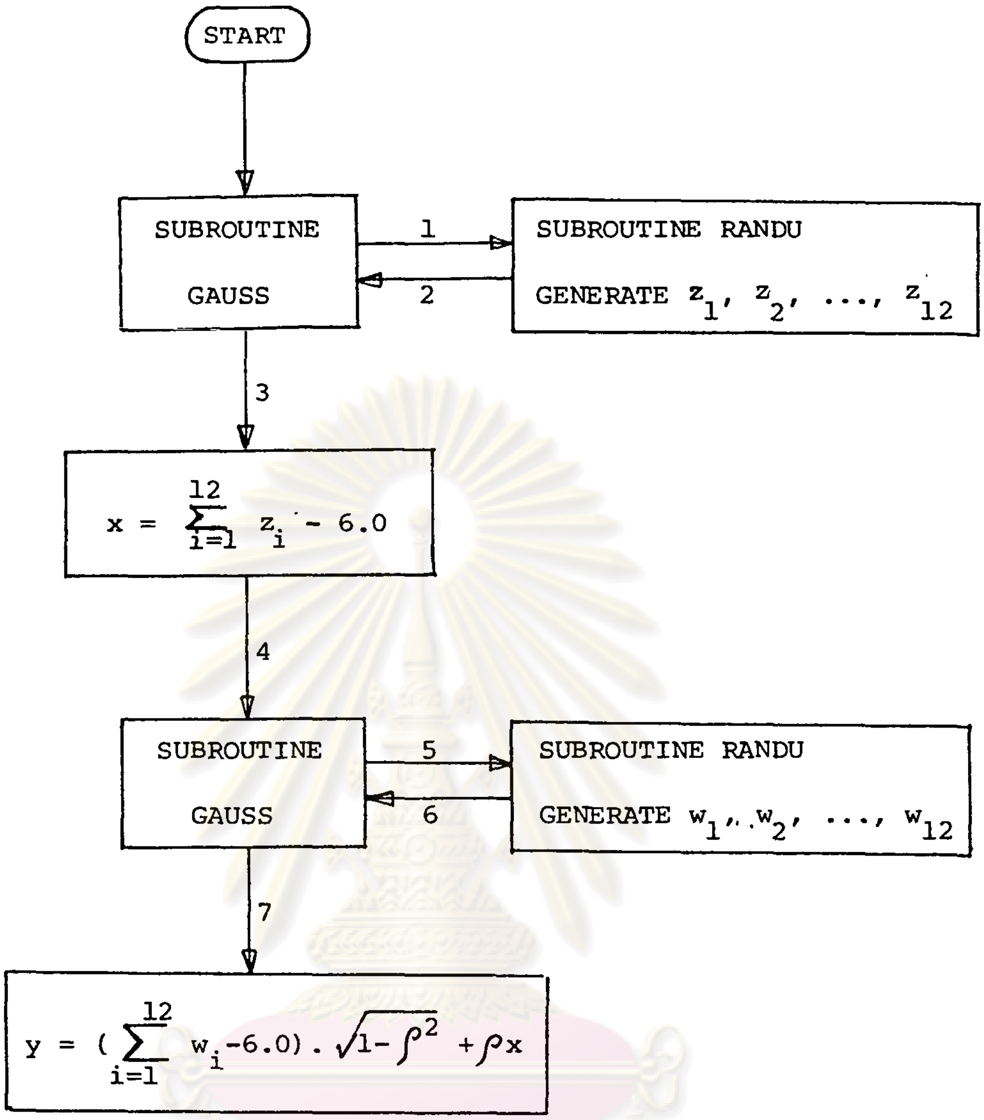
บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยนี้จำเป็นต้องใช้ทฤษฎีทางสถิติ เพื่อผลสรุปตามวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังนี้

2.1 การสร้างตารางข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรโดยวิธีการซิมูเลชั่น (Simulation) ซึ่งเริ่มต้นโดยการสร้างตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform distribution) ขึ้นมาก่อนโดยอาศัย SUBROUTINE RANDU จากนั้นจะนำมาสร้างตัวแปรปกติมาตรฐานโดยใช้ SUBROUTINE GAUSS เรียกค่าที่ได้ครั้งแรกว่า x จากนั้นจะสร้างตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอขึ้นมาอีกชุดหนึ่ง (ไม่ขึ้นกับตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอชุดก่อน) โดยใช้ SUBROUTINE RANDU จากนั้นนำค่าตัวเลขสุ่มมาสร้างตัวแปรปกติเรียกค่าที่ได้ว่า y โดยค่า y นี้จะมีลักษณะการแจกแจงที่ขึ้นอยู่กับค่า x ที่ได้จากครั้งแรก

การสร้างตัวแปรปกติมาตรฐาน 1 ตัว โดยใช้ SUBROUTINE GAUSS, SUBROUTINE นี้จะเรียกตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ 12 ตัว มาใช้ (ดูโปรแกรม 1.1 ในภาคผนวก ก) ผลลัพท์ที่ได้คือค่า (x,y) จะเป็นตัวแปรสุ่มปกติสองตัวแปร ดังแผนผังต่อไปนี้



แผนผังที่ 1 การสร้างตัวแปรสุ่มปกติสองตัวแปร

การสร้างตัวแปรปกติโดยใช้ SUBROUTINE GAUSS อาศัยทฤษฎีสถิติ คือ ทฤษฎีการโน้มสู่ค่ากลาง (Central limit theorem)

<u>ทฤษฎี[๑] 2.1.1</u> กำหนดให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ซึ่งเป็นอิสระต่อกันเป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน σ^2 การแจกแจงของค่าสถิติ

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (1)$$

จะประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน $\sigma^2/_n$

เนื่องจาก GAUSS ใช้ตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[0, 1]$ 12 ตัว (n=12) จะมีค่าเฉลี่ย ½ และค่าความแปรปรวน 1/144

$$\text{จะได้} \quad \bar{y} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_i \sim N\left(\tfrac{1}{2}, \frac{1}{144}\right) \qquad (2)$$

$$\therefore x = \frac{\bar{y} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1/144}}$$

$$= \sum_{i=1}^{12} y_i - 6.0 \qquad (3)$$

จะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบปกติมาตรฐานตามทฤษฎี 2.1.1

2.2 <u>การแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร</u> (The Bivariate normal distribution)

ถ้า (x,y) เป็นตัวแปรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

---

[๑] ดูพิสูจน์จาก Robert V. Hogg and Allen T. Craig "Introduction to Mathematical Statistics หน้า 182 - 183

เมื่อ $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ กำหนดค่าพารามิเตอร์ $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2, \rho$ คงที่ โดยที่ $-1 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \sigma_1,\ 0 \leq \sigma_2,\ -\infty < \mu_1 < \infty\ ,\ -\infty < \mu_2 < \infty$.

เราจะเรียก (x,y) ว่าเป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่มี

ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

และเมตริกความแปรปรวนร่วม $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

โดยที่ ρ คือค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X, Y

μ_1 คือค่าเฉลี่ยของตัวแปร X

μ_2 คือค่าเฉลี่ยของตัวแปร Y

σ_1^2 คือค่าความแปรปรวนของตัวแปร X

σ_2^2 คือค่าความแปรปรวนของตัวแปร Y

2.3 <u>การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข</u> (Conditional distribution)

<u>ทฤษฎี 2.3.1</u> กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม (X, Y) มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปร X เมื่อกำหนดค่า Y=y จะเป็นปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu_1 + (\rho_1\sigma_1/\sigma_2)(y - \mu_2)$ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma_1^2\ (1 - \rho^2)$

และการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปร Y เมื่อกำหนดค่า X = x จะเป็นปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu_2 + (\rho\sigma_2/\sigma_1)(x - \mu_1)$ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma_2^2\ (1 - \rho^2)$

ในการวิจัยเรื่องนี้จะศึกษาเฉพาะกรณี $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ และ ρ = COV (X, Y) โดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้เพื่อแสดงว่า เราสามารถขยายผลจากข้อสรุปเฉพาะกรณีนี้ไปยังการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรใด ๆ ได้เช่นเดียวกัน

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> ถ้า (X,Y) มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร ที่มีค่าเฉลี่ย μ_1, μ_2 ค่าความแปรปรวน σ_1^2 , σ_2^2 และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ เราจะสรุปได้ว่า $z_1 = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}$, $z_2 = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร ที่มีค่าเฉลี่ย μ_{z_1} , $\mu_{z_2} = 0$, $\sigma_{z_1}^2 = \sigma_{z_2}^2 = 1$ และ $\rho(z_1, z_2) = \rho$

เพราะฉะนั้นจะหาการแจกแจงของตัวแปร $Y|X = x$

จาก $\mu_{Y|X=x} = \mu_2 + (\rho\sigma_2/\sigma_1)(x - \mu_1)$

แทนค่า $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$

$$\mu_{Y|X=x} = \rho x$$

และ $\sigma_{Y|X=x} = \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$

แทนค่า $\sigma_2^2 = 1$

$$= 1 - \rho^2$$

$$\therefore Y \sim N(\rho x, (1 - \rho^2))$$

จากแผนผังการสร้างตัวแปรสุ่มปกติสองตัวแปร จะเห็นว่าเราสร้างตัวแปรปกติมาตรฐาน x และค่าตัวแปร y ซึ่ง y ที่ได้นี้แท้จริงแล้วคือค่าตัวแปร y ที่ขึ้นอยู่กับค่า x

จากสูตร

$$y = \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot w \qquad (*)$$

w คือค่าตัวแปรอิสระจากค่าตัวแปร x

จาก (*) จะหาค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของตัวแปร y

$$E(Y) = E\left[\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\,.\, w\right]$$

$$= \rho x + \sqrt{1-\rho^2}\, E(W)$$

(x เป็นค่าคงที่, $E(W) = 0$)

$$= \rho x$$

$$var(Y) = var\,(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\,.\, w)$$

$$= (1-\rho^2)\ var\ (W)$$

$$= (1-\rho^2)$$ เมื่อ $var\ (W) = 1$

จากทฤษฎีที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ นำมาสรุปได้ว่า (X,Y) ที่ได้เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร ที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และเมตริกความแปรปรวนร่วม $\sum_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

2.4 <u>การทดสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $(\rho) = 0$</u>

ในการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $(\rho) = 0$ ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

โดยที่ r คือค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากตัวอย่างระหว่างตัวแปร X,Y

n คือจำนวนคู่ของตัวอย่าง

t จะมีการแจกแจงแบบ Student's t ที่มี degree of freedom = $n-2$

ข้อสรุปเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวสถิติ t จะถูกต้องถ้า (X,Y) มาจากประชากรที่มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากประชากร $(\rho) = 0$ ซึ่งทำให้การแจกแจงของค่า r ประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติ

แต่ในกรณี $\rho \neq 0$ R.A. Fisher ได้ค้นพบการกระจายของค่า r ในปี ค.ศ. 1915[๑] ซึ่งการแจกแจงของค่า r ขึ้นอยู่กับค่า ρ และ n และจะมีความเบ้ โดยจะเบ้ซ้าย ถ้าค่าของ $\rho > 0$ และเบ้ขวาถ้าค่าของ $\rho < 0$ ทำให้ตัวสถิติสำหรับการทดสอบข้างต้นไม่เหมาะสำหรับการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \rho = \rho_0 \qquad (\rho_0 \neq 0)$$
$$H_1 : \rho \neq \rho_0$$

2.5 <u>การทดสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $(\rho) \neq 0$</u>

การทดสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $(\rho) \neq 0$ R.A. Fisher ได้แนะนำให้แปลงค่า r ที่ได้ โดยสูตร

$$z_F = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)$$

โดยต่อไปจะเรียกค่า z_F ว่าค่า Fisher's transformation และ Fisher สรุปว่า z_F มีการแจกแจงแบบปกติที่มี

ค่าเฉลี่ย $$\mu_{z_F} = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho}\right)$$

และค่าความแปรปรวน

$$\sigma^2_{z_F} = \frac{1}{n-3}$$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานนี้ คือ

$$z = \frac{z_F - \mu_{z_F}}{\sigma_{z_F}}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right) - \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho}\right)}{1/\sqrt{n-3}}$$

---

๑ สมจิต วัฒนาชยากูล " สถิติวิเคราะห์เบื้องต้น " กรุงเทพมหานคร สำนักพิมพ์ประกายพรึก, 2524 หน้า 127

Z จะมีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย = 0 ค่าความแปรปรวน = 1

ผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะการแจกแจงของค่า r และ Z_F ที่ได้จากการคำนวนจากข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่สร้างขึ้น โดยวิธีการซีมูเลชั่นในหัวข้อ 2.1 และจะทำการทดสอบลักษณะการแจกแจงจากประชากรที่มีค่า ρ = 0.1, 0.2 ..., 0.9และขนาดตัวอย่าง n = 5, 10, ..., 15 ตามลำดับ โดยวิธีของ Kolmogorov Goodness-of-Fit Test

2.6 <u>การทดสอบสารูปสนิทดีแบบโกโมโกรอฟ</u> (Kolmogorov Goodness-of-Fit Test)

การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (Goodness-of-Fit Test) นี้ ผู้ค้นพบคือนักคณิตศาสตร์สถิติชาวรัสเซีย ชื่อ Kolmogorov ในปี ค.ศ. 1933 การทดสอบนี้มีประสิทธิภาพสูงกว่าการทดสอบแบบไคสแควร์ แต่มีขีดจำกัดตรงที่ Kolmogorov Test นี้จะใช้เฉพาะข้อมูลระดับตั้งแต่ อันดับสเกล (Ordinal scale data) ส่วน Chi-square Test สามารถใช้ได้กับข้อมูลระดับตั้งแต่ นามสเกล (Nominal scale)

การทดสอบนี้มีหลักการเพื่อศึกษาว่าข้อมูลที่ทำการสุ่มมาจากตัวอย่างจะมีการแจกแจงความถี่เช่นเดียวกับของประชากรที่ระบุตามสมมติฐานหรือไม่ ในการทดสอบจะพิจารณาค่าความถี่สะสมของลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่เกิดภายใต้การแจกแจงของข้อมูลตามทฤษฎี (Theoretical distribution) เปรียบเทียบกับค่าความถี่สะสมของลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่สุ่มมาจากตัวอย่าง (Observed cumulative frequency distribution) ถ้าความแตกต่างสัมบูรณ์นี้มีมาก แสดงว่าเราไม่ยอมรับการแจกแจงตามที่ระบุไว้ในสมมติฐาน

กำหนดให้ $F_0(x)$ = ความถี่สะสมของการแจกแจงความถี่ตามทฤษฎี

$S_n(x)$ = ความถี่สะสมของการแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่สุ่มจากตัวอย่าง

$$S_n(x) = \frac{O_i}{n}$$

O_i คือจำนวนข้อมูลในกลุ่มตัวอย่างที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

n คือขนาดของตัวอย่าง

สมมติฐานเพื่อการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูลจากตัวอย่างที่ได้มีลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมเช่นเดียวกับ $F_0(x)$

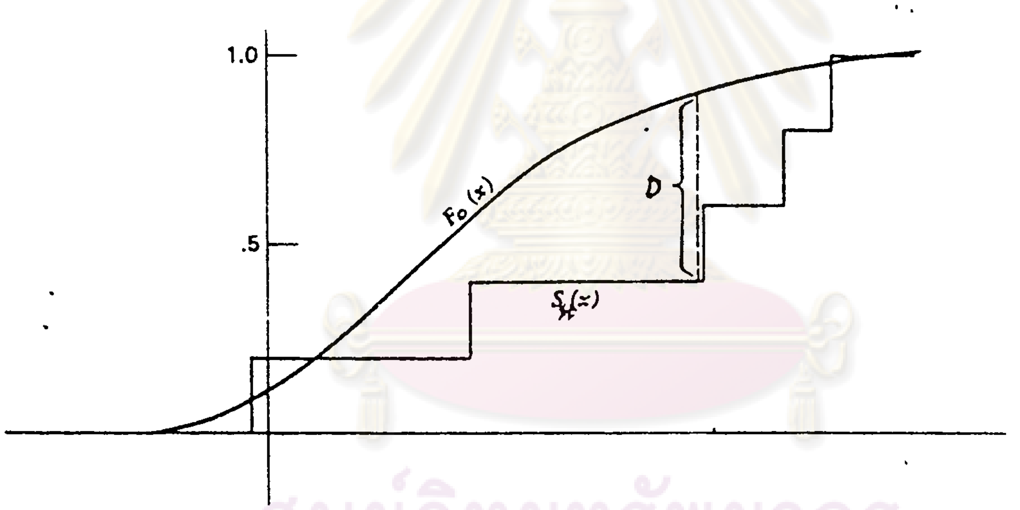
H_1 : ข้อมูลจากตัวอย่างที่ได้มีลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมแตกต่างจาก $F_0(x)$

เมื่อ $F_0(x)$ เป็นฟังก์ชั่นการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมที่ต้องการทดสอบ

ตัวสถิติเพื่อการทดสอบคือ

$$D_n = \sup_X \left| F_0(x) - S_n(x) \right|$$

นั่นคือจะหาค่าผลต่างสมบูรณ์ระหว่าง $F_0(x)$ กับ $S_n(x)$ ที่มากที่สุด



รูปที่ 2.6.1 กราฟของ $F_0(x)$, $S_n(x)$ และ D_n

จากนั้นจะเปรียบเทียบค่า D_n กับค่า D_n จากตาราง[๑] ซึ่งจะเรียกว่า D_n(table)

---

[๑] ดูตารางที่ 5 ในภาคผนวก ข

ถ้า $D_n < D_n$ (table) จะยอมรับสมมติฐาน H_0

ถ้า $D_n \geq D_n$ (table) จะไม่ยอมรับสมมติฐาน H_0

การทดสอบลักษณะการแจกแจงความถี่โดยวิธี The Kolmogorov Goodness-of-Fit Test ผู้วิจัยได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS คือ Kolmogorov - Smirnov One-Sample Test

คำสั่งที่เรียกใช้

$$\text{NPAR TEST} \quad \text{K - S}\left(\begin{matrix} \text{UNIFORM} \\ \text{NORMAL} \\ \text{POISSON} \end{matrix} \ [\text{Parameters}] \right) = \text{Varlist/}$$

ค่าพารามิเตอร์ (Parameters) จะใส่หรือไม่ใส่ก็ได้ ถ้าจะใส่ในกรณีการทดสอบลักษณะการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform distribution) ค่าพารามิเตอร์ คือค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด กรณีทดสอบการแจกแจงว่าเป็นแบบปกติ (Normal distribution) ค่าพารามิเตอร์คือค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน กรณีการทดสอบลักษณะการแจกแจงว่าเป็นแบบปัวซอง (Poisson distribution) ค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตตัวเดียว ส่วน Varlist คือตัวแปรที่ต้องการจะทดสอบลักษณะการแจกแจง

ผู้วิจัยได้ทำการทดสอบลักษณะการแจกแจงของค่า r และ z_F ที่คำนวณได้จากตัวอย่างสุ่มทุกค่าของ n และ ρ ว่าจะมีลักษณะการแจกแจงเป็นแบบปกติหรือไม่ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS (ดูรายละเอียดจากโปรแกรมที่ 4 ~~3~~ ในภาคผนวก ก) ซึ่งผลสรุปของการทดสอบจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 4

เราทราบกันดีว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากร (ρ) จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 กับ +1 แต่ในการทำวิทยานิพนธ์เรื่องนี้จะศึกษาเฉพาะกรณี $\rho > 0$ เท่านั้นส่วนกรณี $\rho < 0$ จะให้ผลสรุปในทำนองเดียวกัน ซึ่งทฤษฎีต่อไปนี้จะสนับสนุนคำกล่าวข้างต้นนี้

<u>ทฤษฎี 2.6.1</u> ถ้า (x, y) มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่มี

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\rho(x, y) = \rho_0$

เราจะสรุปได้ว่า $(x, -y)$ จะมีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่มี

$$\underset{\sim}{\mu}^* = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ -\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -\rho_0\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_0\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

และ $\rho(x, -y) = -\rho_0$

พิสูจน์

ให้ $f(x, y)$ เป็น joint p.d.f. ของ (x, y)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_0^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho_0^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_0\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{2}\right)^2\right\}\right]$$

ให้
$$U = X$$
$$V = -Y$$
$$X = U$$
$$Y = -V$$

J = จาโคเบียนทรานสฟอร์มเมชั่น (Jacobian's transformation)

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1$$

$$|J| = |-1| = 1$$

นั่นคือ $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))\ |J|$

$$= f(u, -v) .1$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-(-\rho_0)^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-(-\rho_0)^2)}\left\{\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 -2(-\rho_0)\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{v-(-\mu_2)}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{v-(-\mu_2)}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

สรุป $(x, -y)$ มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร ที่มี

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ -\mu_2\end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & -\rho_0\sigma_1\sigma_2\\ -\rho_0\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

#

<u>ทฤษฎี 2.6.2</u> ถ้านำค่า (x_1,y_1) , (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) มาทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \rho = \rho_0 \quad (\rho_0 \neq 0)$$
$$H_1 : \rho \neq \rho_0$$

และนำค่า $(x_1,-y_1)$, $(x_2,-y_2)$, ..., $(x_n,-y_n)$ มาทดสอบสมมติฐาน

$$H_0^* : \rho = -\rho_0 \qquad (\rho_0 \neq 0)$$
$$H_1^* : \rho \neq -\rho_0$$

จะมีผลสรุปสอดคล้องกัน ณ ระดับนัยสำคัญเดียวกัน คือ

ถ้ายอมรับสมมติฐาน H_0 จะยอมรับสมมติฐาน H_0^* ด้วย

ถ้าปฏิเสธสมมติฐาน H_0 จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0^* ด้วย

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) เป็นข้อมูลสำหรับการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 \; : \; \rho = \rho_0 \qquad (\rho_0 \neq 0)$

$H_1 \; : \; \rho \neq \rho_0$

ที่ระดับนัยสำคัญ α

และ $(x_1,-y_1)$, $(x_2,-y_2)$, ..., $(x_n,-y_n)$ เป็นข้อมูลสำหรับการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0^* \; : \; \rho = -\rho_0 \qquad (\rho_0 \neq 0)$

$H_1^* \; : \; \rho \neq \rho_0$

ที่ระดับนัยสำคัญ α เช่นเดียวกัน

กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) และ $(x_1,-y_1)$, $(x_2,-y_2)$, ..., $(x_n,-y_n)$ คือ r และ -r ตามลำดับ

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$Z = \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{1/\sqrt{n-3}}$$

ให้ z_α คือค่าวิกฤต ณ ระดับ α

นั่นคือ $(|z| \geqslant z) = \alpha$

$$|z| = \left|\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{1/\sqrt{n-3}}\right| = \left|-\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)}{1/\sqrt{n-3}}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}\left(-\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\ln\left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\right)}{1/\sqrt{n-3}}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right)}{1/\sqrt{n-3}}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+(-r)}{1-(-r)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1+(-\rho_0)}{1-(-\rho_0)}\right)}{1/\sqrt{n-3}}\right|$$

เพราะฉะนั้นการยอมรับหรือการปฏิเสธสมมติฐานของการทดสอบ H_0 และ H_0^* ให้ผลสอดคล้องกัน

#

บทต่อไปนี้จะกล่าวถึงเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยซึ่งมีประโยชน์อย่างมากต่อผลสรุปของงานวิจัย