	วิธี MAP	วิธี KKT-MAP
4	0.244	0.012	0.005
5	0.255	0.020	0.007
6	0.260	0.030	0.009
7	0.270	0.044	0.012
8	0.276	0.057	0.016
9	0.288	0.076	0.019
10	0.303	0.096	0.024
11	0.303	0.118	0.029
12	0.319	0.135	0.030
13	0.328	0.174	0.038
14	0.334	0.191	0.040
15	0.343	0.231	0.052
16	0.376	0.267	0.051
17	0.396	0.298	0.051
18	0.418	0.354	0.067
19	0.419	0.424	0.084
20	0.438	0.455	0.097

เมื่อนำเวลาเฉลี่ยที่ได้จากแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกัน จะเห็นว่าการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ เมื่อมีจำนวนเงื่อนไขบังคับ 4 เงื่อนไขบังคับถึง 20

เงื่อนไขบังคับ พบว่า วิธี KKT-MAP ใช้เวลาเฉลี่ยในการคำนวณหาผลเฉลยน้อยที่สุด วิธี MAP ใช้เวลาเฉลี่ยมากกว่าวิธี KKT-MAP และใช้เวลาเฉลี่ยมากกว่าวิธีซิมเพล็กซ์เมื่อปัญหามีจำนวนเงื่อนไขบังคับตั้งแต่ 19 เงื่อนไขบังคับขึ้นไป แต่จะใช้เวลาเฉลี่ยน้อยกว่าวิธีซิมเพล็กซ์เมื่อปัญหามีจำนวนเงื่อนไขบังคับน้อยกว่า 19 เงื่อนไขบังคับ เมื่อนำข้อมูลที่ได้มาวาดกราฟจะได้ดังรูปที่ 4.1



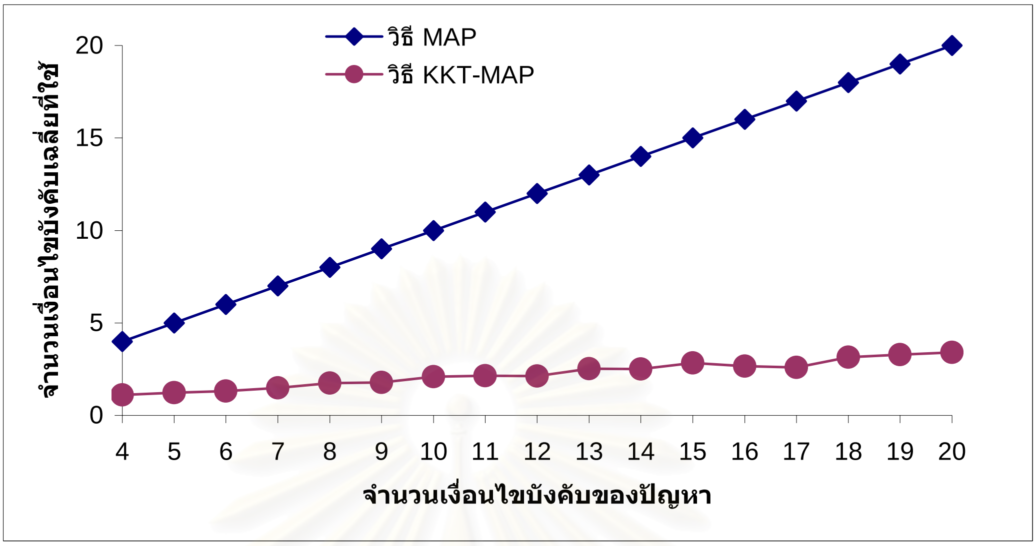
รูปที่ 4.1 กราฟเปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยที่หน่วยประมวลผลกลาง ใช้ในการประมวลคำสั่งในการหาผลเฉลยของปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ วิธี MAP และวิธี KKT-MAP

จากกราฟจะเห็นว่าวิธี MAP จะใช้เวลามากกว่าวิธี KKT-MAP มากเนื่องจากต้องพิจารณาทุกเงื่อนไขบังคับในการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ ซึ่งตารางต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงการใช้จำนวนเงื่อนไขบังคับในการแปลงเป็นปัญหาย่อยเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยจากทั้งสองวิธี

ตาราง 4.2 แสดงจำนวนเงื่อนไขบังคับเฉลี่ยที่ใช้ในการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้นด้วยวิธี MAP และวิธี KKT-MAP

จำนวนเงื่อนไขบังคับ	วิธี MAP	วิธี KKT-MAP
4	4	1.10
5	5	1.22
6	6	1.31
7	7	1.49
8	8	1.75
9	9	1.78
10	10	2.09
11	11	2.14
12	12	2.12
13	13	2.52
14	14	2.50
15	15	2.84
16	16	2.66
17	17	2.59
18	18	3.15
19	19	3.29

ซึ่งเมื่อนำข้อมูลที่ได้มาวาดกราฟจะได้ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 กราฟเปรียบเทียบจำนวนเงื่อนไขบังคับเฉลี่ยที่ใช้ในการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้น วิธี MAP และวิธี KKT-MAP

จากกราฟจะเห็นว่าวิธี KKT-MAP ใช้จำนวนเงื่อนไขบังคับในการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติไปเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ เฉลี่ยน้อยกว่าวิธี MAP มาก ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของวิธี KKT-MAP จึงน้อยกว่าวิธี MAP

4.2 บทสรุป

ถ้าปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และมีผลเฉลยเหมาะที่สุดแล้ววิธีใหม่ทั้งสองวิธีที่นำเสนอสามารถหาผลเฉลยที่เหมาะที่สุดได้

เมื่อพิจารณาระยะเวลาการทำงานของหน่วยประมวลผลกลางในการหาผลเฉลยจากวิธี MAP เปรียบเทียบกับวิธีซิมเพล็กซ์ จะเห็นว่าปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติที่มีเงื่อนไขบังคับน้อยกว่า 19 เงื่อนไขบังคับวิธี MAP จะใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยน้อยกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ แต่เมื่อเปรียบเทียบกับวิธี KKT-MAP แล้วพบว่าวิธี MAP จะใช้เวลามากกว่าวิธี KKT-MAP ซึ่งเมื่อปัญหามีจำนวนเงื่อนไขบังคับไม่มากนักเวลาที่ใช้ยังไม่ต่างกันมากเนื่องจากวิธี KKT-MAP

ต้องคำนวณค่าผลคูณเชิงสเกลาร์และนำข้อมูลที่ได้ไปเรียงลำดับและต้องสร้างเวกเตอร์ $\boldsymbol{w}^*$ แต่เมื่อจำนวนเงื่อนไขบังคับมากขึ้นเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยของวิธี MAP จะสูงกว่าวิธี KKT-MAP มาก เนื่องจากวิธี MAP จะต้องลดรูปปัญหาโดยใช้ทุกเงื่อนไขบังคับ เมื่อจำนวนเงื่อนไขบังคับมากขึ้นก็จะยิ่งใช้เวลามากขึ้นตามลำดับ และถึงแม้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดอาจถูกพบแล้ว แต่วิธี MAP ยังไม่หยุดทำงาน ในขณะที่วิธี KKT-MAP จะหยุดทำงานทันทีเมื่อพบผลเฉลยที่เหมาะที่สุด และสุดท้ายเปรียบเทียบระยะเวลาการทำงานระหว่างวิธี KKT-MAP กับวิธีซิมเพล็กซ์ พบว่าวิธี KKT-MAP ใช้เวลาน้อยกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ทุกจำนวนเงื่อนไขบังคับที่ทำการทดสอบ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าวิธี KKT-MAP มีระยะเวลาในการหาผลเฉลยเร็วที่สุดสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติ

เมื่อเปรียบเทียบจำนวนเงื่อนไขบังคับเฉลี่ยที่ใช้ในการแปลงปัญหากำหนดการเชิงเส้นไปเป็นปัญหาย่อยพบว่าวิธี KKT-MAP ใช้จำนวนเงื่อนไขบังคับเฉลี่ยน้อยกว่าวิธี MAP มาก ซึ่งใช้เฉลี่ยประมาณ 2-3 เงื่อนไขบังคับในการแปลงเป็นปัญหาย่อย การที่วิธี KKT-MAP ไม่พบผลเฉลยที่เป็นไปได้ตั้งแต่เงื่อนไขแรกอาจเกิดจาก เงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยสุดนั้นไม่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลย นั่นคือไม่มีส่วนที่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้หรือเงื่อนไขบังคับที่ทำมุมน้อยสุดนั้นบางกรณีไม่ให้ผลเฉลยที่เหมาะที่สุดเสมอไป แต่จากผลการทดสอบสามารถสรุปได้ว่าการเลือกเงื่อนไขบังคับที่มีมุมน้อยที่สุดเพื่อเริ่มการแปลงปัญหาพร้อมกับการตรวจสอบผลเฉลยด้วยเงื่อนไข KKT สามารถลดระยะเวลาในการคำนวณหาผลเฉลยได้

ในงานวิจัยนี้พิจารณาเฉพาะปัญหากำหนดการเชิงเส้น 3 มิติซึ่งในสถานการณ์จริงผู้ใช้มักมีการกำหนดตัวแปรมากกว่า 3 ตัว งานวิจัยในอนาคตคือขยายแนวคิดนี้เพื่อใช้ได้กับปัญหากำหนดการเชิงเส้น n มิติ

รายการอ้างอิง

[1] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. D. Linear programming and network flows. 2nd ed. New York : John Wiley, 1990.

[2] Gale, D. Linear programming and the simplex method. Notices of the AMS 54 (March 2007): 364-369.

[3] Hunt, F. Y., Kearsley, A. j., and O' Gallagher, A. A linear programming based algorithm for multiple sequence alignments. Bioinformatics Conference, Proceedings of the 2003 IEEE (August 2003): 532-533.

[4] Nash, J. C. The (dantzig) simplex method for linear programming. Computing in Science & Engineering 2 (January - February 2000): 29-31.

[5] Hung, Y., and McColl, W. F. An improved simplex method for function minimization. Systems, Man, and Cybernatics, 1996. IEEE International Conference on 3 (October 1996): 1702-1705.

[6] Lvov, A., and Heng, F. L. A graph based simplex method for the integer minimum perturbation problem with sum and difference constraints. Proceedings of the 14^{th} ACM Great Lakes symposium on VLSI (2004): 67-72.

[7] Borgwardt, K.H. Some distribution-independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps of the simplex method. Mathematics of Operations Research 7 (August 1982): 441-462.

[8] Klee, V., and Minty, G. J. How good is the simplex algorithm? in inequalities. New York: Academic Press (1972):159-175.

[9] Grotschel, M., Lovasz L., and Schrliver A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Combinatorica 1 (June 1981): 169-197.

[10] Bland, R.G., Goldfarb, D., and Todd, M.J. The ellipsoid method: A survey. Operations Research 29 (November - December 1981): 1039-1091.

[11] Khachiyan, L. G. A polynomial algorithm in linear programming. Doklady Akedamii Nauk SSSR (1979): 1093-1096.

[12] Karmarkar, N. A new polynomial time algorithm for linear programming. Combinatorica 4 (December 1984): 373–395.

[13] Adler, I, Karmarkar, N., Resende M., and Veiga, G. An implementation of karmarkar's algorithm for linear programming. Mathematical Programming 44 (March 1989): 297–335.

[14] Powell, M.J.D. On the number of iterations of karmarkar's algorithm for linear programming. Mathematical Programming 62 (February 1993): 153-197.

[15] Castro, J. A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows. SIAM Journal on Optimization 10 (1999): 10:852–877.

[16] Vemuganti, R. R. On gradient simplex methods for linear programs, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences 8 (2004): 107-129.

[17] McShane, K., Monma, C., and Shanno, D. An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming. ORSA J. Computing 1 (Spring 1989): 70-83.

[18] Astfalk, G., Lustig, I., Marsten, R., and Shanno, D. The interior-point method for linear programming. IEEE Software 9 (July 1992): 61-68.

[19] Fiacco, A.V., and McCormick, G.P. Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques. New-York: Wiley, 1968.

[20] Andersen, E. D., and Yinyu Y. Combining interior-point and pivoting algorithms for linear programming. Management Science 42 (December 1996): 1719-1731.

[21] Fliege, J. An efficient interior-point method for convex multicriteria optimization problems. Mathematics of Operations Research 31 (November 2006): 825-845.

[22] กรุง สินอภิรมย์สราญ และกฤษดา นารอง. ขั้นตอนวิธีมุมน้อยที่สุดสำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น 2 มิติ. วิศวกรรมสาร มก 18 (ธันวาคม 2547 –กรกฎาคม 2548): 117-115.

[23] กฤษดา นารอง. ขั้นตอนวิธีใหม่สำหรับการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นใน 2 มิติ. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาการคณนา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.

[24] Makhorin, A. GNU Linear Programming Kit. Available from: http:/www.gnu.org/software/glpk/.

[25] Tapia, R. A., and Trosset, M. W. An extension of the karush-kuhn-tucker necessity conditions to infinite programming. SIAM Review 36 (March 1994): 1-17.

[26] Granville, S., and Rodrigo de Miranda Alves, A. Active-reactive coupling in optimal reactive dispatch: a solution via karush-kuhn-tucker optimality conditions. IEEE Transactions on Power Systems 9 (November 1994): 1774-1779.

[27] Wu, H. C. The karush – kuhn – tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. European Journal of Operational Research 176 (January 2007): 46-59.

[28] Boonperm, A. and Sinapiromsaran, K. Solve 3-dimensional linear programming problems by the minimal angled projection method. The 11th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (extended abstract) (March 2007): 245-246.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก ก จะกล่าวถึงปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสามมิติที่นำไปทดสอบกับวิธีที่นำเสนอทั้งสองวิธีและวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นสามมิติเกิดจากการจำลองด้วยโปรแกรมภาษาเพิร์ล (perl: Practical Extraction and Reporting Language) โดยค่าสัมประสิทธิ์ทุกค่าเป็นจำนวนเต็มและมีค่าตั้งแต่ -100 ถึง 100

ข้อมูลเข้าสำหรับวิธีที่นำเสนอจะบันทึกด้วยไฟล์ที่มีนามสกุล .txt มีรูปแบบดังนี้

7	//จำนวนเงื่อนไขบังคับ
13 28 -41	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ c_1, c_2 และ c_3 ตามลำดับ
-72 5 -37 6 45 -10 9	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ $b_1, b_2, \ldots, b_6$ และ b_7 ตามลำดับ
69 -82 -14	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{11}, a_{12} และ a_{13} ตามลำดับ
-12 -73 -13	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{21}, a_{22} และ a_{23} ตามลำดับ
-11 -58 -43	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{31}, a_{32} และ a_{33} ตามลำดับ
42 81 -7	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{41}, a_{42} และ a_{43} ตามลำดับ
91 54 47	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{51}, a_{52} และ a_{53} ตามลำดับ
76 69 35	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{61}, a_{62} และ a_{63} ตามลำดับ
19 44 65	//ค่าสัมประสิทธิ์ของ a_{71}, a_{72} และ a_{73} ตามลำดับ

และเนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ที่จำลองขึ้นมาไม่ได้เป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และมีผลเฉลยทุกปัญหาดังนั้นเราจึงจำลองข้อมูลอีกหนึ่งรูปแบบเพื่อทดสอบกับโปรแกรม GLPK โดยเป็นข้อมูลเดียวกันแต่บันทึกไฟล์ด้วยนามสกุล .dat และมีรูปแบบดังนี้

```
data;
param M := 7;
param c := 1 13, 2 28, 3 -41;
param b := 1 -72, 2 5, 3 -37, 4 6, 5 45, 6 -10, 7 9;
param a :=
[1, 1] 69, [1, 2] -82, [1, 3] -14,
```

[2, 1] -12, [2, 2] -73, [2, 3] -13,

[3, 1] -11, [3, 2] -58, [3, 3] -43,

[4, 1] 42, [4, 2] 81, [4, 3] -7,

[5, 1] 91, [5, 2] 54, [5, 3] 47,

[6, 1] 76, [6, 2] 69, [6, 3] 35,

[7, 1] 19, [7, 2] 44, [7, 3] 65;

end;

ซึ่งรูปแบบนี้จะเป็นรูปแบบของข้อมูลเข้าของโปรแกรม GLPK เมื่อจำลองปัญหาได้ตามต้องการแล้วก็จะนำปัญหาเหล่านี้ไปทดสอบกับโปรแกรม GLPK เพื่อเลือกปัญหาที่มีบริเวณที่เป็นไปได้และมีผลเฉลย

การวัดเวลาการประมวลคำสั่งของซีพียูด้วยคำสั่งภาษาซี

เวลาที่เครื่องคอมพิวเตอร์ใช้ในการประมวลผลคำสั่งทั้งโปรแกรมเรียกว่าเป็น *processor time* และในการวัดระยะเวลาดังกล่าวจะเรียกใช้ฟังก์ชัน clock() ซึ่งอยู่ในฟังก์ชันมาตรฐานที่ชื่อว่า time.h และถ้ามีการเรียกใช้ฟังก์ชัน clock() แล้วจะให้ค่าข้อมูลกลับคืนมาเป็นข้อมูลตัวเลขชนิด clock_t ซึ่งเป็นข้อมูลชนิด long integer ซึ่งเราจะประกาศตัวแปร start และ end เป็นตัวแปรชนิด clock_t เพื่อเก็บข้อมูลตัวเลขเริ่มต้น และสุดท้ายของการประมวลคำสั่ง และเราคำนวณ *cpu time* ที่ได้จาก start และ end ดังนี้

elapsed = ((double)(end-start))/CLOCKS_PER_SEC

เมื่อ elapsed คือตัวแปรชนิด double precision มีหน้าที่เก็บค่า *cpu time* และ CLOCKS_PER_SEC คือจำนวนสัญญาณนาฬิกาต่อหนึ่งวินาทีซึ่งเป็นค่าคงที่

การวัด *cpu time* ทั้งหมดที่กล่าวมาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปคำสั่งภาษาซีได้ดังนี้

```
#include <time.h>
clock_t start, end;
double elapsed;

start = clock();            // จับเวลาเริ่มต้นของการทำงาน
⋮                           // คำสั่งในการทำงานที่ต้องการวัดเวลา
end = clock();              // จับเวลาสุดท้ายของการทำงาน
elapsed = ((double)(end-start))/CLOCKS_PER_SEC;  // คำนวณ cpu time
```

GLPK (GNU Linear Programming Kit)

GLPK คือกลุ่มของชุดคำสั่งภาษาซีที่บรรจุไว้ในไฟล์คลังโปรแกรม ซึ่งผู้ใช้สามารถเรียกใช้ได้ ชุดคำสั่งดังกล่าวสร้างขึ้นมาเพื่อวัตถุประสงค์ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (LP) ปัญหา mixed integer programming (MIP) และปัญหาอื่นๆ ที่เกี่ยวกับปัญหากำหนดการเชิงเส้น

สำหรับซอฟต์แวร์ GLPK ดาวน์โหลดได้จากเวบไซต์

http://www.gnu.org/directory/glpk.html

สำหรับการติดตั้ง ตัวอย่างและคำอธิบายชุดคำสั่ง GLPK สามารถอ่านได้จากคู่มือการติดตั้งซึ่งดาวน์โหลดได้จากเวบไซต์ http://ftp.gnu.org/gnu/glpk

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ-นามสกุล: นางสาวเอื้ออารี บุญเพิ่ม

วัน-เดือน-ปีเกิด: 22 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524

ภูมิลำเนา: ต. กระออม อ. สำโรงทาบ จ. สุรินทร์

สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น

ทุนการศึกษา: โครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทาง

วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.)