บทที่ 2

ทฤษฎีแถวคอย (Queueing Theory)

การเกิดแถวคอย (Queue) จะเกิดได้ในกรณีต้องมีการรอคอยเพื่อเข้ารับบริการ (Waiting line for service) เช่น การมารับบริการที่ธนาคาร, ที่ทำการไปรษณีย์, การซื้อตั๋วรถไฟ, การซื้อตั๋วดูภาพยนต์ จะเกิดเวลาที่รอเข้ารับบริการ, เวลาที่ให้บริการ ในการศึกษาวิจัยนี้ ระยะเวลาที่รอเข้ารับบริการคือ เวลาที่ใช้ในการเตรียมตัวของเจ้าหน้าที่ตำรวจดับเพลิงเมื่อได้รับแจ้งเพลิงไหม้ (Delay time or Waiting time) เวลาที่ให้บริการ (Service Time) คือระยะเวลาที่รถดับเพลิงเดินทางไปถึงที่เกิดเพลิงไหม้

2.1 <u>ลักษณะที่สำคัญของระบบแถวคอย</u> (Queueing system) ประกอบด้วย

1) ลักษณะการแจกแจงของผู้รับบริการ (Arrival pattern of customers) ซึ่งจะแสดงถึงรูปแบบของการแจกแจงความถี่ของผู้รับบริการว่ามีลักษณะเป็นแบบใด โดยทั่วไปการแจกแจงความถี่ของผู้รับบริการจะมีลักษณะเป็นแบบปัวซอง (Poisson Distribution)

2) ลักษณะการแจกแจงของระยะเวลาที่ให้บริการ (Service pattern) ซึ่งจะแสดงถึงรูปแบบของการแจกแจงความถี่ของระยะเวลาที่ให้บริการของสถานีให้บริการ (Server) โดยทั่วไปการแจกแจงความถี่ของการให้ผู้รับบริการอาจมีลักษณะเป็นแบบปกติ (Normal Distribution) หรือแบบเอ๊กโพเนนเชียล (Exponential Distribution) หรือแบบเออลางค์ (Earlang Distribution)

3) จำนวนสถานีให้บริการ (Number of servers) ในระบบแถวคอย รูปแบบการให้บริการแบ่งตามจำนวนสถานีให้บริการ 2 แบบ คือ

ก. ในระบบมีสถานีให้บริการ 1 สถานี คือ One-server queue

ข. ในระบบมีสถานีให้บริการมากกว่า 1 สถานี คือ Multiple servers queue

4) ลักษณะของคิว (Queue discipline) หมายถึงลำดับการให้บริการแก่ผู้รับบริการ ซึ่งมีหลายแบบด้วยกัน เช่น แบบ First come-first served, Last come-first served หรือขึ้นกับความสำคัญของผู้มารับบริการแต่ละคน ฯลฯ

ลักษณะการแจกแจงของผู้รับบริการ

ในระบบแถวคอย (Queueing System) ผู้รับบริการ (arrivals) จะเข้ามารับบริการแบบสุ่ม (random) โดยจะมีลักษณะการเข้ามารับบริการแบบปัวซอง (Poisson Distribution) ซึ่งการมารับบริการจะเกิดในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง หรือเกิดขึ้นในขอบเขตใดขอบเขตหนึ่ง

ให้ ผู้รับบริการ (arrival) ในแต่ละช่วงเวลาแทนด้วยตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง Discrete random variable) = X ซึ่งจะมีค่าเป็น 0, 1, 2, ... หรือ ∞ โดยฟังชั่นของความน่าจะเป็น (Probability function) ของ X เป็นดังนี้

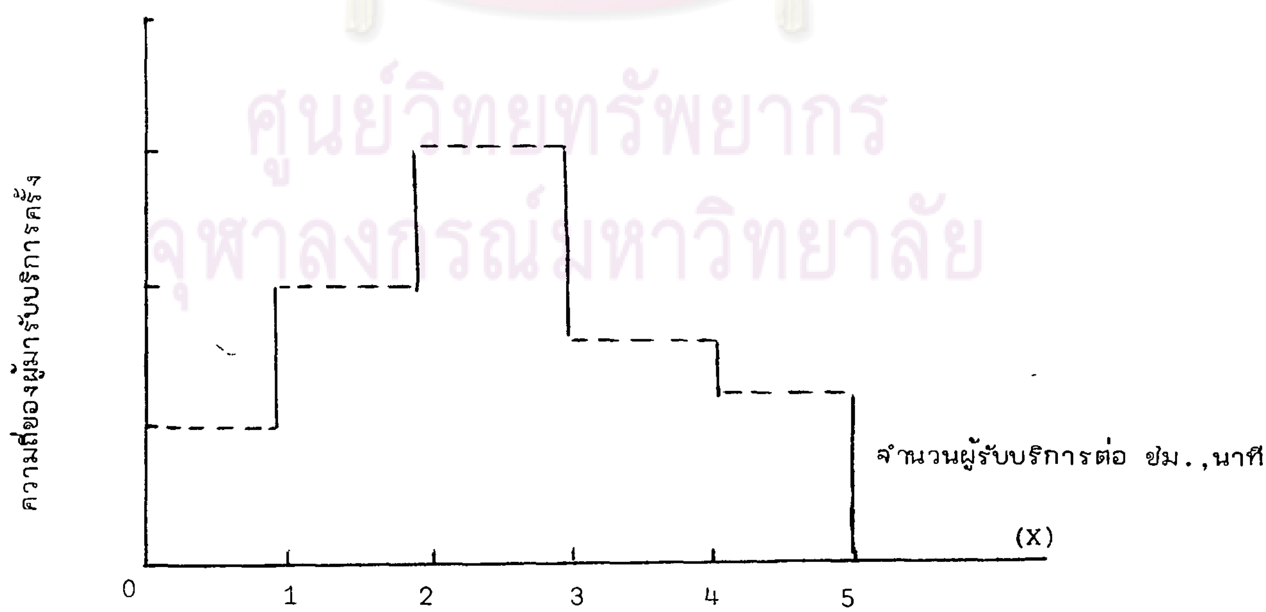
$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$E(X) = \lambda$ = ค่าเฉลี่ยของผู้รับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง(ช.ม., นาที)

X = จำนวนผู้มารับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง(ช.ม.,นาที)

$V(X) = \lambda$ = ความแปรปรวนของผู้มารับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{-\lambda}\lambda^{x})}{x!} = 1$$



และช่วงเวลาระหว่างผู้รับบริการแต่ละคน (Interarrival Time) มีการแจกแจงความถี่แบบ Exponential Distribution โดยเวลาที่ให้บริการแก่ผู้รับบริการแต่ละครั้งเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable) = t ซึ่งมีค่า (0, ∞) และมีฟังชั่นความน่าจะเป็น (Probability density function) ของ t มีค่าดังนี้

$$f(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad , \quad = (0,\infty)$$

$$\lambda > 0$$

$$E(t) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t}\, dt = 1$$

Cumulative Probability Density Function (CDF) $= F_t(b)$

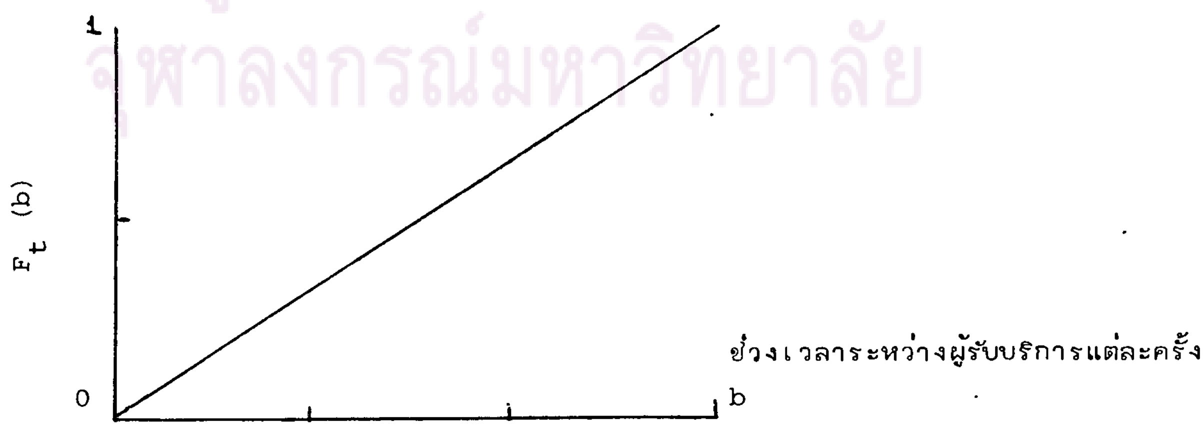
$$= \int_0^b \lambda e^{\lambda t}\, dt$$

$$= 1-e^{-\lambda t} \Big|_0^b \quad , \quad b > 0$$

โดย λ = ค่าเฉลี่ยของผู้เข้ารับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง

b = ช่วงเวลาระหว่างผู้รับบริการแต่ละครั้ง (Interarrival Time)

แสดงกราฟของ CDF $= F_t(b)$



ลักษณะการแจกแจงของระยะเวลาที่ให้บริการ

เมื่อมีผู้รับบริการ (arrivals) เข้ามารับบริการในแต่ละสถานีบริการจะให้บริการ โดยใช้เวลาในการให้บริการมากบ้างน้อยบ้าง โดยมีลักษณะการแจกแจงเวลาที่ให้บริการ อาจมีได้หลายลักษณะซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะการใช้บริการ เช่น อาจมีลักษณะการแจกแจงเวลาที่ให้บริการเป็นแบบ Normal Distribution, Earlang Distribution แต่โดยทั่วไปจะมีลักษณะการแจกแจงแบบ Exponential Distribution

แทนค่าเวลาที่ให้บริการในแต่ละครั้งด้วยตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable) = t ซึ่งมีค่า $(0, \infty)$ โดยมีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function) ดังนี้

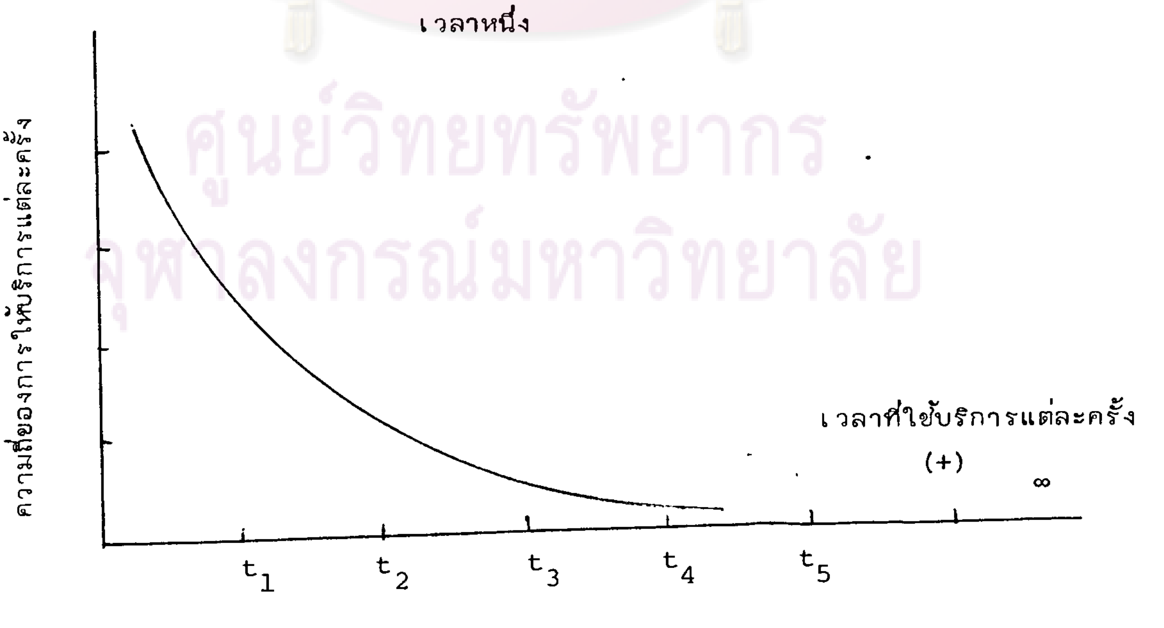
$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t = (0, \infty)$$

$$E(t) = \frac{1}{\mu}$$

$$V(t) = \frac{1}{\mu^2}$$

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty \mu e^{-\mu t}\, dt = 1$$

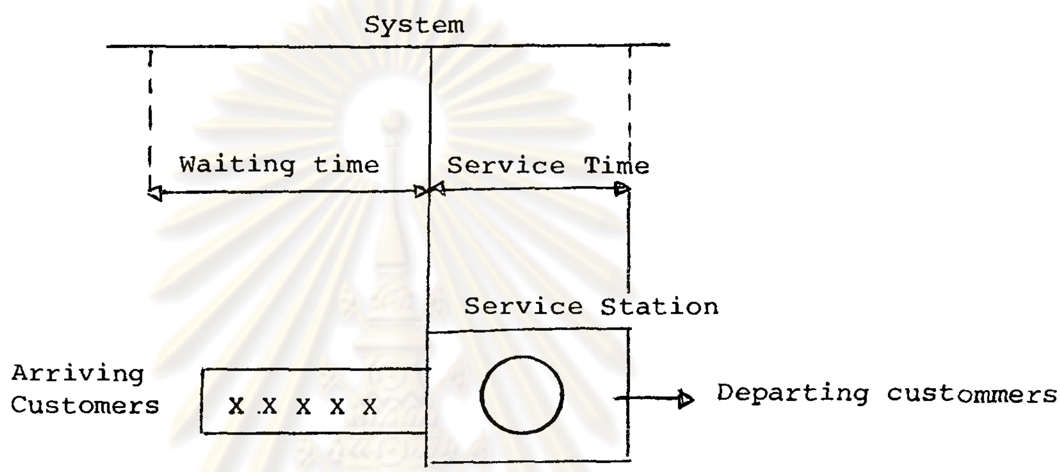
μ = ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ให้บริการแต่ละครั้งในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง



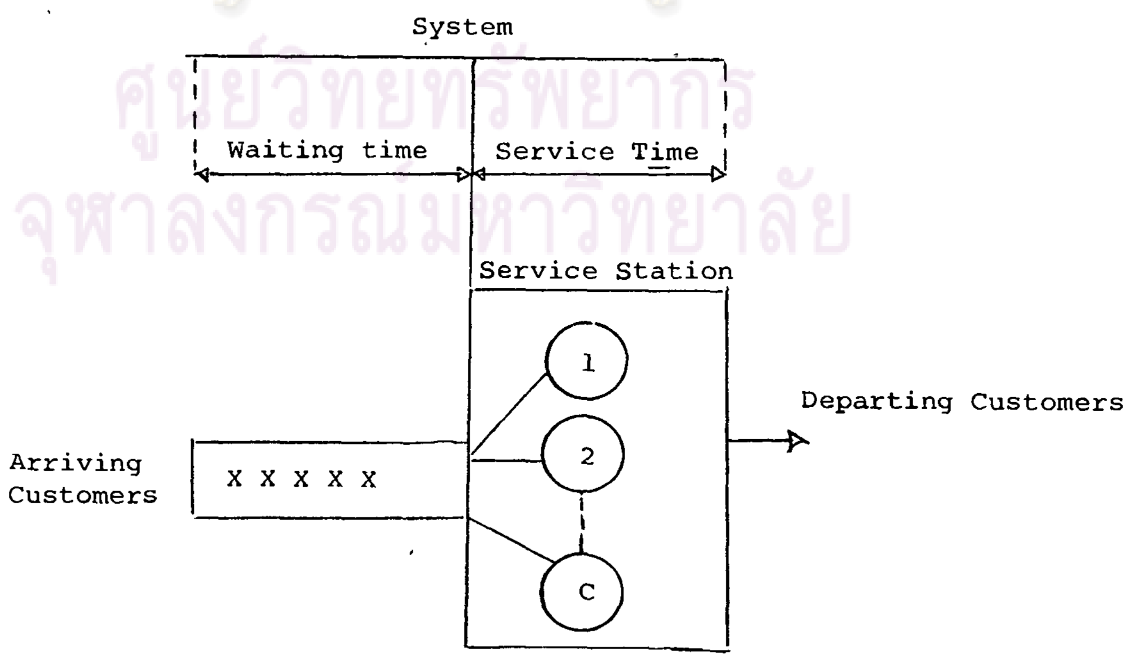
จำนวนสถานีให้บริการ (Numbers of servers)

สถานีให้บริการในระบบแถวคอย (Queueing System) อาจมีหลายแบบ คือ

1) สถานีให้บริการ 1 สถานี (One Server)



2) สถานีให้บริการมากกว่า 1 สถานี (Multiple Servers)



สัญญลักษณ์ที่ใช้ในทฤษฎีแถวคอย (Queueing Theory)

n = จำนวนผู้เข้ารับบริการในระบบ ในที่นี้คือ จำนวนเหตุเพลิงไหม้ที่เกิดขึ้นทั้งหมดในแต่ละเขต

$P_n(t)$ = ค่าความน่าจะเป็นในสภาวะ Transient state เมื่อมีจำนวนผู้เข้ารับบริการในระบบ n หน่วย ที่เวลา t โดย t มีค่าเริ่มต้นที่ 0

P_n = ค่าความน่าจะเป็นในสภาวะ Steady state เมื่อมีจำนวนผู้เข้ารับบริการในระบบเท่ากัน n หน่วย

λ = อัตราเฉลี่ยของผู้เข้ารับบริการ (mean arrival rate) ในการวิจัยครั้งนี้ คือ อัตราเฉลี่ยของการรับแจ้งเพลิงไหม้ในแต่ละเขต

$\frac{1}{\mu}$ = ระยะเวลาเฉลี่ยของการให้บริการ (mean service time) ในการวิจัยครั้งนี้คือ ระยะเวลาเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้ของสถานีตำรวจดับเพลิงในแต่ละเขต

c = จำนวนสถานีให้บริการในระบบ ในการวิจัยครั้งนี้คือ สถานีตำรวจดับเพลิงในแต่ละเขต

ρ = $\frac{\lambda}{\mu}$ = อัตราเฉลี่ยของผู้เข้ารับบริการต่อ 1 ช่วงเวลาบริการ(service time)

W_q = ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการรอเข้ารับบริการในระบบของผู้เข้ารับบริการ ในการวิจัยครั้งนี้คือ ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ต้องรอจนกว่ารถดับเพลิงจะให้บริการผู้ที่แจ้งเหตุเพลิงไหม้รายก่อนเสร็จสิ้น

W_s = ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการให้บริการทั้งหมดในระบบของผู้เข้ารับบริการ ในการวิจัยครั้งนี้คือ ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้ของสถานีตำรวจดับเพลิงในแต่ละเขตรวมถึงเวลาที่ให้บริการดับเพลิงเสร็จสิ้น

L_q = ค่าเฉลี่ยของผู้เข้ารับบริการที่อยู่ในแถวคอย (queue) ซึ่งคือค่าเฉลี่ยของผู้แจ้งเพลิงไหม้ที่ต้องเสียเวลารอจนกว่ารถดับเพลิงจะให้บริการผู้ที่แจ้งเหตุเกิดเพลิงไหม้รายก่อนเสร็จสิ้น

L_s = ค่าเฉลี่ยของผู้เข้ารับบริการที่อยู่ในระบบ (System) ซึ่งคือค่าเฉลี่ยของผู้แจ้งเพลิงไหม้ที่กำลังรับบริการและรอคอยบริการในแต่ละเขต

ในการวิเคราะห์ทฤษฎีแถวคอย (Queueing Theory) สภาวะที่ทำการศึกษา 2 สภาวะคือ

1) Transient state system เป็นสภาวะที่จำนวนผู้เข้ารับบริการและสถานีบริการให้บริการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (Vary with time)

2) Steady state system เป็นสภาวะที่จำนวนผู้เข้ารับบริการและสถานีบริการให้บริการไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Independent of time)

ในการศึกษาแถวคอย ถ้าใช้สภาวะ Transient state จะยุ่งยากมากเนื่องจากต้องใช้วิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน (Complex mathematical) ทำการศึกษาและได้ผลลัพธ์ที่ไม่แน่นอน เนื่องจากขึ้นกับสภาพในช่วงแรก (Dependent on the initial conditions) แต่ถ้าใช้สภาวะ Steady state จะให้ผลที่แน่นอนกว่า แต่ต้องใช้จำนวนข้อมูลมากพอ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ใช้ข้อมูลจำนวน 1 ปี (ม.ค.-ธ.ค. 2524) ถือได้ว่านานพอ

กำหนดให้

$P_n(t+h)$ = ค่าความน่าจะเป็นที่มีผู้เข้ารับบริการอยู่ n หน่วย (n > 0) ในระบบ ณ เวลาที่ t+h

$P_n(t)$ = ค่าความน่าจะเป็นที่ผู้รับบริการอยู่ n หน่วย ในระบบ ณ เวลา t โดยที่ไม่มีผู้เข้ารับบริการและผู้รับบริการเสร็จสิ้น ณ ระหว่างเวลา h

$P_{n-1}(t)$ = ค่าความน่าจะเป็นที่มีผู้เข้ารับบริการอยู่ n-1 หน่วย ในระบบ ณ เวลา t โดยที่มีผู้เข้ารับบริการเพิ่ม 1 หน่วย แต่ไม่มีผู้รับบริการเสร็จสิ้น ณ ระหว่างเวลา h

$P_{n+1}(t)$ = ค่าความน่าจะเป็นที่มีผู้เข้ารับบริการอยู่ n+1 หน่วย ในระบบ ณ เวลา t โดยที่ไม่มีผู้เข้ารับบริการเพิ่มขึ้น แต่มีผู้รับบริการเสร็จสิ้น 1 หน่วย ณ ระหว่างเวลาh

จากหลักของ Birth-Death process

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda_n h)(1-\mu_n h)+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h(1-\mu_{n-1}h)$$
$$+P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}h)\mu_{n+1}h$$

take limit $h \longrightarrow 0$ โดยใช้หลักของ Differential-difference equation

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = -P_n(t)(\lambda_n+\mu_n)+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}+P_{n+1}(t)\mu_{n+1} \qquad (1)$$

จากสมการ (1) ถ้าให้ $n = 0$, $P_{n-1}(t)$, λ_{n-1} และ μ_n เท่ากับศูนย์ ทำให้สู่สภาวะ Steady state ซึ่งหมายถึงสภาวะที่ $t \longrightarrow \infty$ หรือ $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ ซึ่งจะทำให้สมการ (1) ที่อยู่ในสภาวะ Steady state มีค่าดังนี้คือ

$$-P_n(\lambda_n+\mu_n)+P_{n-1}\lambda_{n-1}+P_{n+1}\mu_{n+1} = 0\ ,\ 0 < n < N \qquad (2)$$

$$-P_o\lambda_o+P_1\mu_1 = 0 \qquad (3)$$

$$-P_N\mu_N+P_{N-1}\lambda_{N-1} = 0 \qquad (4)$$

จากสมการ (2), (3), (4) จะเป็นสมการทั่วไป สำหรับระบบแถวคอยที่มีจำนวนสถานีให้บริการเท่ากับ c สถานี ซึ่งอยู่ในสภาวะ Steady state

จาก (3) $$P_1 = \frac{\lambda_o}{\mu_1}P_o \qquad (5)$$

n = 1 จาก (2) $$P_2 = \frac{\lambda_1+\mu_1}{\mu_2}P_1 - \frac{\lambda_o}{\mu_2}P_o \qquad (6)$$

จาก (5), (6) $$P_2 = \frac{\lambda_1\lambda_o}{\mu_2\mu_1}P_o$$

โดยวิธี Inductive $$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}P_o\ ,\ 1 < n < N \qquad (7)$$

จาก (2) $$P_{n+1} = \frac{P_n(\lambda_n+\mu_n)}{\mu_{n-1}} - \frac{P_{n-1}\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}$$

โดย Inductive

$$P_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_o + \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_o$$

$$- \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_o$$

หรือ

$$P_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_o + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_o - \frac{\mu_n}{\lambda_n} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_o$$

$$P_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_o$$

จาก (5), (7) ทำให้หาค่า P_n ได้ ถ้ารู้ค่า P_o

จากหลักการของ Probability $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$ (8)

แทนค่า P_n ลงใน (8), $P_o \left[1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right] = 1$

แทนค่า P_o ใน (7) ทำให้หาค่า P_n

$$P_n = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right] \Big/ \left[1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]$$

จากการวิเคราะห์ข้อมูลทำให้ทราบถึงลักษณะการแจกแจงความถี่ของผู้เข้ารับบริการมีลักษณะเช่นใด ลักษณะของการแจกแจงความถี่ของเวลาที่ให้บริการเป็นแบบใด จำนวนสถานีให้บริการและลักษณะการให้บริการในแถวคอย จะทำให้สามารถกำหนดรูปแบบของระบบแถวคอยที่จะศึกษาได้ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

1) ผู้เข้ารับบริการมีลักษณะการแจกแจงความถี่แบบปัวซอง (Poisson Distribution) เวลาที่ให้บริการมีลักษณะการแจกแจงความถี่แบบเอ๊กโพเนนเชียล (Exponential Distribution) จำนวนสถานีบริการเท่ากับ 1 สถานี

ลักษณะการให้บริการเป็นแบบ First come first served โดยมีจำนวนผู้เข้ารับบริการในระบบสูงสุด = ∞ หน่วย และผู้เข้ารับบริการมีค่าเป็นอนันต์ (Infinite) จากสมการทั่วไปของ Birth and Death Process สมการที่ 1

ให้ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = Traffic intensity

และ $P_o = 1 - \rho$

สามารถคำนวณหาค่า L_q, L_s, W_q, W_s ได้ดังนี้

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad , \quad L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \quad , \quad W_s = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

2) ผู้เข้ารับบริการมีลักษณะการแจกแจงความถี่แบบปัวซอง (Poisson Distribution) จำนวนสถานีบริการมากกว่า 1 สถานี (Multiple server) ลักษณะการให้บริการเป็นแบบ First come first served โดยมีจำนวนผู้เข้ารับบริการในระบบสูงสุดเท่ากับ ∞ หน่วย และผู้เข้ารับบริการมีค่าเป็นอนันต์ (Inifinite)

จากสมการทั่วไป Birth and Death Process พบว่าในกรณีจำนวนสถานีบริการมากกว่า 1 สถานี (c สถานี)

$$P_o = \left[\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

สามารถคำนวณหาค่าแสดงคุณสมบัติต่าง ๆ ของระบบคิว (Operating characteristics)

$$L_q = \frac{\rho(cP)^c \cdot P_o}{c!(1-\rho)^2}$$

$$L_s = L_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{(c\rho)^c P_o}{c!c\mu(1-\rho)^2}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

2.2 <u>การทดสอบลักษณะการแจกแจงความถี่ของ</u>ผู้รับ<u>บริการและเวลาที่ใช้ในการให้บริการ</u> (Test for Goodness of Fit)

ในการศึกษาลักษณะการแจกแจงความถี่ที่ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ได้มานั้น เราสามารถทำการทดสอบเพื่อหาลักษณะการแจกแจงความถี่ว่าจะมีลักษณะเป็นแบบใด ซึ่งอาจเป็นแบบ Normal Distribution, Poisson Distribution, Exponential Distribution โดยใช้การทดสอบตามวิธีของ Chi-square Test ซึ่งศึกษาว่าความถี่ที่ได้จากการทดลอง (Observed frequency) จะแตกต่างไปจากความถี่ที่น่าจะเป็น (Expected frequency) มากน้อยเพียงไร ถ้ามีความแตกต่างมากจนมีนัยสำคัญ จะทำให้ไม่ยอมรับว่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมามีลักษณะการแจกแจงตามที่คาดหวังไว้ ในทางตรงข้ามถ้าความแตกต่างที่เกิดขึ้นมีไม่มากจนมีนัยสำคัญ จะทำให้ยอมรับว่าข้อมูลที่ศึกษานี้มีลักษณะการแจกแจงความถี่ตามที่คาดหวังไว้

กำหนดให้ O_i = ความถี่ที่ได้จากการทดลองจริง ๆ (Observed frequency) $i = 1, 2, \ldots k$

E_i = ความถี่ที่คาดว่าจะเกิดขึ้นในกลุ่มที่ i (Expected frequency)

P_i = ความน่าจะเป็น (Probability) ของการเกิดเหตุการณ์ในแต่ละกลุ่มตามสมมุติฐาน โดย $i = 1, 2, \ldots k$

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$$

$$E_i = P_i \cdot N$$

N = จำนวนความถี่ทั้งหมด

$$\text{Chi-square Test} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

degree of freedom = k-n-1

n = จำนวน Parameter ที่ใช้ประมาณในตัวแบบ

เมื่อคำนวณค่า Chi-square test = χ^2_{cal}

นำมาเปรียบเทียบกับค่า Chi-square จากตาราง = χ^2_{table}

จากหลักเกณฑ์ของ Chi-square test จึงตั้ง H_o, H_1 ได้ดังนี้

H_o : ข้อมูลที่ทำการสุ่มตัวอย่างมีลักษณะการแจกแจงความถี่ตามแบบฟังชั่นที่คาดหวัง

H_1 : ข้อมูลที่ทำการสุ่มตัวอย่างไม่มีลักษณะการแจกแจงความถี่ตามแบบฟังชั่นที่คาดหวัง

ที่ระดับนัยสำคัญ = α degree of freedom = υ

ถ้า $\chi^2_{cal} < \chi^2_{table}$ จะยอมรับ H_o

แต่ถ้า $\chi^2_{cal} > \chi^2_{table}$ จะไม่ยอมรับ H_o

การคำนวณโดยวิธี Chi-square test เพื่อทดสอบว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปัวซอง และแบบเอ๊กโพเนนเชียล แสดงได้ดังตามตัวอย่างที่ 1, 2 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 แสดงการทดสอบสมมุติฐาน อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึก ในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ของเขตธนบุรี

จำนวนครั้งที่แจ้งเหตุเพลิงไหม้ใน 1 ช.ม. (t_1)	ความถี่ที่แจ้ง (O_1)	$O_1 \times t_1$	$P(X_1) = \frac{e^{-0.3809}(0.3809)^{x}}{X!}$	$E_1 = P(X_1) \times N$	$O_1 - E_1$	$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1}$
0	115	-	0.6832	114.78	0.22	0.0004
1	43	43	0.2602	43.71	-0.71	0.0115
2	9 } 10	18	0.0496	8.33 } 9.43	0.57	0.0344
3	1	3	0.0063	1.10		
	N = 168	64				0.0463

H_o : อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. มีลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง

H_1 : อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ไม่มีลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง

$$\lambda = \sum_{i=1}^{4} \frac{f_i t_i}{N} = \frac{64}{168} = 0.3809$$

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0.0463$$

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 degree of freedom = 1

$$\chi^2_{table} = 3.841$$

$\chi^2_{cal} < \chi^2_{table}$ จึงยอมรับ H_o

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการทดสอบสมมุติฐาน เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ของเขตธนบุรี

ช่วงเวลาที่ใช้ในการเดินทาง (นาที)	จำนวนครั้งที่ใช้เวลาเดินทางในช่วงนี้ (O_1)	Mid-point X_1 (M_1)	$M_1 \times O_1$	$P(X) = e^{-0.914}\Big\vert_{X_2}^{X_1}$	$E = P(X_1) \times N$	$O_1 - E_1$	$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1}$
1-10	59	5.5	324.5	0.5117	52.705	6.2949	0.7518
11-20	37	15.5	573.5	0.2052	21.1356	15.8644	11.9078
21-30	7	25.5	229.5	0.0823	8.4769	-0.5231	0.0322
	N = 103		1127.5				12.6918

H_o : เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01 -24.00 น. มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ๊กโพเนนเชียล

H_1 : เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01 -24.00 น. ไม่มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ๊กโพเนนเชียล

$$E(X) = \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^{4} \frac{M_i f_i}{N} = \frac{1127.5}{103} = 10.9466 \text{ นาที/ครั้ง}$$

$$\chi^2_{cal} = 12.6918$$

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.001 degree of freedom = 1

$$\chi^2_{table} = 12.700$$

$\chi^2_{cal} < \chi^2_{table}$ จึงยอมรับ H_o

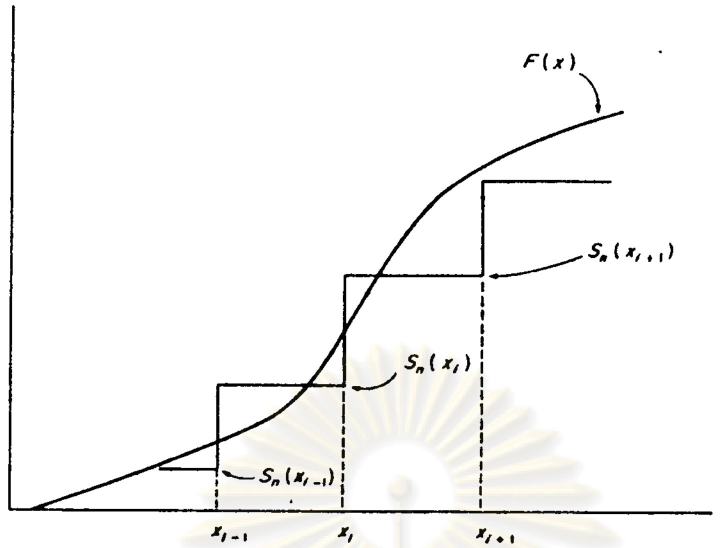
เนื่องจากวิธีของ Chi-square Test ที่สามารถใช้ทำการทดสอบลักษณะการแจกแจงความถี่ของข้อมูล จะพบว่ามีข้อจำกัดในเรื่องค่าของ Degree of freedom ที่อาจมีค่าลดลง จนมีค่าเท่ากับ 1 ได้ โดยที่จำนวนกลุ่มที่ทำการทดลองมี k กลุ่ม ถ้า k > 2 และค่าความถี่ที่คาดว่าจะเกิดขึ้นในกลุ่มที่ i(E_i) มีจำนวนน้อยกว่า 5 มากกว่า 20% คือมีค่าน้อยกว่า 5 นั่นเอง จึงต้องนำค่าความถี่ที่คาดว่าจะเกิดขึ้นในกลุ่มนี้ไปรวมกับกลุ่มข้างเคียงเพื่อให้มีค่าอย่างน้อยไม่ต่ำกว่า 5 ซึ่งมีผลทำให้จำนวนกลุ่มที่ทำการทดลองลดลงไป 1 กลุ่ม ดังนั้นเมื่อทำการคำนวณค่าของ Degree of freedom (df) ทำให้มีค่าลดลงไปด้วย ซึ่งบางครั้งทำให้ d.f มีค่าเท่ากับ 1 ได้ ทำให้การทดสอบโดย Chi-square Test จะมีค่า Power of Test ลดลงได้ เนื่องจากมีค่า d.f น้อย

โดยที่การศึกษาด้าน Nonparametric Statistics การทดสอบลักษณะการแจกแจงความถี่ของข้อมูล นอกจากวิธี Chi-square Test แล้วยังสามารถใช้วิธีที่เรียกว่า Kolmogorov-Smirnov One Sample Test มีหลักการคล้าย ๆ กับวิธี Chi-square Test คือ ศึกษาความแตกต่างระหว่าง Observed Frequency (O_i) Expected Frequency (E_i) โดยศึกษาว่าข้อมูลที่ทำการสุ่มมาจากตัวอย่างควรมีการแจกแจงความถี่เช่นเดียวกับของประชากร ในการทดสอบจึงศึกษาค่าความถี่สะสมของลักษณะการแจกแจงข้อมูลที่เกิดภายใต้การแจกแจงข้อมูลตามทฤษฎี (Theoretical Distribution) เปรียบเทียบกับค่าความถี่สะสมของลักษณะการแจกแจงข้อมูลที่สุ่มขึ้นมาศึกษา (Observed cumulative frequency distribution)

กำหนดให้ 1) $F_o(X)$ = ความถี่สะสมของการแจกแจงความถี่ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ X ตามลักษณะการแจกแจงความถี่ทางทฤษฎี

2) $S_N(X)$ = ความถี่สะสมของการแจกแจงความถี่ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ X ตามลักษณะการแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่สุ่มตัวอย่างขึ้นมา

$= \frac{O_i}{N}$; O_i จำนวนข้อมูลในกลุ่มที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ X



Step points for $F(x)$ continuous

จากนี้ จะพิจารณาผลต่าง $F_O(X)-S_N(X)$ ของแต่ละกลุ่มจึงจะมีค่าแตกต่างกันมากน้อยเพียงใดนั้นขึ้นกับค่าของ $F_O(X)$, $S_N(X)$

ด้วยหลักเกณฑ์ของ Kolmogorov-Smirnov One Sample Test สามารถตั้ง H_O, H_1 ได้ดังนี้

H_O : ข้อมูลที่ทำการสุ่มตัวอย่างมีลักษณะการแจกแจงความถี่ตามแบบฟังชั่นที่คาดหวัง

H_1 : ข้อมูลที่ทำการสุ่มตัวอย่างไม่มีลักษณะการแจกแจงความถี่ตามแบบฟังชั่นที่คาดหวัง

ภายใต้ H_O ทำการศึกษาหาผลต่างระหว่าง $F_O(X)$, $S_N(X)$ ที่ใหญ่ที่สุดได้

โดย $D_{cal} = \text{Maximum} \left| F_O(X)-S_N(X) \right|$

เปรียบเทียบค่า D_{cal} กับ D_{table} โดย D_{table} จะขึ้นกับค่าจำนวนตัวอย่างที่ศึกษา (n) และสามารถหาค่า D_{table} ได้จากตารางที่ 53

ถ้า $D_{cal} < D_{table}$ ยอมรับ H_O

และ $D_{cal} > D_{table}$ ไม่ยอมรับ H_O

การคำนวณโดยวิธี Kolmogorov-Smirnov One Sample test เพื่อทดสอบว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปัวซอง และแบบเอ็กโพเนนเชียล แสดงได้ตามตัวอย่างที่ 3, 4

ตัวอย่างที่ 3 แสดงการทดสอบสมมุติฐาน อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ของเขตธนบุรี

จำนวนครั้งที่แจ้งเหตุเพลิงไหม้ใน 1 ช.ม.	ความถี่ที่สังเกต	ความถี่สะสมที่สังเกต	$F_o(X) = \sum_{x=0}^{n} \frac{e^{-0.3809}(0.3809)^x}{x!}$	$S_N(X) = \frac{O_i}{N}$	$\lvert F_o(X)-S_N(X)\rvert$
0	115	115	0.6832	0.6845	0.0013
1	43	158	0.9434	0.9404	0.0030
2	9	167	0.9930	0.9940	0.0010
3	1	168	1.0000	1.0000	-

H_o : อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01 -24.00 น. มีลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง

H_1 : อัตราการรับแจ้งเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึกในช่วงเวลา 10.01 -24.00 น. ไม่มีลักษณะการแจกแจงแบบปัวซอง

D_{cal} = Maximum $\lvert F_o(X)-S_N(X)\rvert$ = 0.003

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 $n > 35$ D_{cal} = 0.1049

$D_{cal} < D_{table}$ จึงยอมรับ H_o

ตัวอย่างที่ 4 แสดงการทดสอบสมมุติฐาน เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึก ในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ของเขตธนบุรี

ค่ากึ่งกลางของเวลาที่ใช้ในการเดินทาง (นาที)	ความถี่ที่สังเกต	ความถี่สะสมที่สังเกต	$F_o(X)$ $= \int_0^b e^{-0.914} dx$	$S_N(X)$ $= \frac{O_i}{N}$	$\lvert F_o(X)-S_N(X) \rvert$
5.5	59	59	0.5117	0.5728	0.0611
15.5	37	96	0.7800	0.9320	0.1520
25.5	7	103	1.0000	1.0000	-

H_o : เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึก ในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ๊กโพ-เนนเชียล

H_1 : เวลาที่ใช้ในการเดินทางไปถึงจุดเกิดเพลิงไหม้บริเวณที่เป็นอาคารตึก ในช่วงเวลา 10.01-24.00 น. ไม่มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ๊กโพเนนเชียล

$$D_{cal} = \text{Maximum} \left| F_o(X) - S_N(X) \right| = 0.1520$$

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 $n > 35$ $D_{cal} = 0.1606$

$D_{cal} < D_{table}$ จึงยอมรับ H_o

2.3 <u>เทคนิคการจำลองแบบ</u> (Simulation Technique)

การจำลองแบบเป็นเทคนิคการทดลองพื้นฐานที่มีความรวดเร็วและเสียค่าใช้จ่ายถูกกว่าในการทดลองจริง ซึ่งอาจทำได้ยากหรือไม่สามารถทำได้เพราะมีปัจจัยหลายสิ่งมากมาย

การจำลองแบบจะถูกนำมาใช้เมื่อเกิดเหตุการณ์ดังนี้

1) การแก้ปัญหาในทางปฏิบัติของการศึกษาทดลอง เช่น ศึกษาทางด้านอุตุนิยมวิทยา ด้านการจราจรของรถยนต์ เครื่องบิน ต้องใช้การคำนวณตามหลักคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากหรืออาจจะไม่สามารถแก้ปัญหาได้เลย เนื่องจากการพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ยังไม่สูงพอ

2) การเกิดปัญหาที่มีลักษณะไม่แน่นอนหรือปัญหาที่มีลักษณะเคลื่อนไหวแบบ Dynamic ระหว่างโอกาสการเกิดตามลำดับเหตุการณ์ย่อย หรือความสัมพันธ์ต่อกันที่ซับซ้อน (Complex interdependencies) ระหว่างตัวแปรในระบบ ซึ่งในแต่ละแบบของเหตุการณ์ที่กล่าวมานี้มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเองได้แล้วแต่สภาพการณ์ และเป็นการเสียค่าใช้จ่ายสูงมากอีกทั้งยังเสียเวลานานมากในการทำการทดลองจริง

3) การจำลองแบบจะสามารถกระทำขึ้นโดยเสียค่าใช้จ่ายที่ถูกกว่าและรวดเร็วกว่า พร้อมทั้งสามารถลดช่องว่างระหว่างการทดลองจริงกับในทางปฏิบัติ แม้ในบางครั้งปัญหานี้จะสามารถวิเคราะห์ได้โดยสูตรทางคณิตศาสตร์ แต่การจำลองแบบจะช่วยลดเวลาในการคำนวณอย่างมาก

เมื่อทราบถึงหลักการทั่วไปว่าการจำลองแบบเป็นเช่นไร เมื่อไร ควรจะทำการจำลองแบบขั้นต่อมาจะศึกษาว่าการจำลองแบบจะแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

1) เหตุการณีในระบบที่ศึกษามีการเปลี่ยนแปลงแบบต่อเนื่อง (Continuous System) เนื่องจากเหตุการณ์นั้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาที่เปลี่ยนไป (Vary continuously with time) เช่น การบินโจมตีของเครื่องบิน 2 เครื่อง หรือการศึกษาในด้านวิศวกรรม วิทยาศาสตร์ทางกายภาค

2) เหตุการณ์ในระบบที่ศึกษามีการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete System) เนื่องจากเหตุการณ์นั้นจะเปลี่ยนแปลงไปตามความต้องการที่มีค่าแบบ

ไม่ต่อเนื่อง (discrete number) ระบบที่ศึกษาในด้าน Operation Research เช่น การศึกษาระบบแถวคอย (Queueing system) จะเป็น Discrete System เนื่องจากผู้เข้ารับบริการและออกจากสถานีให้บริการมีค่าแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete)

2.4 ตัวเลขสุ่ม (Random number)

ในการจำลองแบบ (Simulation) มีความจำเป็นต้องทำการสุ่มค่าขึ้นมาเพื่อใช้ในการคำนวณตัวอย่างเช่น ทำการสุ่มค่าของตัวเลขเป็นค่าของผู้เข้ารับบริการในห้างสรรพสินค้า จำนวนรถยนต์ที่วิ่งบริเวณทางแยกที่มีสัญญานไฟจราจร (Traffic Signal) และอื่น ๆ เป็นต้น

การศึกษาวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับระบบแถวคอย (Queueing system) ของการให้บริการของสถานีตำรวจดับเพลิง ซึ่งเป็นระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete system) ที่มีอัตรารับแจ้งเพลิงไหม้และระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทางไปที่เกิดเพลิงไหม้เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variables) ที่แทนค่าตัวแปรสุ่มทั้ง 2 นี้ โดยใช้ค่าตัวเลขสุ่ม (Random numbers) ที่ถูกสุ่มขึ้นมาด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน(Equal Probability) และมีลักษณะการแจกแจงความถี่แบบ Uniform Distribution

การสร้างตัวเลขสุ่ม(Generation of random numbers) เพื่อใช้แก้ปัญหามีวิธีที่สำคัญ ๆ อยู่ 2 วิธีคือ

1) Monte Carlo method เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกพัฒนาโดย S. Vlam และ J. von Neurmann ที่ Los Alanmos Scientific Laboratory เพื่อใช้แก้ปัญหาที่มีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากและมีความเสี่ยงสูง รวมทั้งต้องใช้เวลานานมากเพื่อทำการทดลอง แต่เนื่องจาก Monte Carlo method จะเหมาะกับการแก้ปัญหาที่มีลักษณะแบบ deterministic system เท่านั้น เช่น การคำนวณหาค่า¶ การคำนวณหาค่าจากสูตรคณิตศาสตร์ ส่วนปัญหาในระบบแถวคอย (Queueing System) เป็น Discrete dynamic system แบบ stochastic systems เนื่องจากมีตัวแปรคือ จำนวนผู้มาเข้ารับบริการ (arrival customer) ระยะเวลาให้บริการ (service time) สามารถคำนวณตามลักษณะความน่าจะเป็น (Probability function) ของแต่ละตัวแปรได้

2) Pseudorandom number method วิธีการสร้างค่าตัวเลขสุ่ม number ในทางปฏิบัติโดยใช้เครื่องมือหา เช่น วงล้อรูเล็ต (Roulette wheel) ตัวเลขสุ่มที่ได้ไม่เหมาะสมเมื่อเทียบกับการสร้างโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วย เนื่องจาก

2.1 การที่จะผลิตตัวเลขสุ่มเป็นจำนวนมาก แล้วนำไปใส่ในเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อนำมาใช้ จะทำให้เป็นการยุ่งยากมากในการทดลองและใช้เวลานานมาก

2.2 ลำดับของตัวเลขเชิงสุ่มที่สุ่มขึ้นมาไม่สามารถผลิตซ้ำต่อมาโดยใช้เวลาไม่นานนัก เพื่อใช้ในการทดลองแบบซ้ำ ๆ โดยในแต่ละครั้งที่ทำการทดลองจะต้องแก้ไขโปรแกรมจำลองแบบ ทำให้มีผลต่อการวิเคราะห์รูปแบบ (Model) ของระบบการศึกษาได้

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น จะต้องหาวิธีที่สามารถผลิตตัวเลขเชิงสุ่มได้รวดเร็วและได้ค่าตามลำดับตามคุณสมบัติของการสุ่มตัวเลขเชิงสุ่มทุกประการ ทำให้เกิดตัวเลขเชิงสุ่มจำลอง (Pseudorandom numbers) ซึ่งถูกศึกษาโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในระยะ 30 ปีที่ผ่านมา วิธีการที่จะผลิตตัวเลขเชิงสุ่มจำลองที่นิยมที่สุดคือ วิธี Multiplicative Congruential Generater ซึ่งมีสูตรการสร้างตัวเลขเชิงสุ่มจำลอง (Pseudorandom numbers) ดังนี้

ให้ X_i = Pseudo-random number ตัวที่ i

X_{i+1} = Pseudo-random number ตัวที่ I+1

a = Constant multiplier

modulo m = ค่า mudulo ที่เกิดจากผลหาร $X_i.a$ ด้วย m แต่มีค่าไม่เกิน m คือเท่ากับ 0, 1, 2, ... m-1

X_o = initial value or seed

สูตรคือ $X_{i+1} = X_i.a(\text{modulo } m)$; i = 0, 1, ...

จากสูตรจะต้องมีค่า Parameter อยู่ 3 ค่า ที่จะต้องกำหนดให้มีเพื่อใช้สร้างตัวเลขเชิงสุ่มจำลองคือ X_o , a, modulo m มีหลักการเลือกค่าตัวแปรต่าง ๆ ดังนี้

1) การเลือกค่า m ค่า m จะต้องเป็นค่าเลขจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด (largest integer) ที่ต้องสามารถคำนวณได้จากเครื่องคอมพิวเตอร์ ในการศึกษาครั้งนี้ใช้

เครื่อง IBM 3031 System ที่มีค่าความยาว 1 WORD เท่ากับ 32 bits ดังนั้นค่า m หาได้ดังนี้

$$m = 2^{31}-1 = 2,147,483,647$$

2) ค่า X_o จะต้องมีความสัมพันธ์กับค่า m โดย X_o จะเป็นเลขจำนวนเต็มที่เป็นเลขคี่ หรือคือ Prime number โดยมีค่าไม่เกิน 9 หลัก

3) ค่า Constant multiplier a เป็นค่าเลขจำนวนเต็ม คำนวณได้ดังนี้

ในกรณีนี้เครื่องคอมพิวเตอร์ 1 WORD เท่ากับ 32 bits

ดังนั้น $a = 5^{13} = 1220703125$

จากหลักการของ Multiplicative Congruential Generater นำมาหาค่า Random Number ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 - 1 ได้ โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์คำนวณด้วยภาษาโฟแทรน 4 ดังนี้

```
  SUBROUTINE GEN 1 (IX, RN1, IY)
  IY  =  IX * 1220703125
  IF (IY) 3, 4, 4
3 IY  =  IY + 2147483647 + 1
4 RN1 =  IY
  RN1 =  RN1 * 0.4656613E-9
  IX  =  IY
  RETURN
  END
```

ค่า IX จะเป็นค่า Seed

IY จะเป็นค่า Integer ที่มีค่า 1 ถึง $2^{31}-1$

RN1 จะเป็นค่า Floating Point มีค่าระหว่าง 0-1

โดยจะนำค่า RN1 ไปแทนค่าเพื่อหา Interarrival time, Service time และนำค่า IY ไปแทนใน IX เพื่อใช้เป็น Seed ตัวต่อไป จึงทำให้สามารถ

หาค่า Random number ได้อย่างต่อเนื่องและมีลักษณะการแจกแจงแบบ Uniform distribution