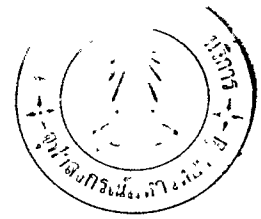

บทที่ 2

วรรณกดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง "ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ตามการประเมินของครู" นั้นผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกดีต่าง ๆ เกี่ยวกับแนวคิดในเรื่องการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และได้นำเสนอผลการศึกษาค้นคว้าตามลำดับดังนี้ คือ

1. นิยามของปัญหาและการแก้ปัญหา
2. ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์
3. ลักษณะปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ
4. องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
5. ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   - 6.1 งานวิจัยในต่างประเทศ
   - 6.2 งานวิจัยในประเทศไทย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นิยามของปัญหาและการแก้ปัญหา

ได้มีผู้ให้ความหมายของคำว่า "ปัญหา" ไว้ต่าง ๆ กันดังนี้

โรเบิร์ต แอล ธอร์นไดค์ (Robert L. Thorndike) ได้กล่าวว่า สถานการณ์ที่เป็นปัญหาจะประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. มีการกระตุ้นให้เกิดการศึกษาลู่ทางที่จะไปสู่เป้าหมาย
2. กระบวนการที่จะไปสู่เป้าหมายนั้นมีอุปสรรค

3. วิธีการหรือกระบวนการตอบสนองที่เคยชินของแต่ละบุคคลไม่เพียงพอที่จะผ่านอุปสรรคไปได้[1]

เลียว เจ บรูคเนอร์ (Leo J. Brueckner) ได้ให้ความเห็นว่า สิ่งที่จะเป็นปัญหาจะประกอบด้วย 4 ส่วน คือ

1. เป้าหมายที่ต้องการได้รับ
2. มีอุปสรรคระหว่างที่จะไปสู่เป้าหมาย
3. การตอบสนองโดยวิธีที่เคยใช้ตามปกติไม่เพียงพอที่จะทำให้บรรลุเป้าหมาย
4. มีการตั้งและทดสอบสมมติฐาน หรือคำตอบหลาย ๆ วิธี[2]

โทมัส เจ คูเนย์ (Thomas J. Cooney) ได้ให้ทรรศนะเกี่ยวกับปัญหาไว้ดังนี้

> ปัญหาประกอบด้วย คำถามที่ต้องการคำตอบแต่คำถามบางคำถาม อาจไม่เป็นปัญหาก็ได้ ขึ้นอยู่กับบุคคลที่จะตอบคำถามนั้น เช่น คำถาม "ขณะนี้เวลาเท่าไร" จะเป็นปัญหาสำหรับเด็กอายุ 5 ขวบ เพราะเขาไม่สามารถตอบคำถามได้ทันที แต่สำหรับผู้ดูนาฬิกาเป็นแล้ว คำถามนี้ก็จะไม่เป็นปัญหาสำหรับเขา สิ่งหนึ่งที่จะบอกได้ว่าคำถามใดเป็นปัญหาหรือไม่ ก็คือ ผู้ถูกถามจะไม่สามารถตอบคำถามได้อย่างอัตโนมัติ[3]

---

[1]Robert L. Thorndike, "How Children Learn the Principle and Techniques of Problem-Solving," Learning and Instruction 49 (1950): 192 - 216.

[2]Leo J. Brueckner, Developing Mathematics Understanding in the Upper Grade, (Philadelphia: The John G. Wiston Company, 1957), p. 567.

[3]Thomas J. Cooney, Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics, (Boston: Houghton-Miffin Co., 1975), p. 241.

เอ็ม เวิร์ด และ ซี อี ฮาร์ดโกรฟ (M. Word and C.E. Hardgrove) ได้กล่าวว่า "การติดตามที่เต็มไปด้วยความคิด เพื่อจะหาคำตอบสำหรับคำถาม เป็นพฤติกรรมพื้นฐานของมนุษย์ เรียกว่า การแก้ปัญหา"[1]

ลอลา จูน เมย์ (Lola June May) ได้ให้ความเห็นว่า "การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการซับซ้อนทางสมอง ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหยั่งเห็น การจินตนาการ การจัดกระทำและการรวบรวมความคิด"[2]

จอห์น แอล มาร์ค (John L. Mark) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาว่า "เป็นขบวนการที่เกี่ยวข้องกับการสำรวจ และการค้นพบซึ่งการแก้ปัญหาอาจก่อให้เกิดการพัฒนาความสามารถหรือความคิดใหม่ ๆ"[3]

ไลล์ อี บอร์น, บรูซ อาร์ เอกสแตรนด์ และโรเจอร์ แอล โดมิโนสกี (Lyle E. Bourne, Bruce R. Ekstrand and Roger L. Dominowski) ให้ความเห็นว่า "การแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสดงความรู้ ความคิด จากประสบการณ์ก่อน ๆ และส่วนประกอบของสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในปัจจุบัน โดยนำมาจัดเรียงลำดับใหม่ เพื่อผลของความสำเร็จในความมุ่งหมายเฉพาะอย่าง"[4]

---

[1] M. Word and C.E. Hardgrove, Modern Elementary Mathematics, (New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1966), p. 242.

[2] Lola June May, Teaching Mathematics in the Elementary School, (New York: The Free Press, 1970), p. 266.

[3] John L. Mark, Teaching Elementary School Mathematics for Understanding, (New York: McGraw-Hill, 1965), p. 393.

[4] Lyle E. Bourne, Bruce R. Ekstrand and Roger L. Dominowski, The Psychology of Thinking, (New Jersey: Prentice Hall, 1971), p. 9.

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ปัญหา คือ สถานการณ์หรือคำถามซึ่งบุคคลไม่สามารถที่จะผ่านอุปสรรคไปสู่เป้าหมายได้โดยการใช้วิธีการตามปกติที่เคยใช้มาก่อน แต่จะต้องใช้กระบวนการที่เหมาะสม เช่น อาจจะมีการตั้งและทดสอบสมมติฐาน และสถานการณ์ที่จะเป็นปัญหานั้น จะขึ้นอยู่กับบุคคลด้วย สถานการณ์เดียวกันอาจจะเป็นปัญหาสำหรับบุคคลบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลอื่นก็ได้

ส่วนการแก้ปัญหานั้น เป็นพฤติกรรมการเรียนรู้ หรือกระบวนการยุ่งยากซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้ ความคิด ประสบการณ์ที่ผ่านมา เพื่อจะให้ได้ความรู้หรือแนวความคิดใหม่ ซึ่งเป็นจุดหมายที่ต้องการ

<u>ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์</u>

เลียว เจ บรูคเนอร์ (Leo J. Brueckner) ได้ให้ทรรศนะเกี่ยวกับปัญหาคณิตศาสตร์ว่า "ผู้เรียนจะพบกับปัญหาคณิตศาสตร์ เมื่อเขาเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณ ซึ่งเขาไม่สามารถตอบได้ทันทีโดยวิธีที่เคยชิน และสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียนเมื่อวานนี้อาจไม่เป็นปัญหาในวันนี้ก็ได้"[1]

แซม อาดัมซ์ (Sam Adams) ได้ให้ความเห็นว่า

> ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับปริมาณ และคำตอบที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณ ปัญหาคณิตศาสตร์หมายรวมถึงปัญหาที่เป็นภาษา (word problem) ปัญหาที่เป็นเรื่องราว และปัญหาที่เป็นคำพูด (verbal problem) นอกจากนี้ยังมีความแตกต่างระหว่างปัญหาและแบบฝึกหัด คือ ในการแก้ปัญหาจะต้องมีการตัดสินใจและลงมือทำ ส่วนแบบฝึกหัดไม่จำเป็นต้องมีการตัดสินใจ เช่น $23 \times 37 = \square$

---

[1]Leo J. Brueckner, <u>Developing Mathematics Understanding in the Upper Grade</u>, p. 301.

การที่จะหาคำตอบนี้ไม่จำเป็นต้องใช้การตัดสินใจ จึงถือว่าเป็นแบบฝึกหัด[1]

สตีเฟน กรูลิก และ โรเบิร์ต อี เรย์ (Stephen Krulik and Robert E. Reys) ได้แบ่งชนิดของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. ปัญหาที่เป็นความรู้ ความจำ
2. ปัญหาทางพีชคณิต
3. ปัญหาที่เป็นการประยุกต์ใช้
4. ปัญหาที่ให้ค้นหาส่วนที่หายไป
5. ปัญหาสถานการณ์[2]

เพอร์สัน วี รัสเซลล์ (Person V. Russell) ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. ปัญหาที่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่ปรากฏอยู่ในแบบเรียนและหนังสือทั่ว ๆ ไป
2. ปัญหาที่ไม่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่พบทั่ว ๆ ไปในชีวิตประจำวัน[3]

---

[1]Sam Adams, Teaching Mathematics, (New York: Hasper & Row Publishers, 1977), p. 176.

[2]Stephen Krulik and Robert E. Reys, Problem Solving in School Mathematics, (The National Council of Teachers of Mathematics, 1980), p. 24.

[3]Person V. Russell, Essentials of mathematics, (New York: John Wiley & Sons, 1961), p. 255.

จากคำกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ ปัญหาซึ่งเกี่ยวกับปริมาณ และปัญหาเหล่านี้ จะพบได้ทั้งที่เป็นลายลักษณ์อักษรในหนังสือต่าง ๆ และในชีวิตประจำวันของคนเรา

ลักษณะปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

ได้มีผู้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และวิธีการสร้างปัญหาให้น่าสนใจไว้ดังนี้

คอร์เริล จี ไคลด์ (Corle G. Clyde) ได้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจว่า ควรจะมีลักษณะดังนี้

1. มีความใกล้เคียงกับปัญหาในชีวิตจริง และสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหามากที่สุด โดยอาจเป็นเรื่องราว หรือเหตุการณ์ที่เกิดกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน หรือมักเกิดกับบุคคลทั่ว ๆ ไป หรือลักษณะคล้ายกับสถานการณ์ในชีวิตจริง เป็นต้น

2. สถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหาควรใช้ภาษา หรือบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์มา และไม่ควรเป็นปัญหาธรรมดาทั่ว ๆ ไป[1]

สตีเฟน กรูลิก และโรเบิร์ต อี เรย์ (Stephen Krulik and Robert E. Reys) ได้กล่าวว่า "ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ จะเป็นปัญหาที่นักเรียนไม่ค่อยพบในห้องเรียน" นอกจากนี้เขาได้กล่าวถึงการที่จะสร้างปัญหาคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

---

[1]Corle G. Clyde, Teaching Mathematics in the Elementary School, (New York: The Ronald Press Company, 1967), p. 108.

1. ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา
2. กลวิธีที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหา
3. ความสามารถในการใช้ภาษาของผู้แก้ปัญหา[1]

โฮวาร์ด เอฟ แฟร์ (Howard F. Fehr) ได้กล่าวว่า "เทคนิคหนึ่งซึ่งจะช่วยในการทำให้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่น่าสนใจ คือ การให้นักเรียนได้ช่วยกันสร้างปัญหาขึ้นมาเอง"[2]

จากข้อความที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจควรจะเป็นปัญหาซึ่ง แตกต่างไปจากปัญหาที่พบเห็นบ่อย ๆ ในบทเรียน และควรจะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นปัญหาที่สัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหาและชีวิตประจำวัน
2. เป็นปัญหาที่ใช้ภาษาในลักษณะที่เข้าใจได้ง่าย
3. เป็นปัญหาที่เหมาะกับระดับความรู้พื้นฐานของผู้แก้ปัญหา
4. เป็นปัญหาที่มีความยากง่ายเหมาะกับผู้แก้ปัญหา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

---

[1]Stephen Krulik and Robert E. Reys, Problem Solving in School Mathematics, p . 208.

[2]Howard F. Fehr, Teaching Modern Mathematics in the Elementary School, p. 424.

องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ยอร์จ โพลยา (George Polya) ให้ความเห็นว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สัมพันธ์กับ

1. ความรู้สึกทั่ว ๆ ไป (Common sense) เช่น ความรู้สึกเกี่ยวกับความเป็นไปได้ของปัญหา ความเป็นไปได้ของคำตอบ เป็นต้น
2. กลวิธีต่าง ๆ เช่น การลองผิดลองถูก
3. ความผิดพลาด ซึ่งอาจมีขึ้นได้เสมอในการแก้ปัญหา[1]

จัง แคลร์ ซาลิวสกี (Jean Claire Zalewski) ได้ศึกษาองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า สิ่งที่เป็นองค์ประกอบมีดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์
2. ความสามารถในการจัดกระทำ
3. ความเข้าใจในการอ่าน ศัพท์ การตีความกราฟ และตาราง
4. มโนมติทางคณิตศาสตร์ (Mathematical concepts)
5. ทักษะในการคำนวณ[2]

คอร์เริล จี ไคลด์ (Corle G. Clyde) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ไว้ดังนี้

---

[1]George Polya, How to Solve It, p. 225.

[2]Jean Claire Zalewski, "An Investigation of Selected Factors Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem" Dissertation Abstracts International, 39 (November 1978): 2804-A.

1. วุฒิภาวะและประสบการณ์ จะทำให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ดีขึ้น
2. เด็กจะแก้ปัญหาได้ยาก ถ้าความสามารถในการอ่านและสติปัญญาต่ำ[1]

จากกล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า องค์ประกอบหรือสิ่งที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ความสามารถทางสติปัญญา เช่น ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ วิจารณ์ แยกแยะต่าง ๆ และสิ่งที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อีก ก็คือ ประสบการณ์ต่าง ๆ ที่ผ่านมา เช่น ประสบการณ์ในการอ่าน ประสบการณ์เกี่ยวกับการแก้ปัญหา เป็นต้น นอกจากนี้ก็ยังมีทักษะในการคำนวณเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สำหรับขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้มีผู้ศึกษาและรวบรวมไว้มากมายดังนี้

ยอร์จ โพลยา (George Polya) ได้จัดลำดับขั้นในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 เป็นขั้นการทำความเข้าใจปัญหา สิ่งแรกที่จะต้องทำความเข้าใจคือสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องสามารถสรุปปัญหาในภาษาของตนเองได้ สามารถบอกได้ว่าประเด็นใหญ่ของปัญหาอยู่ตรงไหน สามารถบอกได้ว่า โจทย์ถามหาอะไร อะไรเป็นสิ่งที่ให้หา อะไรคือเงื่อนไข และถ้าจำเป็นจะต้องให้ชื่อกับข้อมูลต่าง ๆ เขาควรจะเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมได้ นักเรียนจะต้องพิจารณาปัญหาอย่างตั้งใจ ซ้ำแล้วซ้ำอีกและหลาย ๆ แง่มุม จนกระทั่งสามารถสรุปออกมาได้

---

[1]Corle G. Clyde, Teaching Mathematics in the Elementary School, p. 112.

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ในปัญหาชัดเจนเสียก่อน สิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่ให้มาอย่างไร สิ่งสำคัญที่นักเรียนจะต้องทำในขั้นนี้ คือ การนึกทบทวนความรู้ที่มีมาว่ามีความรู้อะไรบ้างที่เขามีซึ่งสัมพันธ์กับปัญหานั้นบ้าง เทคนิคหนึ่งที่จะช่วยในการวางแผนแก้ปัญหา ได้แก่ การพยายามนึกถึงปัญหาที่เคยแก้มาก่อนซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาปัจจุบัน เพราะจะช่วยให้สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ใกล้เคียงกัน ในการวางแผนนั้นควรจะแบ่งเป็นขั้น ๆ โดยแบ่งออกเป็นขั้นตอนใหญ่ ๆ และในขั้นใหญ่แต่ละขั้น ก็จะแบ่งออกเป็นขั้นเล็กๆ อีกมากมาย นอกจากนั้นในขั้นนี้นักเรียนต้องมองเห็นว่า ถ้าเขาต้องการสิ่งหนึ่งเขาจะต้องใช้เหตุผลหรือข้ออ้างอะไร เพื่อที่จะให้ได้สิ่งนั้นมาตามต้องการ

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นลงมือทำตามแผน ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือทำการคิดคำนวณตามแผนการที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อที่จะให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่นักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ ก็อ ทักษะการคำนวณ การรู้จักเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

ขั้นที่ 4 เป็นขั้นตรวจวิธีการและคำตอบ ขั้นนี้เป็นขั้นการตรวจสอบ เพื่อความแน่ใจว่าถูกต้องสมบูรณ์ โดยการพิจารณาและสำรวจดูผล ตลอดจนขบวนการในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องรวบรวมความรู้ของเขา และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกัน เพื่อทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น[1]

คอร์เริด จี ไคลด์ (Corle G. Clyde) ได้แบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 เข้าใจปัญหา เขากล่าวว่า สิ่งที่เกี่ยวข้องกับการเข้าใจปัญหาของนักเรียน คือ ความรู้เกี่ยวกับคำหรือศัพท์ต่าง ๆ ที่ใช้ในปัญหานั้น ถ้านักเรียนไม่เข้าใจในคำหรือศัพท์ต่าง ๆ นั้น เขาก็ไม่อาจจะเข้าใจความหมายของปัญหาได้

---

[1] George Polya, How to Solve It, pp. 5-40.

ขั้นที่ 2 การหาสิ่งที่ต้องการใช้หาคำตอบของปัญหา นักเรียนต้องสามารถแยกแยะได้ว่า ข้อมูลที่ให้มาบางอย่างอาจไม่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบ หรือบางอย่างจำเป็นต้องใช้แต่ก็ขาดไป จึงจำเป็นต้องหามาเพิ่มเติมเอง

ขั้นที่ 3 ดูความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ที่จะให้หาคำตอบ และความสัมพันธ์กับคำตอบ มองเห็นว่าต้องใช้การดำเนินการ (operation) ใด จึงจะได้คำตอบ ขั้นนี้ถือว่าเป็นขั้นให้เหตุผลที่แท้จริง นักเรียนที่จะประสบผลสำเร็จในขั้นนี้จะต้องมีความสามารถ 3 ประการต่อไปนี้

1. มองเห็นเงื่อนไขอย่างชัดเจน เขาได้อธิบายโดยการยกตัวอย่าง ดังนี้ เช่น จากโจทย์ "จงหาระยะทางที่เด็กผู้ชายวิ่งได้ใน 10 วินาที เมื่อเขาวิ่งด้วยอัตราเร็ว 25 ฟุต/วินาที" เมื่อนักเรียนจะต้องผ่านกระบวนการให้เหตุผล เพื่อที่จะหาว่าจะแก้ไขปัญหาอย่างไร เขาต้องเข้าใจคำว่า "วิ่งด้วยอัตราเร็ว 25 ฟุต/วินาที" ดีเสียก่อน จึงจะเห็นว่าใน 10 วินาที จะวิ่งได้เป็น 10 เท่าของ 25 ฟุต ถ้านักเรียนมองไม่เห็นเงื่อนไขนี้ วิธีหนึ่งที่จะช่วยได้ คือ การวาดภาพประกอบ

2. การวางแผนแก้ปัญหาและให้เหตุผล เขาอธิบายโดยยกตัวอย่าง ดังนี้ สมมุตินักเรียนมีปัญหา "ชายคนหนึ่งซื้อมันฝรั่ง 20 หัว ในราคาหัวละ 1.50 บาท แล้วเน่าเสีย 4 หัว ที่เหลือขายไปหัวละ 2 บาท ชายคนนี้ได้กำไรเท่าไร" วิธีการในการแก้ปัญหามีดังนี้ สิ่งแรกที่นักเรียนควรจะถามตัวเองคือ "ฉันกำลังต้องการหาอะไร (กำไร) ต่อไปควรจะคิดว่า "ฉันจะหากำไรได้อย่างไร" (เอาราคาขายลบด้วยราคาทุน) แต่ราคาทุนและราคาขายไม่ได้เขียนบอกมา ดังนั้นเขาจะต้องคิดต่อไปว่า "ฉันจะหาราคาทุนและราคาขายได้อย่างไร" (โดยคูณจำนวนด้วยราคาของแต่ละหัว) ซึ่งข้อมูลที่มีอยู่แล้วในปัญหาเขาก็จะได้คำตอบตามขบวนการที่ถามมา

3. ตัดสินว่าคำตอบเป็นคำตอบที่มีเหตุผล หรือสมเหตุสมผลเพียงใด เพราะบางครั้งอาจจะตอบผิดได้ ถ้าคำนวณผิดแล้วไม่ได้ตรวจสอบดูอีกที หรือไม่ได้ดูว่าคำตอบนั้นน่าจะเป็นไปได้หรือไม่

ขั้นที่ 4 การคำนวณ ขั้นนี้ไม่ใช่เพียงแต่นักเรียนจะ บวก ลบ คูณ และหาร เป็นเท่านั้น แต่จะต้องมีทักษะเป็นอย่างดี[1]

จอห์น แอล มาร์ค (John L. Mark) ได้กล่าวว่าในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะต้องทำสิ่งต่อไปนี้

1. ค้นหาว่าให้ข้อมูลอะไรมาบ้าง และให้หาอะไร
2. ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มาเพื่อจะไปสู่สิ่งที่ต้องการให้หา
3. วิเคราะห์ข้อมูลและความสัมพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์
4. ตรวจสอบผลเพื่อความมั่นใจว่าถูกต้อง

ลำดับขั้นนี้อาจเปลี่ยนแปลงได้ขึ้นอยู่กับผู้แก้ปัญหา และตัวปัญหา[2]

โฮวาร์ด เอฟ แฟร์ (Howard F. Fehr) ได้กล่าวถึงสิ่งที่จะต้องกระทำในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้

1. การคาดคะเนคำตอบ สิ่งที่นักเรียนใช้ในการคาดคะเน คือ การประมาณอย่างเร็ว ๆ นักเรียนที่รู้จักคาดคะเนจะสามารถหลีกเลี่ยงจากคำตอบที่คลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงมากได้

2. การตีความคำตอบ มีนักเรียนบางคนแม้แต่ในระดับวิทยาลัยแล้วก็ตาม สามารถหาคำตอบที่เป็นตัวเลขถูกต้องของปัญหาได้ แต่ไม่รู้ว่าจะนำตัวเลขซึ่งได้มาไปตอบปัญหาได้อย่างไร นั่นคือ ได้ตัวเลขมาแล้วแต่ตอบไม่เป็นนั่นเอง การตีความ

---

[1]Corle G. Clyde, Teaching Mathematics in the Elementary School, PP. 109-112.

[2]John L. Mark, Teaching Elementary School Mathematics for Understanding, pp. 401-412.

คำตอบเป็นสิ่งที่สำคัญพอ ๆ กับการหาคำตอบ ถ้าเด็กตอบว่าคำตอบคือ $4\frac{1}{2}$ นิ้ว เขาควรจะถูกถามต่อไปว่า "$4\frac{1}{2}$ นิ้วคืออะไร" ที่จริงคำตอบที่ถูกต้องควรจะเป็น "เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมยาว $4\frac{1}{2}$ นิ้ว" บางครั้งผลการคำนวณที่ถูกต้อง ไม่เพียงพอที่จะตอบคำถามของปัญหา แต่ต้องดูถึงความเป็นไปได้ของปัญหาประกอบด้วย เช่น จากปัญหา "ต้องการส่งนักกีฬา 138 คน ไปยังสนามกีฬาโดยรถยนต์ซึ่งมีที่นั่ง 29 ที่นั่ง จะต้องใช้รถกี่คัน" จากการคำนวณจะได้ว่า $138 \div 29 = 4\frac{22}{29}$ คำถามของปัญหา คือ ต้องใช้รถกี่คัน ถ้าตอบว่า 4 คัน ก็จะเหลือคนอีก 22 คน ถ้าตอบ $4\frac{22}{29}$ คัน ก็เป็นไปไม่ได้ในชีวิตจริง ๆ ดังนั้นคำตอบจึงควรเป็น 5 คัน[1]

จอห์น เอฟ เลอบลานซ์ (John F. LeBlanc) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 การเข้าใจปัญหา ในการที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจปัญหา ครูควรจะถามให้นักเรียนหาว่าอะไรคือข้อมูล หรือเงื่อนไขที่ให้มา และในที่สุดเขาต้องบอกได้ว่าปัญหาถามหาอะไร

ขั้นที่ 2 ในขั้นนี้ครูควรจะนำอภิปรายกลวิธีซึ่งจะใช้ในการแก้ปัญหา และครูควรจะเสนอแนะกลวิธีที่เป็นไปได้ให้นักเรียนดู จากนั้นให้นักเรียนตัดสินเลือกเอากลวิธีใดวิธีหนึ่งเอง

ขั้นที่ 3 ลงมือแก้ปัญหา ขั้นนี้กลวิธีที่คิดเอาไว้ในขั้นที่ 2 ถูกนำออกมาใช้ ในบางครั้งแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2 อาจจะไม่นำไปสู่คำตอบ ถ้าเป็นเช่นนี้เขาก็จะต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นที่ 2 อีกครั้งหนึ่ง

ขั้นที่ 4 ทบทวนปัญหาและคำตอบ กล่าวได้ว่าในการแก้ปัญหาทั้ง 4 ขั้น ขั้นนี้เป็นขั้นที่มีความสำคัญมากที่สุด ขั้นนี้แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ ลักษณะแรกเป็นการมองขั้นตอน

---

[1]Howard F. Fehr, Teaching Modern Mathematics in the Elementary School, p. 127.

ต่าง ๆ ย้อนกลับ และลักษณะที่ 2 เป็นการขยายสถานการณ์ของปัญหา เพื่อจะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป[1]

จากข้อความที่กล่าวมาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถสรุปได้ว่าในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จะประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ 3 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 เป็นขั้นตีความและทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งประกอบวิธีการแก้ปัญหาดังตัวอย่าง เช่น

1. การทำความเข้าใจความหมายของคำ และสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา
2. การมองปัญหาในหลาย ๆ แง่มุม เพื่อดูความเป็นไปได้ของปัญหา
3. การวาดรูปประกอบปัญหา ถ้าเป็นไปได้
4. การหาส่วนที่สำคัญ ๆ ของปัญหา เช่น สิ่งที่ถามหา ข้อมูลที่ให้มา และเงื่อนไขต่าง ๆ
5. การค้นหาความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ของปัญหา

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา ซึ่งประกอบด้วยส่วนย่อยต่าง ๆ เช่น

1. การทบทวนความรู้ที่มีซึ่งจะต้องใช้ในการแก้ปัญหา
2. การคิดถึงวิธีการให้เหตุผล เพื่อจะสรุปสิ่งที่ต้องการ
3. การแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหา ว่าอะไรเป็นขั้นใหญ่ อะไรเป็นขั้นย่อย จะต้องหาอะไรก่อน อะไรหลัง
4. การพิจารณาปัญหาที่ใกล้เคียงกัน เพื่อจะดูว่ามีอะไรร่วมหรือคล้ายกันบ้าง จะได้แก้ปัญหาในลักษณะที่คล้าย ๆ กัน
5. การพิจารณาว่าข้อมูลที่ให้มานั้นเพียงพอหรือไม่
6. การเลือกวิธีการณ์ที่เหมาะสม

---

[1]John F. LeBlanc, "You Can Teach Problem Solving," Arithmetic Teacher 25 (November 1977): 17-25.

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นที่หาคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่สุดของปัญหา ประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ เช่น

1. การลงมือคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2

2. การคาดคะเนคำตอบที่ใกล้เคียง

3. การตรวจสอบความเป็นไปได้ของคำตอบ รวมถึงการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบด้วย

4. การตรวจสอบว่าคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ให้มาหรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบกระบวนการต่าง ๆ ในการหาคำตอบ

5. การปรับปรุงคำตอบให้เป็นคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในต่างประเทศ

ดับบลิว แอล ชาฟฟ์ (W.L. Schaff) ได้ศึกษาวิธีสอนของครูในเรื่องการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่าสาเหตุของความบกพร่องเกี่ยวกับสิ่งเหล่านี้

1. ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวน และความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
2. ความเข้าใจความหมายของคำ และสัญลักษณ์ในคณิตศาสตร์
3. ความสามารถในการที่จะเห็นสิ่งที่ต้องการ
4. ความสามารถในการวิเคราะห์ขั้นต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา
5. ความสามารถในการคาดคะเนคำตอบล่วงหน้า
6. ความสามารถในการแยกแยะสิ่งที่เกี่ยวข้องและสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องในปัญหา
7. นิสัยการตรวจสอบคำตอบที่ได้[1]

---

[1] W.L. Schaff, "A Realistic Approach to Problem-Solving in Arithmetic," Elementary School Journal 46 (1946): 494-497.

เคนเนส เจ เทรเวอร์ส (Kenneth J. Travers) ได้ศึกษาว่านักเรียนชอบแก้ปัญหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ชนิดใดมากที่สุด โดยศึกษาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จำนวน 240 คน ให้นักเรียนจัดอันดับคุณภาพของปัญหาสถานการณ์ 3 แบบ คือ ปัญหาสถานการณ์ทางวิทยาศาสตร์-จักรกล (mechanical-scientific) ปัญหาสถานการณ์ทางเศรษฐกิจ-สังคม (social-economics) และปัญหาสถานการณ์แบบนามธรรม (abstract) ผลปรากฏว่านักเรียนชอบปัญหาสถานการณ์ทางเศรษฐกิจ-สังคม เป็นอันดับหนึ่ง ปัญหาสถานการณ์ทางวิทยาศาสตร์-จักรกล เป็นอันดับสอง และปัญหาที่เป็นนามธรรม เป็นอันดับสาม แต่เมื่อพิจารณาระหว่างนักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน นักเรียนกลุ่มอ่อนมีแนวโน้มที่จะแก้ปัญหาสถานการณ์ทางเศรษฐกิจ-สังคม มากกว่านักเรียนกลุ่มเก่ง ส่วนนักเรียนกลุ่มเก่งชอบแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เป็นนามธรรมมากกว่านักเรียนกลุ่มอ่อน[1]

ดัดลีย์ วิลเลียม ฮอลล์ (Dudly William Hall) ได้ศึกษาผลของการสอนวิเคราะห์การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความสามารถในการวิเคราะห์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นปีที่ 5 จำนวน 60 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม อย่างละ 30 คน แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่คาดคะเนเก่ง 15 คน และคาดคะเนไม่เก่ง 15 คน กลุ่มทดลองได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์ เป็นเวลา $8\frac{1}{2}$ ชั่วโมง แล้วทำการทดสอบการวิเคราะห์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้ผลว่า

1. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนที่เก่งทางวิเคราะห์ กับนักเรียนที่ไม่เก่งทางวิเคราะห์ ผู้วิเคราะห์ได้ดีกว่าจะแก้ปัญหาได้ดีกว่า

---

[1]Kenneth J. Travers, "A Test of Pupil Preference for Problem-Solving Situations in Junior High School Mathematics," The Journal of Experimental Education 35 (1967): 9-18.

2. พบว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญของคะแนน ความสามารถในการแก้ปัญหา ระหว่างนักเรียนซึ่งได้รับการสอนวิเคราะห์ และไม่ได้รับการสอนวิเคราะห์[1]

ซู เวอร์จิเนีย มูราสกี (Sue Virginia Muraski) ได้ทำการศึกษาผลของการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์ กับความสามารถในการแก้ปัญหา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นปีที่ 6 ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละ 13 คน กลุ่มทดลองจะได้รับการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด 3 บทเรียน แต่ละบทเรียนจะแบ่งออกเป็น 5 เรื่อง ใช้เวลา 5 สัปดาห์ ต่อจากนั้นวัดความสามารถในการแก้ปัญหาของกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาดีกว่า กลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.005[2]

แซนดรา ไพรเยอร์ คลาร์กสัน (Sandra Pryor Clarkson) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะในการแปลความหมายในวิชาคณิตศาสตร์ กับความสามารถในการแก้ปัญหา และศึกษาดูว่านักเรียนจะใช้การแปลความหมายในการแก้ปัญหาหรือไม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นปีที่ 1 ที่เรียนพีชคณิตจำนวน 5 ห้องเรียน นำมาทดสอบความสามารถในการแปลความหมาย 3 แบบ คือ สัญลักษณ์ที่เป็นภาษา (verbal-symbolic)

---

[1]Dudly William Hall,"A Study of the Relationship Between Estimation and Mathematical Problem-Solving among Fifth Grade Students," Dissertation Abstracts International 37 (April 1977): 6324-6325.

[2]Sue Virginia Muraski, "A Study of the Effects of Explicit Reading Instruction on Reading Performance in Mathematics and on Problem- Solving Ability of Sixth Grade," Dissertation Abstracts International 39 (January 1979): 4104-A.

สัญลักษณ์ที่เป็นสัญลักษณ์ (symbolic-symbolic) และสัญลักษณ์ที่เป็นรูปภาพ (pictorial symbolic) แล้วนำคะแนนไปหาความสัมพันธ์กับคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหา ปรากฏว่าการแปลความหมายทั้ง 3 แบบ มีความสัมพันธ์กับการแก้ปัญหา และคนที่มีความสามารถในการแปลความหมายต่างกัน จะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และพบว่าทักษะในการแปลความหมายเป็นองค์ประกอบสำคัญอย่างหนึ่งในการแก้ปัญหา[1]

จอห์น เอน พุท (John Ian Putt) ได้ศึกษาถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เมื่อมีขบวนการแก้ปัญหาต่างกัน โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นปีที่ 5 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องแรกได้รับการสอนกลวิธีการแก้ปัญหา อีกห้องหนึ่งให้นักเรียนได้รับประสบการณ์โดยตรงจากการพยายามให้แก้ปัญหาต่าง ๆ เอง ใช้เวลาทำการทดลอง 4 สัปดาห์ แล้ววัดสัมฤทธิ์ผลในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญของสัมฤทธิผลในการแก้ปัญหาของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม[2]

---

[1]Sandra Pryor Clarkson, "A Study of the Relationships among Translation Skills and Problem-Solving Abilities," Dissertation Abstracts International 39 (January 1979): 4101-A.

[2]John Ian Putt, "An Exploratory Investigation of Two Methods of Instruction in Mathematical Problem-Solving at the Fifth Grade Level," Dissertation Abstracts International 39 (March 1979): 5382-A.

งานวิจัยในประเทศไทย

สำหรับในประเทศไทยยังไม่มีผู้ใดทำการวิจัยในส่วนที่เป็นปัญหาคณิตศาสตร์ มีแต่การแก้ปัญหาทั่ว ๆ ไปดังนี้

วรรณดี วรรณศิลป์ ได้วิจัยเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหามีความสัมพันธ์ในทางบวก กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และผลการทดสอบค่าที พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01[1]

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

---

[1] วรรณดี วรรณศิลป์ "ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่2 " (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2523) หน้า 62.