



## บรรณานุกรม

### หนังสือ

- กมล เอกไทยเจริญ. คณิตศาสตร์แนวใหม่ ค.412. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์กราฟิการ์ต, 2521.
- คณะนิสิตปริญญาโทเทคโนโลยีทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร.  
เทคโนโลยีทางการศึกษา สื่อการสอน และนวัตกรรมทางการศึกษา. กรุงเทพฯ :  
โรงพิมพ์เจริญวิทย์การพิมพ์, 2518.
- จุง เต ฟาน. ตารางวิเคราะห์ข้อสอบ. จัดพิมพ์ในประเทศไทย ใ้รับอนุญาตจาก E.T.S.  
แห่งสหรัฐอเมริกา. พระนคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2514.
- ชวาล แพ้ตนกุล. เทคนิคการวัดผล. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2516.
- นิพนธ์ สุขปรึคี ; และลัคคา สุขปรึคี. เทคโนโลยีทางการศึกษา. พระนคร : โรงพิมพ์  
พิมพ์เนศ, 2517.
- บุญเกื้อ ควรวาเวช. นวัตกรรมทางการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์เจริญวิทย์การพิมพ์,  
2521.
- ประคอง กรรณสูตร. สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช,  
2515.
- ประชุม สุวัฑฒ์; และคนอื่นๆ. เสริมทักษะคณิตศาสตร์แนวใหม่ เล่ม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษา  
ตอนปลาย ค.412 และ ค.422. กรุงเทพมหานคร : คณะสถิติศาสตร์ประยุกต์  
สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์, 2518.
- ประสงค์ ปานเจริญ. แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.412 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย.  
กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

- บุพิน พิพิธกุล. การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. พระนคร : กรุงเทพมหานครพิมพ์, 2519.
- ละออ การุณยะวานิช; และคนอื่นๆ. วิธีสอนทั่วไป. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ - รุ่งเรืองธรรม, 2516.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. กรมวิชาการ. หนังสืออุเทศวิชาคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์แผนปัจจุบัน ประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย. พระนคร : กรมวิชาการ กระทรวง ศึกษาธิการ, 2517.
- สง เสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. สรุปปฏิบัติการ คณิตศาสตร์ใหม่ ค.412 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์พัฒนาพานิช, 2520.
- . แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.412 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพมหานคร : ครูสภา, 2520.
- ลาโรช บัวศรี. " คตินิยมและแนวทางการศึกษาของไทยในอนาคค. " ในหนังสือที่ระลึก งานเพลิงชมพู ครั้งที่ 3. [ม.ป.ท.] 2513.
- สุจริต เพียรชอบ; และอัจฉรา ประไพตระกูล. " วิธีสอนแบบอภิปราย. " ประมวล บทความเกี่ยวกับหลักสูตรและการสอน. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.
- สุชา จันทน์เอม. จิตวิทยาทั่วไป. พระนคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2517.
- สุพล. สุวรรณนพ; และคนอื่นๆ. คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเล่ม 2 ค.412. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์นิยมวิทยา, 2520.
- สุเทพ จันทร์สมศักดิ์; และคนอื่นๆ. แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.412. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2520.
- แสนต์ บกุงญาติ; และประเสริฐ บุญปลุก. Objective Test Math. 412 - 422. กรุงเทพมหานคร : อักษรบัณฑิต, 2520.

อารมณ ปุณฺโณทก. ฟิลิกส์แผนใหม่ 1 ว.441. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์กราฟิควารต์,  
2522.

### บทความ

ก้อ สวัสดิภาพดิษฐ์. " แนวความคิดใหม่ทางการศึกษา. " วิสาขศึกษา 6(มิถุนายน 2512):10.

ประชุม สุวัฑฒ. " คณิตศาสตร์แผนใหม่. " วารสารคณิตศาสตร์ 22(กันยายน - ตุลาคม  
2520): 5.

ไพโรจน์ เบาลใจ. "บทเรียนสำเร็จรูป. " วารสารศึกษาศาสตร์ 2(มิถุนายน - ธันวาคม  
2520 ): 48.

เฟื่องฟ้า เครือตราชู. " การสอนให้ฝึกหัดคิด. " วารสารประชาศึกษา 14 ( กันยายน  
2505 ) : 78.

บุพิน พิพิธกุล. " วิธีสอนโดยการค้นพบ. " วารสารคณิตศาสตร์ 22 ( พฤศจิกายน -  
ธันวาคม 2520 ) : 3.

\_\_\_\_\_ " วิธีสอนโดยการค้นพบ. " วารสารคณิตศาสตร์ 22 ( พฤศจิกายน -  
ธันวาคม 2520 ) : 3 - 4.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. " คณิตศาสตร์ในปัจจุบัน. " ศรีนครินทร์สาร 2 ( ตุลาคม 2518  
- มกราคม 2519 ) : 16.

### เอกสารอื่นๆ

ทัศนีย์ อองไพบูลย์. " การสืบค้นปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการ เรียนจากนัก เรียนชั้นมัธยมศึกษา  
ของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดพระนคร. " วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต  
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2513.

- เพ็ญจันทร์ เฟื่องฟู. " การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "เวกเตอร์" สำหรับระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. " วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.
- วาณี ศรีศิริพิศาล. " การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรม เรื่อง "จำนวนเชิงซ้อน" สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม. " วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2517.
- วิไล แก้วงามอรุณ. " การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "เส้นตรง" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. " วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.
- คณะนิสิตปริญญาโทการศึกษาคณิตศาสตร์. เอกสารรายงานวิชาสัมมนาคณิตศาสตร์. ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ภาคต้น ปีการศึกษา 2522, (อัครสำเนา).
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. " ความหมายของบทเรียนแบบโปรแกรม. " คำบรรยายวิชา Programmed Instruction. ภาควิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ภาคต้น ปีการศึกษา 2516. (อัครสำเนา).
- บุปผิ. พิพิธกุล. วิธีสอนแบบทดลอง. ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522. (อัครสำเนา).
- . วิธีสอนแบบสาธิต. ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522. (อัครสำเนา).
- . วิธีสอนแบบถาม - ตอบ. ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2523. (อัครสำเนา).
- ไสว นวลกรณี. " พีชคณิตเวกเตอร์. " เอกสารการอบรมครูคณิตศาสตร์. สหาคคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.



Books

- Barlow, John A. "Programmed Instruction in Perspective : Yesterday, Today and Tomorrow." Perspective in Programming. New York : Macmillan Co., 1963.
- Bell, Friderick H. Teaching and Learning Mathematics ( In Secondary Schools). Pittsburgh : Wm C. Brown Co., 1978.
- Best, John W. Research in Education. New Delhi : Prentice - Hall of India, 1963.
- Blaine, R. Worthen. " A Study of Discovery and Expository Presentation for Teaching. " In Current Research in Elementary School Mathematics, pp. 135 - 155. Edited by Robert B. Ashlock and Wayne L. Herman, Jr. London : Macmillan Co., 1970.
- Bloom, Benjamin S. ; Hastings, J. Thomas ; and Madaus, George F. Handbook on Formative and Summative Evaluatin of Student Learning. New York : McGraw - Hill Book Co., 1971.
- Callender Pateicia. " Programmed Learning." Its Development and Structure. London : Longman, 1969.
- Clark, Leonard H.; and Stars, Irving s. Secondary School Teaching Method. New York : Macmillan Co., 1976.
- Cooney, Thomas; Davis, Edward J. ; and Henderson, K.B. Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics. Boston : Houghton Mifflin Co., 1975.

- Ebel, Robert L. Measuring Educational Achievement. Englewood Cliffs: Prentice - hall, 1965.
- Edward, Allen L. Techniques of Attitude Scale Construction. New York: Appleton - Century Crafts, 1957.
- Garison; Kington; and Mc. Donald. " Arithmetic Learning. " Educational Psychology. Washington : American Psychological Association, 1964.
- Gerlach, Vernon S. ; and Ely, David P. Teaching and Media : A Systematic Approach. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice - Hall, 1971.
- Howson, A.G., ed. Developments in Mathematical Education. London : Cambridge University Press, 1973.
- Johnson, Donavan A.; and Rising, Gerald R. Guidelines for Teaching Mathematics. California : Wadsuorta Publishing Co., 1972.
- Krishnamurthy, V. "Styles in Programming." A Handbook of Programmed Learning Baroda. 2 (Gamdi - Anand, Gujarat State, India : Anand Press, [ n.d. ] .
- Krulik ; Stephen ; and Weise, Ingrid B. Teaching Secondary School Mathematics. Philadelphia : W.B. Saunders Co., 1975.
- Kulbir Singh Sidhu. The Teaching Mathematics. New Delhi : Sterling Publishers, 1975.
- Lardizabal, Amparo S., et al. Methods and Principles of Teaching. Quezen City : Alemar Preenix, 1970.

- Leonard, Joan M., and Others. General Methods of Effective Teaching.  
New York : Thomas Y Crowell Co., 1972.
- Lindquist, E.F. Educational Measurement. New York : The Grant  
Foundation, 1961.
- McIntosh, Jerry A. Perspective on Secondary Mathematics Education.  
Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice - Hall, 1971.
- Noll, Victor H. ; and Scannell, Dale P. Introduction to Educational  
Measurement. Boston : Houghton Mifflin Co., 1972.
- Remmer, H.H. ; and Gage, N.L. Education Measurement and Evaluation.  
New York : Harper and Bross, 1965.
- Walker, Helen M.; and Lev Joseph. Elementary Statistical Methods.  
New York : Holt Rinehart and Winston, 1969.
- Walton, John. Toward Better Teaching in Secondary Schools. Boston:  
Allyn and Bacon, 1966.
- Willoughby, Stephen S. Contemporary Teaching of Secondary Mathematics.  
U.S.A. : John Wiley & Sons, 1967.
- Wittich, Walter Arno; and Schuller, Charles Francis. Audiovisual  
Materials. New York : Harper & Row, 1968.
- Wood, Dorothy Adkins. Test Construction. Ohio : Charles E. Merrill  
Books, 1960.



ภ า ค ๑

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ภาคผนวก ก.

1. ตารางแสดง เนื้อหาวิธีสอนแบบผสม จำนวน 10 คาบ
2. บันทึกการสอนเปรียบเทียบวิธีสอนแบบผสมกับวิธีสอนแบบบอกให้รู้เรื่อง " เวคเตอร์ " . และบทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องการบวกลบ " เวคเตอร์ "
3. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและแบบทดสอบเรื่อง " เวคเตอร์ "
4. รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจแบบสอบความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนโดยวิธีสอนแบบผสม และแบบทดสอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## 1. ตารางแสดง เนื้อหา วิธีสอนแบบผสมจำนวน 10 คาบ

คาบที่	เนื้อหา	วิธีสอน
1	ปริมาณสเกลาร์, ปริมาณเวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์	การอภิปราย ( Discussion ) การทดลอง ( Laboratory )
2	การบวก และการลบเวกเตอร์	บทเรียนแบบโปรแกรม ( Programmed Lesson ) การอภิปราย
3	การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	การทดลอง, การอภิปราย การถาม - ตอบ ( Question - Answer )
4	การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	การแก้ปัญหา ( Problem Soving ) การถาม - ตอบ
5	การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท เรขาคณิต	การถาม - ตอบ, การแก้ปัญหา การมอบหมายงาน ( Taking up Assignment )
6	ต่อจากคาบที่ 5	การอภิปราย, การถาม - ตอบ ค้นพบ ( Discovery )

ลำดับที่	เนื้อหา	วิธีสอน
7.	เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก และการบวก ลบ เวกเตอร์ในระบบ แกนมุมฉาก	การทดลอง, แบบฝึก (Drill - Method)
8	การคูณ เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์, การหาขนาดของ เวกเตอร์, เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	การทดลอง, การอภิปราย การค้นพบ
9	การคูณ เวกเตอร์ด้วย เวกเตอร์	การแก้ปัญหา, การอภิปราย
10	การหามุมระหว่าง เวกเตอร์กับ เวกเตอร์ และ เวกเตอร์สเปซ	การสาธิต (Demonstration) การอภิปราย

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คาบที่ 1

ปริมาณสเกลาร์, ปริมาณเวกเตอร์ และนิเสธของ เวกเตอร์

### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของปริมาณสเกลาร์ และปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกปริมาณสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดปริมาณใด ๆ ให้
3. บอกปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดปริมาณใด ๆ ให้
4. เขียนสัญลักษณ์ แทนปริมาณสเกลาร์ และปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกนิยามของเวกเตอร์ เท่ากันได้อย่างถูกต้อง
6. บอกเวกเตอร์ที่เท่ากันได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใด ๆ ให้
7. เขียนสัญลักษณ์นิเสธของเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
8. หานิเสธของเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
9. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 90%
10. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้อย่างถูกต้อง 95%

### 2) รายละเอียดของ เนื้อหาวิชา

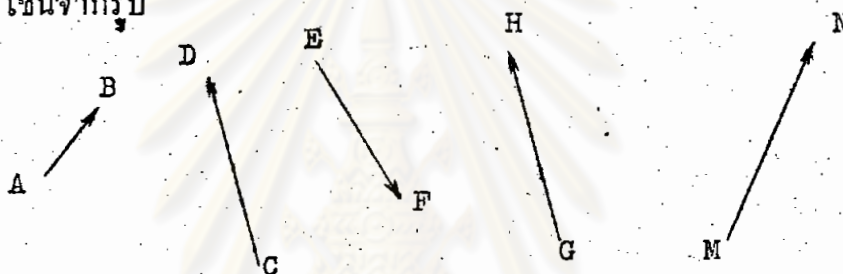
1. ปริมาณสเกลาร์ (Scalar Quantity) หมายถึง ปริมาณที่มีเฉพาะขนาด เช่น เวลา ระยะทาง ความสูง มวล และอุณหภูมิ ฯลฯ
2. ปริมาณเวกเตอร์ (Vector Quantity) หมายถึง ปริมาณที่มีทั้งขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ได้แก่ ความเร็ว ความเร่ง และแรง ฯลฯ
3. เวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจาก A ไป B เรียกว่า เวกเตอร์  $\overline{AB}$  และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\vec{AB}$  หรือ  $\vec{AB}$  เรียก A ว่า จุดเริ่มต้น (initial point) และ B ว่าจุดปลาย (terminal point)

ฉะนั้นเวกเตอร์ที่ทราบจุดเริ่มต้นและจุดปลาย เรียกว่า **เวกเตอร์จำกัด** ( Limited Vector ) และเรียกเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์จำกัดว่า **เวกเตอร์อิสระ** ( Free Vector ) เช่น



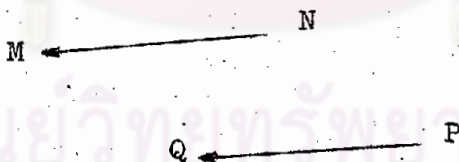
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\vec{AB}$  เป็นเวกเตอร์จำกัด หรืออาจใช้อักษรตัวเดียว มีเครื่องหมาย  $\rightarrow$  หรือ  $-$  กำกับ เช่น  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}$  หรือ  $\underline{a}$  เรียกว่า **เวกเตอร์  $a$**  แทน  $\vec{AB}$  ได้

4.  $\vec{u} = \vec{v}$  ก็ต่อเมื่อ **เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน** เช่นจากรูป



จะได้  $\vec{CD} = \vec{GH}$  และ  $\vec{AB} \neq \vec{EF}$  ฯลฯ

5. **เวกเตอร์สองเวกเตอร์ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน ก็ต่อเมื่อ มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม** เช่น



จากรูปแสดงว่า  $\vec{MN}$  เป็นนิเสธของ  $\vec{PQ}$   
และ  $\vec{PQ}$  "  $\vec{MN}$

นั่นคือ  $\vec{MN} = -\vec{PQ}$  หรือ  $\vec{PQ} = -\vec{MN}$

6. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษ ในห้องเรียนคือ

6.1 จงพิจารณาว่า **คอปเปอร์ซ็อก** เป็นปริมาณสเกลาร์ **ซ็อก** เป็นปริมาณเวกเตอร์

ก. น้ำหนัก

ข. ความหนาแน่น





กลุ่มทดลอง

และให้นักเรียนนำไปศึกษบนแผ่นป้ายสำลี  
หน้าชั้น แล้วให้นักเรียนเปรียบเทียบ  
ขนาดของ เวกเตอร์ และสรุปว่า —  
เวกเตอร์ใดเท่ากันและไม่เท่ากัน

5. ให้นักเรียนกลับหัวลูกศรของ เวกเตอร์  
ที่เท่ากัน และไม่เท่ากัน แล้วให้สรุป  
นิเสธของ เวกเตอร์

6. ครู เขียนโจทย์พิเศษบนกระดานดำและ  
ให้นักเรียนช่วยกันทำในชั่วโมง
7. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.1  
ข้อ 1 — 8 หน้า 63 จากหนังสือ สสวท.

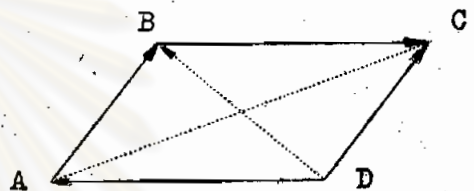
ขั้นสรุป

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปความหมายและนิยาม  
ของ

1. ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์
2. เวกเตอร์ที่เท่ากัน
3. นิเสธของ เวกเตอร์

กลุ่มควบคุม

5. ครูอธิบายเวกเตอร์ที่เท่ากันแต่มี  
ทิศทางตรงข้าม เป็นนิเสธของ  
เวกเตอร์ เช่น



จากรูป  $\vec{AB} = -\vec{CD}$

ครูให้นักเรียนหานิเสธของ  
 $\vec{BC}, \vec{CD}$  ครูและนักเรียนช่วยกัน —  
ยกตัวอย่างประกอบ

6. ครู เขียนโจทย์พิเศษบนกระดานดำ  
และให้นักเรียนช่วยกันทำในชั่วโมง
7. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

5) การจัดและประเมินผล

การจัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สิ่ง เกิดจากความสนใจ ของนักเรียน	ส่วนมากสนใจ, มีบาง กลุ่มคุยกันขณะ เพื่อนออก มาทำบนกระดาน	ส่วนมากสนใจ, มีบางคน คุยกัน และ เองงานอื่นขึ้น มาทำ
2. สิ่ง เกิดจากการตอบคำถาม	ส่วนมากชอบตอบ	ส่วนมากชอบตอบ
3. สิ่ง เกิดจากการร่วมกิจกรรม	สนุกสนานในการ ทดลอง	-
4. สิ่ง เกิดจากการซักถามครูและ เพื่อน	ซักถามเพื่อนมากกว่าซัก ถามครู	ส่วนมากนั่ง เงียบ
5. สิ่ง เกิดจากการทำโจทย์พิเศษ	กระตือรือร้นดี	กระตือรือร้นดี
6. ให้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 8 ข้อ	ทำถูก 8 ข้อ 22 คน ทำถูก 7 ข้อ 10 คน ทำถูก 6 ข้อ 3 คน	ทำถูก 8 ข้อ 18 คน ทำถูก 7 ข้อ 12 คน ทำถูก 6 ข้อ 3 คน ทำถูก 5 ข้อ 2 คน

## ตอนที่ 2

### การบวกและการลบเวกเตอร์

#### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

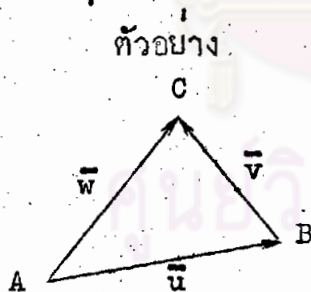
เมื่อเรียนจบความนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บวกเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกนิยามของเวกเตอร์ศูนย์ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปคุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
4. ลบเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
5. ทำโจทย์พิเศษได้น่างถูกต้อง 85 %
6. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้อย่างถูกต้อง 90 %

#### 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

##### 1. การบวกเวกเตอร์ (Addition of Vectors)

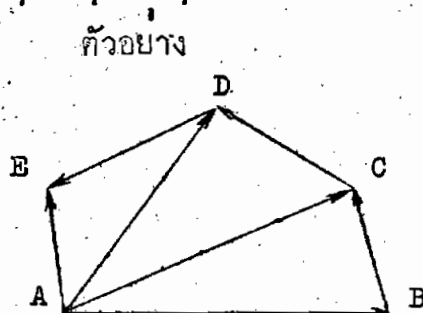
ผลบวกของเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องกันจะเท่ากับเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ตัวแรก และมีจุดปลายที่จุดปลายของเวกเตอร์ตัวสุดท้าย



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\text{หรือ } \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

##### 2. เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{0}$



จากรูป

$$\vec{AB} + \vec{BC} + (-\vec{CA}) = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + (-\vec{DA}) = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + (-\vec{EA}) = \vec{0}$$

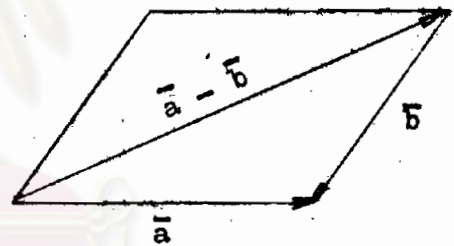
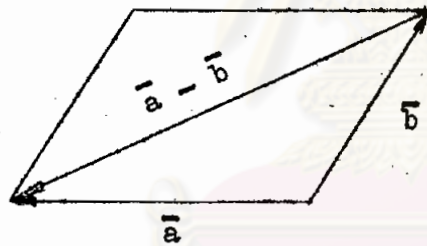
### 3. คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์ ( Properties of Vector Addition )

ให้  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  และ  $\vec{w}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆในระนาบ

1.  $\vec{u} + \vec{v}$  เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (คุณสมบัติปิด)
2.  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (คุณสมบัติการจับหมู่)
3. มี  $\vec{0}$  ที่  $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (เอกลักษณ์การบวก)
4. ทุกๆ  $\vec{u}$  มี  $-\vec{u}$  โดยที่  $-\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$  (อินเวอร์สการบวก)
5.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (คุณสมบัติการสลับที่)
6. ถ้า  $\vec{u} = \vec{v}$  แล้ว  $\vec{w} + \vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$  (คุณสมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน)

### 4. การลบเวกเตอร์ ( Substraction of Vectors )

ได้แก่การบวกด้วยนิเสธของเวกเตอร์ เช่น  $\vec{a}, \vec{b}$  เป็นเวกเตอร์  
ใดๆ  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



### 5. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในห้องเรียนคือ

5.1 ผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้ มีค่าเท่ากับเท่าไร (วาดรูปประกอบด้วย)

ก.  $\vec{AF} + \vec{FO} = \dots\dots\dots$

ข.  $\vec{BA} + \vec{BC} = \dots\dots\dots$

ค.  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \dots\dots\dots$

ง.  $\vec{AO} + \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA} = \dots\dots\dots$

จ.  $\vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \dots\dots\dots$

5.2 ผลลบของเวกเตอร์ต่อไปนี้ มีค่าเท่ากับเท่าไร (วาดรูปประกอบด้วย)

ก.  $\vec{EO} - \vec{ED} = \dots\dots\dots$

ข.  $\vec{OC} - \vec{OD} = \dots\dots\dots$

ค.  $\vec{OE} - \vec{FE} = \dots\dots\dots$



6. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.3 ข้อ 1 - 4 หน้า 69 จากหนังสือ สสวท.

3) วิธีสอน และกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

ขั้นนำ

1. ครูและนักเรียนสนทนาเกี่ยวกับ - ปัญหาต่างๆที่เ้าทำแบบฝึกหัด 3.1
2. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับวิธีเรียนโดยให้นักเรียนศึกษาค้นคว้า - ตนเอง ครูแสดงตัวอย่างบทเรียนแบบโปรแกรม และเล่าถึงวิธีที่นำไปใช้

ขั้นสอน

1. ครูแจกบทเรียนแบบโปรแกรม - เรื่องการบวกและการลบเวกเตอร์ ให้นักเรียนคนละ 1 ชุด ให้เวลานักเรียนศึกษาค้นคว้าตนเอง 40 นาที
2. ครูกับนักเรียนร่วมกันอภิปรายเรื่องต่างๆที่เ้าศึกษาด้วยตนเอง
3. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในชั้นเรียน เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องที่แต่ละคนศึกษาจากบทเรียนแบบโปรแกรม
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 1 - 4 หน้า 69 จากหนังสือ สสวท.

(คู่มือเรียนแบบโปรแกรมหน้า 130)

กลุ่มควบคุม

ขั้นนำ

1. เหมือนกลุ่มทดลอง
2. ไม่มี

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการนำเวกเตอร์ตั้งแต่สองเวกเตอร์มาบวกและลบเวกเตอร์ โดยการยกตัวอย่างประกอบให้ - นักเรียนดูหลายๆตัวอย่าง
2. ครูอธิบายเวกเตอร์ศูนย์ ยกตัวอย่าง ให้นักเรียนดู 2 ตัวอย่าง
3. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในชั้นเรียน
4. เหมือนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปนิยามต่อไปนี้

1. นิยามการบวกเวกเตอร์
2. นิยามการลบเวกเตอร์
3. นิยามเวกเตอร์ศูนย์

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

4) การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตความสนใจของนักเรียน	ตั้งใจอ่านบทเรียนแบบ - โปรแกรมดีมาก	ส่วนมากสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ส่วนมากตอบได้, บางคน ที่อ่านบทเรียนแบบ - โปรแกรมไม่ทันจะตอบ ไม่ได้	นิ่งเฉยๆ, มีบางกลุ่ม ที่ตอบ
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	มีบางคนไม่สนใจในขณะที่ เพื่อนออกไปทำบนกระดาน	มีหลายคนไม่ให้ความ - ร่วมมือในการทำกิจกรรม
4. สังเกตจากการซักถามครูและ เพื่อน	ส่วนมากซักถามครู	การซักถามมีน้อยมาก
5. สังเกตจากการทำโจทย์พิเศษ	ตั้งใจทำดี ส่วนมากทำถูก	ตั้งใจทำดี แต่มีบางคน เองงานอื่นมานั่งทำ
6. ให้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 4 ข้อ	ทำถูก 4 ข้อ 28 คน ทำถูก 3 ข้อ 5 คน ทำถูก 2 ข้อ 2 คน	ทำถูก 4 ข้อ 25 คน ทำถูก 3 ข้อ 8 คน ทำถูก 2 ข้อ 1 คน ทำถูก 1 ข้อ 1 คน

### คาบที่ 3

#### การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

##### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. คูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง
2. สรุปรูปการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง
3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ 90 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้ 85 %

##### 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

###### 1. นิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Multiplication of a vector by a scalar)

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริง และ  $\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ ผลคูณคือ  $a\vec{u}$  แบ่งได้ 3 กรณีคือ

1. ถ้า  $a = 0$ ,  $a\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ศูนย์
2. ถ้า  $a > 0$ ,  $a\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ  $\vec{u}$  และมีขนาดเท่ากับ  $|a||u|$
3. ถ้า  $a < 0$ ,  $a\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ  $\vec{u}$  มีขนาดเท่ากับ  $|a||u|$

###### 2. คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆในระนาบ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

1.  $a\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (คุณสมบัติปิด)
2.  $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$  (คุณสมบัติการจับหมู่)
3.  $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$   
 $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$  (คุณสมบัติการกระจาย)

4. มีสเกลาร์ 1 โดยที่  $1(\vec{u}) = \vec{u}$  (เอกลักษณ์การคูณ)

5. ถ้า  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ต่างก็ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์

$\vec{u}$  ขนานกับ  $\vec{v}$  ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง  $a$  ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้  $\vec{u} = a\vec{v}$

5.1 ถ้า  $a > 0$  แล้ว  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  จะมีทิศทางเดียวกัน

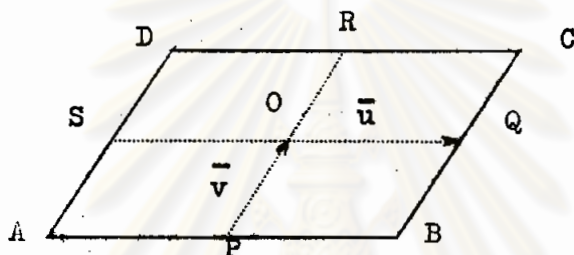
5.2 ถ้า  $a < 0$  แล้ว  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  จะมีทิศทางตรงข้ามกัน

6. สำหรับ  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่ต่างก็ไม่เท่ากับ  $\vec{0}$  และ  $\vec{u}$  ไม่ขนานกับ  $\vec{v}$

ถ้า  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$  แล้วจะได้  $a = 0$  และ  $b = 0$

3. ตัวอย่างที่ 1 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูขนาน P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB, BC, CD และ DA, PR ตัดกับ SQ ที่จุด O ถ้า  $\vec{OQ}$  แทนด้วย  $\vec{u}$  และ  $\vec{PO}$  แทนด้วย  $\vec{v}$  จงหาเวกเตอร์  $\vec{DB}, \vec{AC}, \vec{AR}, \vec{AQ}, \vec{CS}, \vec{CP}$  ในรูปของ  $a\vec{u} + b\vec{v}$  เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

วิธีทำ



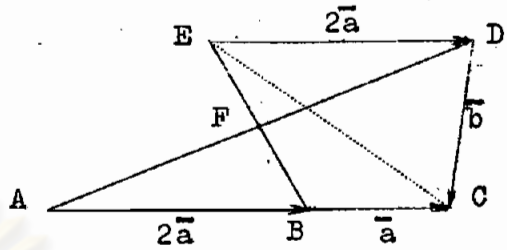
1.  $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}$  (การลบเวกเตอร์)  
 $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{SQ} = 2\vec{SO} = 2\vec{OQ} = 2\vec{u}$   
 $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{PB} = 2\vec{OR} = 2\vec{PO} = 2\vec{v}$   
 $\therefore \vec{DB} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$
2.  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$  (การบวกเวกเตอร์)  
 $= 2\vec{u} + 2\vec{v}$
3.  $\vec{AR} = \vec{AD} + \vec{DR}$  (การบวกเวกเตอร์)  
 $= 2\vec{v} + \vec{u}$
4.  $\vec{AQ} = \vec{AS} + \vec{SQ}$  (การบวกเวกเตอร์)  
 $= \vec{v} + 2\vec{u}$
5.  $\vec{CS} = -\vec{SC}$  (นิเสธของเวกเตอร์)  
 $= -(\vec{SD} + \vec{DC})$   
 $= -(\vec{v} + 2\vec{u})$
6.  $\vec{CP} = -\vec{PC}$  (นิเสธของเวกเตอร์)  
 $= -(\vec{PR} + \vec{RC})$   
 $= -(2\vec{v} + \vec{u})$

4. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดในหนังสือเรียน 1 ข้อ คือแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 3 หน้า 71 จากหนังสือ สสวท.

โจทย์ จากรูป F เป็นจุดกึ่งกลางของ EB

$$\vec{BC} = \vec{a}, \quad \vec{AB} = \vec{ED} = 2\vec{a}$$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในเทอมของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$



- (1)  $\vec{EC}$    (2)  $\vec{EB}$    (3)  $\vec{EF}$    (4)  $\vec{FD}$    (5)  $\vec{AF}$

5. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษเป็นการบ้าน 2 ข้อ คือ

5.1 ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมก้านขนาน และ O เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมทั้งสองตัดกัน จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป  $a\vec{OA} + b\vec{OB}$  เมื่อ a, b เป็นสเกลาร์

- (1)  $\vec{AB}$    (2)  $\vec{BC}$    (3)  $\vec{OC}$    (4)  $\vec{OD}$   
 (5)  $\vec{AC}$    (6)  $\vec{BD}$    (7)  $\vec{DA}$    (8)  $\vec{CD}$

5.2 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง  $\vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}$  ต่อ AB ออกไปถึง D ทำให้  $\vec{AD} = 4\vec{AB}$  และต่อ AC ออกไปถึง E ทำให้  $\vec{CE} = 2\vec{AC}$  จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในเทอมของ  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$

- (1)  $\vec{AB}$    (2)  $\vec{AD}$    (3)  $\vec{DE}$    (4)  $\vec{BE}$    (5)  $\frac{1}{2}\vec{CF}$    (6)  $\frac{3}{4}\vec{AB}$

6. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 3 ข้อ คือแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1, 2, 4 หน้า 71 - 72 จากหนังสือ สสวท.

3) วิธีสอน และกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<p>ขั้นนำ</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>สนทนากับนักเรียนถึงข้อบกพร่องต่างๆ ที่พบในการทำแบบฝึกหัดที่ 3.3</li> <li>พบทวนการบวกและการลบเวกเตอร์ เพื่อโยงไปใช้กับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์</li> </ol>	<p>ขั้นนำ</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>เหมือนกลุ่มทดลอง</li> <li>เหมือนกลุ่มทดลอง</li> </ol>



ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนนำเวกเตอร์ไปติดบนกระดานค่าประมาณ 6 - 7 เวกเตอร์ แล้วครูให้นักเรียนทดลองเลื่อนเวกเตอร์ดังกล่าวอยู่ในลักษณะดังรูป



ให้นักเรียนเปรียบเทียบเวกเตอร์ทั้งขนาดและทิศทางหลายๆครั้ง

2. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายผลจากการทดลอง เพื่อสรุปคุณสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
3. ให้ตัวอย่างที่ 1 และทำแบบฝึกหัดข้อ 3 บนกระดานค่า โดยใช้วิธีถามตอบ
4. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษเป็นการบ้าน 2 ข้อ และโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 1, 2, 4 หน้า 71 - 72 จากหนังสือ สสวท.

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปนิยามและคุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ยกตัวอย่างให้นักเรียนเห็นจริง

2. ครูอธิบายคุณสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 และทำโจทย์ข้อ 3 ในห้องเรียน

4. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

## 4) การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สิ่ง เกิดจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจ	ส่วนมากสนใจ
2. สิ่ง เกิดจากการตอบคำถาม	ไม่ชอบตอบ นอกจากครูเรียกให้ตอบเท่านั้น	ชอบตอบพร้อมกัน
3. สิ่ง เกิดจากการร่วมกิจกรรม	ส่วนมากให้ความร่วมมือดี	-
4. สิ่ง เกิดจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามครู	ส่วนมากซักถามเพื่อน
5. สิ่ง เกิดจากการทำใจพิเศษ 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ 30 คน	ทำถูก 2 ข้อ 25 คน
	ทำถูก 1 ข้อ 5 คน	ทำถูก 1 ข้อ 7 คน
		ไม่ทำ 3 คน
6. ให้ทำแบบฝึกหัด เป็นการบ้าน 3 ข้อ	ทำถูก 3 ข้อ 26 คน	ทำถูก 3 ข้อ 28 คน
	ทำถูก 2 ข้อ 5 คน	ทำถูก 2 ข้อ 3 คน
	ทำถูก 1 ข้อ 4 คน	ทำถูก 1 ข้อ 4 คน

ศูนย์วิทยพัชการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คาบที่ 4

### การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

#### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. ตอบคำถามเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง
2. แก้ปัญหาโจทย์ได้หลายแบบอย่างถูกต้อง
3. ทำโจทย์ท้ายชั่วโมงได้ 75 %
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้ 90 %

#### 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา ( ต่อจากคาบที่ 3 )

##### 1. ตัวอย่างที่ 2

โจทย์ จากสมการที่กำหนดให้ เวกเตอร์ในสมการนั้น มีชื่อสรุปอย่างไร

$$(1) 4\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$$

$$(2) 5\vec{a} - \vec{c} = 2\vec{c} + \vec{a}$$

$$(3) 3\vec{m} - 2\vec{n} = 2\vec{m} + \alpha\vec{n} \quad (\vec{m} \text{ และ } \vec{n} \neq \vec{0})$$

วิธีทำ

$$(1) 4\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{u} = -2\vec{v}$$

∴  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  ชนนานกัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

$$(2) 5\vec{a} - \vec{c} = 2\vec{c} + \vec{a}$$

$$4\vec{a} = 3\vec{c}$$

∴  $\vec{a}$  กับ  $\vec{c}$  ต่างหากกับ  $\vec{0}$  หรือ  $\vec{a}$  กับ  $\vec{c}$  มีทิศทางเดียวกัน

$$(3) 3\vec{m} + 2\vec{n} = 2\vec{m} + \alpha\vec{n} \quad (\vec{m} \text{ และ } \vec{n} \neq \vec{0})$$

$$\vec{m} = (\alpha - 2)\vec{n}$$

∴  $\vec{m}$  และ  $\vec{n}$  ชนนานกัน

ถ้า  $\alpha < 2$  จะมีทิศทางตรงข้ามกัน

ถ้า  $\alpha > 2$  จะมีทิศทางเดียวกัน

2. ตัวอย่างที่ 3 ถ้า  $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v}$  โดยที่  $\vec{u}, \vec{v}$  เป็น  
เวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จงแสดงว่า  $a = c$  และ  $b = d$ .

พิสูจน์  $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v}$  (โจทย์กำหนดให้)

$$\therefore (a - c)\vec{u} + (b - d)\vec{v} = \vec{0}$$

แต่  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  ไม่ขนานกัน

$$\therefore a - c = 0 \text{ และ } b - d = 0$$

$$\therefore a = c \text{ และ } b = d \quad \text{Q.E.D.}$$

3. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในท้องเรียน 2 ข้อ

3.1 จงแสดงโดยใช้รูปว่า  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$  เมื่อ  $a$  เป็น  
สเกลาร์

- 3.2 ถ้า  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน และ

$$\vec{w} = (a + 4b)\vec{u} + (2a + b + 1)\vec{v}$$

$$\vec{s} = (b - 2a + 2)\vec{u} + (2a - 3b - 1)\vec{v}$$

จงหา  $a$  และ  $b$  ที่ทำให้  $3\vec{w} = 2\vec{s}$

4. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 2 ข้อ คือแบบฝึกหัดที่ 3.4 ข้อ 5, 6  
หน้า 73 จากหนังสือ สสวท.

### 3) วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<u>ชั้นนำ</u>	<u>ชั้นนำ</u>
1. สนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับปัญหาบางส่วน ของโจทย์พิเศษ และโจทย์แบบฝึกหัดจาก หนังสือ สสวท.	1. เหมือนกลุ่มทดลอง
2. ทบทวนความรู้เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และคุณสมบัติต่างๆ	2. เหมือนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง

ชั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 2 บน กระดานดำ แล้วให้นักเรียนช่วยกัน แก้ปัญหาโดยการถาม - ตอบ
2. ครูให้ตัวอย่างที่ 3 บนกระดานดำ ให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น และออกมาช่วยกันทำ
3. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษเป็นการบ้าน 2 ข้อ และโจทย์แบบฝึกหัด ที่ 3.4 ข้อ 5, 6 หน้า 73 จาก หนังสือ สสวท.

ชั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปนิยาม และคุณสมบัติ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

กลุ่มควบคุม

ชั้นสอน

1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2 บนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนจดให้เรียบร้อย
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 3 บนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนจดให้เรียบร้อย
3. เหมือนกลุ่มทดลอง

ชั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

4) การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนใหญ่ตั้งใจเรียนดี	มีหลายคนไม่ฟังครู เวลาอธิบาย ชอบคุยกัน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	กระตือรือร้นที่จะตอบ	ครูต้องเรียกจึงจะตอบ
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	หลายคนไม่ยอมร่วมในแก้ปัญหา กับเพื่อน	-
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ซักถามครูมากกว่าซักถามเพื่อน	นักเรียนที่เรียนเก่งเท่านั้นที่ซักถามครู



การ วิชาผล	การประเมินผล			
	กลุ่มทดลอง		กลุ่มควบคุม	
5. สิ่ง เกิดจากการทำใจทบพิเศษ 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ	25คน	ทำถูก 2 ข้อ	23 คน
	ทำถูก 1 ข้อ	5คน	ทำถูก 1 ข้อ	7 คน
6. ใ้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ	28คน	ทำถูก 2 ข้อ	25 คน
	ทำถูก 1 ข้อ	5คน	ทำถูก 1 ข้อ	7 คน
	ผิดหมด	2คน	ผิดหมด	3 คน

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต

1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต โดยใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. ตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง
3. แก้ปัญหาโจทย์ให้หลายแบบได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดที่มอบหมายให้ได้อย่างถูกต้อง 80 %

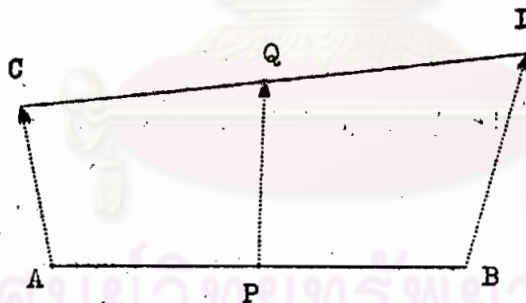
2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต

1. ตัวอย่างที่ 1

โจทย์ ถ้า P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ CD ตามลำดับ  
จงแสดงให้เห็นว่า  $\vec{PQ} = \frac{1}{2} (\vec{AC} + \vec{BD})$

วิธีทำ



กำหนดให้ จุด P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ CD ตามลำดับ

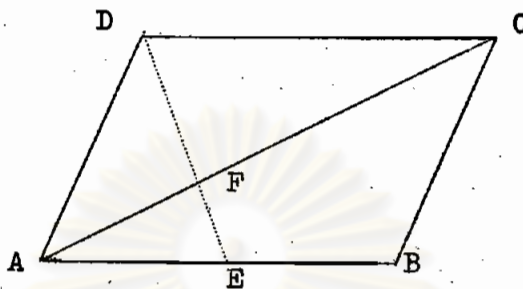
จะต้องพิสูจน์ว่า  $\vec{PQ} = \frac{1}{2} (\vec{AC} + \vec{BD})$

พิสูจน์

1.  $\vec{PB} + \vec{BD} + \vec{DQ} = \vec{PQ}$  (การบวกเวกเตอร์)
2.  $\vec{PA} + \vec{AC} + \vec{CQ} = \vec{PQ}$  (การบวกเวกเตอร์)
3.  $(\vec{PB} + \vec{PA}) + (\vec{BD} + \vec{AC}) + (\vec{DQ} + \vec{CQ}) = 2\vec{PQ}$  (จากข้อ 1 และ 2)
4.  $\vec{0} + (\vec{AC} + \vec{BD}) + \vec{0} = 2\vec{PQ}$  (จากข้อ 3, เวกเตอร์ศูนย์)
5.  $\vec{PQ} = \frac{1}{2} (\vec{AC} + \vec{BD})$  (จากข้อ 4)

Q.E.D

2. ตัวอย่างที่ 2 โจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.5 ข้อ 8 หน้า 75 จากหนังสือ สสวท.  
 โจทย์ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ต่อ  
 DE ตัด AC ที่จุด F จงแสดงว่า  $|\vec{AF}| = \frac{1}{3} |\vec{AC}|$



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู E เป็นจุดกึ่งกลางของ  
 AB ต่อ DE ตัด AC ที่จุด F

จะต้องแสดงว่า  $|\vec{AF}| = \frac{1}{3} |\vec{AC}|$

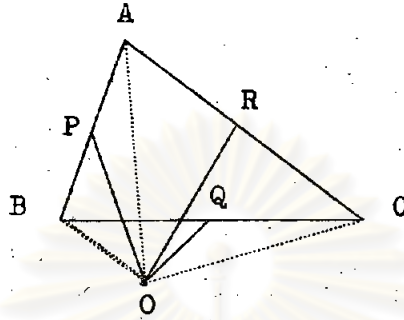
พิสูจน์

1. ให้  $\vec{AC} = m\vec{AF}$  และ  $\vec{DE} = n\vec{FE}$  ( $m, n$  เป็นสเกลาร์)
2.  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$  (การบวกเวกเตอร์)
3.  $2\vec{AE} = m\vec{AF} + \vec{DA}$  ( $\vec{CB} = \vec{DA}$ )
4.  $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$  (การบวกเวกเตอร์)
5.  $3\vec{AE} = m\vec{AF} + \vec{DE}$  (ข้อ 3 + ข้อ 4,  $\vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0}$ )
6.  $3\vec{AE} = m\vec{AF} + n\vec{FE}$  ( $\vec{DE} = n\vec{FE}$ )
7.  $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE}$  (การบวกเวกเตอร์)
8.  $3\vec{AE} = 3\vec{AF} + 3\vec{FE}$  (จากข้อ 7 คูณด้วย 3)
9.  $\therefore m\vec{AF} + n\vec{FE} = 3\vec{AF} + 3\vec{FE}$  (ข้อ 6 = ข้อ 8)
10.  $\therefore (m-3)\vec{AF} + (n-3)\vec{FE} = \vec{0}$  (จากข้อ 9)
11. ดังนั้น  $m-3 = 0$  และ  $n-3 = 0$  ( $\vec{AF} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{FE} \neq \vec{0}$ )
12. จะได้ว่า  $m = 3$  และ  $n = 3$  (จากข้อ 11)
13. ดังนั้น  $\vec{AC} = 3\vec{AF}$  (จากข้อ 1)
14. นั่นคือ  $|\vec{AF}| = \frac{1}{3} |\vec{AC}|$  (จากข้อ 13)

Q.E.D.

## 3. ตัวอย่างที่ 3

โจทย์ P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC  
และ O เป็นจุดใดๆ จงพิสูจน์ว่า  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$



กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ มี P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  
AB, BC และ AC ตามลำดับ O เป็นจุดใดๆ

จะตองพิสูจน์ว่า  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

พิสูจน์ ลาก AO, BO, CO

1.  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$  (การบวกเวกเตอร์)
2.  $\vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{BQ}$  (การบวกเวกเตอร์)
3.  $\vec{OR} = \vec{OC} + \vec{CR}$  (การบวกเวกเตอร์)
4.  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR}$  (จากข้อ 1+2+3)
5.  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$  (จากข้อ 4)
6.  $\therefore \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$  (จากข้อ 5)
7. นั่นคือ  $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  ( $\because \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ )

Q.E.D.

4. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 9 ข้อ แบบฝึกหัดที่ 3.5 หน้า 75  
จากหนังสือของ สสวท.

3. วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะกลุ่มทดลองขั้นนำ

1. ทบทวนการบวกเวกเตอร์ การลบ -  
เวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วย -  
สเกลาร์ และเวกเตอร์ศูนย์
2. สนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์  
เรขาคณิตโดยใช้ทฤษฎีบทของยูคลิด  
เพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบการพิสูจน์  
โดยใช้เวกเตอร์

ขั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 1 บน -  
กระดานดำ ให้นักเรียนช่วยกันพิสูจน์  
เสร็จแล้วให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา  
โดยอาศัยเวกเตอร์
2. ตัวอย่างที่ 2 และตัวอย่างที่ 3 ให้  
นักเรียนพิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ โดย  
ครูตั้งปัญหามาถามาให้นักเรียน -  
สามารถพิสูจน์ได้
3. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 9 กลุ่ม เพื่อ  
มอบงานให้แต่ละกลุ่มไปทำโจทย์ใน  
แบบฝึกหัดที่ 3.5 กลุ่มละ 1 ข้อ แล้ว  
ให้นำผลมาอภิปรายในชั้นชั่วโมงต่อไป

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปข้อแตกต่างระหว่าง  
การพิสูจน์เรขาคณิตทั้งสองแบบ

กลุ่มควบคุมขั้นนำ

1. เหมือนกลุ่มทดลอง
2. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 1 บน -  
กระดานดำและอธิบายให้นักเรียนฟัง
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2 และตัวอย่าง  
ที่ 3 ให้นักเรียนฟัง แล้วเปิดโอกาส  
ให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยหลังจาก  
อธิบายเสร็จ
3. ครูให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.5  
จำนวน 9 ข้อ หน้า 75. จากหนังสือ  
สสวท. เป็นการบ้าน

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง



## 4) การวัด และประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจดี มีบางคนชอบคุยกันขณะเพื่อนออกไปทำบนกระดานคำ	ส่วนมากสนใจดี บางคนเอางานอื่นขึ้นมาทำ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ชอบแสดงความคิดเห็น	นักเรียนที่ชอบถามคำถามมักเป็นกลุ่มเดิมที่ชอบตอบเป็นประจำ
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	ร่วมกันแก้ปัญหาโจทย์ดี	-
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามครู	ส่วนมากซักถามครู
5. ให้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 9 ข้อ	ทำถูก 6 กลุ่ม	ทำถูก 9 ข้อ ไม่มี ทำถูก 8 ข้อ 5 คน ทำถูก 7 ข้อ 6 คน ทำถูก 6 ข้อ 15 คน ทำถูก 5 ข้อ 6 คน ทำถูก 4 ข้อ 3 คน

## คาบที่ 6

## การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต

## 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต โดยใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. ตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง
3. แก้ปัญหาโจทย์หลายๆแบบได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 95 %

## 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

(ต่อจากคาบที่ 5)

## 3) วิธีสอน และกิจกรรมเสนอแนะ

## กลุ่มทดลอง

## ชั้นนำ

ซักถามนักเรียนถึงการบ้านที่ให้  
นักเรียนทำ - กลุ่มละ 1 ข้อ

## ชั้นสอน

1. ให้แต่ละกลุ่มออกมาอภิปรายผลหน้าชั้น  
โดยนักเรียนในห้องมีส่วนร่วมซักถาม  
เพื่อให้ นักเรียนสามารถสรุปเป็นความ  
คิดรวบยอดในแต่ละข้อได้
2. ให้นักเรียนแต่ละคนทำการบ้าน -  
แบบฝึกหัดที่ 3.5 ทุกข้อ (ยกเว้นข้อ 8)  
หน้า 75 จากหนังสือ สสวท.



## กลุ่มควบคุม

## ชั้นนำ

สนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการบ้าน  
ที่ให้นักเรียนทำ ซึ่งข้อบกพร่องให้  
นักเรียนเห็น เนื่องจากส่วนมาก  
ทำเองไม่ได้

## ชั้นสอน

1. ครูอธิบายการบ้านให้นักเรียนฟัง  
ทุกข้อ
2. ให้นักเรียนแก้ข้อที่ทำได้ แล้วนำมา  
ส่งครู

กลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

อุปสรรคและปัญหาในการใช้เวกเตอร์  
พิสูจน์ทฤษฎีบทเรขาคณิต

กลุ่มควบคุม

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

4) การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจดี	บางคนคุยกันในขณะที่เรียน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ส่วนมากชอบตอบและแสดงความคิดเห็น	นักเรียนที่สนใจเรียนชอบตอบคำถาม
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	สนุกสนานในการแบ่งกลุ่มเพื่อแก้ปัญหา โจทย์	-
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามเพื่อนในกลุ่ม	ส่วนน้อยที่ถามครู และไม่มีคำถามเพื่อน
5. ใ้ทำแบบฝึกหัด 8 ข้อ	ส่วนมากทำถูกหมด	ส่วนมากทำถูกหมด

## ภาพที่ 7

เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก  
การบวก ลบเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

## 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

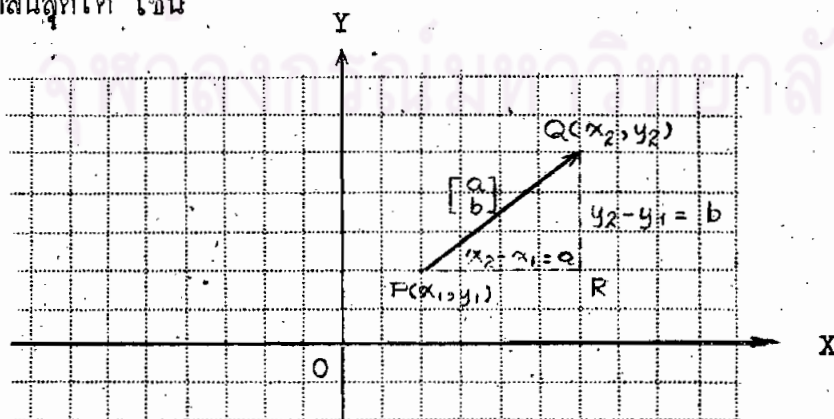
เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. เขียนสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
2. บอกความหมายของคำว่า " คู่อันดับ " ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนคู่อันดับแสดงจุดบนระนาบได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้
5. เขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากที่มีจุดเริ่มต้นแตกต่างกันได้อย่างถูกต้อง
6. คำนวณหาเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดให้
7. บวก และลบเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
8. หานิเสธของเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
9. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ 85 %
10. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้ 95 %

## 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก (Vector in Rectangular Axis System)

1. การเขียนเวกเตอร์ลงในระบบแกนมุมฉากจะสามารถบอกคู่อันดับของตั้งต้นและจุดสิ้นสุดได้ เช่น



ลักษณะของ  $\vec{PQ}$  นี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  หรือ  $(a, b)$  หรือ  $[a, b]$  ก็ได้

2. เวกเตอร์  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  มีข้อสังเกตดังนี้

2.1 ระยะ  $a$  หน่วย ต้องวัดจาก จุดเริ่มต้น วัดขนานกับแกน  $X$

ถ้า  $a > 0$  วัดไปทางขวามือจากจุดเริ่มต้น  $|a|$  หน่วย

ถ้า  $a < 0$  วัดไปทางซ้ายมือจากจุดเริ่มต้น  $|a|$  หน่วย

2.2 ระยะ  $b$  หน่วย ต้องวัดจากจุดปลายเส้นระดับกับ ขนานกับแกน  $Y$

ถ้า  $b > 0$  วัดขึ้นบน เหนือ เส้นระดับไป  $|b|$  หน่วย ถึงจุดสุดท้าย

ถ้า  $b < 0$  วัดลงล่าง ใต้ เส้นระดับไป  $|b|$  หน่วย ถึงจุดสุดท้าย

2.3 เวกเตอร์  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  ถ้าไม่กำหนดโคออร์ดิเนตของจุดเริ่มต้น จะเขียนที่ตำแหน่งใดก็ได้

2.4 ถ้า  $\vec{PQ}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ทราบโคออร์ดิเนตของจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้าย โดย  $(x_1, y_1)$  เป็นจุดเริ่มต้น และ  $(x_2, y_2)$  เป็นจุดสุดท้าย

$$\text{จะได้ } \vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

3. ตัวอย่างที่ 1

โจทย์ กำหนดจุด  $A(2, -3)$  และ  $B(5, 2)$  จงหา  $\vec{AB}$

$$\text{วิธีทำ } \vec{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - 2 \\ 2 - (-3) \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. ข้อสรุปเบื้องต้นของ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

4.1 เวกเตอร์ศูนย์  $\vec{0}$  คือ  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4.2 นิเสธของเวกเตอร์  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  คือ  $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

4.3  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  และ  $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$  เป็นเวกเตอร์

$$\text{การบวกเวกเตอร์ คือ } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$



การลบเวกเตอร์ คือ  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$

5. ตัวอย่างที่ 2

โจทย์ ถ้า  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  เป็นเวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน  
จงหา  $\vec{u} + \vec{v}$  และ  $\vec{u} - \vec{v}$

วิธีทำ  $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - (-2) \\ 1 - 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในห้องเรียน

1. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ ลงบนพิกัดฉากเดียวกัน

(1)  $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(-1, 1)$  จุดสุดท้ายคือ.....

(2)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(0, 0)$  จุดสุดท้ายคือ.....

(3)  $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(6, -1)$  จุดสุดท้ายคือ.....

(4)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(-4, -3)$  จุดสุดท้ายคือ.....

(5)  $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(3, 7)$  จุดสุดท้ายคือ.....

2. กำหนดจุด  $P(3, 4)$ ;  $Q(-5, 2)$ ;  $R(7, -3)$ ; และ  $S(-6, -8)$

จงหา  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{QP}$ ,  $\vec{PR}$ ,  $\vec{RP}$ ,  $\vec{QR}$ ,  $\vec{RQ}$ ,  $\vec{RS}$  และ  $\vec{SR}$

7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 3 ข้อ คือแบบฝึกหัดที่ 3.6 ก ข้อ 2, 4, 5  
หน้า 82 จากหนังสือ สสวท.

3) วิธีสอน และกิจกรรมเสนอแนะ

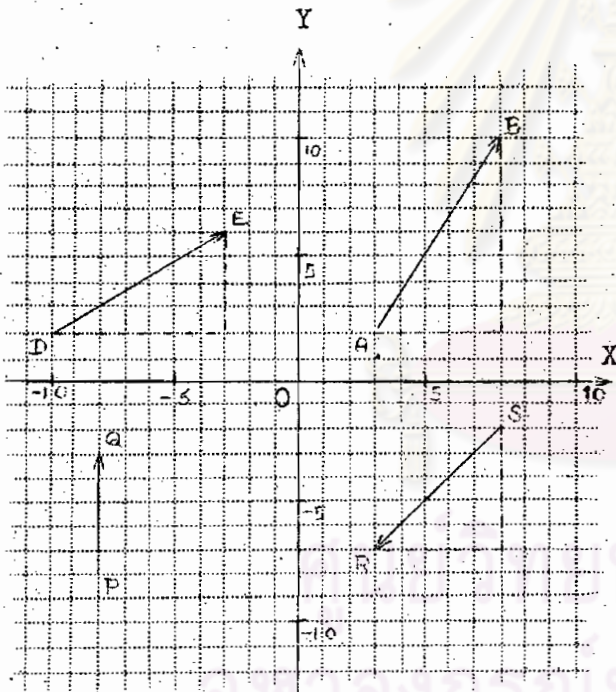
กลุ่มทดลอง

ขั้นนำ

- .. ครูสนทนากับนักเรียนระบบแกนมุมฉาก และทบทวนเรื่องคู่ลำดับ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนนำเวกเตอร์ที่ทำจากกระดาษสีขนาดต่างๆกันไปติดบนกระดาษกราฟหลายๆเวกเตอร์



- ครูให้นักเรียนอ่านโคออร์ดิเนตของจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของแต่ละเวกเตอร์ ให้นักเรียนทดลองหาเวกเตอร์ต่างๆ โดยสกัดยี่สามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วสรุปวิธีหาเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

กลุ่มควบคุม

ขั้นนำ

- เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสอน

1. ครูเขียนเวกเตอร์ลงบนกระดาษกราฟเหมือนกลุ่มทดลอง แล้วให้นักเรียนอ่านจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของเวกเตอร์ พร้อมทั้งอธิบายวิธีหาเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

- | กลุ่มทดลอง   | กลุ่มควบคุม         |
|--|---------------------|
| 2. ครูให้นักเรียนนำเวกเตอร์ที่กำหนดให้ไปต่อกัน แล้วหาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์ต่อเนื่องกันนั้น | 2. เหมือนกลุ่มทดลอง |
| 3. ครูให้ตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 แล้วให้นักเรียนฝึกทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อในห้องเรียน      | 3. เหมือนกลุ่มทดลอง |
| 4. ครูให้นักเรียนทำการบ้านในแบบฝึกหัดที่ 3.6 ข้อ 2, 4, 5 หน้า 82 จากหนังสือ สสวท.            | 4. เหมือนกลุ่มทดลอง |

#### ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปเกี่ยวกับ

1. การหาเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
2. การบวกและการลบเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

#### ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

#### 4) การวัด และประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจ, มีบางกลุ่มคุยกันขณะเพื่อนกำลังทดลอง	ส่วนมากสนใจ, มีบางคนคุยกันและเอางานอื่นขึ้นมาทำ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ส่วนมากชอบตอบ	ส่วนมากชอบตอบ
3. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	สนุกสนานในการทดลอง	—
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ซักถามเพื่อนมากกว่า ซักถามครู	ส่วนมากถามครู

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
5. สิ่ง เกิดจากการทำใจทย์พิเศษ	ทำถูก 2 ข้อ 30 คน ทำถูก 1 ข้อ 5 คน	ทำถูก 2 ข้อ 28 คน ทำถูก 1 ข้อ 7 คน
6. ใ้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 3 ข้อ	ทำถูก 3 ข้อ 22 คน ทำถูก 2 ข้อ 7 คน ทำถูก 1 ข้อ 6 คน	ทำถูก 3 ข้อ 25 คน ทำถูก 2 ข้อ 7 คน ทำถูก 1 ข้อ 3 คน

ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คาบที่ 8

### การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

#### เวกเตอร์ขนาน

#### การหาขนาดของ เวกเตอร์และ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

#### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. คูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
2. หาขนาดของ เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
3. บอกความหมายของ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนสัญลักษณ์แทน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง
5. เขียนเวกเตอร์ในรูป  $\hat{i}$  และ  $\hat{j}$  อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใดๆให้
6. เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใดๆให้ สามารถบอกเวกเตอร์ที่ขนานกันได้อย่างถูกต้อง
7. กำหนดหาขนาดของ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ใดๆได้อย่างถูกต้อง
8. ทำโจทย์พิเศษได้ถูกต้อง 90 %
9. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้ 85 %

#### 2) รายละเอียดของ เนื้อหาวิชา

1. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  และ  $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$  เป็นเวกเตอร์  $m$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะได้  $m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma \\ mb \end{bmatrix}$

2. ตัวอย่างที่ 1

โจทย์ กำหนด  $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

จงหา  $\vec{a} - 3\vec{n} + 2\vec{y}$  และถ้า  $\vec{a}$  เป็นจุดเริ่มต้นที่  $(-3, 1)$

จงหาจุดสุดท้ายของ เวกเตอร์ผลลัพธ์ด้วย



วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{a} - 3\vec{n} + 2\vec{y} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 9 - 4 \\ 5 - 3 - 6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a} - 3\vec{n} + 2\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

ถ้า  $\vec{a}$  มีจุดเริ่มต้นที่  $(-3, 1)$  ให้จุดสุดท้ายเป็น  $(x_2, y_2)$

จากสูตร

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \\ \text{แทนค่า} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 - (-3) \\ y_2 - 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$x_2 = -3 + 4 = 1$$

$$y_2 = 1 - 4 = -3$$

นั่นคือ จุดสุดท้ายของเวกเตอร์ผลลัพธ์คือ  $(1, -3)$  ตอบ

### 3. เวกเตอร์ขนาน

$$\text{ถ้า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; \vec{v} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{w} = -3 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ จะได้ว่า  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , และ  $\vec{w}$  ขนานกัน และ  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  มี

ทิศทางเดียวกัน แต่ตรงข้ามกับ  $\vec{w}$

### 4. ตัวอย่างที่ 2

$$\text{โจทย์ กำหนดให้ } \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \text{ และ } \vec{n} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน}$$

$$\text{วิธีทำ } \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{d}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\vec{c}$$

ดังนั้น  $\vec{a}$  และ  $\vec{d}$  ขนาดกัน (ทิศทางเดียวกัน)

$\vec{c}$  และ  $\vec{h}$  ขนาดกัน (ทิศทางตรงข้าม)

### 5. ขนาดของเวกเตอร์ (Magnitude of a Vector)

ถ้า  $\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ขนาดของ  $\vec{u}$  ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์  $|\vec{u}|$

ถ้า  $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  หรือ  $\vec{u}$  มีจุดเริ่มต้นคือ  $(x_1, y_1)$  จุดสุดท้ายคือ  $(x_2, y_2)$

$$|\vec{u}| = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{หรือ } |\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ เวกเตอร์  $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  และ เวกเตอร์  $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

### 7. ตัวอย่างที่ 3

โจทย์ กำหนด  $A(1, 2)$ ;  $B(5, 7)$  จงหาขนาดของ  $\vec{AB}$  และเขียน  $\vec{AB}$  ในรูปของ  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$

วิธีทำ  $A(1, 2)$ ;  $B(5, 7)$

$$\therefore \vec{AB} = \begin{bmatrix} 5 - 1 \\ 7 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \quad \text{ตอบ}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \quad \text{ตอบ}$$

### 8. การหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\text{ให้ } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ } \vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

### 9. ตัวอย่างที่ 4

โจทย์ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์  $5\vec{i} - 12\vec{j}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5\vec{i} - 12\vec{j} &= \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix} \\ 5\vec{i} - 12\vec{j} &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= 13 \end{aligned}$$

∴ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ  $5\vec{i} - 12\vec{j}$  คือ  $\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}$  ตอบ

10. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในห้องเรียนคือ

1. จากจุด A, B ที่กำหนดให้ จงหา  $\vec{AB}$ ;  $|\vec{AB}|$ ; เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ  $\vec{AB}$  และจงเขียน  $\vec{AB}$  ในรูป  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$

ก.  $A(-2, 1)$ ;  $B(3, 2)$

ข.  $A(5, 6)$ ;  $B(2, -1)$

ค.  $A(1, -2)$ ;  $B(3, 2)$

2. กำหนด  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ;  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ;  $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

จงเขียน  $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$  ในรูป  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  พร้อมทั้งหาขนาด

11. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.6 ข ข้อ 1 - 8 หน้า 85 จากหนังสือ สสวท.

3) วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

ขั้นนำ

สนทนากับนักเรียนถึงข้อบกพร่องต่างๆ ที่ตรวจพบในการทำแบบฝึกหัดที่ 3.6 ค

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนนำเวกเตอร์  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$  ไปศึกษบนกระดานกราฟ แล้วให้หาจุดสร้างเวกเตอร์ที่เป็น  $2\vec{u}$  ค่าย

กลุ่มควบคุม

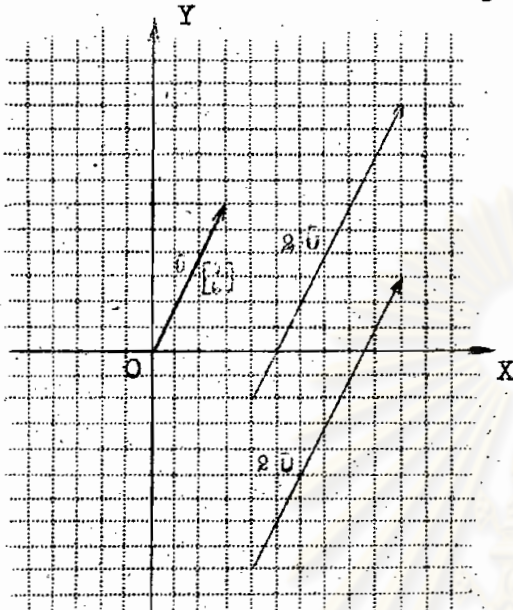
ขั้นนำ

เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบแกนมุมฉาก พร้อมทั้งให้ตัวอย่างที่ 1

กระดาษสี่ที่แจกให้ แล้วให้นำไปติดบน  
กระดานกราฟหลายๆ เวกเตอร์ ดังรูป



นำผลที่ไ้มาอภิปรายรวมกัน แล้วให้  
ตัวอย่างที่ 1

2. ให้นักเรียนคิดเวกเตอร์ต่างๆบนกระดาน  
กราฟ แล้วให้บอกเวกเตอร์ที่ขนานกัน  
และมีทิศทางเดียวกัน และเวกเตอร์ที่  
ขนานกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ครูให้  
นักเรียนออกมายกตัวอย่าง เวกเตอร์ที่  
ขนานกัน และไม่ขนานกันบนกระดาน
3. ทบทวนการหาขนาดของระยะทาง เพื่อ  
นำมาใช้หาขนาดของ เวกเตอร์
4. ครูอธิบายเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และการ  
เขียนเวกเตอร์ในรูป  $i$  และ  $j$  เสร็จ  
แล้วให้ตัวอย่างที่ 3
5. ให้นักเรียนแสดงการหาเวกเตอร์หนึ่ง -  
หน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ที่  
กำหนดให้ แล้วยกตัวอย่างที่ 4 ประกอบ

2. ครูอธิบายเวกเตอร์ที่ขนานกัน มี  
ทิศทางเดียวกัน และมีทิศทาง  
ตรงข้ามกัน เสร็จแล้วให้ตัวอย่าง  
ที่ 2 ประกอบ

3. เหมือนกลุ่มทดลอง
4. เหมือนกลุ่มทดลอง

5. ครูอธิบายการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  
ที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด  
ให้ แล้วยกตัวอย่างที่ 4 ประกอบ

กลุ่มทดลอง

กลุ่มควบคุม

6. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ ในห้องเรียน และให้การบ้านแบบฝึกหัดที่ 3.6 ข ข้อ 1 - 8 หน้า 85 จากหนังสือ สสวท.

6. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปสูตรการหาขนาดของ -  
 เวกเตอร์ และการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  
 ที่มีทิศทาง เกี่ยวกับเวกเตอร์ เดิม

เหมือนกลุ่มทดลอง

5) การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจเรียน	ส่วนมากสนใจ มีบางคนคุยกัน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	กระตือรือร้นที่จะตอบ	ครูต้องเรียกจึงจะตอบ
3. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	สนุกสนานในการทดลอง และมีส่วนร่วมในการอภิปราย	กระตือรือร้นที่จะออกมาทำโจทย์พิเศษบนกระดาน
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามเพื่อนกันเอง	ส่วนมากนักเรียนเองที่ชวนซักถาม
5. สังเกตจากการทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ 30 คน ทำถูก 1 ข้อ 5 คน	ทำถูก 2 ข้อ 28 คน ทำถูก 1 ข้อ 7 คน
6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 8 ข้อ	ทำถูก 8 ข้อ 22 คน ทำถูก 7 ข้อ 5 คน ทำถูก 6 ข้อ 8 คน	ทำถูก 8 ข้อ 15 คน ทำถูก 7 ข้อ 17 คน ทำถูก 6 ข้อ 3 คน



## ตอนที่ 9

### การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

#### 1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. คำนวณผลคูณของ เวกเตอร์กับ เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. สรุปคุณสมบัติของ เวกเตอร์คูณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
3. ตอบคำถามครูและเพื่อนได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ 90 %
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้ 85 %

#### 2) รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

1. การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์

ถ้า  $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$  และ  $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$  ผลคูณของ  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  เขียนแทนด้วย  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  จะได้  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

ผลคูณของ เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ เป็นปริมาณสเกลาร์ เรียกผลคูณว่า

dot product หรือ inner product

2. ตัวอย่างที่ 1 ถ้า  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  และ  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$  จงหา  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\text{วิธีทำ } \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(6) + (4)(-2)$$

$$= 18 - 8$$

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 10$$

3. คุณสมบัติที่สำคัญของผลคูณสเกลาร์

1. คุณสมบัติการสลับที่  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2.  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

3.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

4. ถ้า  $a$  เป็นสเกลาร์  $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$

5. คุณสมบัติการกระจาย  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

4. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในท้องเรียน 2 ข้อ คือ

4.1 กำหนด  $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$  และ  $\vec{v} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$

จงหา  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  และ  $\vec{v} \cdot \vec{u}$

4.2 กำหนด  $\vec{u} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$  และ  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

จงหา  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  และ  $\vec{v} \cdot \vec{u}$

5. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 2 ข้อ คือ แบบฝึกหัดที่ 3.7

ข้อ 1, 3 หน้า 92 จากหนังสือ สสวท.

### 3) วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<u>ชั้นนำ</u>	<u>ชั้นนำ</u>
ทบทวนการบวก การลบเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก	เหมือนกลุ่มทดลอง
<u>ขั้นสอน</u>	<u>ขั้นสอน</u>
1. ให้นักเรียนสังเกตการบวก ลบ - เวกเตอร์ เช่น	1. ครูอธิบายนิยามการคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์และเขียนบนกระดาน
$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$	<p>ถ้า <math>\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}</math> และ <math>\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}</math> จะได้ <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2</math></p>
ผลลัพธ์ที่ได้เป็นเวกเตอร์	
ให้นักเรียนเปรียบเทียบการคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์ ซึ่งมีผลลัพธ์เป็นสเกลาร์และเวกเตอร์ แต่ผลคูณที่เป็นเวกเตอร์ไว้ศึกษาในชั้นสูงต่อไป	
2. ให้นักเรียนอภิปรายผลคูณสเกลาร์ - ( Scalar Products ) ที่บาง	2. ไม่มี
ครั้งเรียกว่า dot product	
หรือ inner product	
3. ให้อธิบายที่ 1 บนกระดานแล้วให้ช่วยกันสรุปคุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์	3. เหมือนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง

4. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ ในห้องเรียน และเป็นการบ้าน - แบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ 1, 3 หน้า 92 จากหนังสือ สสวท.

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปคุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์

กลุ่มควบคุม

4. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มควบคุม

4) การวัด และประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจดี, มีบางคนชอบคุยกัน	ส่วนมากสนใจดี, บางคนเอางานอื่นขึ้นมาทำ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ชอบแสดงความคิดเห็น	นักเรียนที่ชอบตอบคำถามมักเป็นกลุ่มเดิมที่ตอบ - เป็นประจำ
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	มีส่วนในการแก้ปัญหา - และอภิปราย เป็นส่วนมาก	-
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามเพื่อนกันเอง	ส่วนมากซักถามครู
5. สังเกตจากการทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ	ส่วนมากทำถูกต้อง	ส่วนมากทำถูกต้อง
6. ให้ทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ 30 คน ทำถูก 1 ข้อ 3 คน ไม่ทำเลย 2 คน	ทำถูก 2 ข้อ 28 คน ทำถูก 1 ข้อ 5 คน ไม่ทำเลย 2 คน

ตอนที่ 10

การหามุมระหว่าง เวกเตอร์กับ เวกเตอร์และ เวกเตอร์สเปซ

1) จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

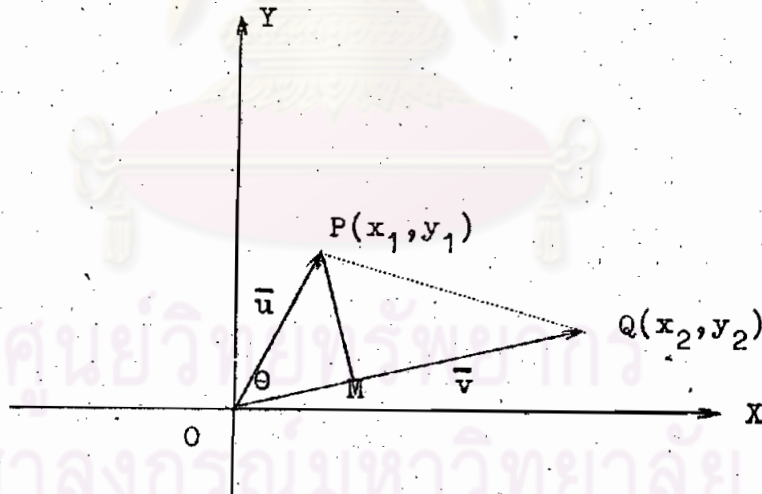
เมื่อเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. คำนวณหามุมระหว่าง เวกเตอร์กับ เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. สรุปคุณสมบัติของ เวกเตอร์สเปซอย่างถูกต้อง
3. แก้โจทย์ปัญหาต่างๆได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์ท่ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 90 %
5. ทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้านได้อย่างถูกต้อง 95 %

2) รายละเอียดของ เนื้อหาวิชา

1. การหามุมระหว่าง เวกเตอร์กับ เวกเตอร์กับ เวกเตอร์

ถ้า  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  เป็น เวกเตอร์ใดๆในระนาบ และมุมระหว่าง เวกเตอร์ทั้งสองคือ  $\theta$  จะได้ว่า  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$



พิสูจน์ ให้  $\vec{u} = \vec{OP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$   
 $\vec{v} = \vec{OQ} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\vec{PQ}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$\therefore |\vec{PQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \dots\dots(1)$$

จาก  $P$  ลากเส้นให้ตั้งฉากกับ  $\vec{OQ}$  และตัดกับ  $\vec{OQ}$  ที่  $M$

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}|^2 &= |\vec{PM}|^2 + |\vec{MQ}|^2 \\ &= (|\vec{OP}|^2 - |\vec{OM}|^2) + (|\vec{OQ}| - |\vec{OM}|)^2 \\ &= |\vec{OP}|^2 - (|\vec{OP}| \cos \theta)^2 + (|\vec{OQ}| - |\vec{OP}| \cos \theta)^2 \\ &= |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 - 2|\vec{OP}||\vec{OQ}| \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{PQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

2. ข้อสังเกตจากการหามุมระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์

2.1 ถ้า  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ;  $\vec{u} \neq \vec{0}$  และ  $\vec{v} \neq \vec{0}$  แล้ว  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  ตั้งฉากกัน

จะได้  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2.2  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

3. ตัวอย่างที่ 1

โจทย์ ให้  $P(3,4)$ ,  $Q(2,-3)$  และ  $R(6,0)$  เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม

$PQR$  จงหาขนาดของมุม  $PQR$

วิธีทำ

$$\vec{QP} = (3 - 2)\vec{i} + (4 + 3)\vec{j}$$

$$= \vec{i} + 7\vec{j}$$

$$|\vec{QP}| = \sqrt{(1)^2 + (7)^2}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$\vec{QR} = (6 - 2)\vec{i} + (0 + 3)\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$|\vec{QR}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$



$$\begin{aligned}\vec{QP} \cdot \vec{QR} &= (1)(4) + (7)(3) \\ &= 25\end{aligned}$$

จากสูตร

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = |\vec{QP}| |\vec{QR}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{QR}}{|\vec{QP}| |\vec{QR}|}$$

$$= \frac{25}{(5\sqrt{2})(5)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

ขนาดของมุม PQR เท่ากับ  $45^\circ$

ตอบ

#### 4. เวกเตอร์สเปซ (Vector Spaces)

เวกเตอร์สเปซ หมายถึง เซตใดก็ตามที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดซึ่งเป็นเวกเตอร์ในระนาบ และมีคุณสมบัติต่อไปนี้

ถ้า  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  และ  $\vec{w}$  เป็นเวกเตอร์ในระนาบ  $r$  และ  $s$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

##### 1. คุณสมบัติการบวกของเวกเตอร์

(1) คุณสมบัติปิด คือ  $\vec{u} + \vec{v}$  หรือ  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$  เป็นเวกเตอร์

(2) คุณสมบัติการจับหมู่ คือ  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(3) คุณสมบัติการสลับที่ คือ  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(4) เอกลักษณ์การบวก คือ  $\vec{0}$  เช่น  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(5) อินเวอร์สสำหรับการบวก คือแต่ละ  $\vec{u}$  จะมี  $-\vec{u}$  ซึ่งทำให้  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

##### 2. คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

(1) คุณสมบัติปิด คือ  $r\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์

(2) คุณสมบัติการจับหมู่ คือ  $r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$

(3) คุณสมบัติการกระจาย คือ  $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

หรือ  $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$

(4) สเกลาร์ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ คือ  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

5. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษในห้องเรียน 4 ข้อ คือ

5.1 ข้อใดที่เวกเตอร์  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ตั้งฉากกัน

ก.  $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$  ;  $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

ข.  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  ;  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

ค.  $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$  ;  $\vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

ง.  $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$  ;  $\vec{v} = 12\vec{i} + 9\vec{j}$

จ.  $\vec{u} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$  ;  $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$

5.2 ถ้ากำหนดให้  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$  และ  $|\vec{u}| = 1$  ;  $|\vec{v}| = 3$  และ

$|\vec{w}| = 4$  จงหามุม  $\theta$  ซึ่งเป็นมุมที่อยู่ระหว่าง  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$

5.3 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ  $\vec{u} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

5.4 จงหาค่าของจำนวนจริง  $a$  ที่ทำให้  $\vec{u} = a\vec{i} - 2\vec{j}$  และ  $\vec{v} = 3a\vec{i} + 15\vec{j}$  ตั้งฉากกัน

6. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน 4 ข้อ คือแบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ - 2, 4, 5, 6 หน้า 92 จากหนังสือ สสวท.

3) วิธีสอน และกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

ขั้นนำ  
 ทบทวนการหาขนาดของ เวกเตอร์  
 และการคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์

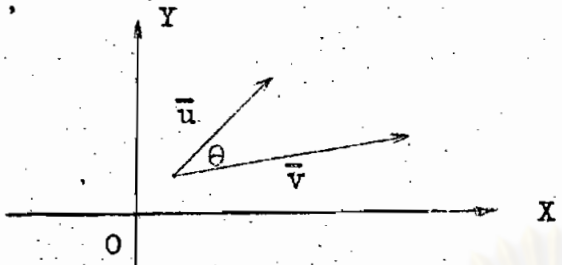
ขั้นสอน  
 1. ครูนำเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ ไป  
 ตีคบนกระดานกราฟตั้งรูป

กลุ่มควบคุม

ขั้นนำ  
 เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสอน  
 1. ครูอธิบายการหามุมระหว่าง  
 เวกเตอร์ ในกรณีที่ตั้งฉากกัน  
 และไม่ตั้งฉากกัน

กลุ่มทดลอง



ให้นักเรียนสังเกตจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ กำหนดมุมระหว่างเวกเตอร์เป็น  $\theta$  ผลคูณที่ได้คือ  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

2. ครุ่นเอาเวกเตอร์ไปคิดบนกระดานให้เป็นมุมแหลม มุมป้าน และมุมฉาก ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายผลคูณที่ได้
3. ให้ตัวอย่างที่ 1 บนกระดานคำและทำ โจทย์พิเศษ 2 ข้อในห้องเรียน
4. ให้นักเรียนร่วมกันสรุปคุณสมบัติการบวกเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของเวกเตอร์สเปซ
5. ให้นักเรียนทำโจทย์พิเศษเป็นการบ้าน 4 ข้อ และโจทย์แบบฝึกหัดที่ 3.7 ข้อ 4 จากหนังสือ สสวท.

ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนสรุปสูตร และคุณสมบัติต่างๆ ของการคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์
2. ให้นักเรียนสรุปเซตที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์สเปซ

กลุ่มควบคุม

2. ไม่มี

3. อธิบายตัวอย่างที่ 1 บนกระดาน
4. อธิบายคุณสมบัติของเวกเตอร์สเปซ ให้นักเรียนยกตัวอย่างเวกเตอร์สเปซ

5. เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจของนักเรียน	ส่วนมากสนใจ	ส่วนมากสนใจ มีบางคนแอบอ่านหนังสือที่จะทำการทดสอบในช่วงไม่งต่อไป
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ส่วนมากชอบตอบและแสดงความคิดเห็น	ต้องเรียกชื่อจึงจะตอบ
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	กระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมคือ	-
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ซักถามครูมากกว่า - ซักถามเพื่อน	นั่งเฉยๆ
5. ให้ทำโจทย์พิเศษ 4 ข้อ	ทำถูก 4 ข้อ 28 คน ทำถูก 3 ข้อ 3 คน ทำถูก 2 ข้อ 4 คน	ทำถูก 4 ข้อ 30 คน ทำถูก 3 ข้อ 3 คน ทำถูก 2 ข้อ 2 คน
6. ให้ทำแบบฝึกหัด 4 ข้อ	ทำถูก 4 ข้อ 25 คน ทำถูก 3 ข้อ 7 คน ทำถูก 2 ข้อ 2 คน ทำถูก 1 ข้อ 1 คน	ทำถูก 4 ข้อ 28 คน ทำถูก 3 ข้อ 4 คน ทำถูก 2 ข้อ 3 คน

บทเรียนแบบโปรแกรมที่ดัดแปลงบางกรอบมาจาก วิทยานิพนธ์ปริญญา  
ครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ของ น.ส. เพ็ญจันทร์ เฟื่องฟู พ.ศ. 2518 เรื่อง " การสร้างบทเรียน  
แบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง " เวกเตอร์ " สำหรับระดับมัธยมศึกษา  
ตอนปลาย "

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



### คำแนะนำในการ เรียน

นักเรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้านักเรียนทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

- 1) หากกระดาษแข็ง เทปไม่ปรแทรกเตอร์ ปิดข้อความในกรอบที่ 2
- 2) เริ่มอ่านกรอบที่ 1 แล้วตอบคำถามหรือเติมข้อความที่ขาดหายไป
- 3) ตรวจสอบคำตอบของนักเรียนด้วยตัวเลือกระดาษลงไปที่กรอบที่ 3 นักเรียนจะพบคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1 อยู่ทางซ้ายมือของกรอบที่ 2

3.1 ถ้านักเรียนตอบถูก ให้นักเรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไป และดำเนินเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ

3.2 ถ้านักเรียนตอบผิด ให้หยุดกลับไปอ่านกรอบที่ 1 ให้เข้าใจแล้วคิดใหม่ ศึกษาคำตอบเดิมและเขียนคำตอบที่ถูกต้องใส่คำตอบที่ผิดแล้วอ่านกรอบต่อไป

4) นักเรียนจะต้องทำทุก ๆ กรอบจากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด

5) ขอให้นักเรียนข้อสคัญตนเอง อย่าลอกคำตอบ เพราะบทเรียนที่นักเรียนกำลังทำอยู่นี้ไม่ใช่แบบสอบ แต่เป็นบทเรียนเพื่อการเรียนรู้

6) อย่าแข่งขันกันตอบเพียงเพื่อให้เสร็จก่อนเพื่อน เพราะจะทำให้นักเรียนตอบคำถามโดยไม่คิดตาม จะไม่ช่วยให้เกิดความเข้าใจในเรื่องนั้น ๆ ได้เลย

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนนี้เรียกว่าบทเรียนแบบโปรแกรม เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียน  
เรียนไต่ควยตนเอง บทเรียนจะทำหน้าที่เสมือนผู้สอนประจำตัวผู้เรียน ดังนั้นผู้เรียนจะ  
ต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนมีดังนี้

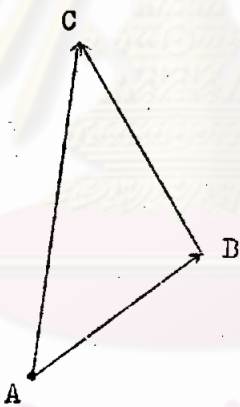
- 1) บทเรียนแบบโปรแกรมนี้อิงเขียนขึ้นตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา  
ตอนปลาย ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
- 2) เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ เรียกว่า กรอบ เรียงจากง่าย  
ไปหายากตามลำดับ
- 3) แต่ละกรอบจะมีเนื้อหาให้นักเรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนคิดและตอบ  
คำถามนั้น ดังนั้นในการอ่านข้อความผู้เรียนควรใช้ความสังเกต แล้วเปรียบเทียบจนสามารถ  
สรุปหลักเกณฑ์และนำไปใช้ได้
- 4) ผู้เรียนจะทราบทันทีว่า คำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะมีคำคอยเฉลย  
ไว้
- 5) ในแต่ละกรอบแบ่งออกเป็น 2 ช่องดังนี้

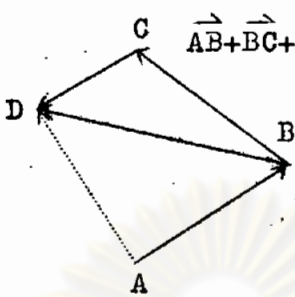
	ก.1 ในช่องนี้มีข้อความให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนตอบหรือให้เติมข้อความที่ขาดหายไป
ในช่องนี้มีคำคอยเฉลยของกรอบที่ 1	ก.2
ในช่องนี้มีคำคอยเฉลยของกรอบที่ 2	ก.3

## คาบที่ 2

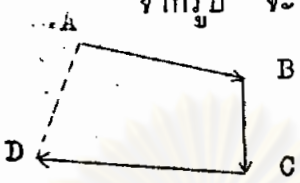
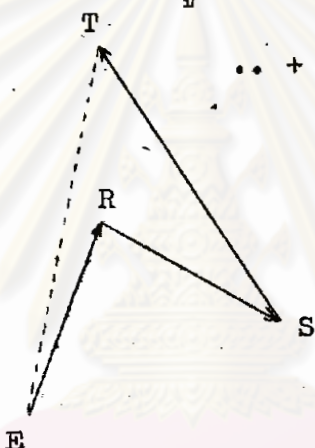
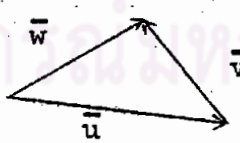
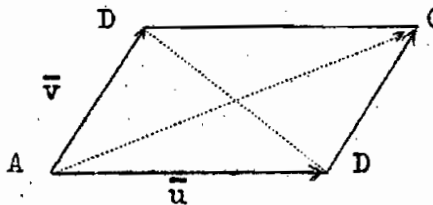
การบวกและการลบเวกเตอร์

	<p>ก.1</p> <p>เมื่อพิจารณาเวกเตอร์ที่แทนการ เดินทางจาก กรุงเทพฯ ไปพิษณุโลก แล้วเดินทางต่อไปเชียงใหม่ จะพบว่าการ เดินทางครั้งนี้มีเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องกันอยู่ 2 เวกเตอร์</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- เวกเตอร์แรกคือ การเดินทางจาก..... ไป.....</li> <li>- เวกเตอร์ที่สอง คือการเดินทางจาก.... ไป.....</li> </ul>
<p>กรุงเทพฯ, พิษณุโลก พิษณุโลก, เชียงใหม่</p>	<p>ก.2</p> <p>จากการ เดินทางจากกรุงเทพฯไปพิษณุโลก แล้วเดินทางต่อไปเชียงใหม่ จะพบว่าการ เดินทางครั้งนี้ มีจุดเริ่มต้นที่ ..... และจุดปลายทางที่...</p>
<p>กรุงเทพฯ, เชียงใหม่</p>	<p>ก.3</p> <p>ถ้า เดินทางจากกรุงเทพฯ ถึง เชียงใหม่ จะมีเวกเตอร์ เพียง.....เวกเตอร์ และการ เดินทางครั้งนี้</p> <p>จุดเริ่มต้นที่ .....</p> <p>จุดปลายทางที่ .....</p>

<p>1. กรุงเทพฯ, เชียงใหม่</p>	<p>ก.4</p> <p>จะพบว่า การเดินทางจากกรุงเทพฯไปพิษณุโลก แล้วเดินทางต่อไปเชียงใหม่ ก็กับการเดินทางจากกรุงเทพฯไปเชียงใหม่ นั้น มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายทาง..... (ต่างกัน / อย่งเดียวกัน) คือจาก..... ไป.....</p>
<p>อย่งเดียวกัน กรุงเทพฯ, เชียงใหม่</p>	<p>ก.5</p> <p>การเดินทาง 2 แบบใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายอย่งเดียวกัน ถือว่าเท่ากัน</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;">  </div> <div style="flex: 2;"> <p>จากรูป</p> <p><math>\vec{AB}</math> แทนการเดินทางจาก กรุงเทพฯไปพิษณุโลก</p> <p><math>\vec{BC}</math> แทนการเดินทางจาก พิษณุโลกไปเชียงใหม่</p> <p><math>\vec{AC}</math> แทนการเดินทางจาก กรุงเทพฯไปเชียงใหม่</p> <p>การเดินทางจากกรุงเทพฯไปพิษณุโลกแล้วเดินทางต่อไป เชียงใหม่จึงแทนด้วย..... และการเดินทาง จากกรุงเทพฯตรงไปเชียงใหม่ ก็เขียนแทนด้วย .....</p> <p>ดังนั้น จะได้ว่า <math>\vec{AB} + \vec{BC} = \dots\dots\dots</math></p> </div> </div>
<p><math>\vec{AB} + \vec{BC}</math> <math>\vec{AC}</math> <math>\vec{AC}</math></p>	<p>ก.6</p> <p><math>\vec{AB} + \vec{BC}</math> มีจุดเริ่มต้นที่.....และจุดปลายที่.....</p> <p><math>\vec{AC}</math> มีจุดเริ่มต้นที่.....และจุดปลายที่.....</p>

<p>A, C A, C</p>	<p>ก. 7</p>  <p><math>\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}</math> มีจุดเริ่มต้นที่..... และจุดปลายที่.....</p> <p><math>\vec{AB} + \vec{BD}</math> มีจุดเริ่มต้นที่..... และจุดปลายที่.....</p> <p>ดังนั้น <math>\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}</math> ..... <math>\vec{AB} + \vec{BD}</math> ..... <math>\vec{AD}</math> ( เท่ากับ/ไม่เท่ากับ ) ( เท่ากับ/ไม่เท่ากับ )</p>
<p>A, D A, D  เท่ากับ, เท่ากับ</p>	<p>ก. 8</p> <p><math>\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{ST}</math> มีจุดเริ่มต้นที่..... จุดปลายที่.....</p> <p>ดังนั้น <math>\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RS} + \vec{ST}</math> ..... PT ( เท่ากับ/ ไม่เท่ากับ )</p>
<p>P, T เท่ากับ</p>	<p>ก. 9</p> <p>จึงสรุปได้ว่า ผลบวก ของ เวกเตอร์ที่ต่อเนื่องกันจะ เท่ากับ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด ..... ( เริ่มต้น/ปลาย ) ของ เวกเตอร์ตัวแรก และจุดปลายที่จุด ..... ( เริ่มต้น/ปลาย ) ของ เวกเตอร์ตัวสุดท้าย</p>
<p>เริ่มต้น, ปลาย</p>	<p>ก. 10</p> <p>ผลบวกของ เวกเตอร์ <math>\vec{PQ}</math> และ <math>\vec{QR}</math> คือ.....</p>



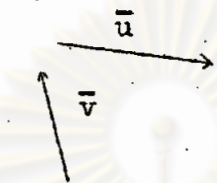
$\vec{PR}$	<p>ก. 11</p> $\vec{KL} + \vec{LM} + \vec{MN} + \vec{NO} = \dots\dots\dots$
$\vec{KO}$	<p>ก. 12</p> <p>จากรูป จะได้ว่า</p>  <p>... + ... + ... = ...</p>
$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$	<p>ก. 13</p> <p>จากรูป จะได้ว่า</p>  <p>... + ... + ... = ...</p>
$\vec{ER} + \vec{RS} + \vec{ST} = \vec{ET}$	<p>ก. 14</p> <p>จากรูป จะได้ว่า</p>  <p>... + ... = ...</p>
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$	<p>ก. 15</p> <p>ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู จะได้ว่า</p>  <p><math>\vec{u} + \vec{v} = \dots\dots\dots</math></p>

$\vec{AC}$

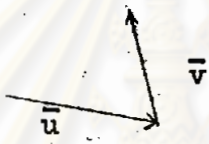
ก. 16

ดังนั้น เมื่อต้องการหาผลบวกของเวกเตอร์ใดๆ ก็หาได้โดยการเขียนรูป เช่น

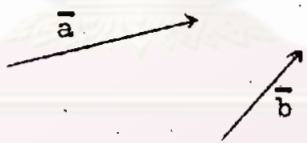
จาก  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่กำหนดให้ จะหา  $\vec{u} + \vec{v}$  ได้ดังนี้



- 1) เขียน  $\vec{u}$  (เวกเตอร์ตัวตั้ง)
- 2) เขียน  $\vec{v}$  ให้มีจุดเริ่มต้นที่จุดปลายของ  $\vec{u}$  ดังรูป
- 3) เวกเตอร์จากจุดเริ่มต้นของ  $\vec{u}$  ไปยังจุดปลายของ  $\vec{v}$  คือ  $\vec{u} + \vec{v}$  ที่ต้องการ

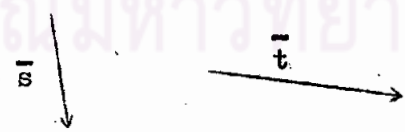
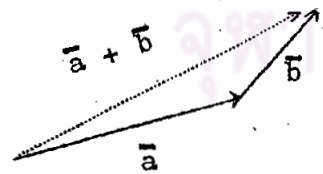


จาก  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ที่กำหนดให้ จงเขียนรูปแสดง  $\vec{a} + \vec{b}$



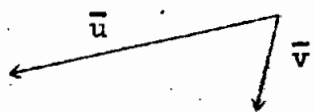
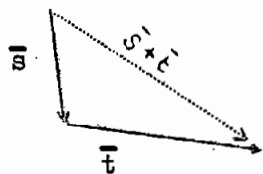
ก. 17

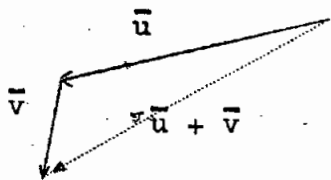
จงเขียนรูปแสดง  $\vec{s} + \vec{t}$  จาก  $\vec{s}$  และ  $\vec{t}$  ที่กำหนดให้



ก. 18

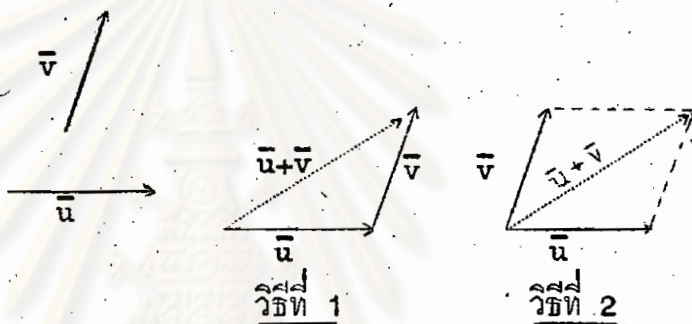
จงเขียนรูปแสดง  $\vec{u} + \vec{v}$  จาก  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่กำหนดให้



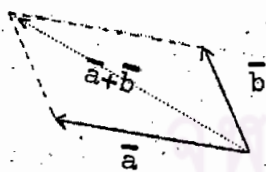
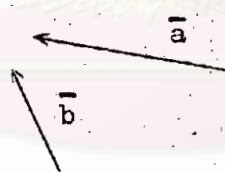


ก. 19

การทำ  $\vec{u} + \vec{v}$  นั้น อาจทำได้อีกวิธีหนึ่ง คือให้จุดเริ่มต้นของ  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  เป็นจุดเดียวกันแล้วสร้างสี่เหลี่ยมก้านขนาน เวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์จะเป็นเวกเตอร์ที่แทนเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมก้านขนาน โดยมีจุดเริ่มต้นเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ ดังรูป

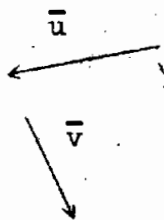


จงหา  $\vec{a} + \vec{b}$  โดยวิธีสร้างสี่เหลี่ยมก้านขนาน



ก. 20

จงเขียนรูปแสดง  $\vec{u} + \vec{v}$  จาก  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่กำหนดให้ ( เขียนมาให้ดูทั้งสองวิธี )



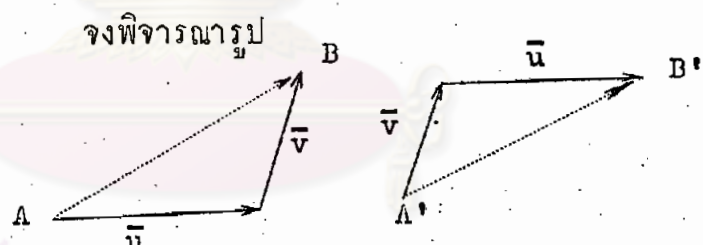
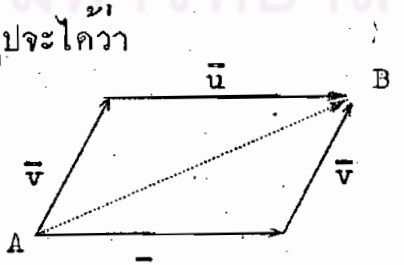
วิธีที่ 1

วิธีที่ 2

	<p>ก. 21</p> <p>ผลบวกของ เวกเตอร์ไม่ขึ้นอยู่กับ การ เลือก ตำแหน่ง ของจุดเริ่มต้น จะ เลือกจุดใดๆ ผลบวกก็จะ ..... กัน (เท่า/ไม่เท่า)</p>
<p>เท่า</p>	<p>ก. 22</p> <p>นักเรียนคงทอพบไควว่า <math>\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \dots\dots</math></p>
<p><math>\vec{AA}</math></p>	<p>ก. 23</p> <p>จะพบว่า <math>\vec{AA}</math> หรือ <math>\vec{PP}</math> หรือ <math>\vec{BB}</math> ต่างก็ เป็น เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่จุด ..... (เดียวกัน/ต่างกัน) และมีขนาดเป็น .....</p>
<p>เดียวกัน, ศูนย์</p>	<p>ก. 24</p> <p>เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เรียกว่า <u>เวกเตอร์ศูนย์</u> และ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ <math>\vec{0}</math> ดังนั้น จึง เรียกเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลาย ที่จุดเดียวกันว่า เวกเตอร์ ..... และ เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ .....</p>
<p>ศูนย์, <math>\vec{0}</math></p>	<p>ก. 25</p> <p>นั่นคือ <math>\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \dots\dots\dots</math></p>
<p><math>\vec{0}</math></p>	<p>ก. 26</p> <p><math>\vec{AB}</math> และ <math>\vec{BA}</math> มีขนาด ..... แต่มีทิศทาง .. ..... และ <math>\vec{AB} + \vec{BA} = \dots\dots\dots</math></p>

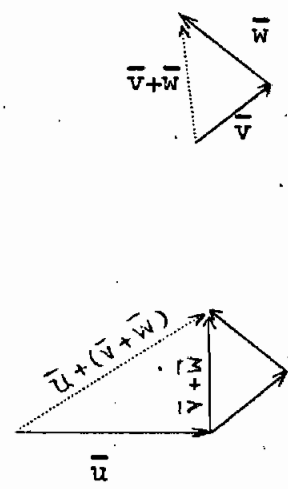
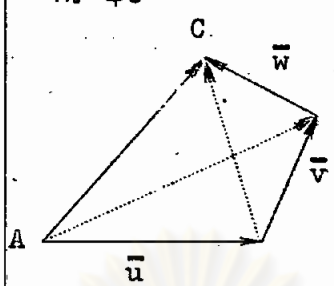
<p>เท่ากัน, ตรงข้ามกัน</p> <p><math>\vec{0}</math></p>	<p>ก. 27</p> <p>จึงสรุปได้ว่า เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใดๆที่มีขนาด .....แต่ทิศทาง ..... บวกกันจะได้ - เวกเตอร์ศูนย์</p>
<p>เท่ากัน, ตรงข้ามกัน</p>	<p>ก. 28</p> <p><math>\vec{ST} + \vec{TS} = \dots\dots\dots</math></p> <p><math>\vec{CD} + \dots\dots = \vec{0}</math></p>
<p><math>\vec{0}</math></p> <p><math>\vec{DC}</math></p>	<p>ก. 29</p> <p>จะเขียนแทนเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ <math>\vec{u}</math> แต่มี ทิศทางตรงข้ามกับ <math>\vec{u}</math> ด้วยสัญลักษณ์ <math>-\vec{u}</math> ดังนั้น จะเขียนแทนเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ <math>\vec{AB}</math> แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ <math>\vec{AB}</math> ด้วยสัญลักษณ์ .....</p>
<p><math>-\vec{AB}</math></p>	<p>ก. 30</p> <p>จะได้ว่า <math>\vec{AB} + (-\vec{AB}) = \dots\dots\dots</math></p> <p><math>\vec{a} + \dots\dots = \vec{0}</math></p>
<p><math>\vec{0}</math></p> <p><math>-\vec{a}</math></p>	<p>ก. 31</p> <p>จะพบว่า สำหรับ <math>\vec{u}</math> และ <math>\vec{v}</math> ใดๆ จะมี <math>\vec{w}</math> ซึ่ง <math>\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}</math> ดังนั้น ผลบวกของ เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใดๆ จะเป็น ..... (สเกลาร์/เวกเตอร์)</p>



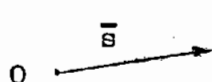
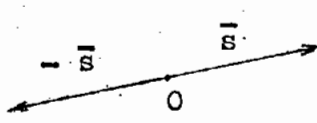
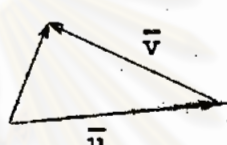
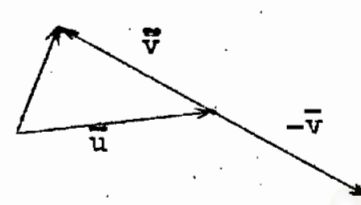
<p>เวกเตอร์</p>	<p>ก. 32</p> <p>สำหรับจำนวนจริงใดๆ เมื่อบวกกัน ผลบวกก็ยังคงเป็นจำนวนจริงอยู่ กล่าวหา จำนวนจริงมีคุณสมบัติปิด - สำหรับการบวก</p> <p>ดังนั้น เมื่อผลบวกของ <u>เวกเตอร์ 2</u> เวกเตอร์ใดๆ ยังคงเป็น <u>เวกเตอร์</u> จึงสรุปได้ว่า เวกเตอร์มีคุณสมบัติ.....</p>
<p>ปิดสำหรับการบวก</p>	<p>ก. 33</p> <p>เวกเตอร์มีคุณสมบัติปิดของการบวกเพราะ ผลบวกของ 2 <u>เวกเตอร์</u> ใดๆ ยังคงเป็น .....</p>
<p>เวกเตอร์</p>	<p>ก. 34</p> <p>จงพิจารณารูป</p>  <p><math>\vec{AB} = \dots\dots\dots</math>      <math>\vec{A'B'} = \dots\dots\dots</math></p>
<p><math>\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{u}</math></p>	<p>ก. 35</p> <p>จากรูปจะไดว่า</p>  <p><math>\dots\dots\dots = \vec{AB} = \dots\dots\dots</math></p>



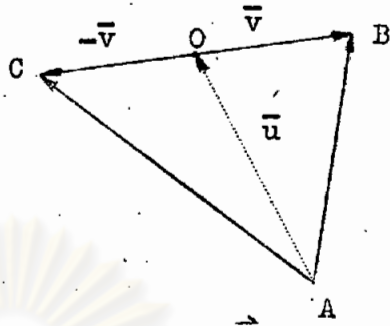
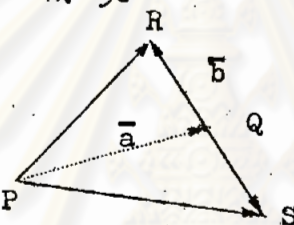
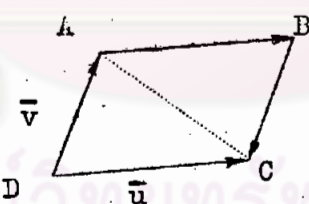
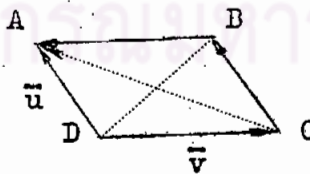
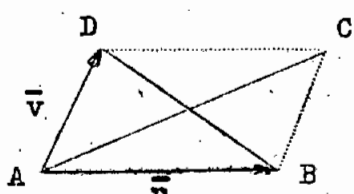
$\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{v} + \vec{u}$	<p>ก. 36</p> <p>สำหรับ <math>\vec{u}</math> และ <math>\vec{v}</math> ใดๆจะได้ <math>\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}</math>          จึงสรุปได้ว่า เวกเตอร์มีคุณสมบัติการสลับที่ของการ  <u>บวก</u></p> <p>ดังนั้น, <math>\vec{ST} + \vec{RS} = \vec{RS} + \dots = \dots</math>          เพราะเวกเตอร์มีคุณสมบัติ.....สำหรับการบวก</p>
$\vec{RS} + \vec{ST} = \vec{RT}$ การสลับที่	<p>ก. 37</p> $\vec{BC} + \vec{AB} = \dots + \dots$ $= \dots$
$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$	<p>ก. 38</p> <p>จงพิจารณารูป</p> <p><math>\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}</math>      ดังนั้น <math>\vec{AC} = (\dots + \dots) + \dots</math></p>
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	<p>ก. 39</p> <p>กำหนด <math>\vec{u}, \vec{v}</math> และ <math>\vec{w}</math> จงเขียนรูปแสดง  <math>\vec{v} + \vec{w}</math> และ <math>\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})</math></p> <p><math>\vec{v} + \vec{w}</math>      <math>\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})</math></p>

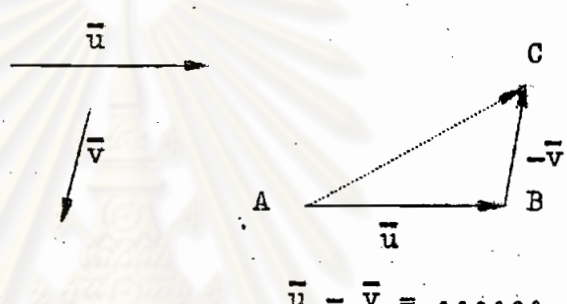
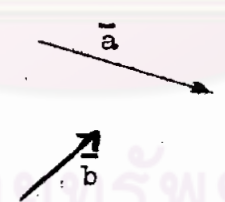
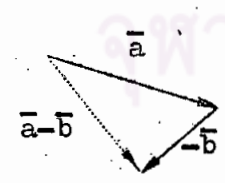
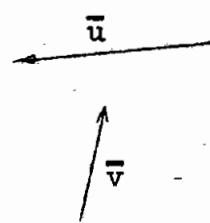
	<p>ก. 40</p>  <p>เวกเตอร์จะมีคุณสมบัติ - การจับหมู่สำหรับการบวก ถ้า <math>(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})</math> สำหรับ <math>\vec{u}, \vec{v}</math> และ <math>\vec{w}</math> ใดๆ</p> <p>จากรูป <math>\vec{AC} = (\dots+\dots) + \dots</math> หรือ <math>\vec{AC} = \dots+(\dots+\dots)</math> แสดงว่า <math>(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})</math> จึงสรุปได้ว่า เวกเตอร์มีคุณสมบัติ ..... สำหรับการบวก</p>
<p><math>(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w}, \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})</math> การจับหมู่</p>	<p>ก. 41</p> <p><math>\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AA} + \vec{AB} = \dots\dots\dots</math></p>
<p><math>\vec{AB}</math></p>	<p>ก. 42</p> <p>ดังนั้น <math>\vec{AB} + \vec{0} = \dots = \dots + \vec{AB}</math></p>
<p><math>\vec{AB}, \vec{0}</math></p>	<p>ก. 43</p> <p>ดังนั้นเมื่อ <math>\vec{u}</math> เป็นเวกเตอร์ใดๆ จะได้ว่า <math>\vec{u} + \dots = \vec{u} = \dots + \vec{u}</math></p>
<p><math>\vec{0}, \vec{0}</math></p>	<p>ก. 44</p> <p>จาก <math>\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}</math> จึงสรุป ได้ว่า เวกเตอร์มี <math>\vec{0}</math> เป็นเอกลักษณ์สำหรับการ การบวก</p> <p>ดังนั้น <math>\vec{w} + \dots = \vec{w}</math> เพราะเวกเตอร์ศูนย์ เป็น ..... ของการบวก</p>

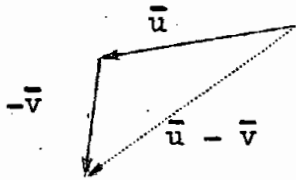
$\vec{0}$ , เวกต์ลักษณะ	ก. 45 สำหรับ $\vec{u}$ ใดๆ $\vec{u} + \dots = \vec{0}$
$-\vec{u}$	ก. 46 จะเรียก $-\vec{u}$ ว่าเป็น <u>อินเวอร์ส (inverse)</u> <u>สำหรับการบวกของ <math>\vec{u}</math></u> ในทำนองเดียวกัน $-\vec{AB}$ ก็จะเป็น ..... สำหรับการบวกของ .....
อินเวอร์ส, $\vec{AB}$	ก. 47 ทั้งนี้ ถ้านลบวกของ 2 เวกเตอร์ใดๆ เป็น <u>เวกเตอร์ศูนย์</u> เวกเตอร์ทั้งสองจะเป็น ..... สำหรับ ..... ของกันและกัน
อินเวอร์ส, การบวก	ก. 48 เมื่อ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ จะมี ..... <u>เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ <math>\vec{u}</math></u> เสมอ จึงสรุปได้ว่า เวกเตอร์ มี ..... สำหรับการบวก
$-\vec{u}$ , อินเวอร์ส	ก. 49 อินเวอร์สสำหรับการบวกของ เวกเตอร์ที่แทน การเดินทางไปทางทิศเหนือ 10 ไมล์ ก็คือ $-\vec{u}$ เวกเตอร์ที่แทนการ เดินทางไปทางทิศ..... เป็นระยะทาง ..... ไมล์

<p>ใต้, 10</p>	<p>ก. 50</p> <p>จงเขียนอินเวอร์สการบวกของ <math>\vec{u}</math> ที่กำหนดให้ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด <math>O</math></p> 
	<p>ก. 51</p> <p>จากจุดปลายของ <math>\vec{u}</math> จงเขียนอินเวอร์สของ <math>\vec{v}</math></p> 
	<p>ก. 52</p> <p>จากที่นักเรียนทราบแล้วในเรื่องระบบจำนวน ใต้ให้นิยามของ <math>a-b = a+(-b)</math> เมื่อ <math>a</math> และ <math>b</math> เป็นจำนวนจริงใดๆ</p> <p>ในทำนองเดียวกัน เรื่องของเวกเตอร์ ก็ นิยามการลบเวกเตอร์ โดย <math>\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})</math> เมื่อ <math>\vec{a}</math> และ <math>\vec{b}</math> เป็นเวกเตอร์ใดๆ</p> <p>ดังนั้น <math>\vec{u} - \vec{v} = \dots\dots\dots</math></p>
<p><math>\vec{u} + (-\vec{v})</math></p>	<p>ก. 53</p> <p>นักเรียนคงจำได้ว่า <math>(-\vec{v})</math> ก็คือ <math>\dots\dots\dots</math> สำหรับการบวกของ <math>\vec{v}</math></p>
<p>อินเวอร์ส</p>	<p>ก. 54</p> <p>นั่นคือ การลบ <math>\vec{u}</math> ด้วย <math>\vec{v}</math> ใญ่ๆก็คือการ.. <math>\dots\dots\dots</math> <math>\vec{u}</math> กับ <math>\dots\dots\dots</math> ของ <math>\vec{v}</math></p>



<p>บวก, อินเวอร์ส</p>	<p>ก. 55</p>  <p>จากรูป <math>\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB}</math> และ <math>\vec{u} - \vec{v} = \dots</math></p>
<p><math>\vec{AC}</math></p>	<p>ก. 56</p>  <p>Q เป็นจุดกึ่งกลางของ RS <math>\vec{a} + \vec{b} = \dots</math> <math>\vec{a} - \vec{b} = \dots</math></p>
<p><math>\vec{PR}</math> <math>\vec{PS}</math></p>	<p>ก. 57</p>  <p>ABCD เป็นสี่เหลี่ยมก้านขนาน <math>\vec{AB} = \vec{u}</math> และ <math>\vec{BC} = \dots</math> ดังนั้น <math>\vec{u} - \vec{v} = \dots</math></p>
<p><math>-\vec{v}</math> <math>\vec{AC}</math></p>	<p>ก. 58</p>  <p>ABCD เป็นสี่เหลี่ยมก้านขนาน <math>\vec{u} - \vec{v} = \dots</math></p>
<p><math>\vec{CA}</math></p>	<p>ก. 59</p>  <p>ABCD เป็นสี่เหลี่ยมก้านขนาน <math>\vec{u} + \vec{v} = \dots</math> <math>\vec{u} - \vec{v} = \dots</math></p>

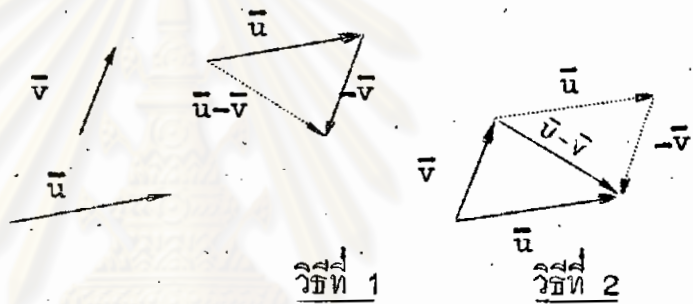
$\vec{AC}$ $\vec{DB}$	<p>ก. 60</p> <p>เนื่องจาก <math>\vec{u} - \vec{v}</math> ก็คือ <math>\vec{u} + (-\vec{v})</math> ดังนั้น -          การเขียนรูปแสดง <math>\vec{u} - \vec{v}</math> ก็ใช้หลักเดียวกับ -          การเขียนรูปแสดงการบวก เช่น</p>  <p><math>\vec{u} - \vec{v} = \dots\dots</math></p>
$\vec{AC}$	<p>ก. 61</p> <p>กำหนด <math>\vec{a}</math> และ <math>\vec{b}</math> จงเขียนรูปแสดง <math>\vec{a} - \vec{b}</math></p> 
	<p>ก. 62</p> <p>จงเขียนรูปแสดง <math>\vec{u} - \vec{v}</math></p> 



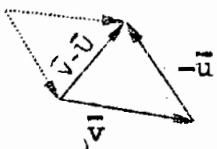
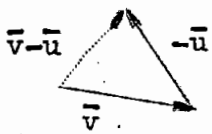
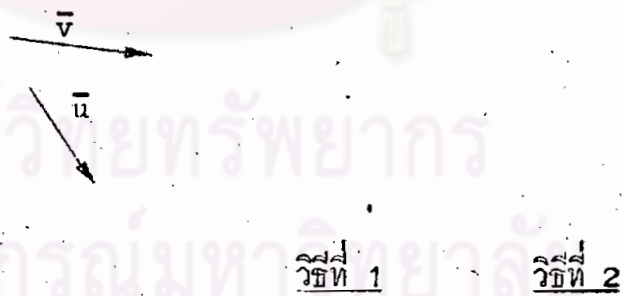
ก. 63.

นักเรียนคงจำได้ว่า อาจหา  $\vec{u} + \vec{v}$  ได้โดยวิธีสร้างสี่เหลี่ยมคางหมูที่  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  มีจุดเริ่มต้นรวมกัน

ดังนั้น ในการหา  $\vec{u} - \vec{v}$  ก็ทำได้โดยวิธีเดียวกัน แต่ควรระวังในการกำหนดหัวลูกศรให้ถูกต้อง ดังรูป

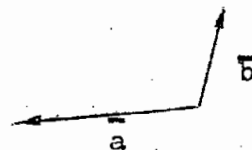


จาก  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่กำหนดให้ จงเขียนรูปแสดง  $\vec{v} - \vec{u}$  ทั้ง 2 วิธี



ก. 64

จงสร้างสี่เหลี่ยมคางหมู เพื่อแสดง  $\vec{a} - \vec{b}$



	<p>ก. 65</p> <p>จงเขียน <math>\vec{u} - \vec{v}</math> ลงในสี่เหลี่ยมคางหมู ข้างล่างนี้ พร้อมทั้งกำหนดหัวลูกศรให้ชัดเจน</p>
	<p>ก. 66</p> <p>จาก <math>\vec{u}</math> และ <math>\vec{v}</math> ที่กำหนดให้ จงสร้าง สี่เหลี่ยมคางหมูแสดง <math>\vec{u} + \vec{v}</math> และ <math>\vec{u} - \vec{v}</math></p> <p>แสดง <math>\vec{u} + \vec{v}</math>                      แสดง <math>\vec{u} - \vec{v}</math></p>
	<p>ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย</p>

### 3. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง " เวกเตอร์ "

1. บอกความหมายของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกปริมาณสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดปริมาณใดๆให้
3. บอกปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดปริมาณใดๆให้
4. เขียนสัญลักษณ์แทนปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกนิยาม เวกเตอร์ที่เท่ากันได้อย่างถูกต้อง
6. บอกเวกเตอร์ที่เท่ากันได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใดๆให้
7. เขียนสัญลักษณ์เศษของ เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
8. หานิเศษของ เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
9. บวกเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
10. บอกนิยามเวกเตอร์ศูนย์ได้อย่างถูกต้อง
11. สรุปคุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
12. ลบเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
13. คูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง
14. สรุปคุณสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้อย่างถูกต้อง
15. พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต โดยใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง
16. เขียนสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ในระบบมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
17. บอกความหมายของคำว่า " คลู่ลำดับ " ได้อย่างถูกต้อง
18. เขียนคลู่ลำดับแสดงจุดบนระนาบได้อย่างถูกต้อง
19. เขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
20. เขียนเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากที่มีจุดเริ่มต้นแตกต่างกันได้อย่างถูกต้อง
21. คำนวหาเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดให้
22. บวก และลบเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
23. หานิเศษเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง
24. พิสูจน์คุณสมบัติการบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากได้อย่างถูกต้อง



25. หาขนาดของ เวกเตอร์  $\vec{a}$  ใคอย่างถูกต้อง
26. บอกความหมายของ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใคอย่างถูกต้อง
27. เขียนสัญลักษณ์แทน เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใคอย่างถูกต้อง
28. เขียนเวกเตอร์ในรูป  $i$  และ  $j$  ใคอย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดเวกเตอร์ใคๆให้
29. คำนวณหาขนาดของ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทางเกี่ยวกับเวกเตอร์ใคๆใคอย่างถูกต้อง
30. คำนวณผลคูณ เวกเตอร์กับเวกเตอร์ใคอย่างถูกต้อง
31. สรุปลักษณะสมบัติของ เวกเตอร์คูณเวกเตอร์ใคอย่างถูกต้อง
32. คำนวณหามุมระหว่าง เวกเตอร์กับเวกเตอร์ใคอย่างถูกต้อง
33. สรุปลักษณะสมบัติของ เวกเตอร์สเกลใคอย่างถูกต้อง

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบทดสอบเรื่อง "เวกเตอร์"

คำสั่ง จงกาบทบาทให้ตัวอักษร ก, ข, ค, ง หรือ จ ตรงกับข้อที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด  
เพียงข้อเดียวในกระดาษคำตอบ

- 1) ปริมาณเวกเตอร์ คือข้อใด
  - ก. ความหนาแน่น
  - ข. โมเมนต์
  - ค. ปริมาตร
  - ง. พื้นที่
  - จ. เวลา
- 2) ปริมาณที่แทนด้วยขนาด คือข้อใด
  - ก. การเคลื่อนที่
  - ข. แรง
  - ค. ความเร็ว
  - ง. มวล
  - จ. ความเร่ง
- 3) สมชายเดินทางในทิศ  $030^\circ$  เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร แล้ว  
ออกเดินทางในทิศ  $150^\circ$  เป็นระยะทาง 1 กิโลเมตร สมชายจะ  
อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าไร
  - ก. 1 กม.
  - ข.  $\sqrt{3}$  กม.
  - ค. 2 กม.
  - ง.  $2\sqrt{2}$  กม.
  - จ.  $2\sqrt{3}$  กม.

- 4) กำหนดให้ PQRSTU เป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่า เวกเตอร์ที่เป็น  
 นิเสธของกันและกัน คือข้อใด

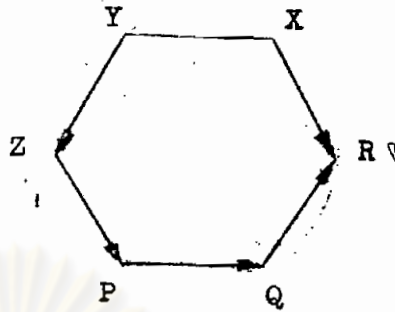
ก.  $\vec{PQ}$  กับ  $\vec{YX}$

ข.  $\vec{RX}$  กับ  $\vec{YZ}$

ค.  $\vec{PZ}$  กับ  $\vec{QR}$

ง.  $\vec{QR}$  กับ  $\vec{YZ}$

จ.  $\vec{ZP}$  กับ  $\vec{XR}$



- 5) กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีความยาวด้าน  
 แต่ละด้านเท่ากับ b หน่วย ความยาวของเวกเตอร์ -  
 $\vec{AB} + \vec{AD}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก.  $\sqrt{2}b$  หน่วย

ข.  $2b$  หน่วย

ค.  $\sqrt{3}b$  หน่วย

ง.  $2\sqrt{2}b$  หน่วย

จ.  $b^2$  หน่วย



- 6) กำหนดให้  $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$  โคออร์ดิเนตของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์  
 $\vec{u}$  ที่มีจุดเริ่มต้น  $(2, -1)$  มีค่าเท่าไร

ก.  $(-1, 1)$

ข.  $(-5, 3)$

ค.  $(1, -1)$

ง.  $(2, -3)$

จ.  $(4, -2)$

- 7) เวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่  $(3, 2)$  และจุดสิ้นสุดที่  $(-2, 5)$   
 เขียนในรูปของ  $\vec{i}$  และ  $\vec{j}$  ได้อย่างไร

ก.  $-\vec{i} + 3\vec{j}$

ข.  $\vec{i} + 3\vec{j}$

ค.  $\vec{i} - 3\vec{j}$

ง.  $-5\vec{i} + 3\vec{j}$

จ.  $-5\vec{i} - 3\vec{j}$

8. กำหนดให้จุด  $O(0,0)$ ,  $A(2,3)$  และ  $B(-4, 5)$  แล้ว  $\vec{OA} + \vec{OB}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร
- ก.  $-2\vec{i} + 8\vec{j}$   
 ข.  $2\vec{i} + 8\vec{j}$   
 ค.  $-2\vec{i} - 8\vec{j}$   
 ง.  $8\vec{i} + 2\vec{j}$   
 จ.  $-8\vec{i} + 2\vec{j}$
9. ขนาดของ เวกเตอร์  $4\vec{i} - 3\vec{j}$  มีค่าเท่ากับขนาดของ เวกเตอร์ใด
- ก.  $-3\vec{i} + 2\vec{j}$   
 ข.  $2\vec{i} - 4\vec{j}$   
 ค.  $-3\vec{i} - 2\vec{j}$   
 ง.  $2\sqrt{6}\vec{i} - \vec{j}$   
 จ.  $2\sqrt{2}\vec{i} + 3\vec{j}$
10. กำหนดให้  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$  ถ้า  $\vec{u}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) ที่มีทิศทางเดียวกับ  $\vec{v}$  แล้ว  $\vec{u}$  มีค่าเท่าไร
- ก.  $\frac{1}{\sqrt{37}} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 ข.  $\frac{1}{\sqrt{37}} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 ค.  $\frac{1}{\sqrt{37}} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 ง.  $\frac{1}{\sqrt{37}} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$   
 จ.  $\frac{1}{\sqrt{37}} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

11. เวกเตอร์ต่อไปนี้ คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ก.  $\vec{a} // \vec{b}$  และ  $\vec{c} // \vec{d}$

ข.  $\vec{a} // \vec{c}$  และ  $\vec{b} // \vec{d}$

ค.  $\vec{a} // \vec{d}$  และ  $\vec{b} // \vec{c}$

ง.  $\vec{a} // \vec{c} // \vec{d}$

จ.  $\vec{b} // \vec{c} // \vec{d}$

12. กำหนดให้  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$   
แล้ว  $\vec{u}, \vec{v}$  มีค่าเท่าไร

ก. 10

ข. 11

ค. 12

ง. 13

จ. 14

13. กำหนดให้  $2\vec{i} - 3\vec{j} = a(2\vec{i} + \vec{j}) + b(\vec{i} + \vec{j})$

แล้ว  $a, b$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก.  $a = 5, b = -8$

ข.  $a = 0, b = -1$

ค.  $a = 2, b = -3$

ง.  $a = -2, b = 0$

จ.  $a = -8, b = 5$



14. เมื่อ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ข้อสรุปใดไม่เป็นจริง

ก.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

ข.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

ค.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

ง. ถ้า  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ,  $\vec{u} \neq 0$  และ  $\vec{v} \neq 0$  แล้ว  $\vec{u}$  ตั้งฉากกับ  $\vec{v}$

จ.  $\vec{i} + \vec{j}$  คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วย

15. ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมก้านขนาน ข้อสรุปใดถูกต้อง

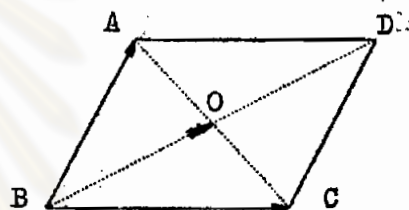
ก.  $\vec{BO} + \vec{CO} = \vec{BC}$

ข.  $\vec{AO} + \vec{CO} = \vec{AC}$

ค.  $\vec{BA} - \vec{BO} = \vec{AO}$

ง.  $2\vec{BO} = \vec{BA} + \vec{BC}$

จ.  $2(\vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA}$



16. ให้  $P = (1, 0)$ ,  $Q = (5, 0)$  และ  $R = (3, 4)$  เป็นจุดยอดของรูป  $\triangle PQR$  เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งมีทิศทางเดียวกับส่วนของเส้นตรงจาก  $P$  ไปยังจุดกึ่งกลางของ  $QR$  มีค่าเท่าไร

ก.  $-\frac{2}{\sqrt{13}} \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{j}$

ข.  $\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{j}$

ค.  $-\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{j}$

ง.  $\frac{2}{\sqrt{13}} \vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{j}$

จ.  $\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{j}$

17. กำหนดให้  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ ดังรูป แล้ว  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  มีค่าเท่ากับ

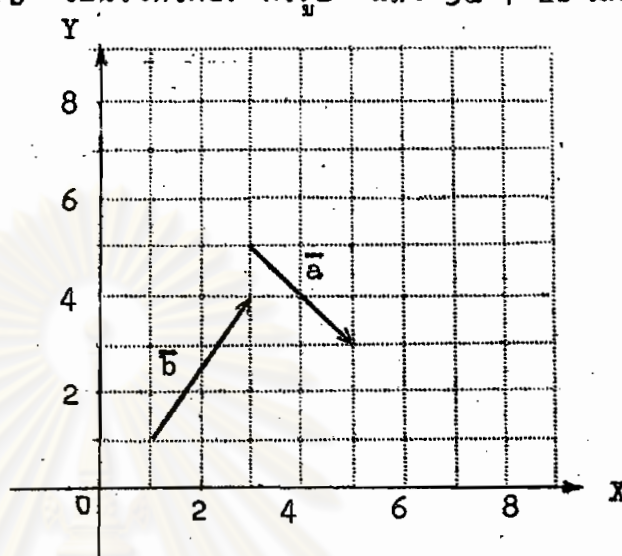
ก.  $\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$

ข.  $\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค.  $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

ง.  $\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$

จ.  $\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$



18. กำหนดให้  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  เป็นเวกเตอร์ ดังรูป แล้ว  $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$  มีค่าเท่ากับ

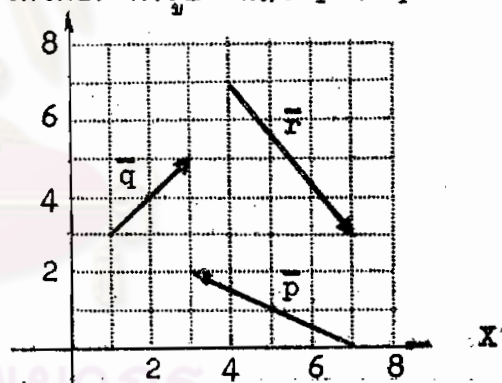
ก.  $-6\vec{i} + 2\vec{j}$

ข.  $-5\vec{i} + 8\vec{j}$

ค.  $-4\vec{i} + 2\vec{j}$

ง.  $-4\vec{i} - 2\vec{j}$

จ.  $-3\vec{i} + 4\vec{j}$



19. กำหนดให้  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จากสมการ

$$5\vec{u} = (x + y)\vec{u} + (x - y)\vec{v} \quad \text{ค่า } x \text{ และ } y \text{ มีค่าเท่ากับ}$$

ก.  $x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$

ข.  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

ค.  $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$

ง.  $x = \frac{3}{2}, y = \frac{2}{3}$

จ.  $x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{2}$

20. กำหนดให้  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  เป็นเวกเตอร์และ  $m$  เป็นจำนวน การ  
เขียนในข้อใดต่อไปนี้ ข้อสรุปใดไม่มีความหมาย

ก.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

ข.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$

ค.  $m (\vec{v} \cdot \vec{w}) + \vec{u}$

ง.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$

จ.  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

21. สามเหลี่ยม ABC กำหนดให้จุด  $A(1,0)$ ,  $B(3,2)$ ,  $C(2,3)$

มุม ABC มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก.  $120^\circ$

ข.  $90^\circ$

ค.  $60^\circ$

ง.  $45^\circ$

จ.  $30^\circ$

22. กำหนดให้  $|\vec{u}| = 3$ ,  $|\vec{v}| = 4$ ,  $|\vec{w}| = 5$

ถ้า  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$  มุมระหว่าง  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  มีค่าเท่าไร

ก.  $30^\circ$

ข.  $45^\circ$

ค.  $60^\circ$

ง.  $75^\circ$

จ.  $90^\circ$

23. ค่าของ  $p$  ซึ่งทำให้  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$  ตั้งฉากกับ -

$\vec{b} = p\vec{i} + 3\vec{j}$  มีค่าเท่าไร

ก. 3

ข. 4

ค. 5

ง. 6

จ. 7

24. กำหนดให้  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  โคซายน์ของมุม  
ระหว่าง  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก.  $-\frac{1}{13}$

ข.  $-\frac{2}{13}$

ค.  $-\frac{6}{13}$

ง.  $-\frac{9}{13}$

จ.  $-\frac{12}{13}$

25. เซตที่ไม่ใช่เวกเตอร์สเปซ คือข้อใด

ก. เซตของส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง

ข. เซตของสมาชิกในรูป  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

ค. เซตของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

ง. เซตของเวกเตอร์ในระนาบ

จ. เซตของฟังก์ชัน  $1 - 1$  จาก  $\mathbb{R}$  ไป  $\mathbb{R}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจแบบสอบความคึกเห็นของนักเรียนที่มีต่อ  
การ เรียนโดยวิธีสอนแบบผสม

1. รองศาสตราจารย์ ดร. สุจริต เพ็ชรชอบ
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จันทรเพ็ญ เชื้อพานิช
3. อาจารย์ ดร. รวีวรรณ คุ้มชัย



ศูนย์วิทยพัชกร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนโดยวิธีสอนแบบผสม

คำแนะนำในการทำแบบสอบถาม

แบบสอบถามนี้ ต้องการทราบความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อวิธีสอนแบบผสม ซึ่งผู้วิจัยสอนไปแล้ว โดย การจัดการ เรียนการสอนหลายแบบเช่น อภิปราย ทดลองถามตอบ ฯลฯ ขอให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามต่อไปนี้ ตามความเป็นจริง เพื่อประโยชน์ในการวิจัย

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของนักเรียน

การ เรียนคณิตศาสตร์ โดยวิธีสอนแบบผสม	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ
1. เข้าใจบทเรียนดี			
2. มีความกระตือรือร้นในการ เรียน			
3. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์			
4. รู้จักสังเกตและรู้จักคิด			
5. มีความมั่นใจในตนเอง			
6. มีความรับผิดชอบมากขึ้น			
7. มีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง			
8. มีการฝึกในค่านการตัดสินใจแก้ปัญหาต่างๆ			
9. มีการฝึกในค่านการตอบคำถาม			
10. มีโอกาสแสดงความคิดเห็น			
11. มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน			
12. รู้จักคนกว่า			
13. สามารถสรุปบทเรียนได้ด้วยตนเอง			
14. ทดลองทำด้วยตนเองได้			
15. สนใจในการ เรียนมากขึ้น			

การ เรียบนคณิตศาสตร์โดยวิธีสอนแบบผสม	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ
16. อยากทำการบ้านมากขึ้น			
17. รู้สึกภูมิใจในการทำโจทย์แบบฝึกหัดได้ถูกต้อง			
18. อยากทำโจทย์พิเศษอีก			
19. ทำข้อสอบได้ดีขึ้น			
20. อยากเรียนแบบนี้ในทุกบทเรียน			
21. เกิดความพอใจในสภาพการ เรียนซึ่งแตกต่างจากเดิม			
22. ชอบเรียนคณิตศาสตร์ เพราะทำได้โดยไม่ต้องท่องจำ			
23. อยากเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่า เดิม			
24. อยากเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นสูงต่อไป			

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข.

1. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือได้ของแบบสอบ เรื่อง "เวกเตอร์" ก่อนนำไปใช้ในการวิจัย
2. แสดงการวิเคราะห์แบบทดสอบเพื่อเลือกข้อที่มีอำนาจจำแนกและ — ความยากง่ายสูง
3. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือได้ของแบบสอบที่คัดเลือกมาเพื่อใช้กับกลุ่มตัวอย่างประชากรจริง

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความเชื่อถือได้ของแบบสอบถามนำไปใช้ในการวิจัยตามลำดับดังนี้

1.1 หาค่ามัธยฐาน เลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

x	f	fx	$x^2$	$fx^2$
34	1	34	1156	1156
33	1	33	1089	1089
32	2	64	1024	2048
31	1	31	961	961
30	2	60	900	1800
28	3	84	784	2352
27	4	108	729	2916
26	7	182	676	4732
25	4	100	625	2500
24	7	168	576	4032
23	9	207	529	4761
22	6	132	484	2904
21	7	147	441	3087
20	4	80	400	1600
19	4	76	361	1444
18	5	90	324	1620
17	4	68	289	1156
15	3	45	225	675
14	2	28	196	392
13	2	26	169	338
11	2	22	121	242
10	1	10	100	100
	N = 81	$\Sigma fx = 1795$		$\Sigma fx^2 = 41905$

ก. หามัธยิมเลขคณิต

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \bar{X} &= \frac{\sum fx}{N} \\ &= \frac{1795}{81} \\ &= 22.16 \end{aligned}$$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบ

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \text{S.D.} &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{41905}{81} - \left(\frac{1795}{81}\right)^2} \\ &= \sqrt{517.35 - (22.16)^2} \\ &= \sqrt{517.35 - 491.07} \\ &= \sqrt{26.28} \\ &= 5.13 \end{aligned}$$

1.2 หาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือได้ของแบบสอบเรื่อง " เวกเตอร์ "  
ก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

$$\text{จากสูตร} \quad r_{tt} = \frac{n (S.D.)^2 - \bar{X} (n - \bar{X})}{(S.D.)^2 (n - 1)}$$

$$\bar{X} = 22.16$$

$$(S.D.)^2 = 26.28$$

$$n = 40$$



$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{40(26.28) - 22.16(40 - 22.16)}{26.28(40 - 1)} \\
 &= \frac{1051.20 - 22.16(17.84)}{26.28(39)} \\
 &= \frac{1051.20 - 395.33}{1024.92} \\
 &= \frac{655.87}{1024.92} \\
 &= 0.64
 \end{aligned}$$

นั่นคือแบบสอที่สร้างขึ้นมีความเชื่อถือได้ 0.64

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. แสดงการวิเคราะห์แบบทดสอบเรื่อง " เวกเตอร์ " เพื่อเลือกข้อที่มี  
อำนาจจำแนกและระดับความยากง่ายสูง (ใช้วิธีวิเคราะห์แบบคัต 27%)

ข้อที่	$P_H$	$P_L$	ความยากง่าย ( p )	อำนาจจำแนก ( r )	หมายเหตุ
1	0.85	0.43	0.65	0.46	
2	0.76	0.38	0.57	0.39	
3	0.95	0.48	0.75	0.59	
4	0.90	0.62	0.77	0.38	
5	0.90	0.33	0.64	0.60	
6	0.29	0.19	0.24	0.13	*
7	0.52	0.29	0.40	0.24	
8	0.87	0.44	0.66	0.47	
9	0.52	0.38	0.45	0.14	*
10	0.76	0.52	0.64	0.26	
11	0.95	0.71	0.85	0.41	*
12	0.48	0.14	0.30	0.39	
13	0.76	0.48	0.62	0.30	
14	0.24	0.24	0.24	0.00	*
15	0.24	0.24	0.24	0.00	*
16	1.00	0.67	0.87	0.63	*
17	0.24	0.14	0.19	0.15	*
18	0.76	0.29	0.53	0.47	*
19	0.95	0.76	0.87	0.36	*
20	0.76	0.52	0.64	0.26	
21	0.76	0.48	0.62	0.30	
22	0.67	0.57	0.62	0.11	*
23	0.90	0.38	0.66	0.57	
24	0.62	0.14	0.36	0.51	
25	0.62	0.24	0.43	0.39	
26	0.95	0.33	0.68	0.68	*
27	0.76	0.29	0.53	0.47	
28	0.71	0.24	0.47	0.47	

2. แสดงการวิเคราะห์แบบทดสอบเรื่อง " เวกเตอร์ " เพื่อเลือกข้อที่มี  
อำนาจจำแนกและระดับความเชื่อมั่นสูง (ใช้วิธีวิเคราะห์แบบตัด 27 %)

ข้อที่	$P_H$	$P_L$	ความยากง่าย ( p )	อำนาจจำแนก ( r )	หมายเหตุ
29	0.71	0.14	0.41	0.58	
30	0.52	0.10	0.29	0.49	
31	0.24	0.05	0.13	0.36	*
32	0.05	0.14	0.09	0.22	*
33	0.24	0.05	0.13	0.36	*
34	0.62	0.33	0.47	0.29	
35	0.67	0.24	0.45	0.44	
36	0.52	0.19	0.35	0.36	
37	0.66	0.10	0.36	0.59	
38	0.38	0.14	0.25	0.31	
39	0.29	0.19	0.24	0.13	*
40	0.52	0.19	0.35	0.35	

จำนวนข้อทั้งหมด 40 ข้อ

ข้อที่มีเครื่องหมาย \* ตัดทิ้งไป จำนวน 15 ข้อ

ข้อที่ไม่มีเครื่องหมาย \* เก็บไว้ทั้งหมด จำนวน 25 ข้อ

3. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อใจได้ของแบบทดสอบที่เลือกไว้ 25 ข้อ สำหรับใช้กับกลุ่มตัวอย่างประชากรจริง

3.1 หามัชฌิมเลขคณิตของคะแนน และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบที่เลือกมา 25 ข้อ

x	f	fx	$x^2$	$fx^2$
24	1	24	576	576
23	3	69	529	1587
22	2	44	484	968
21	4	84	441	1764
20	6	120	400	2400
18	5	90	324	1620
17	7	119	289	2023
16	9	144	256	2304
15	5	75	225	1125
14	7	98	196	1372
13	5	65	169	845
12	5	60	144	720
11	14	154	121	1694
10	2	20	100	200
9	1	9	81	81
8	5	40	64	320
N = 81		$\sum fx =$ 1215		$\sum fx^2 =$ 19599

ก. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \bar{X} &= \frac{\sum fx}{N} \\ &= \frac{1215}{81} \\ &= 15 \end{aligned}$$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบสอบ

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \text{S.D.} &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{19599}{81} - \left(\frac{1215}{81}\right)^2} \\ &= \sqrt{241.96 - (15)^2} \\ &= \sqrt{16.96} \\ &= 4.12 \end{aligned}$$

3.2 หาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือใจของแบบสอบเรื่อง " เวกเตอร์ "  
ที่เลือกมา 25 ข้อ สำหรับใช้กับกลุ่มตัวอย่างประชากรจริง

$$\text{จากสูตร} \quad r_{tt} = \frac{n (\text{S.D.})^2 - \bar{X} (n - \bar{X})}{(\text{S.D.})^2 (n - 1)}$$

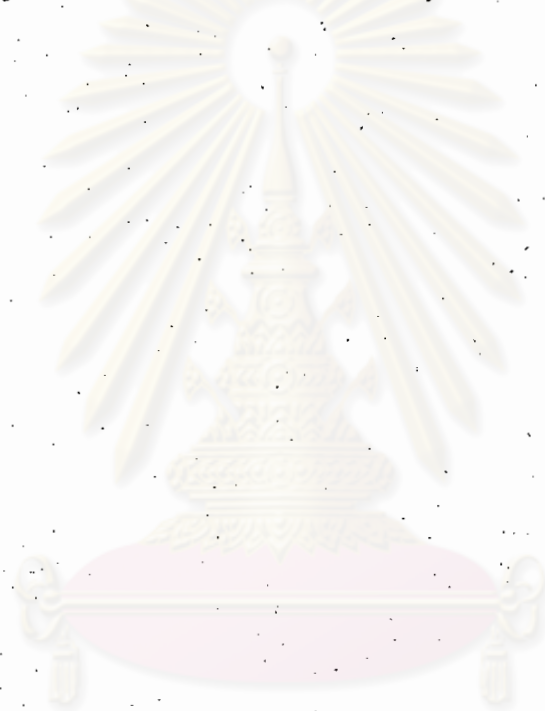
$$\begin{aligned} \bar{X} &= 15 \\ (\text{S.D.})^2 &= 16.96 \\ n &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{tt} &= \frac{25 (16.96) - 15 (25 - 15)}{16.96 (24)} \\ &= \frac{424 - 150}{407.04} \end{aligned}$$

$$= \frac{274.00}{407.04}$$

$$= 0.67$$

นั่นคือแบบสอบ 25 ข้อนี้ มีความเชื่อถือได้ 0.67



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก ก.

1. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัชฌิม เลขคณิตจากการสอบ  
ก่อนการทดลอง ของนักเรียนกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม
2. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัชฌิม เลขคณิตของคะแนนสอบ  
ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัธยฐานเลขคณิตจากการสอบก่อนการทดลอง  
ของนักเรียนกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง

คะแนน	$x_1$	f	$fx_1$	$fx_1^2$
90 - 94	92	1	92	8464
85 - 89	87	4	348	30276
80 - 84	82	3	246	20172
75 - 79	77	3	231	17787
70 - 74	72	3	216	15552
65 - 69	67	8	536	35912
60 - 64	62	6	372	23064
55 - 59	57	4	228	12996
50 - 54	52	3	156	18112
45 - 49	47	-	-	-
40 - 44	-	-	-	-
		$N_1$	$\Sigma fx_1$	$\Sigma fx_1^2$
		= 35	= 2425	= 172335

กลุ่มควบคุม

คะแนน	$x_2$	f	$fx_2$	$fx_2^2$
90 - 94	92	-	-	-
85 - 89	87	2	174	15138
80 - 84	82	4	328	26896
75 - 79	77	5	385	29645
70 - 74	72	6	432	31104
65 - 69	67	3	201	13467
60 - 64	62	1	62	3844
55 - 59	57	5	285	16245
50 - 54	52	5	260	13520
45 - 49	47	2	94	4418
40 - 44	42	1	42	1764
		$N_2$	$\Sigma fx_2$	$\Sigma fx_2^2$
		= 34	= 2263	= 156041

กลุ่มทดลอง

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 35 \\
 \bar{x}_1 &= \frac{\Sigma fx_1}{N_1} \\
 &= \frac{2425}{35} \\
 &= 69.29
 \end{aligned}$$

กลุ่มควบคุม

$$\begin{aligned}
 N_2 &= 34 \\
 \bar{x}_2 &= \frac{\Sigma fx_2}{N_2} \\
 &= \frac{2263}{34} \\
 &= 66.59
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{\frac{\sum fx_1^2}{N_1} - \left(\frac{\sum fx_1}{N_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{172335}{35} - \left(\frac{2425}{35}\right)^2} \\ &= \sqrt{4923.86 - 4801.10} \\ &= 11.08\end{aligned}$$

$$\sigma_1^2 = 122.77$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sqrt{\frac{\sum fx_2^2}{N_2} - \left(\frac{\sum fx_2}{N_2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{156041}{34} - \left(\frac{2263}{34}\right)^2} \\ &= \sqrt{4589.44 - 4434.23} \\ &= 12.46\end{aligned}$$

$$\sigma_2^2 = 155.25$$

จากสูตร

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned}Z &= \frac{69.29 - 66.59}{\sqrt{\frac{122.77}{35} + \frac{155.25}{34}}} \\ &= \frac{2.70}{\sqrt{3.51 + 4.57}} \\ &= \frac{2.70}{\sqrt{8.08}} \\ &= \frac{2.70}{2.84} \\ &= 0.95\end{aligned}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$\text{แต่ } 0.95 < 2.58$$

∴ มีซิม เลขคณิตของคะแนนก่อนการทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01 ไม่แตกต่างกัน

2. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัธยฐานเลขคณิตของคะแนนสอบ  
ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง

$x_1$	f	$fx_1$	$fx_1^2$
25	4	100	2500
23	4	92	2116
22	3	66	1452
21	1	21	441
20	2	40	800
19	3	57	1083
18	1	18	324
17	4	68	1156
16	4	64	1024
15	3	45	675
14	1	14	196
13	1	13	169
12	2	24	288
10	2	20	200
	$N = 35$	$\sum fx_1$ = 642	$\sum fx_1^2$ = 12424

กลุ่มควบคุม

$x_2$	f	$fx_2$	$fx_2^2$
25	1	25	625
21	1	21	441
20	2	40	800
19	2	38	722
18	1	18	324
17	3	51	867
16	6	96	1536
15	6	90	1350
14	2	28	392
13	2	26	338
12	2	24	288
11	1	11	121
10	1	10	100
9	2	18	162
8	1	8	64
7	1	7	49
	$N_2 = 34$	$\sum fx_2$ = 511	$\sum fx_2^2$ = 8179

กลุ่มทดลอง

$$N_1 = 35$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum fx_1}{N_1}$$

$$= \frac{642}{35}$$

$$= 18.34$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum fx_1^2}{N_1} - \left(\frac{\sum fx_1}{N_1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12424}{35} - \left(\frac{642}{35}\right)^2}$$

$$= \sqrt{354.97 - 336.46}$$

$$= \sqrt{18.51}$$

$$\therefore \sigma_1^2 = 18.51$$

กลุ่มควบคุม

$$N_2 = 34$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum fx_2}{N_2}$$

$$= \frac{511}{34}$$

$$= 15.03$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum fx_2^2}{N_2} - \left(\frac{\sum fx_2}{N_2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8179}{34} - \left(\frac{511}{34}\right)^2}$$

$$= \sqrt{240.56 - 225.88}$$

$$= \sqrt{14.68}$$

$$\therefore \sigma_2^2 = 14.68$$

จากสูตร

Z =

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

แทนค่า

Z =

$$\frac{18.34 - 15.03}{\sqrt{\frac{18.51}{35} + \frac{14.68}{34}}}$$

$$= \frac{3.31}{\sqrt{0.53 + 0.43}}$$

$$= \frac{3.31}{\sqrt{0.96}}$$

$$= \frac{3.31}{0.98}$$

$$z = 3.38$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$\text{แต่ } 3.38 > 2.58$$

∴ มีชนิดมีเลขคณิตของคะแนนหลังการทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01 แตกต่างกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ประวัติ

นางละเมียด กรบงกชมาศ เกิดเมื่อวันที่ 16 พฤศจิกายน 2493 จังหวัด กรุงเทพมหานคร จบปริญญาตรีทางการศึกษาจากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร วิชาเอก คณิตศาสตร์ วิชาโท โภชนาการ เมื่อปี พ.ศ. 2516 ปัจจุบันรับราชการอยู่ที่ โรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม แขวงบางค้วน กรุงเทพมหานคร สอนวิชา - คณิตศาสตร์ ทำหน้าที่พิเศษเป็นนายทะเบียนของโรงเรียน.



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย