การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยฟังก์ชันหดตัวสองตัวแปรและเวฟเล็ตแพคเก็ตต้นไม้ศูนย์

นายพิชิต กิตติสุวรรณ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2550

IMAGE DENOISING USING BIVARIATE SHRINKAGE FUNCTIONS AND WAVELET PACKET ZEROTREES

Mr. Pichid Kittisuwan

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยฟังก์ชันหดตัวสองตัวแปรและเวฟเล็ตแพคเก็ตต้นไม้ศูนย์
โดย	นายพิชิต กิตติสุวรรณ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชาญชัย ปลื้มปิติวิริยะเวช)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(อาจารย์ ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ)

....กรรมการ

(อาจารย์ ดร. สรรพฤทธิ์ มฤคทัต)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง)

พิชิต กิตติสุวรรณ์ : การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยฟังก์ชันหดตัวสองตัวแปรและเวฟเล็ตแพคเก็ตต้นไม้ศูนย์ (IMAGE DENOISING USING BIVARIATE SHRINKAGE FUNCTIONS AND WAVELET PACKET ZEROTREES)
อ. ที่ปรึกษา : อ.ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ, 121 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพ ในปริภูมิเวฟเล็ตด้วยการประยุกต์ใช้วิธีคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่นร่วมกับฟังก์ชันหดตัวแบบ 2 ตัวแปร แนวคิดของฟังก์ชันหดตัวแบบ 2 ตัวแปร คือ การจำลองสัญญาณด้วยการประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดและค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด นอกจากนี้ยังประยุกต์ใช้วิธีคำนวณความแปรปรวนแบบท้องถิ่นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนให้ดีขึ้นด้วย

นอกจากนี้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยังประยุกต์ใช้เทคนิคผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตในการลดสัญญาณรบกวนภาพโดยหาต้นไม้ที่ดีที่สุดผ่านทางฟังก์ชันนอร์มเอนโทรปีมาตรฐาน

ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ค่า PSNR ที่ดีกว่าวิธี NeighShrink และ BiShrink ยกเว้นวิธีที่ประยุกต์ใช้จุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่นกับวิธีประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดแบบ 2 ตัวแปร ส่วนวิธีที่นำเสนอด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตนั้นจะให้ค่า PSNR ที่ดีมากกับภาพที่มีลักษณะเป็นสัญญาณรายคาบ เช่น ภาพ Barbara เป็นต้น

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต พิชิต กิตติสุวรรณ์

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2550

4870684621 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEYWORD : BIVARIATE SHRINKAGE FUNCTION / MMSE ESTIMATOR / MAP ESTIMATOR / NEIGHSHRINK / WAVELET PACKET ZEROTREES

PICHID KITTISUWAN : IMAGE DENOISING USING BIVARIATE SHRINKAGE FUNCTIONS AND WAVELET PACKET ZEROTREES. THESIS ADVISOR : WIDHYAKORN ASDORNWISED, Ph.D., 121 pp.

This thesis presents image-denoising methods performed within wavelet domain scheme by incorporating neighboring coefficients, namely NeighShrink, and at the same time denoising the image with Bivariate Shrinkage Functions. The ideas of Bivariate Shrinkage Functions are to model the signal based on MAP and MMSE estimation approach. Furthermore, local variance estimation is applied to further improve the performances of the methods.

Besides, this thesis also applies the wavelet packet transforms by which the best tree is determined based on standard entropy method to denoised image.

Experimental results show that ours proposed methods have generally better PSNR than NeighShrink and BiShrink. Except NeighShrink applied with Bivariate-MAP estimation method. In particular, one of our proposed methods using wavelet packet Zerotrees have much better PSNR in oscillatory images, e.g. Barbara test image.

Department .... Electrical Engineering .... Student's signature ....

Field of study ..... Electrical Engineering .... Advisor's signature ....

Academic year .... 2007 ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ข้าพเจ้าใคร่ขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงสำหรับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ อ.ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้กรุณารับเป็นที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ให้กับข้าพเจ้า ในขณะที่ข้าพเจ้ายังไม่มีความพร้อมและความสามารถทางด้านใดเลยโดยได้ช่วยสอนตลอดจนได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ พร้อมทั้งแรงกระตุ้นและแรงบันดาลใจ และที่สำคัญที่สุดคือความอดทนต่อความดื้อของข้าพเจ้า รวมทั้งได้ให้ความคิดเห็นทางวิชาการในการทำวิจัยมาด้วยดีโดยตลอด

ขอกราบขอบพระคุณครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ พร้อมทั้งคุณธรรมจริยธรรมตลอดชั่วชีวิตของข้าพเจ้า

ขอขอบคุณทุนวิจัยร่วมภาครัฐและเอกชนรวมไปถึง ทุนหน่วยวิจัยประจำสาขากรรมวิธีประมวลผลสัญญาณดิจิทัลที่ช่วยสนับสนุนในการทำวิจัยเป็นอย่างดี

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา และครอบครัว ตลอดจนญาติพี่น้องทุกท่านที่เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนแก่ข้าพเจ้าตลอดมา

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

เป็นที่ทราบกันดีว่าในกรรมวิธีการประมวลผลสัญญาณภาพนั้นจะมีปัญหาสำคัญที่เกิดขึ้นคือ ปัญหาสัญญาณรบกวน ดังนั้นที่ผ่านมาในอดีตจึงมีงานวิจัยมากมายที่มุ่งเน้นความพยายามในการที่จะแก้ไขปัญหาสัญญาณรบกวนด้วยกรรมวิธีต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นวิธีการดั่งเดิมที่มักได้รับการกล่าวเปรียบเทียบเสมอ เช่น วิธีตัวกรองวีนเนอร์ (Wiener Filter) และวิธีที่ต้องอาศัยความรู้ทางสถิติในการลดสัญญาณรบกวน เช่น วิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error, MMSE) และ วิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (Maximum A Posteriori Probability) เป็นต้น ดังนั้นในส่วนของการวิเคราะห์สัญญาณด้วยการแปลงเวฟเล็ตก็เช่นกันได้มีงานวิจัยเกิดขึ้นมากมายที่พยายามแก้ไขปัญหาสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้น ในวิธีประมวล ผลสัญญาณภาพโดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นวิธีปรับลดสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นด้วยการแปลงเวฟเล็ต โดยอาศัยความรู้ทางสถิติมาช่วยในการลดสัญญาณรบกวนทั้งในแบบตัวแปรเดียว (Univariate Estimation Techniques) และแบบหลายตัวแปร (Multivariate Estimation Techniques) อันเป็นคุณลักษณะเฉพาะที่มีการประยุกต์ใช้ในการแปลงเวฟเล็ต

1.2 วัตถุประสงค์

1 เพื่อศึกษาวิธีปรับลดสัญญาณรบกวนของภาพโดยวิธีการประมาณสัญญาณด้วยวิธีทางสถิติในแบบหลายตัวแปร (Multivariate Estimation Techniques) ในปริภูมิเวฟเล็ต

2 เพื่อเปรียบเทียบวิธีปรับลดสัญญาณรบกวนของภาพทั้ง รูปแบบวิธีการใช้ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold Function) และกรรมวิธีการประมาณสัญญาณด้วย วิธีทางสถิติทั้งวิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error, MMSE) และ วิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (Maximum a Posteriori Probability)

3 ศึกษาวิเคราะห์และเปรียบเทียบข้อดี ข้อเสียที่เกิดขึ้นในการปรับลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีต่างๆ ในปริภูมิเวฟเล็ต

1.3 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

1 ทำการประมวลผลประสิทธิภาพการลดทอนสัญญาณรบกวนด้วยวิธีประมาณค่าสัญญาณในรูปแบบการวิเคราะห์ทางสถิติทั้งแบบตัวแปรเดียวและหลายตัวแปรและรูปแบบฟังก์ชันค่าจุดเริ่มเปลี่ยน

2 เปรียบเทียบวิเคราะห์ผลการทดลองที่เกิดขึ้น ศึกษาถึงเหตุผลและวิธีการพัฒนาขั้นตอนวิธีลดทอนสัญญาณรบกวนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

3 ศึกษาวิเคราะห์และเปรียบเทียบข้อดี ข้อเสียที่เกิดขึ้นในการปรับลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีต่างๆ ในปริภูมิเวฟเล็ต

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1 ได้ทราบถึงวิธีการและเทคนิคต่างๆ ในการปรับลดสัญญาณรบกวนในปริภูมิเวฟเล็ต

2 ได้ทราบถึงความสัมพันธ์ของการแปลงเวฟเล็ตในการวิเคราะห์หลายระดับรายละเอียด (Multi resolution Analysis, MRA)

3 ได้ทราบถึงวิธีและการประยุกต์ใช้เทคนิคทางสถิติเพื่อลดทอนสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้น

4 สามารถนำความรู้ที่ได้ไปพัฒนาวิธีการปรับลดสัญญาณรบกวนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นในอนาคต

1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการ

1 ศึกษารูปแบบการปรับลดสัญญาณรบกวนในปริภูมิเวฟล็ตด้วยวิธีการต่างๆทั้งการลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีใช้ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold Function) และวิธีประมาณสัญญาณด้วยหลักทางสถิติ (Estimation Techniques)

2 ศึกษาวิธีการต่างๆ ในทางสถิติที่ใช้ในการประมาณสัญญาณเพื่อลดทอนสัญญาณรบกวน (Estimation signal techniques for denoising)

3 ศึกษารูปแบบและความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแบบหลายตัวแปร ในการวิเคราะห์หลายระดับรายละเอียด (Multiresolution Analysis, MRA)

4 ประยุกต์ใช้วิธีทางสถิติในการประมาณสัญญาณเพื่อลดสัญญาณรบกวนในแบบหลายตัวแปรในปริภูมิเวฟเล็ต

5 ทำการวิเคราะห์ผลที่ได้รับข้อดีข้อเสียที่เกิดขึ้นในการประยุกต์ใช้วิธีลดสัญญาณรบกวนแต่ละประเภทว่าวิธีการใดมีประสิทธิภาพและเหมาะสมในกรณีใดบ้าง

6 สรุปและเขียนวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

หลักการและเหตุผล

โดยทั่วไปนั้นเทคนิคการปรับลดสัญญาณรบกวนจะประกอบไปด้วย 2 วิธีที่สำคัญคือ วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยอาศัยผลการแปลง (Transform) และวิธีลดสัญญาณรบกวนที่อาศัยวงจรกรองปรับตัวได้ (Adaptive Filters) โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึงวิธีปรับลดสัญญาณรบกวนด้วยเทคนิคการแปลงเป็นสำคัญโดยจำเพาะเลือกใช้ กระบวนการแปลงเวฟเล็ตซึ่งเป็นวิธีที่เกิดขึ้นใหม่และมีประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนที่ดีและมีงานวิจัยที่ศึกษาค้นคว้าทางด้านนี้ออกมาเป็นจำนวนมาก

2.1 วิเคราะห์สัญญาณด้วยการแปลงเวฟเล็ต

กระบวนการวิเคราะห์สัญญาณด้วยการแปลงเวฟเล็ตนั้นโดยทั่วไปจะแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ การแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่อง (Continuous wavelet transform) โดยใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณที่มีความต่อเนื่องของสัญญาณในโดเมนก่อนการแปลงและการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย (Discrete wavelet transform) ใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณที่มีความไม่ต่อเนื่องของสัญญาณในโดเมนก่อนการแปลง โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มุ่งเน้นการปรับลดสัญญาณรบกวนของภาพดิจิทัลซึ่งเป็นสัญญาณแบบเต็มหน่วย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึงการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยเป็นสำคัญและสำหรับกระบวนการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยนั้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นที่การแปลงเวฟเล็ตที่อาศัยหลักการวิเคราะห์ของฟิลเตอร์แบงก์ (Filter banks) โดยในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงคุณลักษณะทั่วไปที่สำคัญของการแปลงเวฟเล็ตและขั้นตอนในการวิเคราะห์สัญญาณด้วยการแปลงเวฟเล็ต

2.1.1 ส่วนประกอบสำคัญในการแปลงเวฟเล็ต

สเกลลิ่งฟังก์ชัน (Scaling Function)

สเกลลิ่งฟังก์ชันเป็นแนวคิดที่มีประโยชน์ที่ใช้ในการสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ (Mother Wavelet Function) โดยสเกลลิ่งฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติเชิงตั้งฉากและมีขนาดของนอร์มเท่ากับหนึ่ง (Orthogonormal Function) โดยคุณสมบัตินี้สามารถแสดงออกเป็นสมการ ดังต่อไปนี้

เมื่อ $\varphi(t)$ คือ Scaling function

$$\|\varphi(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)dt = 1 \tag{2.1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t-n)\varphi(2t-m)dt \quad = \quad \delta_{mn} \quad = \quad \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{2.1.2}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถสร้างสเกลลิ่งฟังก์ชันจากคุณลักษณะของการกระจายเชิงเส้น ได้อีกด้วย เนื่องจากสเกลลิ่งฟังก์ชันมีสมบัติเชิงตั้งฉากดังนั้นเราจึงสามารถนำสเกลลิ่งฟังก์ชัน มาสร้างเป็นเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉากได้โดยการลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation) โดยต่อไปนี้จะกล่าวถึงหลักการวิเคราะห์ฟังก์ชันด้วยการกระจายเชิงเส้นก่อน

เมื่อ f คือ ฟังก์ชันที่วิเคราะห์ได้ (Analytic function)

$\{e_n\}$ คือ เซตของฐานหลักเชิงตั้งฉากที่มีขนาดของนอร์มเท่ากับหนึ่ง

ดังนั้นเราสามารถกระจายฟังก์ชัน (f) ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$f \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \tag{2.2}$$

เราจะนำสเกลลิ่งฟังก์ชันมาทำการลดขนาด (Scale) และ เลื่อน (Translation) ดังสมการต่อไปนี้เพื่อสร้างเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉาก

โดย $\{\varphi_{j,n}(t)\} \quad = \quad 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n), \qquad j, n \quad \in \quad Z$

โดยส่วนใหญ่เลือกให้ $j \quad = \quad 1$

ดังนั้นเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉาก คือ

$$\{\varphi_n(t)\} \quad = \quad \sqrt{2}\varphi(2t-n), \qquad n \quad \in \quad Z$$

ดังนั้นเราจะสร้างสเกลลิ่งฟังก์ชันจากการกระจายเชิงเส้นโดยมีเซตของสเกลลิ่งฟังก์ชันที่ถูกลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation) เป็นเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉากได้ดังนี้

$$\varphi(t) \quad = \quad \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n) \tag{2.3.1}$$

$$h_{\varphi}(n) \quad = \quad \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(2t-n)}dt \tag{2.3.2}$$

ซึ่งฟังก์ชัน $h_{\varphi}(n)$ ก็คือ สัมประสิทธิ์เชิงเส้นของการกระจายเชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชันนั่นเอง โดยจะมีความสัมพันธ์กับการสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่อีกด้วย ดังที่จะได้กล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ (Mother Wavelet Function)

จัดได้ว่าเป็นหัวใจหลักในการแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง (Continuous wavelet transform) โดยการสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่นั้นมีความสัมพันธ์กับสเกลลิ่งฟังก์ชันในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นแต่ ในที่นี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่สำคัญหรือเงื่อนไขที่ยอมรับได้ (Admissibility condition) ของฟังก์ชันที่จะนำมาสร้างเป็นฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ก่อน ดังต่อไปนี้

$$C_\psi \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad \leq \quad \infty \tag{2.4}$$

เมื่อ $\hat{\psi}(\omega)$ คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่

ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการกระจายเชิงเส้นโดยใช้เซตของสเกลลิ่งฟังก์ชันที่ถูกลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation) มาเป็นเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉากดังสมการต่อไปนี้

$$\psi(t) \quad = \quad \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} h_\psi(n)\varphi(2t-n) \tag{2.5.1}$$

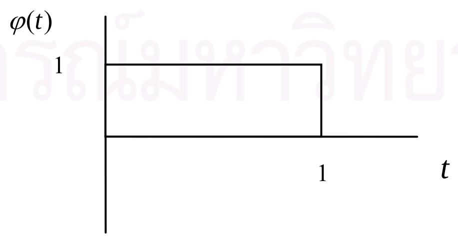
โดยที่

$$h_\psi(n) \quad = \quad (-1)^{N-n} h_\varphi(N-n-1) \tag{2.5.2}$$

เมื่อ $\varphi(t)$ คือ สเกลลิ่งฟังก์ชัน (Scaling Function)

N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชัน $h_\varphi(n)$

ต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่และสเกลลิ่งฟังก์ชัน โดยในที่นี้จะยกตัวอย่างเวฟเล็ตแม่ชนิดฮาร์เวฟเล็ต (Haar mother wavelet) ซึ่งเป็นเวฟเล็ตแม่ที่ง่ายต่อการวิเคราะห์และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวฟเล็ตแม่และสเกลลิ่งฟังก์ชันมากที่สุดโดยจะเริ่มวิเคราะห์ในส่วนของสเกลลิ่งฟังก์ชันก่อน



รูปที่ 2.1 สเกลลิ่งฟังก์ชันของเวฟเล็ตชนิดฮาร์

เมื่อเราทำการกระจายเชิงเส้นสเกลลิ่งฟังก์ชัน เพื่อหาสัมประสิทธิ์เชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชัน ($h_\varphi(n)$) ตามสมการที่ 2.3.2 แล้วจะได้ว่า

$$h_\varphi(n) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\overline{\varphi(2t-n)}dt$$

ดังนั้น

$$h_\varphi(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0,1 \\ 0, & other\ value \end{cases}$$

เพราะฉะนั้นเราสามารถเขียนการกระจายตัวเชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{1} h_\varphi(n)\varphi(2t-n)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t-1)\right)$$

$$= \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

พิจารณาการสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ของฮาร์เวฟเล็ตได้จากสมการการกระจายตัวเชิงเส้นของ ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ดังสมการที่ 2.5.1 และหาสัมประสิทธิ์การกระจายตัวเชิงเส้นตามสมการที่ 2.5.2 ดังต่อไปนี้

$$h_\psi(n) = (-1)^{N-n} h_\varphi(N-n-1)$$

เมื่อ $N = 2$

ดังนั้น

$$h_\psi(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0 \\ -1/\sqrt{2}, & n = 1 \\ 0, & other\ value \end{cases}$$

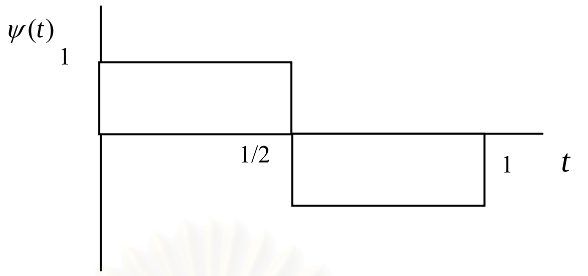
เพราะฉะนั้นเราสามารถเขียนการกระจายตัวเชิงเส้นของฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ชนิดฮาร์เวฟเล็ตได้ ดังนี้

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} h_\psi(n)\varphi(2t-n)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t-1)\right)$$

$$= \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$$

จากสมการการกระจายตัวเชิงเส้นที่ได้นี้ทำให้เราสามารถสร้างฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ของฮาร์เวฟเล็ตได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ของเวฟเล็ตชนิดฮาร์

2.1.2 อนุกรมเวฟเล็ต

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.1.1 ว่าสเกลลิ่งฟังก์ชันและฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่มีสมบัติเชิงตั้งฉาก ดังนั้นจึงสามารถนำสเกลลิ่งฟังก์ชันและฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ที่ถูกลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation) มาใช้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากในการแทนฟังก์ชันหรือสัญญาณในการกระจายเชิงเส้นได้โดย

เมื่อ $\varphi(t)$ คือ สเกลลิ่งฟังก์ชันของเวฟเล็ต

f คือ ฟังก์ชันหรือสัญญาณที่ต้องการแทนด้วยอนุกรมเวฟเล็ต

กำหนดให้

$$\{\varphi_{j,k}(t)\} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k), \qquad j,k \in Z$$

$$V_j = \overline{span\{\varphi_{j,k}(t)\}}$$

ดังนั้น

$$....... \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \ .... \subset f \in L^2(R)$$

นอกจากนี้หากเราทำการลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation) ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่เช่นเดียวกับสเกลลิ่งฟังก์ชันก็จะสามารถนำฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่มาใช้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากร่วมกับสเกลลิ่งฟังก์ชันได้อีกด้วยเพราะฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ในส่วนที่ถูกลดขนาดและเลื่อนในสเกลเดียวกับสเกลลิ่งฟังก์ชันนั้นก็คือ ฐานหลักเชิงตั้งฉากที่เพิ่มขึ้นที่ทำให้สเกลลิ่งฟังก์ชันที่ถูกลดขนาดและเลื่อนในสเกลที่หยาบกว่า สามารถแทนสเกลลิ่งฟังก์ชันที่ถูกลดขนาดและเลื่อนในสเกลที่ละเอียดกว่าได้ หรือกล่าวได้ว่าฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ที่ถูกเพิ่มเข้ามาในการแทนสัญญาณนั้นเป็น Orthogonal complement ของสเกลลิ่งฟังก์ชันเดิมและสามารถอธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

เมื่อ W_j คือ เวฟเล็ตฟังก์ชันที่ถูกลดขนาด (Scale) และเลื่อน (Translation)

โดย $$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k) \qquad j,k \in Z$$

$$W_j = \overline{span\{\psi_{j,k}(t)\}}$$

ดังนั้น $$f \in L^2(R) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{V_{j_0} \oplus W_{j_0}}_{V_{j_0+1}} \oplus W_{j_0+1}}_{V_{j_0+2}} \oplus W_{j_0+2}}_{V_{j_0+3}} \oplus W_{j_0+3} \oplus \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

เมื่อพิจารณาสมการ การแทนสัญญาณด้วยการกระจายตัวเชิงเส้นดังสมการที่ 2.2 จะได้สมการอนุกรมเวฟเล็ต คือ

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{j_0} \left\langle f(t), \varphi_{j_0,k}(t) \right\rangle \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{j_0} \left\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \right\rangle \psi_{j,k}(t)$$

เมื่อ j_0 คือ ค่าคงที่เริ่มต้นที่ทำการลดขนาด (Scale) สเกลลิ่งฟังก์ชัน

2.1.3 การแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่อง

การแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่องนั้นใช้ในกรณีที่สัญญาณในโดเมนก่อนการแปลงเป็นสัญญาณต่อเนื่องและมีสมการที่ใช้ในการแปลงเวฟเล็ตดังต่อไปนี้

$$(W_\psi f)(a,b) = \left\langle f, \psi_{a,b} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt$$

เมื่อ $$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-a}{b}\right), \qquad a,b \in R$$

$\psi(t)$ คือ ฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ (Mother wavelet)

โดยกระบวนการแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่องนั้นยังคงมีสมบัติที่สำคัญประการหนึ่ง คือ ความสัมพันธ์พาร์ซีวัล (Parseval's relation) อันเป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของสัญญาณในปริภูมิเวลาและปริภูมิที่ได้รับการแปลงไป โดยความสัมพันธ์พาร์ซีวัลในปริภูมิเวฟเล็ต (Parseval's relation in wavelet domain) สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)\overline{(W_{\psi} g)(a,b)}\frac{dadb}{a^2} \quad = \quad C_{\psi}\left\langle f(t), g(t)\right\rangle \tag{2.6}$$

เมื่อ $$C_{\psi} \quad = \quad 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|}{\omega}d\omega$$

$\hat{\psi}(\omega)$ คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันเวฟเล็ตแม่ $(\psi(t))$

โดยความสัมพันธ์นี้จะมีประโยชน์ในการหาสูตรการแปลงผกพันของผลการแปลงเวฟเล็ตแบบต่อเนื่อง (Invert continuous wavelet transform) ดังนี้

$$\begin{aligned}
C_{\psi}\left\langle f(t), g(t)\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)\overline{(W_{\psi} g)(a,b)}\frac{dadb}{a^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)\overline{(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt)}\frac{dadb}{a^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)}\psi_{a,b}(t)dt)\frac{dadb}{a^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2})\overline{g(t)}dt \\
&= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_{\psi} f)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}, g(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจะได้สูตรการแปลงผกผันในกรณีการแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่อง ดังต่อไปนี้

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{C_{\psi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\psi} f(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}$$

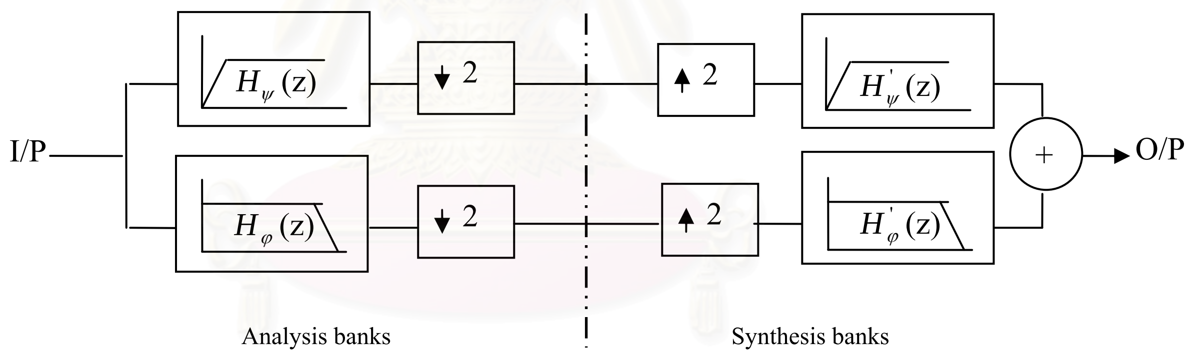
2.1.4 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย

การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วยนั้นใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนก่อนการแปลงที่มีลักษณะ เป็นสัญญาณไม่ต่อเนื่อง ซึ่งโดยทั่วไปอาศัยหลักการทางด้านฟิลเตอร์ (Filters) ที่สำคัญคือหลักการฟิลเตอร์แบงก์ (Filter Banks) ในการทำการแปลงเวฟเล็ต และในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นที่เวฟเล็ตชนิดดาวบีชีส์ (Daubechies wavelet) ซึ่งเป็น Orthogonal wavelet โดยจำนวนสัมประสิทธิ์ที่ถูกสร้างในฟิลเตอร์แต่ละชนิดของฟิลเตอร์แบงก์เพื่อใช้ในการแปลงเวฟเล็ตในตระกูลดาวเบชีส์นั้นจะเป็นจำนวนคู่และมีลักษณะของฟิลเตอร์ที่ถูกสร้าง เป็นชนิด

ผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (finite impulse responses: FIR) ดังนั้นจึงทำให้เวฟเล็ตในตระกูลนี้เป็นที่ใช้และอ้างอิงกันอย่างแพร่หลาย ในหัวข้อถัดไปจะกล่าวถึงคุณลักษณะที่สำคัญของฟิลเตอร์แบงก์ อันจะนำมาซึ่งการสร้างฟิลเตอร์แบงก์ที่รองรับการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยในตระกูลดาวบีชีร์ต่อไป

2.1.4.1 หลักการที่สำคัญของฟิลเตอร์แบงก์

หลักการสำคัญของฟิลเตอร์แบงก์นั้นอยู่ที่ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) ของฟิลเตอร์ในส่วนของการวิเคราะห์สัญญาณ (Analysis banks) และในส่วนของการสังเคราะห์สัญญาณกลับ (Synthesis banks) โดยทั่วไปแล้วฟิลเตอร์แบงก์จะทำหน้าที่แยกสัญญาณออกเป็นส่วนความถี่ต่ำและความถี่สูงด้วยวงจรกรองทั้งสองชนิดโดยในส่วนของสัญญาณที่ผ่านวงจรกรองความถี่ต่ำ (Low pass filter) และลดการชักตัวอย่างลง 2 เท่าจะให้สัญญาณในส่วนการประมาณ (Approximation) และสัญญาณในส่วนที่ผ่านวงจรกรองความถี่สูง (High pass filter) และลดการชักตัวอย่างลง 2 เท่าเช่นกันก็จะให้ส่วนของสัญญาณชนิดรายละเอียด (Details) แล้วทำการแยกพิจารณาสัญญาณทั้งสองส่วนโดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของฟิลเตอร์แบงก์ในส่วนของการวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณในหนึ่งมิติก่อนซึ่งมีความคล้ายคลึงกับการวิเคราะห์สัญญาณในสองมิติมากโดยองค์ประกอบของฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ (Two channel Filter Banks)ในส่วนของการวิเคราะห์สัญญาณและสังเคราะห์สัญญาณมีลักษณะดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงส่วนประกอบในส่วนวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณของฟิลเตอร์แบงก์ชนิด 2 ช่องสัญญาณ (Two channel Filter Banks)

เราจะเริ่มพิจารณาความสัมพันธ์ของฟิลเตอร์ทั้งในส่วนของการวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณ จากสมการปัญหาเอเลียสซิง (Aliasing effect) ในโดเมน Z โดยสมการนี้จะอยู่ในรูปความสัมพันธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองความถี่สูงและวงจรกรองความถี่ต่ำทั้งในฝั่งของการวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณ ดังสมการต่อไปนี้

$$A(z) \quad = \quad \frac{1}{2}(H_\varphi(-z)H'_\varphi(z) \quad + \quad H_\psi(-z)H'_\psi(z))$$

เมื่อไม่เกิดปัญหาเอเลียสซิงจึงทำให้ค่า $A(z) \quad = \quad 0$

ดังนั้น

$$\frac{H'_{\varphi}(z)}{H'_{\psi}(z)} = -\frac{H_{\psi}(-z)}{H_{\varphi}(-z)} \tag{2.7}$$

ถ้าเรากำหนดฟังก์ชันสัดส่วน (Arbitrary rational function) ลงในสมการที่ 2.7 จะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่ 2.7ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} H'_{\varphi}(z) &= C(z)H_{\psi}(-z) \\ H'_{\psi}(z) &= -C(z)H_{\varphi}(-z) \end{aligned}$$

เมื่อ $C(z)$ คือ ฟังก์ชันสัดส่วน (Arbitrary rational function)

เมื่อเรากำหนดค่าฟังก์ชันสัดส่วนให้มีค่าเป็น 1 จะทำให้เราทราบสมการความสัมพันธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งทางฝั่งวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณว่ามีความสัมพันธ์ดังสมการที่ 2.8

$$\begin{aligned} H'_{\varphi}(z) &= H_{\psi}(-z) = z^{-(N-1)}H_{\varphi}(z^{-1}) \\ H'_{\psi}(z) &= -H_{\varphi}(-z) = z^{-(N-1)}H_{\psi}(z^{-1}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

เมื่อ N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองแต่ละวงจรในฟิลเตอร์แบงก์

จากสมการที่ 2.8 ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งฝั่งวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณทำให้เราทราบว่าถ้าเราทราบฟังก์ชันถ่ายโอนของ วงจรกรองความถี่สูงและต่ำของทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณหรือสังเคราะห์สัญญาณทางฝั่งใดฝั่งหนึ่งแล้วก็จะทำให้เราทราบ ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองอีกฝั่งหนึ่งทันทีโดยความสัมพันธ์นี้เป็นประโยชน์อย่างมากและใช้เป็นหลักการหาสัมประสิทธิ์ของฟิลเตอร์แบงก์ ได้อย่างรวดเร็วซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดต่อไปอีกครั้งหนึ่ง

2.1.4.2 การสร้างฟังก์ชันถ่ายโอนในฟิลเตอร์แบงก์แบบ 2 ช่องสัญญาณในการแปลงเวฟเล็ตตระกูลดาวเบชีส์

จากคุณสมบัติการสร้างสเกลลิ่งฟังก์ชันจากการกระจายเชิงเส้นโดยใช้สเกลลิ่งฟังก์ชันที่ถูกลดขนาดและเลื่อนเป็นเซตของฐานหลักเชิงตั้งฉากดังสมการที่ 2.3 และ 2.4 คือ

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n)$$

$$h_{\varphi}(n) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\overline{\varphi(2t-n)}dt$$

เราพบว่าสัมประสิทธิ์เชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชัน $(h_{\varphi}(n))$ ในที่นี้ก็คือสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณของฟิลเตอร์แบงก์นั่นเอง ดังนั้นเราจะสร้างเงื่อนไขที่จำเป็นในการหาสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณของฟิลเตอร์แบงก์จากสมการที่ 2.3 ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n) \\
\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n)dt \\
&= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2t-n)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2t-n)d(2t-n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นจะได้เงื่อนไขแรกที่จำเป็น (First necessary condition) ในการหาสัมประสิทธิ์ของฟิลเตอร์แบงก์ในวงจรกรองผ่านต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณคือ

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n) = \sqrt{2}, \qquad \rightarrow \qquad \text{เงื่อนไขที่จำเป็นเงื่อนไขแรก (First necessary condition)}$$

ทำการหาเงื่อนไขที่จำเป็นเงื่อนไขที่สองโดยการยกกำลังสองสมการการกระจายเชิงเส้นของสเกลลิ่งฟังก์ชันในสมการที่ 2.3 แล้วหาผลรวมโดยการอินทิเกรต

$$\varphi^2(t) = (\sqrt{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n))^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)dt = 2\int_{-\infty}^{\infty}(\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}(n)\varphi(2t-n))^2 dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}^2(n)\varphi^2(2t-n)dt, \qquad \text{จากคุณสมบัติการตั้งฉากของ } \varphi(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}^2(n)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(2t-n)d(2t-n)$$

เพราะฉะนั้นจะทำให้เราได้สมการที่เป็นเงื่อนไขจำเป็นเงื่อนไขที่สอง คือ

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_{\varphi}^2(n) = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{เงื่อนไขที่จำเป็นเงื่อนไขที่สอง (Second necessary condition)}$$

จากนั้นทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองผ่านต่ำ (Low pass filter) ทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณ (Analysis bank) ด้วยสมการเงื่อนไขที่จำเป็นทั้งสองจะพบว่าได้สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองผ่านต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณของการแปลงเวฟเล็ตด้วยฟิลเตอร์แบงก์ชนิดฮาร์เวฟเล็ต อันเป็นเวฟเล็ตชนิดที่หนึ่งในตระกูลดาวเบชีส์เวฟเล็ต ดังต่อไปนี้ จากสมการเงื่อนไขที่จำเป็นเงื่อนไขแรก (First necessary condition)

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_\varphi(n) = \sqrt{2}, \qquad h_\varphi(0) + h_\varphi(1) = \sqrt{2}$$

จากสมการเงื่อนไขที่จำเป็นเงื่อนไขที่สอง (Second necessary condition)

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_\varphi^2(n) = 1, \qquad h_\varphi^2(0) + h_\varphi^2(1) = 1$$

เมื่อแก้สมการทั้งสองจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองผ่านต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณและสามารถนำมาสร้างเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ได้คือ

$$H_\varphi(z) = h_\varphi(0) + h_\varphi(1)z^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}$$

จะสังเกตเห็นว่าถ้าเราใช้เพียงสมการเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition equations) เท่านั้นในการหาสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองจะทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์เพียงสองค่าเท่านั้น เพราะสมการเงื่อนไขที่จำเป็นมีเพียงสองสมการ ซึ่งเราสามารถที่จะเพิ่มจำนวนสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองได้โดยการเพิ่มสมการที่เรียกว่า vanishing moment (p) โดยมีวิธีการดังต่อไปนี้ โดยกำหนดให้สมการของวงจรกรองมีคุณสมบัติเป็น 0 ในโดเมนความถี่ที่ $\omega = \pi$ และมีสมการดังต่อไปนี้

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{-j\omega}}{2}\right)^{2p} R(e^{-j\omega})$$

เมื่อต้องการให้สัมประสิทธิ์ของวงจรกรองมีค่าเป็นจำนวนจริงฟังก์ชัน $\left|\hat{h}(\omega)\right|^2$ จะต้องเป็นฟังก์ชันคู่และสามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชัน $\cos(\omega)$ และเราสามารถเขียนฟังก์ชัน $\left|R(e^{-j\omega})\right|^2$ ให้อยู่ในรูปพหุนาม $P(\sin^2\frac{\omega}{2})$ ได้ดังนั้น

$$\left|\hat{h}(\omega)\right|^2 = 2\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2p} P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$$

พิจารณาสมการการสร้างสัญญาณกลับอย่างสมบูรณ์

$$\left|\hat{h}(\omega)\right|^2 \quad + \quad \left|\hat{h}(\omega-\pi)\right|^2 \quad = \quad 2$$

กำหนดให้ $y \quad = \quad \sin^2\dfrac{\omega}{2}$ เราสามารถเขียนสมการการสร้างสัญญาณกลับอย่างสมบูรณ์ใหม่ได้ว่า

$$(1-y)^p P(y) \quad + \quad y^p P(1-y) \quad = \quad 1$$

เมื่อแก้สมการพหุนาม $P(y)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$P(y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1-k}{k}y^k$$

และจากสมการ $\left|R(e^{-j\omega})\right|^2 \quad = \quad P(\sin^2\dfrac{\omega}{2})$ เมื่อนำมาพิจารณาในระนาบเชิงซ้อน ($z \quad = \quad e^{-j\omega}$) จะพบว่า

$$\left|R(z^{-1})\right|^2 \quad = \quad R(z)R(z^{-1}) \quad = P(\frac{2-z-z^{-1}}{4})$$

พิจารณาการสร้างฟิลเตอร์ในกรณี Vanishing moment เป็น 2 (p = 2)

$$P(y) \quad = \quad 1 \quad + \quad 2y$$

$$P(\frac{2-z-z^{-1}}{4}) \quad = \quad 2 \quad - \quad \frac{z}{2} \quad - \quad \frac{z^{-1}}{2}$$

$$= \quad (\frac{2+\sqrt{3}}{2})(1-(2-\sqrt{3})z)(1-(2-\sqrt{3})z^{-1})$$

จาก $\quad R(z)R(z^{-1}) \quad = P(\dfrac{2-z-z^{-1}}{4})$

$$R(z^{-1}) \quad = \quad \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}(1-(2-\sqrt{3})z^{-1})$$

จาก $\quad H(z) \quad = \quad \sqrt{2}(\dfrac{1+z^{-1}}{2})^{2p} R(z^{-1})$

$$H(z) \quad = \quad (\sqrt{2+\sqrt{3}})(\frac{1+z^{-1}}{2})^2(1-(2-\sqrt{3})z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} z^{-1} + \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} z^{-2} + \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} z^{-3}$$

ซึ่งสมการ $(H(z))$ ที่คำนวณได้นี้ก็คือสมการฟิลเตอร์ในการสร้างเวฟเล็ตในตระกูลดาวเบชีส์อันดับที่ 2 นั้นเอง

2.1.4.3 สัมประสิทธิ์ของฟิลเตอร์ชนิดอื่นในฟิลเตอร์แบงก์

จากสมการความสัมพันธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนต่างๆ ในวงจรกรองของฟิลเตอร์แบงก์ทางฝั่งวิเคราะห์และสังเคราะห์สัญญาณดังสมการที่ 2.8 ทำให้ เมื่อเราทราบสมการของฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองความถี่ต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณของฟิลเตอร์แบงก์ $(H_{\varphi}(z))$ แล้วเราสามารถที่จะหาสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองตัวอื่นในฟิลเตอร์แบงก์ $(H_{\psi}(z), H'_{\varphi}(z), H'_{\psi}(z))$ ได้ทันทีจากสมการที่ 2.8 ดังต่อไปนี้

$$H'_{\varphi}(z) = H_{\psi}(-z) = z^{-(N-1)} H_{\varphi}(z^{-1})$$
$$H'_{\psi}(z) = -H_{\varphi}(-z) = z^{-(N-1)} H_{\psi}(z^{-1})$$

เมื่อ N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟิลเตอร์แต่ละชนิดในฟิลเตอร์แบงก์

รูปที่ 2.4แสดงถึงความสัมพันธ์ในการหาสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองต่างๆ เมื่อทราบสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองความถี่ต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณของฟิลเตอร์แบงก์โดยใช้ความสัมพันธ์ใน
สมการที่ 2.8

$$H_{\varphi}(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3} \quad \{a, b, c, d\}$$

$$H'_{\varphi}(z) = d + cz^{-1} + bz^{-2} + az^{-3} \quad \{d, c, b, a\}$$

$$H_{\psi}(z) = d - cz^{-1} + bz^{-2} - az^{-3} \quad \{d, -c, b, -a\}$$

$$H'_{\psi}(z) = -a + bz^{-1} - cz^{-2} + dz^{-3} \quad \{-a, b, -c, d\}$$

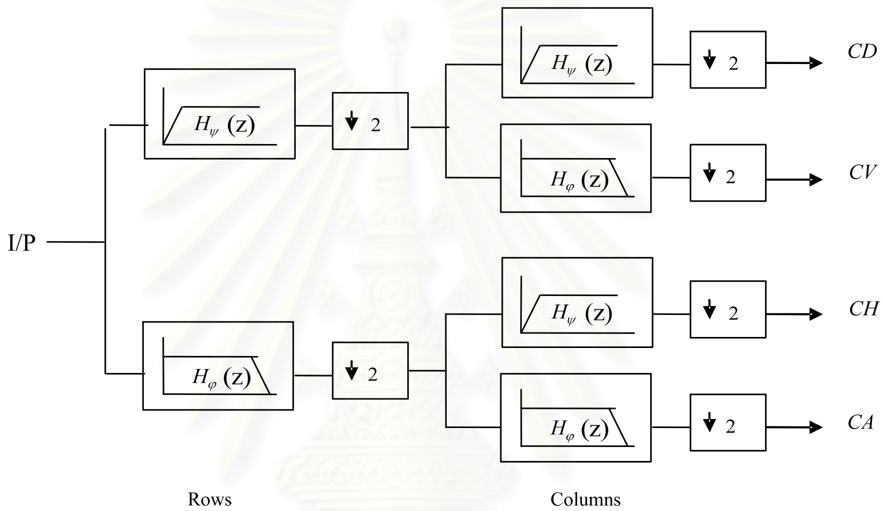
Analysis banks

Synthesis banks

รูปที่ 2.4 แสดงการสลับลำดับและตำแหน่งของวงจรกรองความถี่ต่ำทางฝั่งวิเคราะห์สัญญาณ $(H_{\varphi}(n))$ เพื่อหาสัมประสิทธิ์วงจรกรองอื่นๆในฟิลเตอร์แบงก์

2.1.4.4 การแปลงเวฟเล็ตสองมิติ

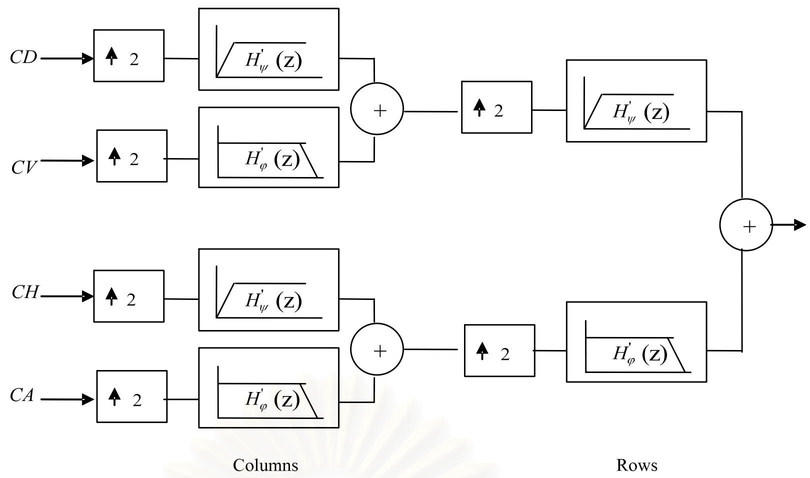
ในส่วนของการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย (Discrete Wavelets Transform) ในสองมิตินั้นโดยทั่วไปจะอาศัยหลักการฟิลเตอร์แบงก์เป็นหลักสำคัญที่ใช้ในการแปลงเวฟเล็ตเช่นเดียวกับการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยในหนึ่งมิติดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 2.1.4.1 โดยเป็นการนำเอาฟิลเตอร์แบงก์ชนิดสองช่องสัญญาณมาทำการต่อวงจรแบบคาสเคต (Cascade circuit) กันและอาศัยหลักการในการแปลงเวฟเล็ตในสองมิติที่ว่าข้อมูลในแนวตั้ง (Column) และแนวนอน (Row) เป็นอิสระต่อกันจึงทำการแปลงเวฟเล็ตทีละแนวแกนโดยทำการแปลงเวฟเล็ตในแนวแกนนอนก่อนแล้วจึงทำการแปลงเวฟเล็ตในแนวแกนตั้งโดยมีรูปแบบวงจรในการวิเคราะห์สัญญาณและลักษณะสัญญาณที่ได้หลังการวิเคราะห์สัญญาณดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 การแปลงเวฟเล็ตด้วยฟิลเตอร์แบงก์ใน 2 มิติ

เมื่อ	*CA*	คือ	สัมประสิทธิ์ในส่วนการประมาณภาพ (Approximation coefficients)
	CH	คือ	สัมประสิทธิ์ในส่วนรายละเอียดภาพในแนวนอน (Horizontal detail coefficients)
	CV	คือ	สัมประสิทธิ์ในส่วนรายละเอียดภาพในแนวตั้ง (Vertical detail coefficients)
	CD	คือ	สัมประสิทธิ์ในส่วนรายละเอียดภาพในแนวทแยง (Diagonal detail coefficients)

ในส่วนของการสังเคราะห์สัญญาณกลับก็เช่นเดียวกันเพียงแค่นำวงจรสังเคราะห์สัญญาณกลับ แบบฟิลเตอร์แบงก์ในแบบสองช่องสัญญาณใน 1 มิติมาต่อกันแบบคาสเคตและทำการสังเคราะห์สัญญาณในแนวนอนและแนวตั้งซึ่งเป็นอิสระจากกันตามสมมุติฐานทีละแนวแกนก็จะได้สัญญาณกลับคืนมาโดยมีแผนภาพวงจร และกรรมวิธีดังรูปที่ 2.6

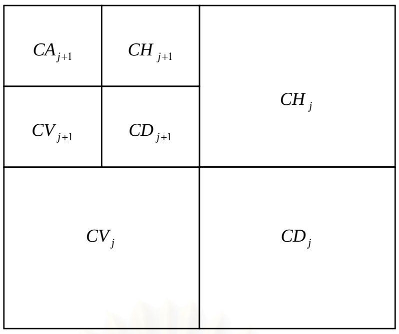


รูปที่ 2.6 การแปลงกลับเวฟเล็ตด้วยฟิลเตอร์แบงก์ใน 2 มิติ

เมื่อพิจารณาถึงกระบวนการแปลงเวฟเล็ตดังรูปที่ 2.5 แล้วจะพบว่าหลังจากผ่านการแปลงเวฟเล็ตแล้วจะได้ภาพจำนวน 4 ภาพตามลักษณะของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ได้จากการแปลง โดยความละเอียดของภาพจะลดลง 2 เท่าทั้งในแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนจากภาพอินพุตโดยสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.7

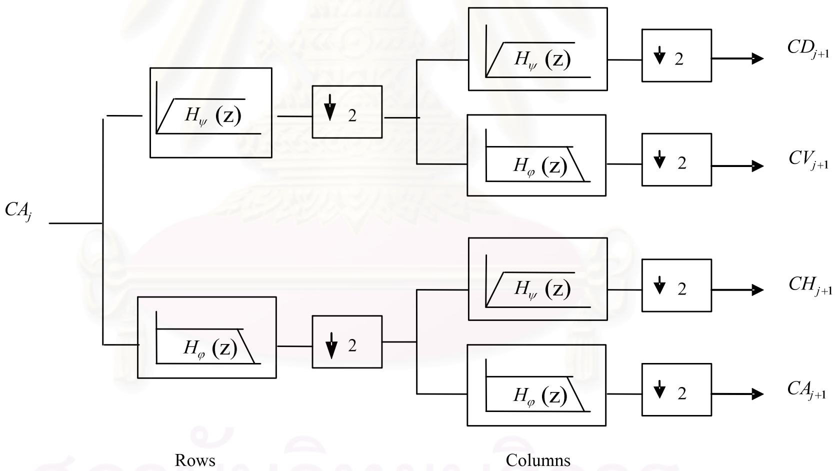
รูปที่ 2.7 การแปลงเวฟเล็ต 1 ระดับ (Level) ความละเอียดของภาพ

จากสมมุติฐานที่ว่าภาพส่วนใหญ่องค์ประกอบของภาพจะอยู่ในส่วนความถี่ต่ำ ทำให้สัมประสิทธิ์ของภาพในส่วนการประมาณภาพ (CA) ที่ผ่านตัวกรองความถี่ต่ำทั้งในแนวแกนตั้งและแนวแกนนอน ที่ได้มีลักษณะเสมือนภาพอินพุตที่ได้รับการลดขนาดลง 2 เท่าทั้งในแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนและจากเงื่อนไขข้อนี้ทำให้การแปลงเวฟเล็ตมีสมบัติ **การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด (Multiresolution Analysis: MRA)** กล่าวคือ เป็นการวิเคราะห์ที่สามารถเลือกระดับความละเอียดของสัญญาณที่สนใจมาทำการวิเคราะห์ได้ โดยทำการแปลงเวฟเล็ตในส่วนของสัมประสิทธิ์ในส่วนการประมาณภาพ (CA) ลงไปเรื่อยๆ ก็จะได้ภาพที่มีขนาดเล็กลง 2 เท่าทั้งในแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนไปเรื่อยๆ จนกว่าจะถึงระดับความละเอียดของภาพที่เราต้องการโดยเราจะเรียกภาพที่มีขนาดเล็กลงทีละ 2 เท่า ทั้งในแนวแกนตั้งและแนวแกนนอนของภาพนี้ ว่า **”ภาพพีระมิด”** เพราะภาพจะมีขนาดใหญ่สุดที่ฐานของพีระมิดซึ่งก็คือ ภาพอินพุตและภาพก็จะมีขนาดเล็กลงทีละ 2 เท่า ตามจำนวนการนำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วนการประมาณภาพแต่ละครั้งมาทำการแปลงเวฟเล็ตต่อซึ่งสามารถอธิบายลักษณะและวิธีการของภาพดังกล่าวได้ด้วยรูปที่ 2.8 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.8 แสดงการแปลงเวฟเล็ตในส่วนของสัมประสิทธิ์การประมาณภาพเพื่อให้ได้ภาพพีระมิด

ในส่วนของรูปที่ 2.9 นั้นแสดงถึงรูปแบบการวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด (MRA) เพื่อให้ได้ขนาดของสัญญาณในการวิเคราะห์ที่ตรงกับความต้องการและลักษณะของสัญญาณหรือภาพที่ได้ก็จะมีลักษณะเป็นภาพพีระมิด ด้วย



รูปที่ 2.9 แสดงลักษณะการวิเคราะห์สัญญาณภาพแบบหลายระดับความละเอียด (Multiresolution Analysis: MRA)

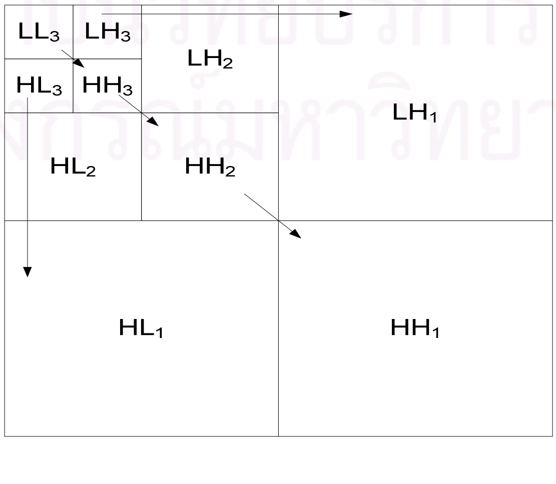
โดยที่	CA_j	คือ	สัมประสิทธิ์ของภาพในส่วนของการประมาณภาพที่ระดับความละเอียดที่ หรือ ระดับความละเอียดของภาพที่ระดับความละเอียดที่ j
	CA_{j+1}	คือ	สัมประสิทธิ์ของภาพในส่วนของการประมาณภาพที่ระดับความละเอียดที่ j+1 หรือ ระดับความละเอียดของภาพที่ระดับความละเอียดที่ j+1
	CH_{j+1}	คือ	สัมประสิทธิ์ในแนวแกนนอนของภาพในระดับความละเอียดที่ j+1
	CV_{j+1}	คือ	สัมประสิทธิ์ในแนวแกนตั้งของภาพในระดับความละเอียดที่ j+1
	CD_{j+1}	คือ	สัมประสิทธิ์ในแนวแกนทแยงของภาพในระดับความละเอียดที่ j+1

นอกจากการแปลงเวฟเล็ตที่นำสัมประสิทธิ์ของภาพในส่วนของการประมาณภาพ ไปทำการแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่องจนกว่าจะได้ ขนาดของสัญญาณที่ต้องการในการวิเคราะห์ซึ่งจะทำให้เกิดการวิเคราะห์สัญญาณภาพแบบหลายระดับความละเอียดแล้วเรายังสามารถนำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิดอื่นๆ ที่ผ่านการแปลงเวฟเล็ตในครั้งแรกหรือเรียกว่าระดับความละเอียดระดับที่ 1 ทุกชนิดมาทำการวิเคราะห์ด้วยการแปลงเวฟเล็ตต่อเนื่องไปเรื่อยๆ ได้อีกด้วยซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในรูปแบบของการบีบอัดสัญญาณ (Compression signal) โดยเราจะเรียกวิธีการและสมาชิกสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการการแปลงเวฟเล็ตประเภทนี้ว่า “เวฟเล็ตเพ็กเกต (Wavelet packet)” ซึ่งจะกล่าวถึงอย่างละเอียดต่อไปอีกครั้งในบทถัดไปและในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะได้ทดลองประยุกต์ใช้วิธีการวิเคราะห์สัญญาณแบบเวฟเล็ตเพ็กเกต ในการลดสัญญาณรบกวนด้วยซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในบทถัดไปอีกเช่นกัน

2.1.5 สหสัมพันธ์ระหว่างแถบย่อย

จากข้อสมมุติฐานที่ว่าองค์ประกอบของสัญญาณส่วนใหญ่จะเป็นส่วนของความถี่ต่ำ เมื่อทำการแปลงสัญญาณด้วยการแปลงเวฟเล็ตแล้วนั้น ทำให้สัมประสิทธิ์ของสัญญาณในส่วนของการประมาณสัญญาณ (*CA*) ดังรูปที่ 2.7 เปรียบเสมือนสัญญาณต้นแบบที่ถูกลดขนาดลง 2 เท่าทั้งในแนวแกนนอนและแนวแกนตั้งและจะพบว่ามีความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในหลายระดับความละเอียด กล่าวคือสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในระดับความละเอียดที่หยาบจะมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ในระดับความละเอียดที่ละเอียดกว่าและสามารถเขียนในรูปการกระจายตัวในแบบหลายตัวแปรได้อีกด้วย ซึ่งจะได้กล่าวถึงรายละเอียดขอการกระจายตัวนี้ในหัวข้อถัดไปอีกครั้งหนึ่ง แต่ในที่นี้จะขออธิบายถึงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในหลายระดับความละเอียดในรูปแบบความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ที่งานวิจัยที่ [8], [9] และ [10] ได้นำเสนอไว้ดังต่อไปนี้ก่อน

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในรูปแบบ Parent และ Child โดยที่เมื่อนำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วนของการประมาณสัญญาณไปทำการแปลงเวฟเล็ตต่อจะทำให้เราได้สัมประสิทธิ์ เวฟเล็ตที่มีความละเอียดน้อยกว่าเดิมเราจะเรียกสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วนนี้ว่า Parent โดยมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในระดับความละเอียดที่ละเอียดกว่าซึ่งเราจะเรียกสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในระดับนี้ว่า Child โดยความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.10 ต่อไปนี้



รูปที่ 2.10 ความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละระดับความละเอียด

2.2 แบบจำลองสัญญาณรบกวน

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเลือกใช้สัญญาณรบกวนแบบ สัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise: AWNG) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่นิยมใช้กันมากเพราะง่ายต่อการคำนวณรูปแบบวิธีการลดสัญญาณรบกวนและรูปแบบสัญญาณรบกวนประเภทนี้ไม่ก่อให้เกิดการการเบี่ยงเบน (Bias) ของสัญญาณเพราะสัญญาณรบกวนถูกสมมุติให้มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวนเป็น σ_n^2 หรือสามารถอธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$Y = X + n$$

เมื่อ	Y	คือ	สัญญาณที่สังเกตได้ (Observe signal)
	X	คือ	สัญญาณต้นแบบ (Original signal) หรือ สัญญาณข้อมูลที่ปราศจากสัญญาณรบกวน
	n	คือ	สัญญาณรบกวน (Noise signal) โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดให้สัญญาณรบกวนมีกระจายตัวแบบเกาส์เซียนสีขาวโดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวนเท่ากับ σ_n^2

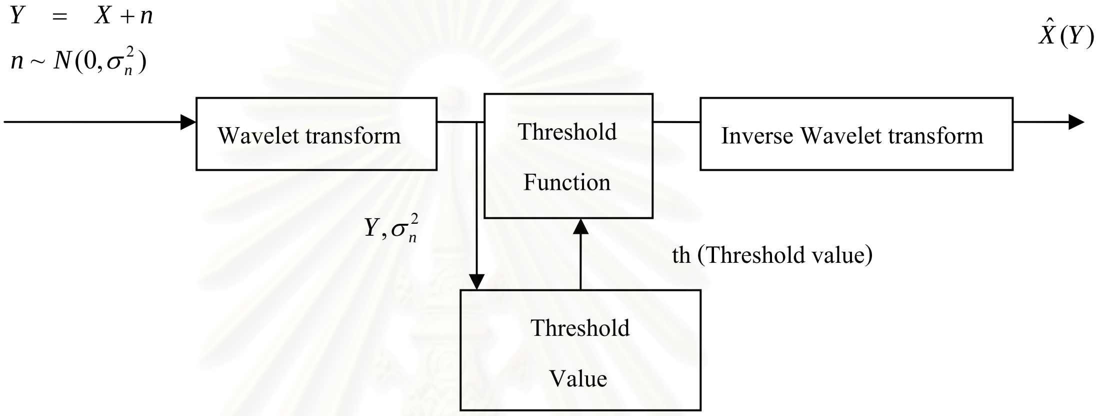
นอกจากนี้เรายังจะสมมุติให้สัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นเป็นอิสระจากสัญญาณต้นแบบอีกด้วย และเพื่อความสะดวกในการกล่าวอ้างถึงต่อจากนี้เมื่อกล่าวถึงสัญลักษณ์ตัวอักษร Y, X และ n ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความหมายในลักษณะข้างต้นจนกว่าจะมีการกำหนดเป็นอย่างอื่นและวิธีการลดสัญญาณรบกวนด้วย หลักการแปลงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยทั่วไปจะเริ่มต้นจากการแปลงสัญญาณที่สังเกตได้เข้าสู่เวฟเล็ตโดเมนจากนั้นจึงจะใช้วิธีลดสัญญาณรบกวนที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ทำการลดสัญญาณรบกวนแล้วจึงทำการแปลงสัญญาณที่ได้กลับสู่โดเมนเดิมอีกครั้งหนึ่งจากนั้นจึงจะเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวน ด้วยกรรมวิธีอัตราส่วนสัญญาณยอดกับสัญญาณรบกวน (Peak Signal to Noise Ratio: PSNR) โดยจะกล่าวถึงวิธีการในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีนี้โดยละเอียดต่อไปอีกครั้งหนึ่ง

2.3 ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน

วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการใช้ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนนี้ได้ถูกนำเสนอและเป็นที่กล่าวขวัญถึงอย่างมากในงานวิจัยเรื่อง การลดสัญญาณรบกวนด้วยกระบวนการ Soft-Thresholding [1] โดยในงานวิจัยดังกล่าวได้นำเสนอฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold Function) ชนิด Soft-Threshold และวิธีการคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold Selection) แบบ Universal โดยมีชื่อเรียกรวมเมื่อมีการนำมาประยุกต์ใช้กับการลดสัญญาณรบกวนของภาพว่า Visushrink โดยวิธีการลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธี Visushrink นั้นมีวิธีการดังต่อไปนี้

2.3.1 Visushrink

กระบวนการลดสัญญาณรบกวนด้วยฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนนั้นส่วนใหญ่จะมีกรรมวิธีที่คล้ายๆ กัน กล่าวคือเริ่มต้นจากการแปลงสัญญาณเข้าสู่เวฟเล็ตโดเมน จากนั้นเลือกวิธีคำนวณค่าจุดเริ่มเปลี่ยนแล้วจึงทำการคำนวณค่าจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold value) จากนั้นนำค่าที่ได้ไปใช้ประกอบการตัดสินใจในการจัดการกับสัมประสิทธิ์ข้อมูลโดยฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนแล้วจึงทำการแปลงข้อมูลกลับสู่โดเมนเดิม โดยมีแผนภาพกรรมวิธีดังกล่าวดังรูปที่ 2.11 ต่อไปนี้

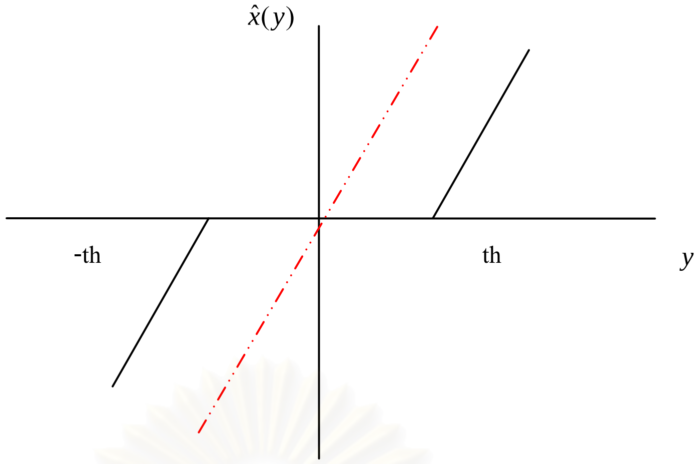


รูปที่ 2.11 วิธีฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold Function)

ในส่วนของกรรมวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ Visushrink นั้นงานวิจัยที่ [1] ได้นำเสนอรูปแบบของฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนในรูปของ Soft-Threshold โดยมีสมการที่ใช้คำนวณและจัดการกับสัมประสิทธิ์ของสัญญาณและรูปฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ดังสมการที่ 2.9 และรูปที่ 2.12 ดังต่อไปนี้

$$\text{Soft-Threshold:} \quad \hat{x}(y) = \operatorname{sgn}(y)(|y| - th)_+ \tag{2.9}$$

เมื่อ	$\hat{x}(y)$	คือ	สัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่ผ่านกระบวนการ Soft-Threshold แล้ว
	y	คือ	สัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่สังเกตได้
	th	คือ	ค่าจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold value)



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Soft-Threshold

ในงานวิจัยที่ [1] ได้นำเสนอวิธีคำนวณค่าจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Universal โดยมีสมการที่ใช้ในการคำนวณเมื่อทราบขนาดของสัญญาณที่สังเกตได้และความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนดังต่อไปนี้

$$th = \sigma_n \sqrt{2 \log N}$$

โดย

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{median(|HH_1|)}{0.6745}\right)^2 \quad (2.10)$$

เมื่อ σ_n^2 คือ ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน

N คือ ขนาดของสัญญาณที่สังเกตได้หรือจำนวนจุดภาพ (Pixel) ในข้อมูลภาพ

HH_1 คือ สัมประสิทธิ์ในส่วนแนวทแยงของภาพ (CH_1) ในการแปลงระดับที่ 1

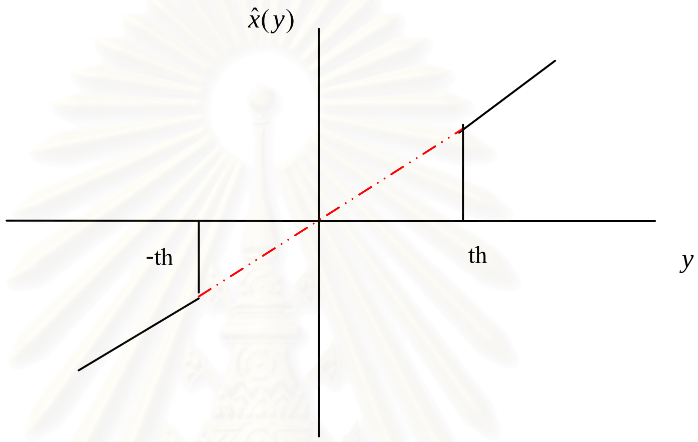
จะสังเกตเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่ได้หลังจากผ่านการลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธี Visushrink นั้นจะทำให้สัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่ได้ถูกทำให้มีขนาดเล็กลง (Shrink) โดยสังเกตได้เมื่อเปรียบเทียบกับเส้นปะสีแดงซึ่งเป็นเส้นที่แทนในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่สังเกตได้ก่อนและหลังกระบวนการ Visushrink มีค่าเท่ากัน $(y = \hat{x}(y))$ นอกจากนี้สัมประสิทธิ์ของสัญญาณที่มีค่าต่ำกว่าค่าสัมบูรณ์ของค่าจุดเริ่มเปลี่ยน ยังจะถูกปรับให้เป็นศูนย์อีกดังสมการที่ 2.9 และรูปที่ 2.12 ดังนั้นฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Soft-Threshold จึงถูกเรียกตามกระบวนการที่ใช้จัดการกับสัมประสิทธิ์ของสัญญาณว่ากระบวนการหดสั้นและทำลาย (Shrink and kill) อย่างไรก็ตามต่อมาได้มีผู้พัฒนาฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิดใหม่

เพื่อประยุกต์ใช้กับวิธีการค่าคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Universal ให้มีประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนมากขึ้นโดยตั้งชื่อฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิดใหม่นี้ว่าฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน Hard-Threshold

2.3.2 Hard-Threshold

ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยน Hard-Threshold นั้นถูกพัฒนาขึ้นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการปรับลดสัญญาณรบกวนของวิธีคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Universal [6] โดยมีสมการที่ใช้จัดการกับสัมประสิทธิ์ของสัญญาณและลักษณะของฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ 2.11 และรูปที่ 2.13 ตามลำดับ

$$\text{Hard-Threshold:} \quad \hat{x}(y) = y, \qquad |y| \le th \tag{2.11}$$



รูปที่ 2.13 ฟังก์ชันถ่ายโอนของฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Hard-Threshold

จะสังเกตเห็นว่าจะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงกับสัมประสิทธิ์ของสัญญาณ ที่ผ่านการปรับลดสัญญาณรบกวนด้วยฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Hard-Threshold นอกจากจะมีการปรับสัมประสิทธิ์ให้เป็นศูนย์ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของสัญญาณมีค่าต่ำกว่าค่าสัมบูรณ์ของค่าจุดเริ่มเปลี่ยน (Threshold value) เท่านั้น ดังนั้นฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Hard-Threshold จึงถูกเรียกตามกระบวนการที่กระทำกับสัมประสิทธิ์ของสัญญาณอีกว่ากระบวนการเก็บรักษาและทำลาย (Keep and kill) ซึ่งแตกต่างจากฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Soft-Threshold ซึ่งเป็นกระบวนการ หดสั้นและทำลาย (Shrink and kill) ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.3.1

2.3.3 การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยวิธีคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ BayeShrink

วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยการคำนวณค่าจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ BayeShrink นั้นเป็นวิธีการลดสัญญาณรบกวนที่ยังคงใช้ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนชนิด Soft-Threshold แต่เปลี่ยนวิธีการคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนจากกรรมวิธี Universal มาเป็นกรรมวิธี BayeShrink โดยตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่าให้สัญญาณต้นแบบ (Original signal) มีการกระจายตัวแบบ Generalize Gaussian Distribution (GGD) และใช้วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการประมาณแบบเบส์ (Bayesian Estimate) ด้วยวิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error: MMSE) ในการคำนวณหาวิธีการคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ BayeShrink ดังต่อไปนี้

สมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบ Generalize Gaussian Distribution (GGD) โดยมีการกระจายตัวของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) ดังต่อไปนี้

$$GG(x:\sigma,\beta) \;=\; c(\sigma,\beta)\exp(-\alpha(\sigma,\beta)|x|)^{\beta}, \qquad -\infty \le x \le \infty, \beta \ge 0$$

เมื่อ $\alpha(\sigma,\beta) \;=\; \sigma^{-1}\sqrt{\dfrac{\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)}}, \quad c(\sigma,\beta) \;=\; \dfrac{\beta\alpha(\sigma,\beta)}{2\Gamma(1/\beta)}$

$\Gamma(t)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

σ คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณต้นแบบ (Original signal)

β คือ Shape parameter มีค่าระหว่าง 0.5 ถึง 1

$$\hat{x}(y) \;=\; \eta_T(y)$$

เมื่อ $\eta_T(.)$ คือ ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Soft-Threshold ที่มีจุดเริ่มเปลี่ยนที่ T

หาค่าเฉลี่ยผิดพลาดยกกำลังสองจากสมการ

$$e \;=\; E[(\hat{x}(y)-x)^2] \;=\; E[(\eta_T(y)-x)^2] \;=\; E_X E_{Y|X}[(\eta_T(y)-x)^2] \tag{2.12}$$

เมื่อ $Y \mid X \sim N(x,\sigma_n^2)$ (รายละเอียดการพิสูจน์อยู่ในภาคผนวก ก)

$X \sim GG(x:\sigma,\beta)$

การหาค่าจุดเริ่มเปลี่ยนที่เหมาะสมที่สุดโดยการหาค่าเฉลี่ยผิดพลาดยกกำลังสองน้อยสุดจากสมการที่ 2.12

$$T^*(\sigma,\beta) \;=\; \arg\min_T(e)$$

จากงานวิจัยที่ [2] จะได้วิธีการคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนที่เหมาะสมตามสมการที่ 2.13 ดังต่อไปนี้

$$T \;=\; \frac{\sigma_n^2}{\sigma} \tag{2.13}$$

ในส่วนของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) ของสัญญาณต้นแบบนั้นสามารถหาได้จากสมการรูปแบบของช่องสัญญาณที่เราได้กำหนดไว้ข้างต้นกล่าวคือ เรากำหนดให้ช่องสัญญาณมีลักษณะเป็น $Y \;=\; X+n$ โดยที่ X และ n เป็นอิสระจากกันดังนั้น

$$\sigma_y^2 \quad = \quad \sigma^2 + \sigma_n^2$$

โดยที่ σ_y^2 คือ ความแปรปรวนของสัญญาณที่สังเกตได้

โดยทั่วไปสัญญาณที่สังเกตได้ (Observe signal) จะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ดังนั้นจึงสามารถหาค่าได้จากสมการต่อไปนี้

$$\sigma_y^2 \quad = \quad \frac{\sum_{i,j=1}^{n} Y_{ij}^2}{n^2}$$

เราจึงสามารถหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณต้นแบบได้จากสมการที่ 2.14 ดังต่อไปนี้

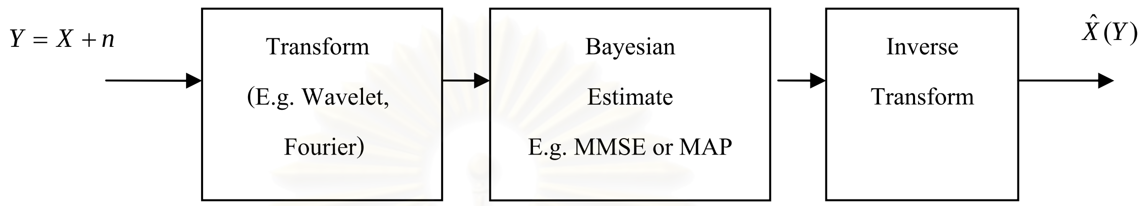
$$\sigma \quad = \quad \sqrt{\max(\sigma_y^2 - \sigma_n^2, 0)} \tag{2.14}$$

สำหรับการลดสัญญาณรบกวนแบบ BayeShrink นั้นในงานวิจัยที่ [2] ได้ทดสอบแล้วพบว่ามีประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนมากกว่าวิธีการ Visushrink แบบดั่งเดิมและในงานวิจัยที่ [6] ก็พบว่าวิธีการนี้ก็มีประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนมากกว่าวิธี Hard-Threshold วิธีนี้จึงจัดว่าเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพมากอีกวิธีการหนึ่งในจำนวนกรรมวิธีการลดสัญญาณรบกวนในรูปการใช้ฟังก์ชันจุดเริ่มเปลี่ยนและเป็นการแสดงให้เห็นว่าสัญญาณต้นแบบ ในเวฟเล็ตโดเมนนั้นมีการกระจายตัวใกล้เคียงกับการกระจายตัวแบบ GGD (Generalize Gaussian Distribution) อันเป็นสมมุติฐานของการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบในวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ BayeShrink

2.4 การประมาณแบบเบส์

การลดสัญญาณรบกวนในรูปแบบของการประมาณสัญญาณแบบเบส์นั้นจัดเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่อาศัยหลักการความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) ในรูปแบบต่างๆมาประยุกต์ใช้ในการประมาณสัญญาณเพื่อลดสัญญาณรบกวนและสามารถประยุกต์ใช้กับรูปแบบการลดสัญญาณรบกวน ในรูปแบบการแปลง (Transform) สัญญาณได้โดยการลดสัญญาณรบกวน โดยใช้การประมาณแบบเบส์นั้นเราจำเป็นที่จะต้องทราบลักษณะการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบและสัญญาณรบกวนก่อน จึงจะสามารถหาสมการในการประมาณสัญญาณได้และโดยทั่วไปมักจะให้สัญญาณต้นแบบนั้นมีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน หรือการกระจายตัวแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 แต่ในทางปฏิบัติสัญญาณต้นแบบในโดเมนการแปลงชนิดต่างๆ เช่น เวฟเล็ตโดเมนอาจมีการกระจายตัวในรูปแบบอื่นนอกเหนือจากการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนก็เป็นได้ ยกตัวอย่างเช่น ในงานวิจัยที่ [2] สมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบ Generalize Gaussian Distribution (GGD) โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะได้กล่าวถึงงานวิจัยที่ศึกษาถึงรูปแบบการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบ หลังการแปลงเวฟเล็ตแล้วว่าอยู่ในรูปแบบใดและมีประโยชน์ในการใช้ลดสัญญาณรบกวนอย่างไรบ้างโดยจะกล่าวอย่างละเอียดในหัวข้อถัดไปอีกครั้งหนึ่ง กล่าวโดยสรุปแล้ววิธีการประมาณสัญญาณแบบเบส์เพื่อใช้ลดสัญญาณรบกวนนั้นแบ่งออกได้เป็นสองประเภท คือ วิธีค่าเฉลี่ยกำลังสองผิดพลาดน้อยสุด (Minimum Mean Square Error: MMSE)

และวิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (Maximum a Posteriori Probability: MAP) โดยมีรูปแบบการปรับลดสัญญาณรบกวนดังต่อไปนี้คือ เริ่มจากการแปลงสัญญาณเข้าสู่โดเมนที่ต้องการเช่นเวฟเล็ตโดเมน จากนั้นใช้วิธีการประมาณสัญญาณแบบเบส์ในการหาสมการที่จะใช้ประมาณสัญญาณแล้วจึงใช้สมการนั้นจัดการกับสัญญาณ เพื่อลดสัญญาณรบกวนจากนั้นทำการแปลงสัญญาณกลับสู่โดเมนปกติอีกครั้งหนึ่ง โดยมีขั้นตอนและกระบวนการต่างๆ ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 ขั้นตอนการลดสัญญาณรบกวนในแบบการแปลง (Transforms) โดยใช้การประมาณแบบเบส์

ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีการประมาณสัญญาณแบบเบส์ที่เป็นที่นิยมกัน อย่างกว้างขวางและได้มีการนำไปประยุกต์ใช้ในวิธีลดสัญญาณรบกวนอย่างมากคือ คือ วิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error: MMSE) และวิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (Maximum a Posteriori Probability: MAP)

2.4.1 ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error: MMSE)

วิธีการลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดนี้คือ การกำหนดให้สมการ – ประมาณสัญญาณมีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ยของสัญญาณต้นแบบขึ้นกับสัญญาณที่สังเกตได้ ($E[x|y]$) โดยต่อไปนี้จะพิสูจน์ว่าการกำหนดให้สมการประมาณสัญญาณมีค่าดังกล่าวนั้นจะทำให้ได้ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดดังต่อไปนี้

สมมุติให้ฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณสัญญาณอยู่ในรูปของ

$$g(y) = E[x|y] + \delta g(y)$$

ทำการหาค่าผิดพลาดยกกำลังสองเฉลี่ย

$$e = E[(x - g(y))^2]$$

$$= E[(x - E[x|y] - \delta g(y))^2]$$

$$= \quad E[(x-E[x\,|\,y])^2] - 2E[(x-E[x\,|\,y])\delta g(y)] + E[(\delta g(y))^2]$$

ทำการหาค่า $E[(x-E[x\,|\,y])\delta g(y)]$ ดังต่อไปนี้

$$E[(x-E[x\,|\,y])\delta g(y)] \quad = \quad E[x\delta g(y)] \quad - \quad E[E[x\,|\,y]\delta g(y)]$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\delta g(y) f_{x,y}(x,y)dxdy \quad - \quad \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} xf_{x|y}(x,y)dx)\delta g(y) f_y(y)dy$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\delta g(y) f_{x,y}(x,y)dxdy \quad - \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\delta g(y) f_{x|y}(x,y) f_y(y)dxdy$$

$$= \quad 0$$

เพราะฉะนั้นค่าผิดพลาดยกกำลังสองเฉลี่ยจะมีค่าเป็น

$$e \quad = \quad E[(x-E[x\,|\,y])^2] \quad + \quad E[(\delta g(y))^2] \quad \geq \quad E[(x-E[x\,|\,y])^2]$$

ดังนั้นสมการประมาณสัญญาณที่จะทำให้เกิดค่าผิดพลาดยกกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด คือ

$$\hat{x}(y) \quad = \quad E[x\,|\,y] \tag{2.15}$$

โดยทั่วไปแล้วเราจะหาสมการในการประมาณสัญญาณคือสมการที่ 2.15 เมื่อทราบลักษณะการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบและสัญญาณรบกวนด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$\hat{x}(y) \quad = \quad E[x\,|\,y] = \int \frac{xf_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}dx$$

$$\hat{x}(y) \quad = \quad \int \frac{xf_{y|x}(x,y) f_x(x)}{f_y(y)}dx \tag{2.16}$$

$$f_y(y) \quad = \quad \int f_{x,y}(x,y)dx \quad = \quad \int f_{y|x}(x,y) f_x(x)dx \tag{2.17}$$

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างในการหาสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณ ด้วยวิธี MMSE ในกรณีที่สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเป็น σ^2

เมื่อ $$f_{y|x}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp(\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_n^2}), \quad f_x(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$$

เมื่อคำนวณค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัญญาณที่สังเกตได้ ($f_y(y)$) จากสมการที่ 2.17 และหาสมการในการประมาณสัญญาณจากสมการที่ 2.16 จะได้สมการประมาณสัญญาณ คือ

$$\hat{x}(y) \quad = \quad \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_n^2}\,y \tag{2.18}$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าสมการประมาณสัญญาณในกรณีนี้จะอยู่ในรูปแบบเชิงเส้นโดยในงานวิจัยที่ [6] ได้มีการประยุกต์ใช้สมการประมาณสัญญาณในกรณีนี้เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของการลดสัญญาณรบกวน ในเวฟเล็ตโดเมนพบว่าให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนที่ดีกว่าวิธี Visushrink แต่ประสิทธิภาพยังคงด้อยกว่าวิธี BayeShrink ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าสัญญาณต้นแบบในเวฟเล็ตโดเมนนั้นมีการกระจายตัวใกล้เคียงกับการกระจายตัวแบบ GGD (Generalize Gaussian Distribution) อันเป็นสมมุติฐานการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบของวิธี BayeShrink

2.4.2 ความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (Maximum a Posteriori Probability: MAP)

วิธีประมาณสัญญาณในรูปแบบนี้จะทำให้เราสามารถหาสมการประมาณสัญญาณได้ง่ายขึ้นกว่าวิธี ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE) โดยให้สมการประมาณสัญญาณอยู่ในรูปตัวแปรสัญญาณต้นแบบสูงสุดที่ทำให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัญญาณต้นแบบที่ขึ้นกับสัญญาณที่สังเกตได้ ($f_{x|y}(x\,|\,y)$) มีค่าสูงสุด ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}(y) \quad = \quad \arg\max_x\, f_{x|y}(x,y)$$

$$= \quad \arg\max_x \frac{f_{y|x}(x,y)\,f_x(x)}{f_y(y)}$$

$$= \quad \arg\max_x\, f_{y|x}(x,y)\,f_x(x)$$

$$\hat{x}(y) \quad = \quad \arg\max_x(\ln f_{y|x}(x,y)+\ln f_x(x)) \tag{2.19}$$

ในกรณีที่เราสมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนโดยมีค่าเฉลี่ยของสัญญาณ เป็นศูนย์และรูปแบบของสัญญาณรบกวนเป็นดังหัวข้อที่ 2.2 เราจะสามารถหาสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดภายหลังโดยใช้สมการที่ 2.19 ได้ดังนี้

$$\hat{x}(y) \quad = \quad \arg\max_x(\ln f_{y|x}(x,y)+\ln f_x(x))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}})-(\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2})+\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})-(\frac{x^2}{2\sigma^2})) \quad = \quad 0$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะหาสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณได้ ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}(y) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_n^2} y$$

ในกรณีที่สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียนจะสังเกตเห็นว่าสมการประมาณสัญญาณไม่ว่าจะคำนวณแบบวิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดหรือวิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด ก็ให้สมการที่เหมือนกัน ต่อไปจะยกตัวอย่างกรณีที่สมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบลาปลาซ (Laplace Distribution) และใช้วิธีความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดคำนวณหาสมการประมาณสัญญาณ

$Y \mid X \sim N(x,\sigma_n^2)$

$$f_{y|x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp(\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_n^2}), \quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp(\frac{-\sqrt{2}|x|}{\sigma})$$

จากสมการที่ 2.19

$$\hat{x}(y) = \arg\max_x(\ln f_{y|x}(x,y)+\ln f_x(x))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}})-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}+\ln(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma}) = 0$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะหาสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณได้ ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}(y) = sign(y)(|y|-\frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma})_+ \quad (2.20)$$

จะสังเกตเห็นว่าสมการประมาณสัญญาณในกรณีนี้จะมีสมการเหมือนวิธี BayeShrink แต่มีจุดเริ่มเปลี่ยนเป็น $\sqrt{2}\sigma_n^2/\sigma$ และดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ BayeShrinkนั้นมีการสมมุติให้สัญญาณต้นแบบในเวฟเล็ตโดเมนมีการกระจายตัวแบบ GGD และในกรณีที่เราสมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบลาปลาซและได้สมการประมาณสัญญาณ ซึ่งมีความใกล้เคียงกับสมการที่ใช้ในวิธี BayeShrink ก็เป็นการแสดงให้เห็นว่าสัญญาณต้นแบบในเวฟเล็ตโดเมนนั้นก็มีการกระจายใกล้เคียงกับการกระจายแบบลา – ปลาซเช่นกัน

2.5 แบบจำลองสัญญาณใน 2 แถบย่อย

ในงานวิจัยที่ [8] ได้กำหนดให้รูปแบบความสัมพันธ์ของสัญญาณต้นแบบของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตกับสัญญาณรบกวนอยู่ในรูปแบบดังสมการที่ 2.21 โดยกำหนดให้สัญญาณรบกวนเป็นชนิดเกาส์สีขาวแบบบวกที่เป็นอิสระต่อกันและมีการกระจายตัวเหมือนกันใน 2 แถบย่อย Parent และ Child

$$\underline{Y} = \underline{X} + \underline{n} \tag{2.21}$$

เมื่อ

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Y_1 คือ สัญญาณที่สังเกตของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Child (Observe signal Child)

Y_2 คือ สัญญาณที่สังเกตของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Parent (Observe signal Parent)

X_1 คือ สัญญาณต้นแบบของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิด Child (Original signal Child)

X_2 คือ สัญญาณต้นแบบของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิด Parent (Original signal Parent)

n_1 คือ สัญญาณรบกวนในส่วนของ Child (Noise signal Child)

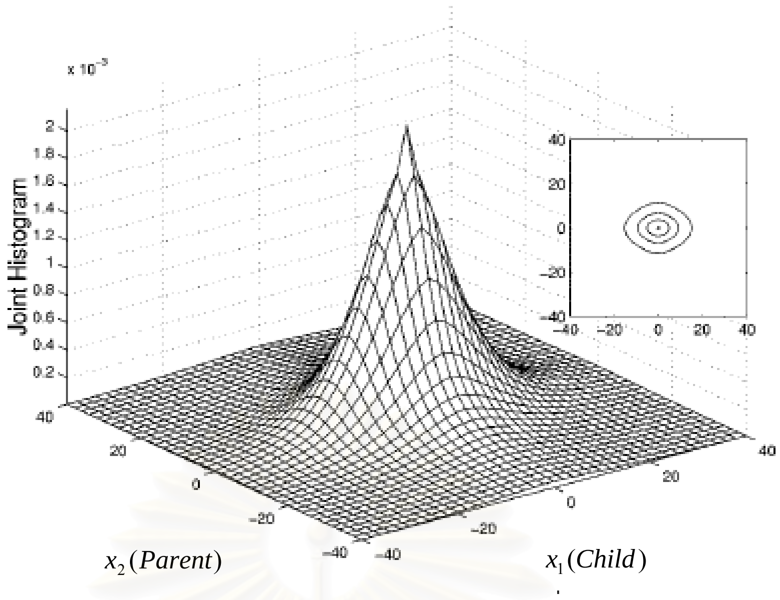
n_2 คือ สัญญาณรบกวนในส่วนของ Parent (Noise signal Parent)

โดยในงานวิจัยที่ [8] ได้สมมุติให้สัญญาณรบกวนในส่วนของ Parent และ Child มีลักษณะการกระจายตัวที่เหมือนกันและเป็นอิสระจากกัน (Independent and identically distributed: iid) โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

$$f_{\underline{n}}(\underline{n}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma_n^2}), \tag{2.22}$$

2.6 วิธีประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดชนิด 2 ตัวแปร

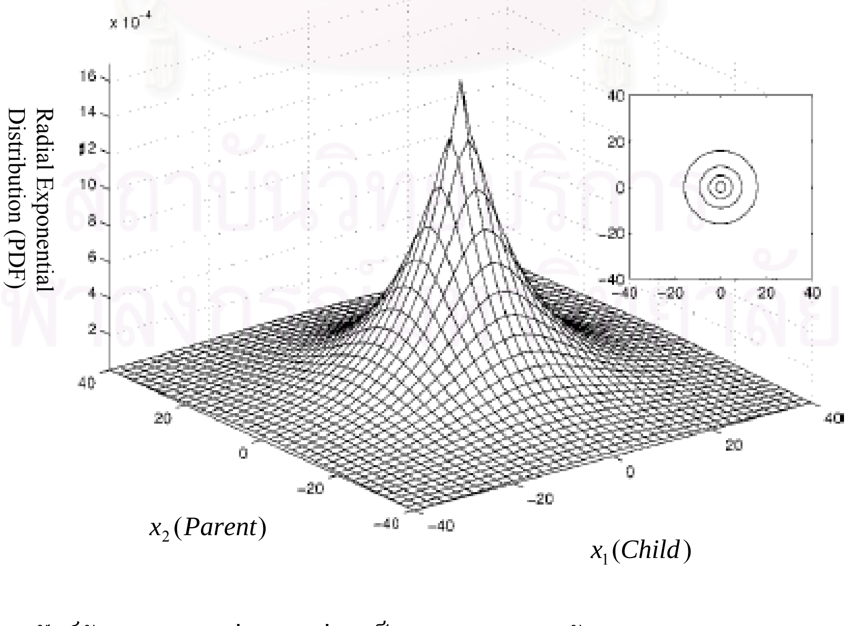
ในงานวิจัยที่ [8], [9] และ [10] ได้ทำการทดลองหารูปแบบการกระจายตัวของความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแบบ 2 ตัวแปรโดยใช้ภาพจากฐานข้อมูล Corel แล้วพบว่าการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแบบ 2 ตัวแปรจะมีรูปร่างดังรูปที่ 2.15 ต่อไปนี้



รูปที่ 2.15 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในรูปความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child

นอกจากนี้ในงานวิจัยที่ [8] ยังได้นำเสนอฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: PDF) ที่ใช้ในการประมาณความสัมพันธ์ของเวฟเล็ตในรูป 2 ตัวแปรไว้ให้อยู่ในรูปการกระจายแบบ Radial Exponential Distribution ในรูปแบบ 2 ตัวแปรโดยมีสมการฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังสมการที่2.23 และรูปแสดงการกระจายตัวดังรูปที่ 2.16 ตามลำดับ

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{3}{2\pi\sigma^2}\exp\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sigma}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) \quad (2.23)$$



รูปที่ 2.16 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการกระจายตัวแบบ Radial Exponential Distribution

โดยในงานวิจัยที่ [8] ได้คำนวณหาสมการประมาณสัญญาณเพื่อลดสัญญาณรบกวนภาพด้วย วิธีประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดแบบ 2 ตัวแปร โดยมีสมการที่ใช้ในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

$$\underline{\hat{x}}(\underline{y}) \quad = \quad \arg\max_{\underline{x}}(\ln f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{x},\underline{y}) + \ln f_{\underline{x}}(\underline{x})) \tag{2.24}$$

จากลักษณะของสัญญาณต้นแบบและสัญญาณรบกวนในสมการที่ 2.22 และ 2.23

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) \quad = \quad \frac{3}{2\pi\sigma^2}\exp(\frac{-\sqrt{3}}{\sigma}\sqrt{x_1^2+x_2^2}), \qquad f_{\underline{n}}(\underline{n}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{2\sigma_n^2})$$

ดังนั้น

$$f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{x},\underline{y}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp(-\frac{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}{2\sigma_n^2})$$

หาค่าสมการที่ 2.24 เพื่อหาสมการที่ใช้ในการประมาณสัญญาณ $(\hat{x}_1(\underline{y}))$ ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\ln(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}) - \frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(y_2-x_2)^2}{2\sigma_n^2} + \ln(\frac{3}{2\pi\sigma^2}) - \frac{\sqrt{3}}{\sigma}\sqrt{x_1^2+x_2^2}) \quad = \quad 0$$

$$\frac{y_1-x_1}{\sigma_n^2} - \frac{\sqrt{3}x_1}{\sigma\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad = \quad 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\ln(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}) - \frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(y_2-x_2)^2}{2\sigma_n^2} + \ln(\frac{3}{2\pi\sigma^2}) - \frac{\sqrt{3}}{\sigma}\sqrt{x_1^2+x_2^2}) \quad = \quad 0$$

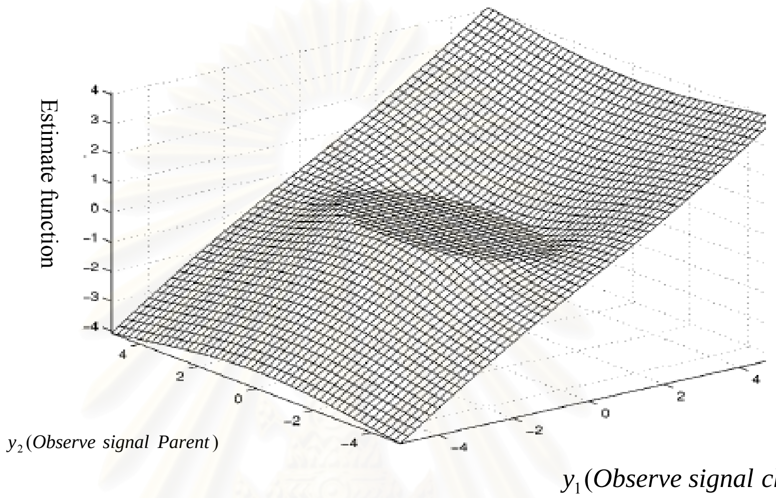
$$\frac{y_2-x_2}{\sigma_n^2} - \frac{\sqrt{3}x_2}{\sigma\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad = \quad 0 \tag{2.26}$$

เมื่อแก้สมการที่ 2.25 และสมการที่ 2.26 จะได้สมการประมาณสัญญาณแบบ 2 ตัวแปร คือ

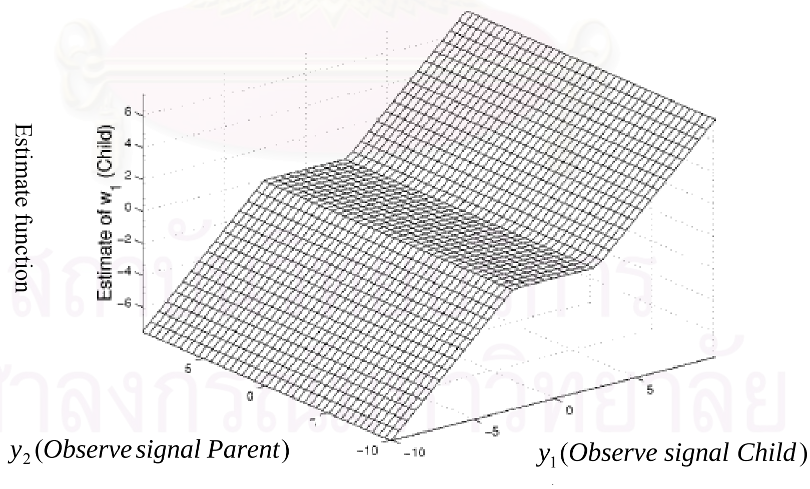
$$\hat{x}_1(\underline{y}) \quad = \quad \frac{(\sqrt{y_1^2+y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma})_+}{\sqrt{y_1^2+y_1^2}}y_1 \tag{2.27}$$

เมื่อ $$g_+ \quad = \quad \begin{cases} 0, & g \le 0 \\ g, & g > 0 \end{cases}$$

ในงานวิจัยที่ [8] ได้เรียกวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยสมการที่ 2.27 นี้ว่าวิธีการ BiShrink และได้มีการทดลองเขียนกราฟระหว่างสมการที่ใช้ในการประมาณสัญญาณ $(\hat{x}_1(\underline{y}))$ ในสมการที่ 2.27 กับสัญญาณที่สังเกตได้ จะพบว่าลักษณะของสมการที่ใช้ในการประมาณสัญญาณนั้นจะขึ้นกับสัญญาณที่สังเกตได้ ทั้งในส่วนของ Parent และ Child ตามสมมุติฐานในผลการแปลงเวฟเล็ตที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วนของ Parent น่าจะมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Child ดังแสดงในรูปที่ 2.17 ซึ่งต่างจากสมการที่ 2.20 ซึ่งสมการประมาณสัญญาณจะขึ้นกับสัญญาณในส่วนของ Child เพียงอย่างเดียว ดังรูปที่ 2.18



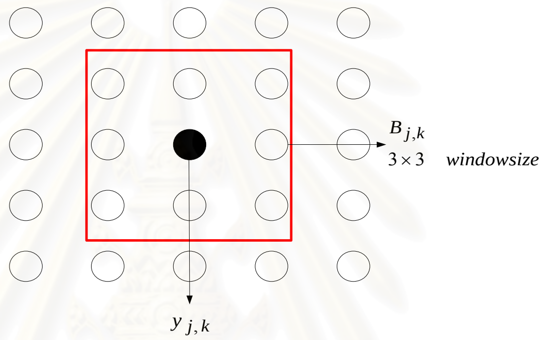
รูปที่ 2.17 ผลกระทบของสมการประมาณสัญญาณในกรณีที่คำนึงถึงสัญญาณทั้งในส่วน Parent และ Child



รูปที่ 2.18 ผลกระทบของสมการประมาณสัญญาณเมื่อพิจารณาเฉพาะสัญญาณในส่วน Child อย่างเดียว

2.7 จุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่น (NeighShrink)

ในงานวิจัยที่ [22] ได้นำเสนอวิธีการลดสัญญาณรบกวนโดยการนำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตบริเวณข้างเคียงสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่เราพิจารณามาทำการพิจารณาร่วมด้วยโดยเรียกวิธีการนี้ว่าวิธี NeighShrink โดยตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่อยู่ในบริเวณเดียวกันย่อมมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน และย่อมที่จะมีผลกระทบถึงกันด้วยโดยในงานวิจัยที่ [22] เป็นงานวิจัยแรกที่ได้นำวิธีการนี้มาประยุกต์ใช้กับการลดสัญญาณรบกวนของภาพด้วยวิธี Visushrink โดยทำการสร้างหน้าต่าง (Window) ล้อมรอบสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่เราจะพิจารณาและนำสัมประสิทธิ์ในบริเวณนั้นมา พิจารณาในการลดสัญญาณรบกวนด้วย โดยขนาดหน้าต่างที่สร้าง (Window size) จะมีขนาดเป็นเลขคี่เพื่อความสมมาตรในการคำนวณ โดยมีตัวอย่างการสร้างหน้าต่างล้อมรอบสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่เราจะพิจารณา เพื่อหาสมประสิทธิ์ท้องถิ่นในบริเวณนั้นดังรูปที่ 2.19 ต่อไปนี้



รูปที่ 2.19 การสร้างหน้าต่างขนาด 3×3 เพื่อใช้ในวิธี NeighShrink

สมการวิธี Visushrink นั้นนอกจากการเขียนแทนด้วยสมการที่ 2.9 แล้วยังสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการที่ 3.6 ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}_{j,k}(y_{j,k}) = (1 - \frac{th}{|y_{j,k}|})_{+} y_{j,k} \tag{2.28}$$

เมื่อ th คือ วิธีการคำนวณจุดเริ่มเปลี่ยนแบบ Universal ($th = \sigma_n\sqrt{\log N}$)

N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต

σ_n คือ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณรบกวน, $\sigma_n = \dfrac{median(|HH_1|)}{0.6745}$

โดยในงานวิจัยที่ [22] ได้ทำการคิดผลกระทบของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตภายในบริเวณหน้าต่าง (window) ที่เรากำลังพิจารณาให้มีลักษณะ ดังต่อไปนี้

$$S_{j,k} = \sum_{(i,l)\in B_{j,k}} y_{i,l}^2 \tag{2.29}$$

โดย $y_{i,l}$ คือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่อยู่ในบริเวณหน้าต่างที่สร้างขึ้น

$B_{j,k}$ คือ บริเวณหน้าต่างที่สร้างขึ้นเพื่อพิจารณา

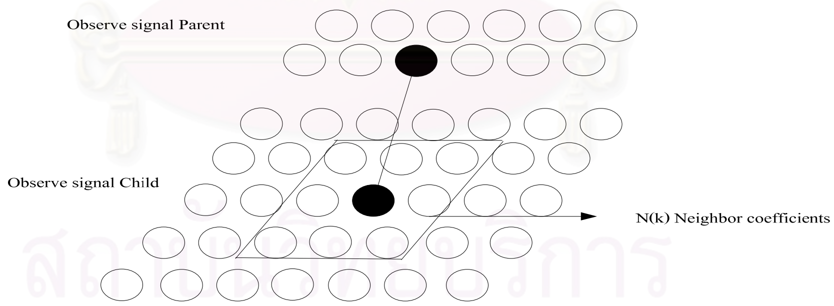
สมการที่ใช้ลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธี NeighShrink คือ สมการที่ 3.8

$$\hat{x}_{j,k}(y_{j,k}) = y_{j,k}\beta_{j,k} \quad (2.30)$$

เมื่อ $\beta_{j,k} = (1 - \frac{th^2}{S_{j,k}})_+$

2.8 ความแปรปรวนแบบท้องถิ่น (Local Variance Estimation)

ในงานวิจัยที่ [10] ได้มีการประยุกต์ใช้หลักการหาค่าความแปรปรวนแบบท้องถิ่นขึ้น โดยตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีขนาดใหญ่ก็จะอยู่ติดกันในทำนองเดียวกัน สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีขนาดเล็กก็จะอยู่ติดกันเช่นกัน ดังนั้นการประมาณค่าความแปรปรวนของสัญญาณโดยใช้วิธีการคิดความแปรปรวนทั้งภาพจึงไม่เหมาะสม ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอหลักการประมาณความแปรปรวนแบบท้องถิ่นขึ้น โดยการสร้างกรอบหน้าต่างขนาดเท่าที่เราต้องการล้อมรอบสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Child เพื่อคำนวณหาค่าความแปรปรวนของสัญญาณที่สังเกตได้เพื่อใช้ในการประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ที่จุดกึ่งกลางหน้าต่างนั้น โดยที่มีขนาดหน้าต่าง (Window size) เป็นเลขคี่เพื่อความสมมาตรในการคำนวณและมีรายละเอียดการสร้างหน้าต่างเพื่อหาความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตบริเวณนั้นดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 วิธีสร้างหน้าต่างล้อมรอบสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตขนาด 3×3

โดยมีสมการที่ใช้คำนวณความแปรปรวนแบบท้องถิ่นดังสมการที่ 2.28

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i,j=N(k)} Y_{ij}^2}{k^2} \quad (2.31)$$

โดย $N(k)$ คือ บริเวณที่นำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตมาคิดความแปรปรวน

2.9 อัตราส่วนสัญญาณยอดกับสัญญาณรบกวน (Peak Signal to Noise Ratio: PSNR)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ค่าวัดคุณภาพของภาพในแบบอัตนัย (Objective) ชนิด อัตราส่วนสัญญาณยอดกับสัญญาณรบกวน (PSNR) ในการพยายามให้ความหมายของภาพในเชิงปรนัย (Subjective) โดยมีสมการในการคำนวณ ดังต่อไปนี้

$$PSNR = 10\log\left(\frac{256}{\frac{1}{M \times N}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(X(i,j)-\hat{X}(i,j))^2}\right) \tag{2.32}$$

โดย

$M \times N$	คือ	ขนาดของภาพ
$X(i, j)$	คือ	จุดภาพต้นฉบับ
$\hat{X}(i, j)$	คือ	จุดภาพที่ผ่านกระบวนการลดสัญญาณรบกวน

โดยจะสังเกตเห็นว่าจากสมการที่ 2.32 ยิ่งค่า PSNR มีค่าสูงเท่าไรภาพที่ได้หลังการลดสัญญาณรบกวนก็จะยิ่งเหมือนภาพต้นฉบับ (Original Image) มากขึ้นเท่านั้นซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่ายิ่งค่า PSNR มีค่ามากเท่าไรประสิทธิภาพของวิธีการลดสัญญาณรบกวนก็ยิ่งมีประสิทธิภาพมากขึ้น

ซึ่งในบทถัดไปจะได้นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย วิธีประมาณค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดแบบ 2 ตัวแปรเมื่อใช้การกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในรูปแบบ Radial Exponential Distribution ที่ได้นำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [8] และจะกล่าวถึงหลักการวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้จุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่น (NeighShrink) ซึ่งได้นำมาประยุกต์ใช้ในวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ด้วย

บทที่ 3

เทคนิคการลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอ

ในงานวิจัยที่ [8], [9] และ [10] นั้นใช้วิธีหาสมการประมาณสัญญาณแบบค่าความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (MAP) ซึ่งเป็นวิธีหาสมการประมาณสัญญาณที่ง่ายต่อการคำนวณแต่อาจจะไม่ให้ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในการประมาณสัญญาณก็เป็นได้ซึ่งทำให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนน้อยลง ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงประยุกต์ใช้วิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE) เป็นวิธีหาสมการประมาณสัญญาณซึ่งจะให้ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในการประมาณสัญญาณแน่นอน โดยมีวิธีการดังต่อไปนี้

3.1 วิธีประมาณค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดชนิด 2 ตัวแปร

ในบทที่ 2 งานวิจัยที่ [8], [9] และ [10] ได้ทำการศึกษาวิธีการประมาณสัญญาณแบบเบส์เมื่อสัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบ Radial Exponential Distribution ในแบบ 2 ตัวแปรโดยใช้วิธีหาสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณในแบบความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุด (MAP) แล้วได้วิธีการลดสัญญาณรบกวนที่เรียกว่า วิธี BiShrink แต่ในหัวข้อที่ 3.1 นี้จะได้ทำการศึกษาถึงวิธีการลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธีประมาณค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE) แบบ 2 ตัวแปรและยังคงใช้รูปแบบการกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบในแบบ Radial Exponential Distribution เหมือนเดิมโดยมีสมการที่ใช้ประมาณสัญญาณดังสมการที่ 3.1 ต่อไปนี้

$$\hat{x}(\underline{y}) = \int \frac{x_1 f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{x}}(\underline{x})}{f_{\underline{y}}(\underline{y})} d\underline{x} \tag{3.1}$$

โดย

$$f_{\underline{y}}(\underline{y}) = \int f_{\underline{x},\underline{y}}(\underline{x},\underline{y}) d\underline{x} = \int f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{x}}(\underline{x}) d\underline{x}$$

เราพบว่าตัวแปรแบบ Radial Exponential Distribution นั้นมีความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้กับตัวแปรชนิดอื่น [23]

$$\underline{X} = \sqrt{Z}\,\underline{W}$$

เมื่อตัวแปร $\underline{W}$ และ Z เป็นอิสระจากกัน

โดย $\underline{X}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่กระจายตัวแบบ Radial Exponential Distribution โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และจำนวนตัวแปรเท่ากับ d

Z คือ ตัวแปรที่มีการกระจายตัวแบบเอกซ์โปเนนเซียล (Exponential Distribution) โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนมีค่าเป็น 1

$\underline{W}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรตัวแปรที่มีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน (Gaussian Distribution) โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนมีค่าเป็น $(\sqrt{k}\sigma)^2$ และ จำนวนตัวแปรเท่ากับ d โดยที่ $k \in [0,\infty)$ (สำหรับการกระจายตัวแบบลาปลาซ $k=1$ และการกระจายตัวแบบ Radial Exponential Distribution $k = 1/6$)

ทำการหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของสัญญาณต้นแบบ ($f_{\underline{X}}(\underline{x})$) ดังต่อไปนี้

ทำการเปลี่ยนตัวแปรจาก $Z \to A$

โดยที่ $z = a^2$

ดังนั้น $J_1 = \left|\frac{\partial Z}{\partial A}\right| = 2a$

เมื่อ J_1 คือ ตัวดำเนินการแปลงจาโคเบียนในการเปลี่ยนตัวแปรจาก $Z \to A$

$$f_A(a) = J_1(f_Z(z)_{z=a^2}) = 2a\exp(-a^2)$$

ดังนั้น

$$f_{A,\underline{W}}(a,\underline{w}) = 2a\exp(-a^2)\frac{1}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp(-\frac{\|\underline{w}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}), \quad 0 \le a \le \infty, \quad -\infty \le \underline{w} \le \infty$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรจาก $\underline{W} \to \underline{X}$

โดยที่ $\underline{x} = a\underline{w}$

ทำการหาตัวดำเนินการแปลงจาโคเบียนในกรณีเปลี่ยนตัวแปรจาก $\underline{X} \to \underline{W}$ (J_2) ดังต่อไปนี้

$$J_2 = \left|\frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{X}}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial w_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial w_d}{\partial x_1} & \frac{\partial w_d}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial w_d}{\partial x_d} \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{a^d}$$

ดังนั้น

$$f_{A,\underline{X}}(a,\underline{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{x}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)\times 2a\exp(-a^2)$$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) \;=\; \int_0^{\infty} 2a\exp(-a^2)\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{x}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)da$$

หาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัญญาณที่สังเกตได้ ($f_{\underline{Y}}(y)$)

จากลักษณะของช่องสัญญาณในแบบหลายตัวแปร

$$\underline{Y} \;=\; \underline{X}+\underline{n}$$

ดังนั้น $\quad f_{\underline{Y}}(\underline{y}) \;=\; f_{\underline{X}}(\underline{x}) * f_{\underline{n}}(\underline{n})$

จาก

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) \;=\; \int_0^{\infty} 2a\exp(-a^2)\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{x}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)da,$$

$$f_{\underline{n}}(\underline{n}) \;=\; \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{\|\underline{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

ดังนั้น

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) \;=\; \int_{R^d}\left(\int_0^{\infty} 2a\exp(-a^2)\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{\|\underline{y}-\underline{t}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)da\right)\left(\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{t}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)\right)|d\underline{t}|$$

$$= \int_0^{\infty} 2a\exp(-a^2)\underbrace{\left(\int_{R^d}\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{y}-\underline{t}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{\|\underline{t}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)|d\underline{t}|\right)}_{Gaussian\quad Convolution}$$

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) \;=\; \int_0^{\infty} 2a\exp(-a^2)\frac{1}{2\pi(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\!\left(\frac{-\|\underline{y}\|^2}{2(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)}\right)da$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $t = a^2 + \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}$

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \int_{\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}}^{\infty} \frac{1}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}} t^{\frac{d}{2}}} \exp(-t + \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2} - \frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2 t}) dt$$

นิยาม Generalized incomplete gamma function ดังต่อไปนี้ (รายละเอียดอยู่ใน ภาคผนวก ข)

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t - \frac{b}{t}) dt$$

ดังนั้น

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{\exp(\sigma_n^2 / (\sqrt{k}\sigma)^2)}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}, \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}; \frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}) \tag{3.2}$$

หาค่า $\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x}, \underline{y}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) |d\underline{x}|$

โดยที่ $f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}, \underline{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}} \exp(\frac{-\|\underline{y} - \underline{x}\|^2}{2\sigma_n^2})$

ดังนั้น

$$\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x}, \underline{y}) f_{\underline{X}}(\underline{x}) |d\underline{x}| = \int_{R^d} x_1 (\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}} \exp(\frac{-\|\underline{y} - \underline{x}\|^2}{2\sigma_n^2}))$$

$$(\int_0^{\infty} 2a^2 \exp(-a^2) \frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}} \exp(\frac{-\|\underline{x}\|}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}) da) |d\underline{x}|$$

$$= \int_0^{\infty} 2a \exp(-a^2) (\int_{R^{d-1}} (\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \exp(-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2\sigma_n^2}) \exp(-\frac{x_1^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}) dx_1)$$

$$\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}} \exp(-\frac{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + ... + (y_d - x_d)^2}{2\sigma_n^2})$$

$$\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)} \exp(-\frac{x_2^2 + x_3^2 + ... + x_d^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}) dx_2 dx_3 .... dx_d) da$$

$$= \int_0^\infty 2a\exp(-a^2)\frac{a^2(\sqrt{k}\sigma)^2 y_1}{\sqrt{2\pi}(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2))^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{(2\pi(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2))}\exp(-\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)})da$$

$$\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{X}}(\underline{x})|d\underline{x}|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^\infty \frac{y_1 a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}{(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}+1}}\exp(-a^2-\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)})d(a^2)$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $t = a^2 + \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}$

$$\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{X}}(\underline{x})|d\underline{x}| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}}^\infty \frac{y_1(t-\sigma_n^2/(\sqrt{k}\sigma)^2)}{(\sqrt{k}\sigma)^{\frac{d}{2}} t^{\frac{d}{2}+1}}\exp(-t+\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}-\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2 t})dt$$

เขียนสมการในรูป Generalized incomplete gamma function จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{X}}(\underline{x})|d\underline{x}| &= \frac{\exp(\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2})}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}[\Gamma(1-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}) \\ &- \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\Gamma(-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})]\end{aligned} \quad (3.3)$$

จากสมการในการประมาณสัญญาณแบบ MMSE 2 ตัวแปร สมการที่ 3.1 เมื่อนำสมการที่ 3.2 และ 3.3 แทนลงในสมการที่ 3.1 แล้ว จะได้สมการประมาณสัญญาณเมื่อคำนวณแบบ MMSE แบบ 2 ตัวแปร ในรูป Generalized incomplete gamma function ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}_1(\underline{y}) = y_1[1 - \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\frac{\Gamma(\frac{-d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}{\Gamma(1-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}] \quad (3.4)$$

ในกรณีคิดความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแบบ Parent และ Child จะได้ว่า ตัวแปรสุ่มมีจำนวนเท่ากับ 2 $(d = 2,\ \|\underline{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2)$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ 3.4 ได้ ดังต่อไปนี้

$$\hat{x}_1(\underline{y}) \quad = \quad y_1[1 \quad - \quad \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2} \frac{\Gamma(-1, \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}; \frac{y_1^2 + y_2^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}{\Gamma(0, \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}; \frac{y_1^2 + y_2^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}] \tag{3.5}$$

โดยต่อไปนี้จะขอเรียกวิธีการประมาณสัญญาณโดยใช้สมการที่ 3.5 ว่าวิธี MMSE_BiShrink

3.2 การประยุกต์จุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่นกับวิธีประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดชนิด 2 ตัวแปร

ต่อไปนี้เราจะลองนำหลังการสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแบบท้องถิ่น (NeighShrink) มาพิจารณาร่วมกับวิธีประมาณความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดแบบ 2 ตัวแปร (BiShrink) ดังต่อไปนี้
พิจารณาสมการที่ใช้ลดสัญญาณรบกวนด้วยวิธี BiShrink

$$\hat{x}_1(\underline{y}) \quad = \quad \frac{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad - \quad \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma})_+}{\sqrt{y_1^2 + y_1^2}} y_1$$

$$= \quad (1 \quad - \quad \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2 / \sigma}{\sqrt{y_1^2 \quad + \quad y_2^2}})_+ y_1$$

จะพบว่าสมการที่ 2.27 มีลักษณะคล้ายกับสมการของวิธี Visushrink ซึ่งเป็นวิธีที่งานวิจัยที่ [22] นำมาประยุกต์ใช้กับวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ NeighShrink คือ

$$\hat{x}_{j,k}(y_{j,k}) \quad = \quad (1 - \frac{th}{|y_{j,k}|})_+ y_{j,k}$$

ดังนั้นเราจะประยุกต์ใช้หลักการ NeighShrink โดยการนำสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่อยู่ข้างเคียงสัมประสิทธิ์ที่เราจะพิจารณามาพิจารณาในการลดสัญญาณรบกวนด้วย โดยกำหนดให้ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตรอบบริเวณที่เราจะทำการพิจารณาให้อยู่ในรูปสมการที่ 3.6 ดังต่อไปนี้

$$S_{j,k} \quad = \quad \frac{\sum_{(i,l) \in B_{j,k}} ((y_1)_{i,l}^2 + (y_2)_{i,l}^2)}{k^2} \tag{3.6}$$

โดย	$(y_1)_{i,l}$	คือ	สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Child ที่อยู่ในหน้าต่างที่สร้างขึ้น
	$(y_2)_{i,l}$	คือ	สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในส่วน Parent ที่อยู่ในหน้าต่างที่สร้างขึ้น
	$B_{j,k}$	คือ	บริเวณหน้าต่างที่สร้างขึ้นเพื่อล้อมรอบสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่จะพิจารณา
	k	คือ	ขนาดหน้าต่างใน 1 มิติ

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 3.9 เมื่อนำมาพิจารณาร่วมกับวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ BiShrink จะได้สมการที่ใช้ประมาณสัญญาณแบบใหม่ ดังสมการที่ 3.10 ต่อไปนี้

$$(\hat{x}_1)_{j,k} = \beta_{j,k}(y_1)_{j,k} \tag{3.7}$$

โดย

$$\beta_{j,k} = (1 - \frac{(\sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma)^2}{S_{j,k}})_+$$

โดยต่อไปนี้จะขอเรียกวิธีที่ใช้สมการที่ 3.7 ในการประมาณสัญญาณว่า วิธี MAP_NBShrink (MAP and NeighShrink in Bivariate)

3.3 การประยุกต์จุดเริ่มเปลี่ยนแบบท้องถิ่นกับวิธีประมาณค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดชนิด 2 ตัวแปร

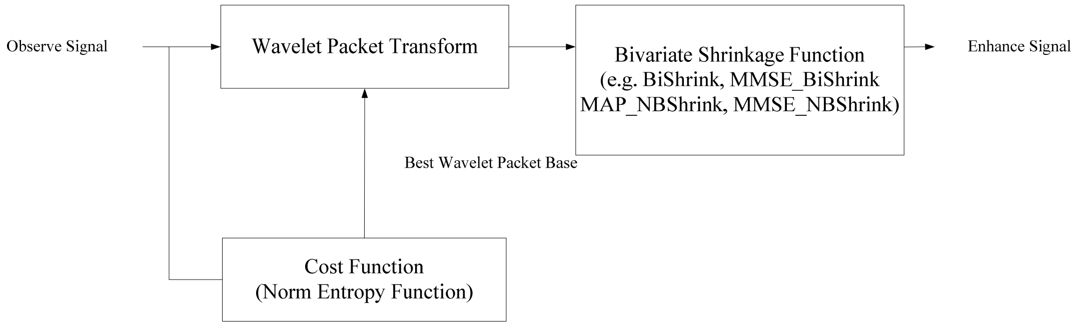
จากสมมุติฐานที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่อยู่ใกล้กันจะมีขนาดที่ใกล้เคียงกันและน่าจะมีผลต่อ การลดสัญญาณรบกวนต่อกันด้วยตามหลักการ NeighShrink ดังนั้นเราจะลองนำหลักการนี้มาประยุกต์ใช้กับหลักการลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_BiShrink ดังต่อไปนี้ กำหนดให้ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตรอบจุดที่เราจะพิจารณาเป็น ดังสมการที่ 3.6 เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับวิธี MMSE_BiShrink จะได้สมการที่ใช้ประมาณสัญญาณแบบใหม่ ดังสมการที่ 3.8 ต่อไปนี้

$$(\hat{x}_1)_{j,k} = (y_1)_{j,k}[1 - \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\frac{\Gamma(-1,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{S_{j,k}}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}{\Gamma(0,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{S_{j,k}}{2(\sqrt{k}\sigma)^2})}] \tag{3.8}$$

โดยต่อไปนี้จะขอเรียกวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการใช้สมการประมาณสัญญาณที่ 3.8 ว่าวิธี MMSE_NBShrink (MMSE and NeighShrink in Bivariate)

3.4 การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ประยุกต์ใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับการลดสัญญาณรบกวน โดยนำสัญญาณภาพที่สังเกตได้มาทำการหาฐานที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชันต้นทุน (Cost function) ในการพิจารณาจากนั้นจึงทำการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตตามลักษณะฐานที่ได้ แล้วจึงใช้วิธีการลดสัญญาณรบกวนที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มาทำการลดสัญญาณรบกวน โดยมีขั้นตอนวิธีการลดสัญญาณรบกวนอธิบายได้ ดังรูปที่ 3.2 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 แสดงขั้นตอนวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

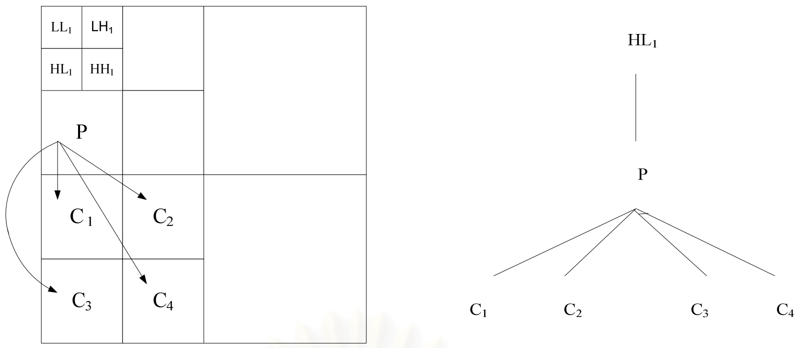
โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ Norm entropy function (p = 2.25) ซึ่งเป็นฟังก์ชันมาตรฐานที่มีอยู่ในโปรแกรม MATLAB 7.0 เป็นฟังก์ชันต้นทุน (Cost function) ในการหาฐานที่ดีที่สุดของการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต โดยผู้ศึกษาวิจัยอาจทำการทดลองเลือกใช้หรือสร้างฟังก์ชันต้นทุนชนิดใหม่ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนก็เป็นได้ และจะสังเกตเห็นว่าการใช้การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตในการลดสัญญาณรบกวนนั้นจะยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณเหมือนกับกรณีการแปลงเวฟเล็ตจะแตกต่างกัน ก็ตรงวิธีพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง Parent และ Child ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตเท่านั้นโดยในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงวิธีพิจารณาความสัมพันธ์ Parent และ Child ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

3.4.1 สหสัมพันธ์ระหว่างแถบย่อยในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการพิจารณาความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ของการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตเพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ 2 ตัวแปร โดยงานวิจัยที่ [24] ได้กล่าวถึงวิธีการพิจารณาความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ของการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตเพื่อใช้ในการแก้ไขปัญหาการบีบอัดสัญญาณ โดยนำเสนอความสัมพันธ์ในแบบ Zerotrees แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำมาประยุกต์ใช้กับการลดสัญญาณรบกวน โดยในงานวิจัยที่ [24] ยังได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ในกรณีที่เกิดความซ้ำซ้อนของการพิจารณา Parent และ Child (Parent Conflict) ซึ่งเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตไว้ด้วย โดยกระบวนการในการพิจารณาความสัมพันธ์ Parent และ Child ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตที่นำเสนอไว้สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

1 แบ่งสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตออกเป็น 4 ประเภทเหมือนลักษณะการแปลงเวฟเล็ต (Wavelet transform) คือสัมประสิทธิ์ในส่วนการประมาณ (LL), สัมประสิทธิ์ในส่วนรายละเอียดประกอบด้วย สัมประสิทธิ์ในแนวนอน (LH), สัมประสิทธิ์ในแนวตั้ง (HL) และสัมประสิทธิ์ในแนวทแยง (HH) โดยมีความสัมพันธ์ Parent และ Child เหมือนกับการแปลงเวฟเล็ต

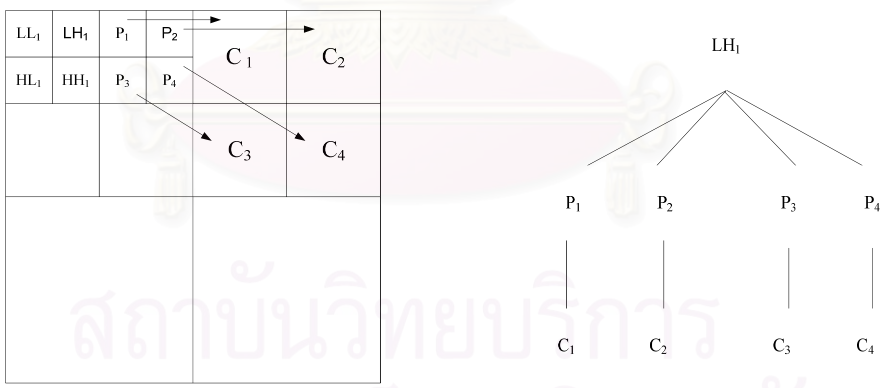
2 ถ้า node P เป็นสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิดเดียวกับ nodes C_1, C_2, C_3, C_4 และตามด้วย nodes ทั้ง 4 ในระดับความละเอียดที่เท่ากัน (Same resolution) แล้ว node P เป็น Parent ของ nodes C_1, C_2, C_3, C_4 ดังตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวตั้ง (HL) รูปที่ 3.2 (ก) และ รูปที่ 3.2 (ข) แสดงกราฟต้นไม้ความสัมพันธ์การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตและความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees



(ก) (ข)

รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวตั้ง (HL)
(ก) ฐานที่ดีที่สุด (Best basis) ของรายละเอียดภาพในแนวตั้ง (ข) กราฟต้นไม้แสดงความสัมพันธ์การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตและความสัมพันธ์ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees

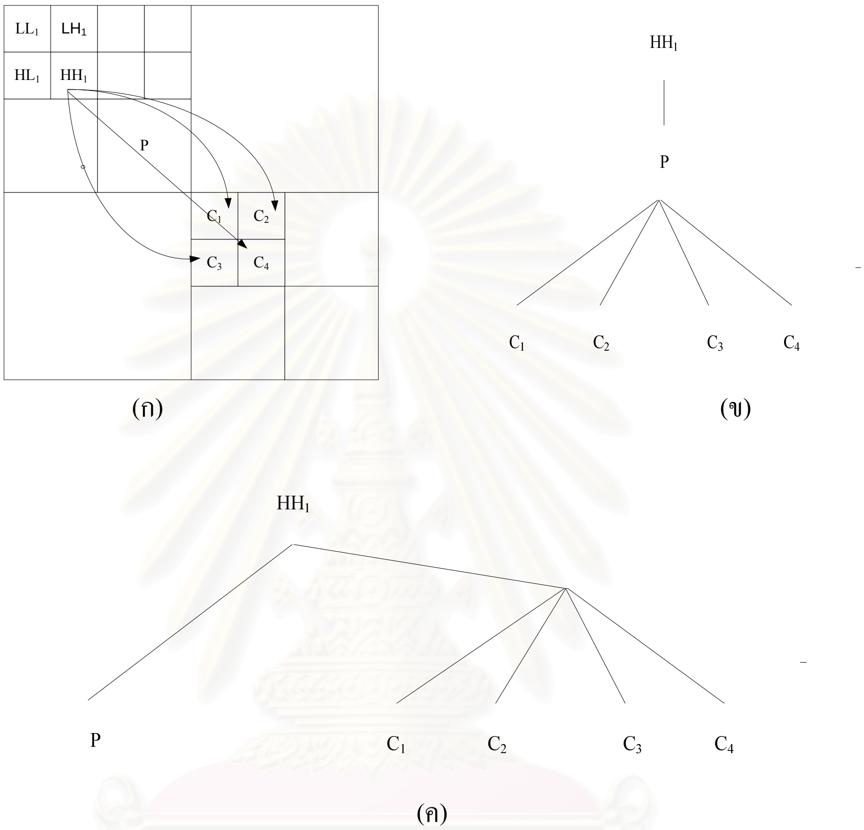
3 ถ้า nodes P_1, P_2, P_3, P_4 อยู่ในระดับความละเอียดที่หยาบ (Coarser resolution) กว่า nodes C_1, C_2, C_3, C_4 และตามด้วย nodes C_1, C_2, C_3, C_4 แล้ว node P_i จะเป็น Parent ของ node C_i (i = 1,2,3,4) ดังตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวนอน (LH) ดังรูปที่ 3.3 (ก) และรูปที่ 3.3 (ข) แสดงกราฟต้นไม้ความสัมพันธ์การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตและความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees



(ก) (ข)

รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวนอน (LH)
(ก) ฐานที่ดีที่สุด (Best basis) ของรายละเอียดภาพในแนวนอน (ข) กราฟต้นไม้แสดงความสัมพันธ์การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตและความสัมพันธ์ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees

4 ถ้า node P ตามด้วย nodes C_1, C_2, C_3, C_4 แต่มีระดับความละเอียดที่ละเอียดกว่า nodes C_1, C_2, C_3, C_4 แล้วให้ node ในระดับความละเอียดที่เท่ากันหรือหยาบกว่าเป็น Parent ของ nodes C_1, C_2, C_3, C_4 ดังตัวอย่างแสดงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวทแยง (HH) ดังรูปที่ 3.4 (ก) และ รูปที่ 3.4 (ข) แสดงกราฟต้นไม้ความสัมพันธ์ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตส่วนในรูปที่ 3.4 (ค) แสดงความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees



รูปที่ 3.4 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแนวทแยง (HH) (ก) ฐานที่ดีที่สุด (Best basis) ของรายละเอียดภาพในแนวทแยง (ข) กราฟต้นไม้แสดงความสัมพันธ์การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (ค) กราฟต้นไม้ความสัมพันธ์ Parent และ Child ในวิธี Zerotrees

3.4.2 วิธีลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

โดยสรุปแล้ววิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตนั้น ยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณแบบเดียวกับการแปลงเวฟเล็ตอยู่ แต่มาพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง Parent และ Child โดยใช้วิธีต้นไม้ศูนย์ (Zerotrees) แทน เช่น วิธี MAP_BiShrink_WP ยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณเช่นเดียวกับวิธี BiShrink วิธี MMSE_BiShrink_WP ยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณแบบเดียวกับวิธี MMSE_BiShrink วิธี MAP_NBiShrink ยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณเช่นเดียวกับวิธี MAP_NBiShrink และวิธี MMSE_NBiShrink_WP ก็ยังคงใช้สมการประมาณสัญญาณแบบเดียวกับวิธี MMSE_NBiShrink ในการแปลงเวฟเล็ต

บทที่ 4

ผลการทดลอง

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ภาพ Lena, Boat และ Barbara ซึ่งเป็นภาพขนาด 512×512 จุดภาพในการทดสอบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ที่ได้นำเสนอไว้ และมีลักษณะของภาพดั้งเดิม (Original Image) ดังรูปที่ 4.1 ต่อไปนี้

(ก)

(ข)

(ค)

รูปที่ 4.1 ภาพที่ใช้ทดสอบวิธีลดสัญญาณรบกวนขนาด 512×512 จุดภาพ
(ก) ภาพ Lena (ข) ภาพ Boat (ค) ภาพ Barbara

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ภาพที่มีสัญญาณรบกวนต่างกัน 6 ระดับ แบ่งตามค่าความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน (σ_n^2) คือ 10, 15, 20, 25, 30, 35 ในการทดสอบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ และได้แบ่งการทดสอบออกเป็น 2 ส่วน คือ วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต (Wavelet Transform, WT) ใน 6 ระดับความละเอียด โดยทดสอบจำนวน 5 ครั้งแล้วนำค่า PSNR ที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย และวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Transform, WP) ใน 3 ระดับความละเอียด โดยทดสอบจำนวน 3 ครั้งแล้วนำค่า PSNR ที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย และประยุกต์หลักการคำนวณความแปรปรวนแบบท้องถิ่นเพื่อคำนวณความแปรปรวนของสัญญาณ โดยใช้หน้าต่าง (Window Size) ขนาด 3×3 และ 5×5 ซึ่งสามารถสรุปวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 วิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่อ้างอิงและนำเสนอ

วิธีการลดสัญญาณรบกวน	การแปลงสัญญาณ	วิธีประมาณสัญญาณ	สมการประมาณสัญญาณ
NeighShrink [22]	Wavelet Transform	NeighShrink	3.6
BiShrink [8]	Wavelet Transform	MAP estimation	2.27
MMSE_BiShrink	Wavelet Transform	MMSE estimation	3.5
MAP_NBiShrink	Wavelet Transform	MAP estimation and NeighShrink	3.10
MMSE_NBiShrink	Wavelet Transform	MMSE estimation and NeighShrink	3.11
MAP_BiShrink_WP	Wavelet Packet Transform	MAP estimation	2.27
MMSE_BiShrink_WP	Wavelet Packet Transform	MMSE estimation	3.5
MAP_NBiShrink_WP	Wavelet Packet Transform	MAP estimation and NeighShrink	3.10
MMSE_NBiShrink_WP	Wavelet Packet Transform	MMSE estimation and NeighShrink	3.11

4.1 การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยผลการแปลงเวฟเล็ต

4.1.1 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Lena

แสดงผลการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กับภาพ Lena โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่าง แสดงผลเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนดังรูปที่ 4.2 ต่อไปนี้

(ก)

รูปที่ 4.2 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Lena

(ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

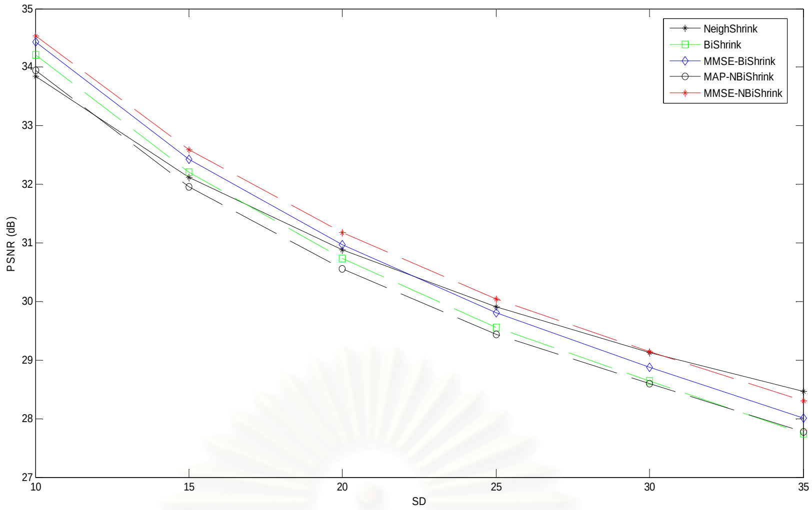
รูปที่ 4.2 (ต่อ) ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Lena
(ข) วิธี NeighShrink (5×5) , PSNR = 28.63 (ค) วิธี BiShrink (5×5) , PSNR = 30.059
(ง) วิธี MMSE_BiShrink (5×5) , PSNR = 30.176 (จ) วิธี MAP_NBiShrink (5×5) , PSNR = 29.829
(ฉ) วิธี MMSE_NBiShrink (5×5) , PSNR = 30.213

ในตารางที่ 4.2 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในการโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Lena ทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ส่วนในรูปที่ 4.2 (ช) และ 4.2 (ซ) จะแสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะพบว่าวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink นั้นจะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบอื่นๆ เมื่อประยุกต์ใช้กับภาพ Lena ทั้งในหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5

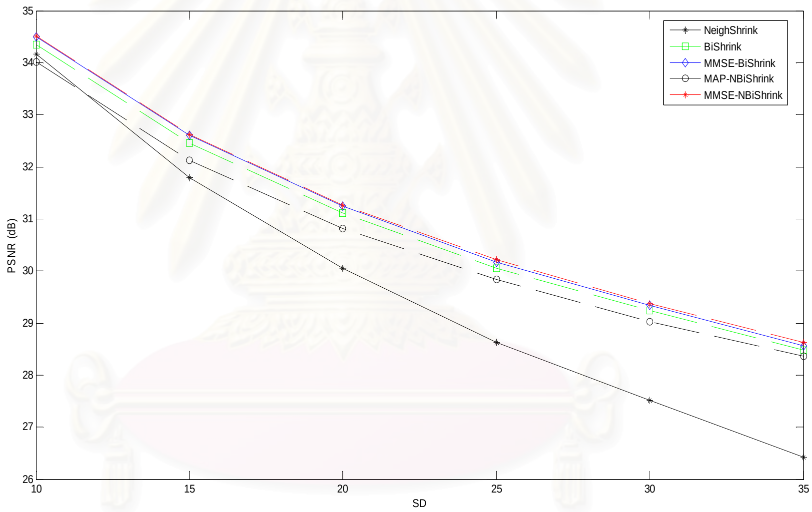
ตารางที่ 4.2 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในการโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Lena

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [22]	33.839	32.119	30.883	29.906	29.134	**28.461***
Variance of PSNR	0.00020024	0.000592	0.00051104	0.0007104	0.000162	0.0013762
BiShrink (3×3) [8]	34.216	32.201	30.733	29.554	28.64	27.741
Variance of PSNR	0.00020664	0.0006108	0.0011186	0.00039744	0.0017898	0.0029054
MMSE_BiShrink (3×3)	34.428	32.432	30.975	29.803	28.88	28.006
Variance of PSNR	0.00015064	0.000115	0.0004804	0.0001772	0.00096024	0.0023158
MAP_NBiShrink (3×3)	33.95	31.956	30.553	29.442	28.592	27.776
Variance of PSNR	0.0001808	0.0011392	0.0016794	0.0013782	0.0020722	0.0030038
MMSE_NBiShrink (3×3)	**34.543***	**32.596***	**31.18***	**30.047***	**29.142***	28.31
Variance of PSNR	0.00016264	0.0000609	0.0006716	0.00032504	0.00026176	0.002205

NeighShrink (5×5) [22]	34.168	31.792	30.053	28.63	27.524	26.429
Variance of PSNR	0.0004448	0.0014718	0.0050082	0.002251	0.0031294	0.005183
BiShrink (5×5) [8]	34.338	32.452	31.108	30.059	29.241	28.484
Variance of PSNR	0.00017176	0.00018976	0.0005634	0.0001404	0.0003469	0.0014562
MMSE_BiShrink (5×5)	34.493	32.598	31.24	30.176	29.333	28.564
Variance of PSNR	0.00010984	0.0000592	0.0005008	0.00045616	0.0001838	0.0014614
MAP_NBiShrink (5×5)	34.014	32.127	30.813	29.829	29.032	28.363
Variance of PSNR	0.000026	0.00056696	0.000982	0.00053944	0.0002884	0.00089504
MMSE_NBiShrink (5×5)	**34.514***	**32.624***	**31.268***	**30.213***	**29.374***	**28.623***
Variance of PSNR	0.00011104	0.00018576	0.0009094	0.00060736	0.0000618	0.0017286



รูปที่ 4.2 (ช) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 3×3 สำหรับภาพ Lena



รูปที่ 4.2 (ซ) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 5×5 สำหรับภาพ Lena

4.1.2 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Boat

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กับภาพ Boat โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่างในการแสดงผลเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ดังรูปที่ 4.3 ต่อไปนี้

(ก)

รูปที่ 4.3 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Boat

(ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

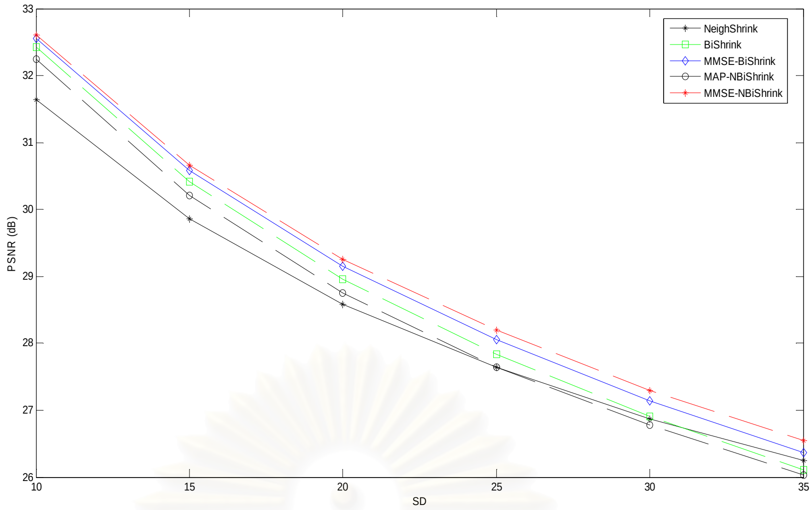
รูปที่ 4.3 (ต่อ) ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Boat (ข) วิธี NeighShrink (5×5) , PSNR = 27.41 (ค) วิธี BiShrink (5×5) , PSNR = 28.09 (ง) วิธี MMSE_BiShrink (5×5) , PSNR = 28.222 (จ) วิธี MAP_NBiShrink (5×5) , PSNR = 27.848 (ฉ) วิธี MMSE_NBiShrink (5×5) , PSNR = 28.194

ในตารางที่ 4.3 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในการโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Boat ทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ส่วนในรูปที่ 4.3 (ช) และ 4.3 (ซ) จะแสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะพบว่าวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดเมื่อใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ส่วนวิธี MMSE_BiShrink นั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดเมื่อความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน (σ_n^2) มีค่ามากและใช้หน้าต่างขนาด 5×5

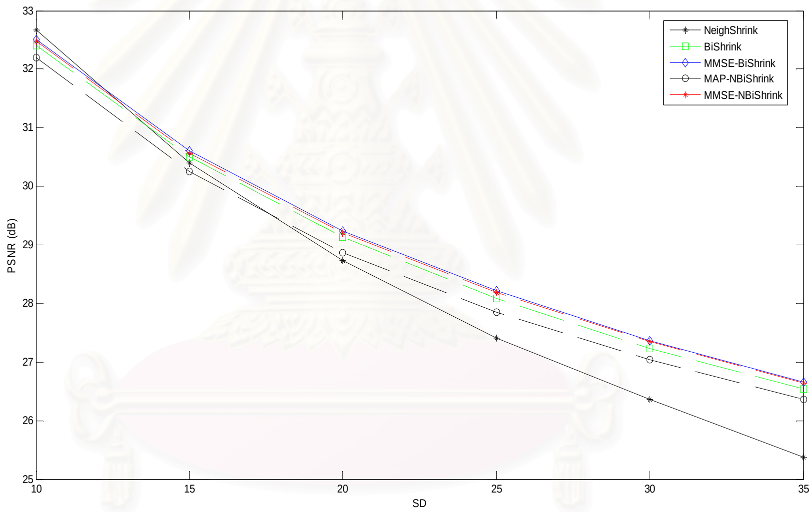
ตารางที่ 4.3 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในการโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Boat

Standard deviation of noise PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [22]	31.639	29.862	28.587	27.65	26.867	26.249
Variance of PSNR	0.00023784	0.0004268	0.0004858	0.0005194	0.0004029	0.000289
BiShrink (3×3) [8]	32.432	30.417	28.957	27.834	26.915	26.111
Variance of PSNR	0.00008984	0.00023936	0.0005070	0.0002798	0.0005338	0.000531
MMSE_BiShrink (3×3)	32.559	30.583	29.155	28.06	27.147	26.362
Variance of PSNR	0.0001292	0.00012896	0.000254	0.0002186	0.0004066	0.000362
MAP_NBiShrink (3×3)	32.243	30.206	28.748	27.65	26.786	26.026
Variance of PSNR	0.00012184	0.00031936	0.0012974	0.0005098	0.0007138	0.001268
MMSE_NBiShrink (3×3)	**32.611***	**30.659***	**29.261***	**28.194***	**27.302***	**26.546***
Variance of PSNR	0.00016024	0.00012936	0.0003418	0.0000902	0.0003318	0.000296

NeighShrink (5×5) [22]	**32.662***	30.402	28.734	27.41	26.368	25.375
Variance of PSNR	0.00006296	0.0005428	0.0020706	0.000705	0.0014268	0.00254
BiShrink (5×5) [8]	32.405	30.5	29.127	28.09	27.238	26.533
Variance of PSNR	0.0000588	0.00010024	0.0002418	0.0002054	0.0002146	0.0000942
MMSE_BiShrink (5×5)	32.5	**30.603***	**29.242***	**28.222***	**27.367***	**26.661***
Variance of PSNR	0.00014816	0.00009664	0.0002198	0.0001966	0.0001836	0.0000653
MAP_NBiShrink (5×5)	32.193	30.245	28.866	27.848	27.04	26.367
Variance of PSNR	0.00001384	0.00004384	0.0002686	0.0000386	0.0004966	0.0002558
MMSE_NBiShrink (5×5)	32.48	30.569	29.213	28.194	27.352	26.646
Variance of PSNR	0.00014696	0.00010616	0.0003549	0.0000894	0.0001278	0.0000706



รูปที่ 4.3 (ช) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 3×3 สำหรับภาพ Boat



รูปที่ 4.3 (ซ) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 5×5 สำหรับภาพ Boat

4.1.3 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Barbara

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กับภาพ Barbara โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่างในการแสดงผลเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ดังรูปที่ 4.4 ต่อไปนี้

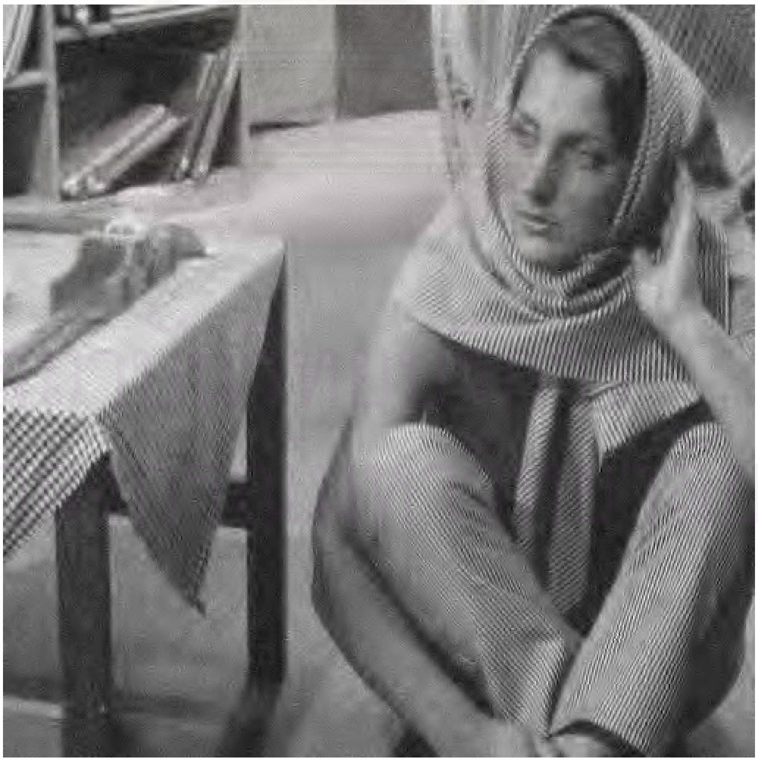
(ก)

รูปที่ 4.4 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Barbara

(ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204

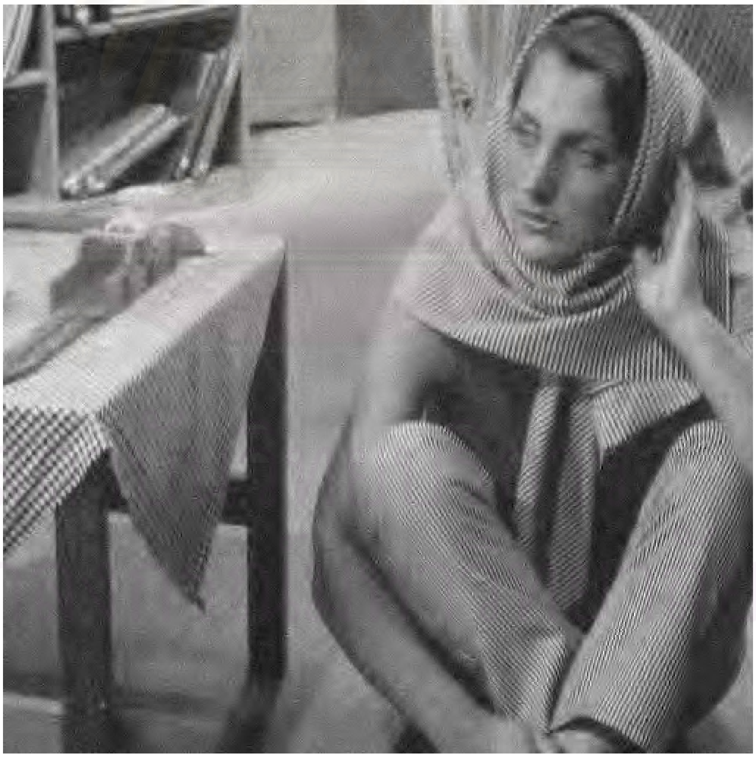
(ข)

(ค)



(ง)

(จ)



(ฉ)

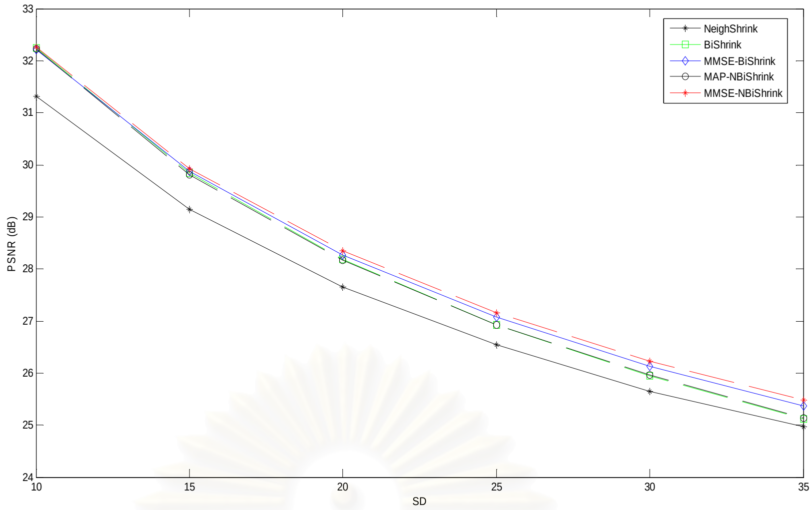
รูปที่ 4.4 (ต่อ) ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ สำหรับภาพ Barbara (ข) วิธี NeighShrink (3×3) , PSNR = 26.536 (ค) วิธี BiShrink (3×3) , PSNR= 26.921 (ง) วิธี MMSE_BiShrink (3×3) , PSNR= 27.068 (จ) วิธี MAP_NBiShrink (3×3) , PSNR = 26.921 (ฉ) วิธี MMSE_NBiShrink (3×3) , PSNR = 27.152

ในตารางที่ 4.4 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆใน การโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Barbara ทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ส่วนในรูปที่ 4.4 (ช) และ 4.4 (ซ) จะแสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆทั้งหน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะสังเกตเห็นว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink นั้นจะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดเมื่อใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ส่วนวิธี MMSE_BiShrink นั้นจะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดเมื่อความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน (σ_n^2) มีค่ามากและใช้หน้าต่างขนาด 5×5 เช่นเดียวกับภาพ Boat

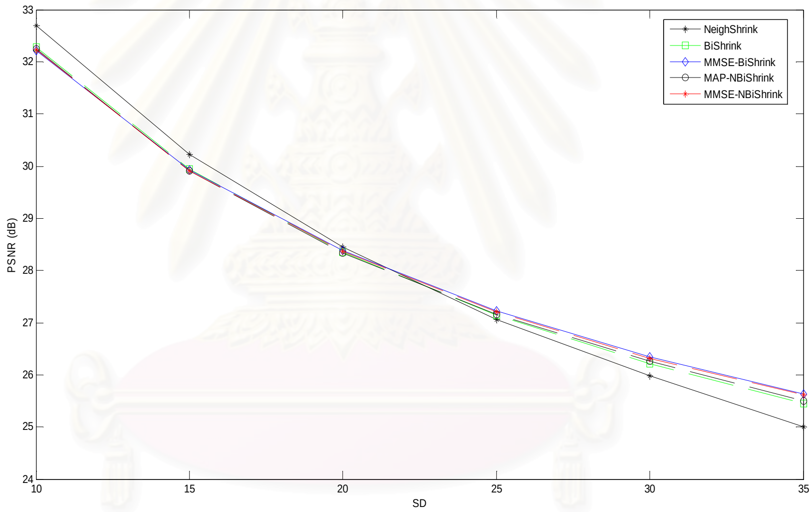
ตารางที่ 4.4 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในการโปรแกรม 5 ครั้ง ของภาพ Barbara

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [22]	31.316	29.149	27.657	26.536	25.649	24.974
Variance of PSNR	0.0001210	0.0002998	0.0018276	0.0004676	0.0005414	0.0012586
BiShrink (3×3) [8]	32.248	29.847	28.184	26.921	25.943	25.113
Variance of PSNR	0.0001026	0.0001069	0.0004581	0.0000641	0.0005026	0.00044944
MMSE_BiShrink (3×3)	32.205	29.872	28.271	27.068	26.138	25.364
Variance of PSNR	0.00007	0.0000954	0.0005278	0.0001110	0.0002482	0.00023976
MAP_NBiShrink (3×3)	32.235	29.817	28.168	26.921	25.969	25.142
Variance of PSNR	0.0000526	0.0001852	0.0012652	0.0004316	0.0005726	0.00084344
MMSE_NBiShrink (3×3)	**32.263***	**29.93***	**28.344***	**27.152***	**26.234***	**25.484***
Variance of PSNR	0.0000158	0.0001062	0.000776	0.0001668	0.0004332	0.00051096

NeighShrink (5×5) [22]	**32.698***	**30.225***	**28.446***	27.066	25.983	24.997
Variance of PSNR	0.00011664	0.0001438	0.0028402	0.0008093	0.0017318	0.0019596
BiShrink (5×5) [8]	32.28	29.947	28.35	27.146	26.219	25.455
Variance of PSNR	0.0000417	0.0001122	0.0007298	0.0000912	0.0004546	0.00024496
MMSE_BiShrink (5×5)	32.21	29.928	28.382	**27.231***	**26.344***	**25.629***
Variance of PSNR	0.0388	0.015355	0.0023622	0.0066976	0.026336	0.070226
MAP_NBiShrink (5×5)	32.241	29.912	28.339	27.16	26.263	25.501
Variance of PSNR	0.0001158	0.0000798	0.0009850	0.0000474	0.0006666	0.00008456
MMSE_NBiShrink (5×5)	32.23	29.917	28.366	27.208	26.318	25.609
Variance of PSNR	0.0000062	0.0000930	0.0010846	0.0002530	0.0007270	0.00070616



รูปที่ 4.4 (ช) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 3×3 สำหรับภาพ Barbara



รูปที่ 4.4 (ซ) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ของหน้าต่างขนาด 5×5 สำหรับภาพ Barbara

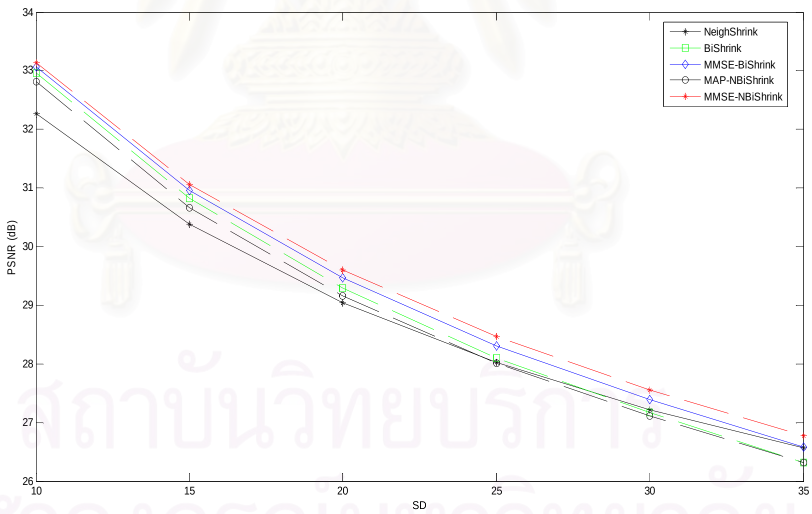
4.1.4 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพ

ในทางปฏิบัติแล้วภาพแต่ละภาพจะมีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งลักษณะรายละเอียดและการกระจายตัวของภาพ ทำให้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำค่าเฉลี่ย PSNR ของทั้ง 3 ภาพ คือ Lena, Boat และ Barbara ซึ่งเป็นตัวแทนของภาพที่มีลักษณะแตกต่างกันมาทำการหาค่าเฉลี่ยเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนแต่ละวิธีอีกครั้งหนึ่ง โดยในตารางที่ 4.5 จะแสดงถึงค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ส่วนในรูปที่ 4.5 และ รูปที่ 4.6 จะแสดงถึงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ในวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้ขนาดหน้าต่าง 3×3

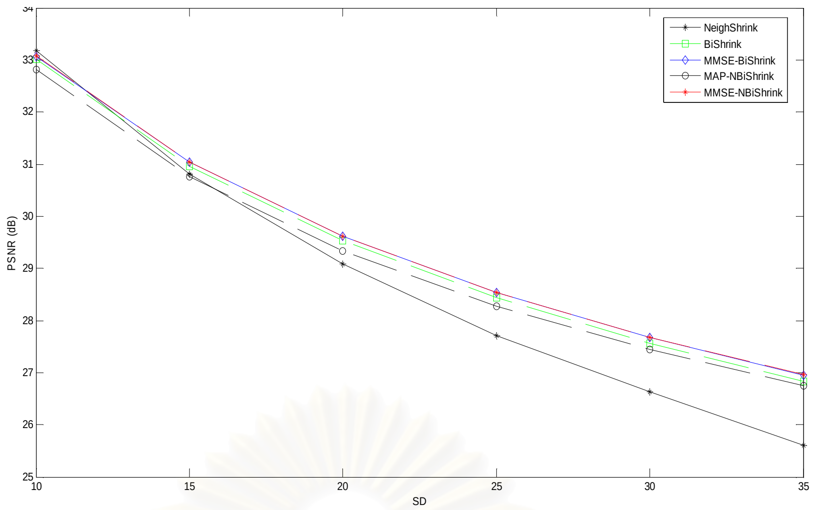
และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะสังเกตเห็นว่าวิธี MMSE_NBiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนสูงที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่นโดยประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 ส่วนวิธี MMSE_BiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพดีที่สุดเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5

ตารางที่ 4.5 แสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [22]	32.265	30.377	29.042	28.031	27.217	26.561
BiShrink (3×3) [8]	32.965	30.822	29.291	28.103	27.166	26.322
MMSE_BiShrink (3×3)	33.064	30.962	29.467	28.31	27.388	26.577
MAP_NBiShrink (3×3)	32.809	30.66	29.156	28.004	27.116	26.315
MMSE_NBiShrink (3×3)	**33.139***	**31.062***	**29.595***	**28.464***	**27.559***	**26.78***
NeighShrink (5×5) [22]	33.176	30.806	29.078	27.702	26.625	25.6
BiShrink (5×5) [8]	33.008	30.966	29.528	28.432	27.566	26.824
MMSE_BiShrink (5×5)	**33.068***	**31.043***	**29.621***	**28.543***	**27.681***	26.951
MAP_NBiShrink (5×5)	32.816	30.761	29.339	28.279	27.445	26.744
MMSE_NBiShrink (5×5)	33.075	31.037	29.616	28.538	27.681	**26.959***



รูปที่ 4.5 แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพในวิธีการลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ ในขนาดหน้าต่าง 3×3



รูปที่ 4.6 แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพในวิธีการลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ ในขนาดหน้าต่าง 5×5

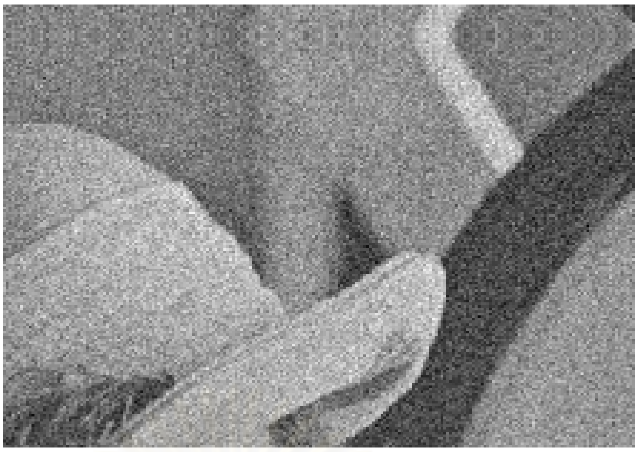
4.1.5 เปรียบเทียบผลการทดสอบของบริเวณที่สนใจในวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ

เนื่องจากในหัวข้อที่ผ่านมามีการแสดงภาพที่ได้จากการลดทอนสัญญาณรบกวนแบบทั้งภาพ ซึ่งอาจทำให้ไม่สามารถสังเกตเห็นรายละเอียดในบริเวณที่เราสนใจได้ ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงจะนำเสนอภาพที่ผ่านการลดสัญญาณรบกวนเฉพาะบริเวณที่เราสนใจเพื่อสังเกตและเปรียบเทียบผลกระทบที่เกิดขึ้น

4.1.5.1 ผลการเปรียบเทียบภาพ Lena

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Lena ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ โดยเลือกบริเวณที่สนใจที่จะใช้ในการเปรียบเทียบเป็นบริเวณปีกหมวกของภาพ ดังรูปที่ 4.7 ต่อไปนี้

(ก)



(ข)

รูปที่ 4.7 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพวิธีต่างๆ ของภาพ Lena ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Lena (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)

รูปที่ 4.7 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพวิธีต่างๆ ของภาพ Lena ในบริเวณที่สนใจ

(ค) วิธี NeighShrink (5×5) , PSNR = 28.63 (ง) วิธี BiShrink (5×5) , PSNR = 30.059

(จ) วิธี MMSE_BiShrink (5×5) , PSNR = 30.176 (ฉ) วิธี MAP_NBiShrink (5×5) , PSNR = 29.829

(ช) วิธี MMSE_NBiShrink (5×5) , PSNR = 30.213

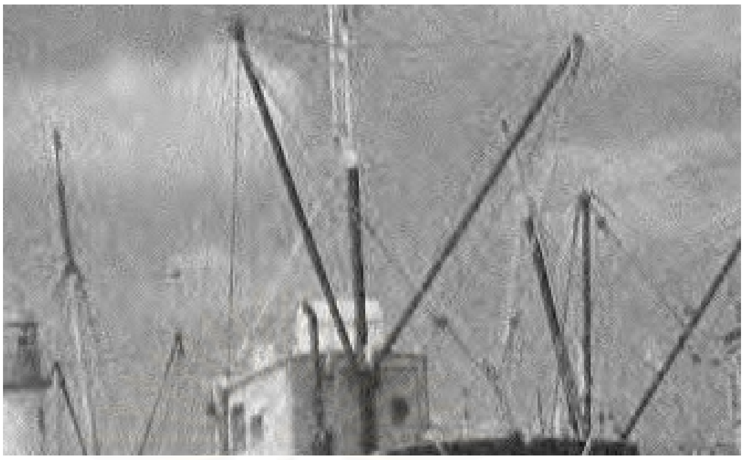
4.1.5.2 ผลการเปรียบเทียบภาพ Boat

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Boat ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ โดยเลือกบริเวณที่สนใจที่จะใช้ในการเปรียบเทียบเป็นบริเวณเสากระโดงเรือของภาพดังรูปที่ 4.8 ดังต่อไปนี้

(ก)

(ข)

รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนวิธีต่างๆ ของภาพ Boat ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Boat (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204



(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)

รูปที่ 4.8 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนวิธีต่างๆ ของภาพ Boat ในบริเวณที่สนใจ

(ค) วิธี NeighShrink (5×5) , PSNR = 27.41 (ง) วิธี BiShrink (5×5) , PSNR = 28.09

(จ) วิธี MMSE_BiShrink (5×5) , PSNR = 28.222 (ฉ) วิธี MAP_NBiShrink (5×5) , PSNR = 27.848

(ช) วิธี MMSE_NBiShrink (5×5) , PSNR = 28.194

4.1.5.3 ผลการเปรียบเทียบภาพ Barbara

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Barbara ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ โดยเลือกบริเวณที่สนใจที่จะใช้ในการเปรียบเทียบเป็นบริเวณขากางเกงและขอบโต๊ะดังรูปที่ 4.9 ต่อไปนี้

(ก)

(ข)

รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพวิธีต่างๆ ของภาพ Barbara ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Barbara (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.204

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)

รูปที่ 4.9 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนวิธีต่างๆ ของภาพ Barbara ในบริเวณที่สนใจ (ค) วิธี NeighShrink (3×3) , PSNR = 26.536 (ง) วิธี BiShrink (3×3) , PSNR = 26.921 (จ) วิธี MMSE_BiShrink (3×3) , PSNR = 27.068 (ฉ) วิธี MAP_NBiShrink (3×3) , PSNR = 26.921 (ช) วิธี MMSE_NBiShrink (3×3) , PSNR = 27.152

4.2 การลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

4.2.1 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Lena

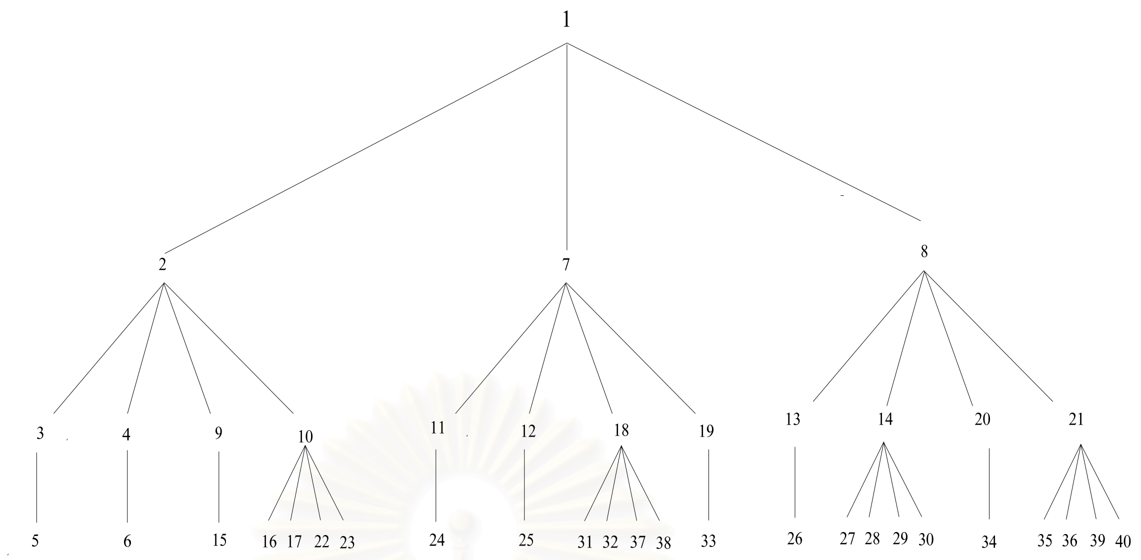
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Lena โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่างในการแสดงผลการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ดังรูปที่ 4.10 ต่อไปนี้ โดยในการโปรแกรมครั้งที่ 1 รูปที่ 4.10 (ข) จะแสดงฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต ส่วนในรูป 4.10 (ค) จะแสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree) และความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees ในการโปรแกรมครั้งที่ 1

(ก)

รูปที่ 4.10 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Lena

(ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.197

(ข)



(ค)

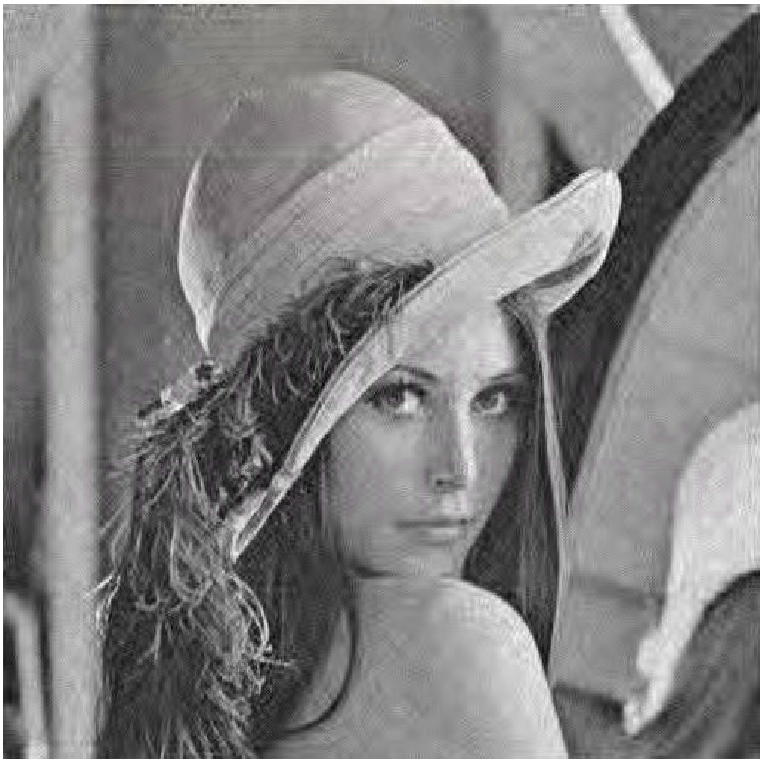
รูปที่ 4.10 (ต่อ) ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Lena
(ข) ภาพฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Lena ที่สัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$
(ค) แสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree)
และความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)



(ซ)

(ฌ)

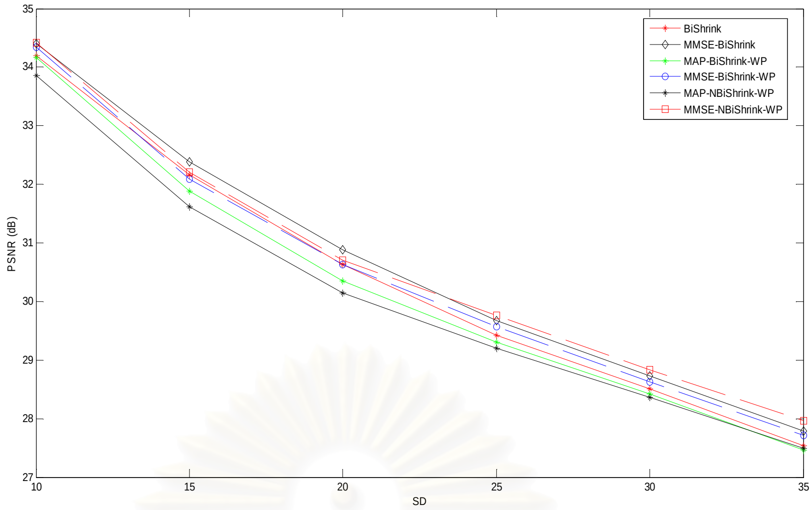
รูปที่ 4.10 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Lena
(ง) วิธี BiShrink (3×3), PSNR = 29.434 (จ) วิธี MMSE_BiShrink (3×3), PSNR = 29.682
(ฉ) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 29.343 (ช) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 29.577
(ซ) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 29.233 (ฌ)วิธี MMSE_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 29.765

โดยตารางที่ 4.6 นั้นจะแสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในการโปรแกรม 3 ครั้งและรูปที่ 4.10 (ญ) และ 4.10 (ด) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะสังเกตเห็นว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink นั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆ เมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 และวิธี MMSE_BiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5 แต่เมื่อพิจารณาภาพรวมแล้วการประยุกต์ใช้หน้าต่างขนาด 5×5 จะให้ค่า PSNR ที่ดีกว่าการใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ในการลดสัญญาณรบกวนของภาพ Lena

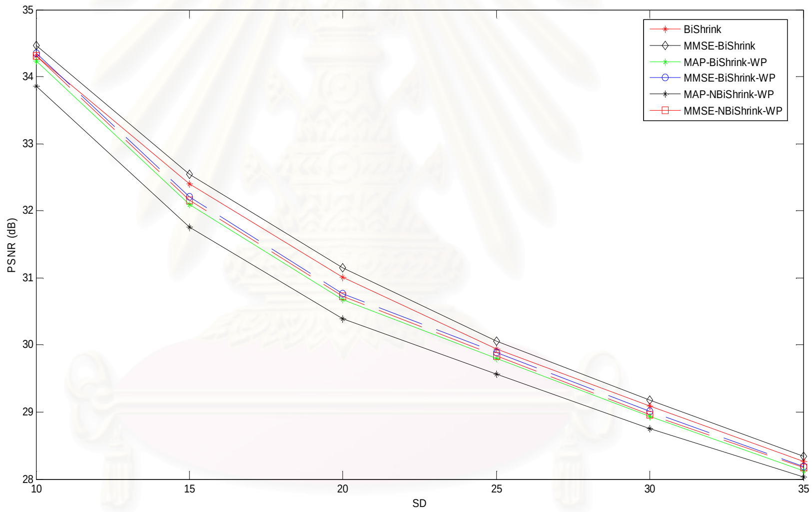
ตารางที่ 4.6 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆโดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Lena ในการโปรแกรม 3 ครั้ง

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.164)	15 (24.649)	20 (22.148)	25 (20.2)	30 (18.631)	35 (17.281)
BiShrink (3×3) [8]	34.19 32.162		30.63	29.424 28.512		27.538
Variance of PSNR	0.00018156 0.	0003087	0.0006549	0.00018689	0.0009669	0.0035162
MMSE_BiShrink (3×3)	34.4	**32.385***	**30.879***	29.673 28.737		27.793
Variance of PSNR	0.00020689	0.0000909 0.	0004702 0.	0000542	0.0003469	0.0023669
MAP_BiShrink_WP (3×3)	34.161 31.88		30.35	29.305 28.416		27.465
Variance of PSNR	0.000022889 0.	081	0.08875	0.0024096	0.0000695	0.0046107
MMSE_BiShrink_WP (3×3)	34.338 32.085		30.633	29.573 28.634		27.715
Variance of PSNR	0.00016089 0.	08233	0.1382	0.00012067	0.00001356	0.0023269
MAP_NBiShrink_WP (3×3)	33.856 31.626		30.152	29.206 28.363		27.494
Variance of PSNR	0.000194 0.	08638	0.0527	0.00050422	0.0009109	0.0077096
MMSE_NBiShrink_WP(3×3)	**34.416***	32.201 30.711		**29.766***	**28.834***	**27.964***
Variance of PSNR	0.00025267 0.	08695	0.1089	0.00038489	0.000009	0.0015696

BiShrink (5×5) [8]	34.309 32.405		31.014	29.937 29.089		28.27
Variance of PSNR	0.00024067 0.	0001876	0.0004916 0.	00012022	0.0000606	0.0017007
MMSE_BiShrink (5×5)	**34.463***	**32.546***	**31.149***	**30.05***	**29.175***	**28.344***
Variance of PSNR	0.00018467 0.	000044	0.0005082	0.00052156	0.000001	0.001406
MAP_BiShrink_WP (5×5)	34.234 32.097		30.672	29.796 28.941		28.122
Variance of PSNR	0.00011467 0.	08040	0.09498 0.	00056822	0.00008	0.001526
MMSE_BiShrink_WP (5×5)	34.352 32.211		30.771	29.889 29.006		28.193
Variance of PSNR	0.00015 0.	0767	0.1034	0.00070489	0.00001	0.001248
MAP_NBiShrink_WP (5×5)	33.855 31.762		30.39	29.565 28.754		28.031
Variance of PSNR	0.00024267 0.	07353	0.05087 0.	00066067	0.00065	0.0014949
MMSE_NBiShrink_WP(5×5)	34.307 32.161		30.728	29.843 28.962		28.179
	0.00023089 0.	07122	0.0976	0.001022	0.000019	0.001214



รูปที่ 4.10 (ญ) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Lena ในการโปรแกรม 3 ครั้ง



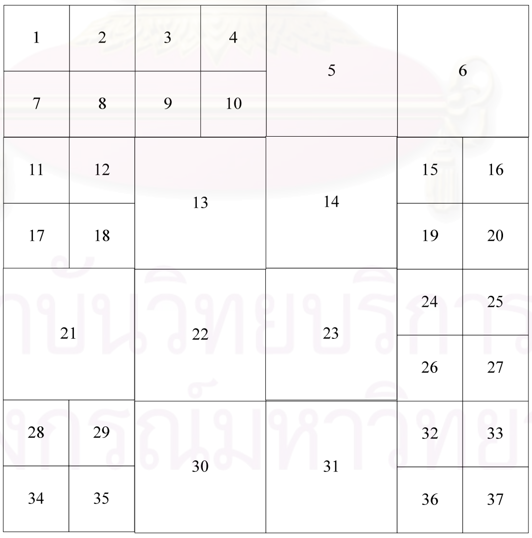
รูปที่ 4.10 (ด) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 5×5 ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Lena ในการโปรแกรม 3 ครั้ง

4.2.2 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Boat

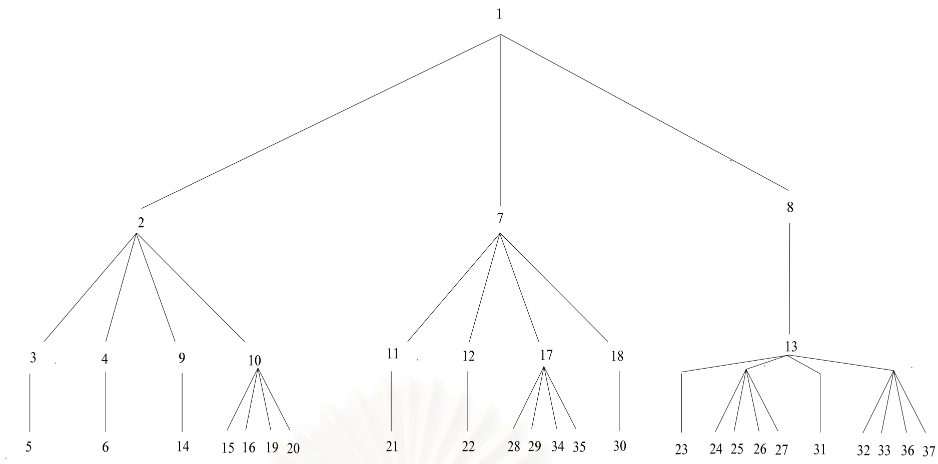
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับกับภาพ Boat โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่างในการแสดงผลการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ดังรูปที่ 4.11 ต่อไปนี้ โดยในการโปรแกรมครั้งที่ 1 รูป 4.11 (ข) จะแสดงฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต รูปที่ 4.11 (ค) จะแสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree) และ รูป 4.11 (ง) จะแสดงความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees

(ก)

รูปที่ 4.11 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตสำหรับภาพ Boat (ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.197

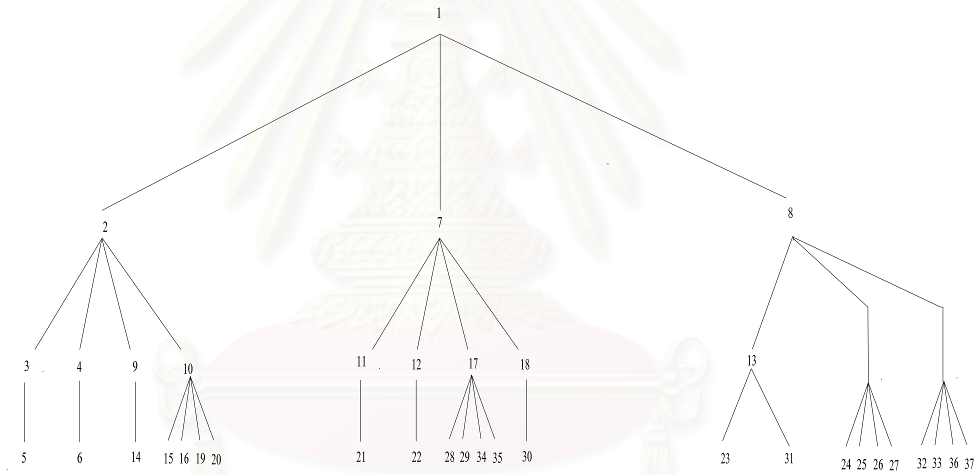


(ข)



(ค)

รูปที่ 4.11 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Boat (ข) ภาพฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Boat ที่สัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ (ค) แสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree)



(ง)

รูปที่ 4.11 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Boat (ง) ความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees

(จ)

(ฉ)

(ช)

(ซ)

(ฌ)

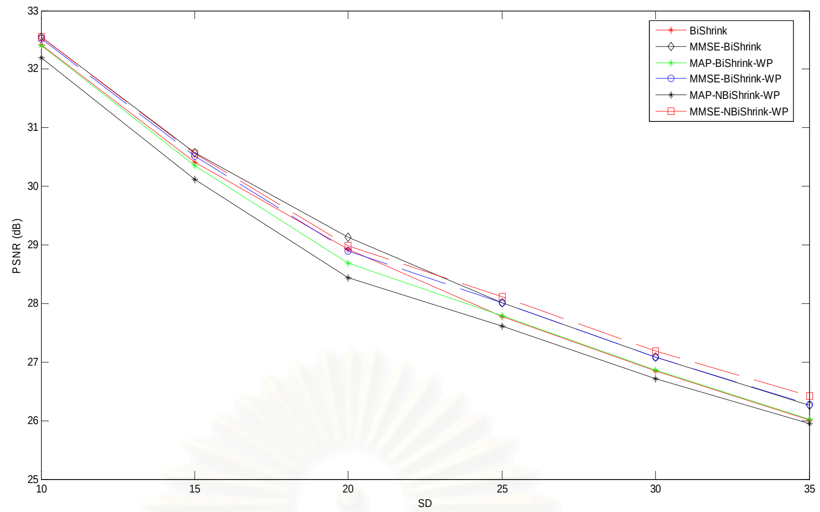
(ญ)

รูปที่ 4.11 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตสำหรับภาพ Boat (จ) วิธี BiShrink (3×3) , PSNR = 27.774 (ฉ) วิธี MMSE_BiShrink (3×3) , PSNR = 27.991 (ช) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3) , PSNR = 27.777 (ซ) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3) , PSNR = 27.986 (ฌ) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3) , PSNR = 27.581 (ญ) วิธี MMSE_NBiShrink_WP, PSNR = 28.089

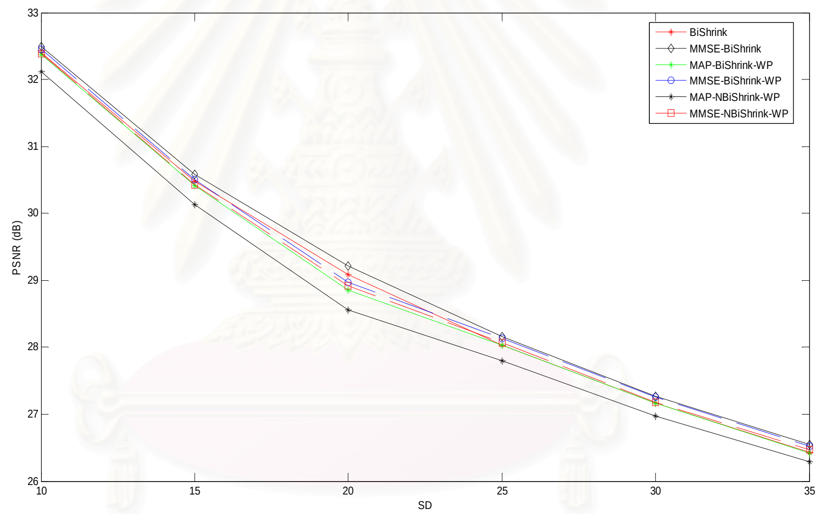
โดยตารางที่ 4.7 นั้นจะแสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในการโปรแกรม 3 ครั้ง รูปที่ 4.11 (ด) และ 4.11 (ต) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR วิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink_WP นั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 และวิธี MMSE _BiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5 แต่เมื่อพิจารณาภาพรวมแล้วจะพบว่าเมื่อความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมีค่าน้อย วิธี MMSE_NBiShrink_WP เมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 จะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนดีที่สุดแต่เมื่อความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมีค่ามาก วิธี MMSE_BiShrink เมื่อใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5 จะให้ประสิทธิภาพดีที่สุด

ตารางที่ 4.7 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆโดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Boatในการโปรแกรม 3 ครั้ง

Standard deviation of noise PSNR	10 (28.164)	15 (24.649)	20 (22.148)	25 (20.2)	30 (18.631)	35 (17.281)
BiShrink (3×3) [8]	32.422	30.41	28.919	27.782	26.853	26.013
Variance of PSNR	0.0000082	0.00024267	0.00032467	0.00057622	0.00074867	0.0006642
MMSE_BiShrink (3×3)	32.552	**30.573***	**29.128***	28.007	27.086	26.262
Variance of PSNR	0.00002	0.00019289	0.00027756	0.00027822	0.00068289	0.00040956
MAP_BiShrink_WP (3×3)	32.401	30.359	28.687	27.792	26.868	26.027
Variance of PSNR	0.000009	0.003402	0.027173	0.00079022	0.00026689	0.0003042
MMSE_BiShrink_WP (3×3)	32.523	30.512	28.892	28.006	27.08	26.27
Variance of PSNR	0.000065	0.0034269	0.027575	0.00036689	0.000104	0.00014956
MAP_NBiShrink_WP (3×3)	32.193	30.116	28.436	27.611	26.719	25.951
Variance of PSNR	0.000061	0.0084087	0.030494	0.0010107	0.0021929	0.001868
MMSE_NBiShrink_WP(3×3)	**32.555***	30.565	28.978	**28.114***	**27.181***	**26.416***
Variance of PSNR	0.00009	0.003032	0.026402	0.00032822	0.00061156	0.00043
BiShrink (5×5) [8]	32.396	30.483	29.09	28.032	27.173	26.431
Variance of PSNR	0.000002	0.00010867	0.00018422	0.00025356	0.00018822	0.000094
MMSE_BiShrink (5×5)	**32.492***	**30.583***	**29.214***	**28.159***	**27.267***	**26.554***
Variance of PSNR	0.0000167	0.00018756	0.00016089	0.00020689	0.0030882	0.000047
MAP_BiShrink_WP (5×5)	32.37	30.419	28.849	28.032	27.161	26.42
Variance of PSNR	0.000078	0.0020407	0.025177	0.00012356	0.000392	0.00022822
MMSE_BiShrink_WP (5×5)	32.447	30.504	28.968	28.137	27.259	26.526
Variance of PSNR	0.00013756	0.0020309	0.024474	0.000182	0.00017267	0.00039
MAP_NBiShrink_WP (5×5)	32.121	30.133	28.56	27.794	26.973	26.285
Variance of PSNR	0.00001775	0.004082	0.019446	0.00015089	0.0010007	0.0009336
MMSE_NBiShrink_WP(5×5)	32.383	30.431	28.918	28.074	27.183	26.472



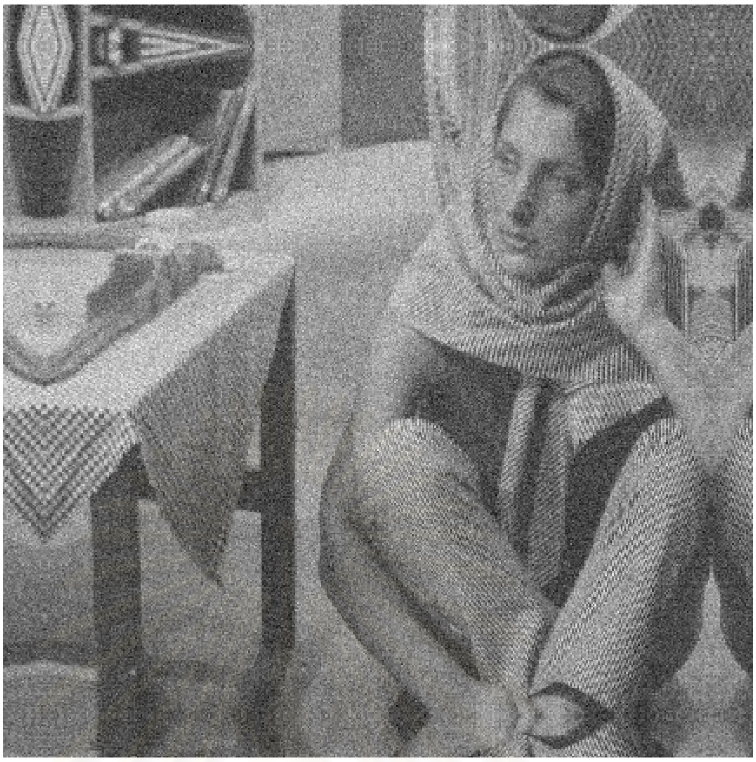
รูปที่ 4.11 (ค) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Boat ในการโปรแกรม 3 ครั้ง



รูปที่ 4.11 (ต) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 5×5 ในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Boat ในการโปรแกรม 3 ครั้ง

4.2.3 ผลการเปรียบเทียบสำหรับภาพ Barbara

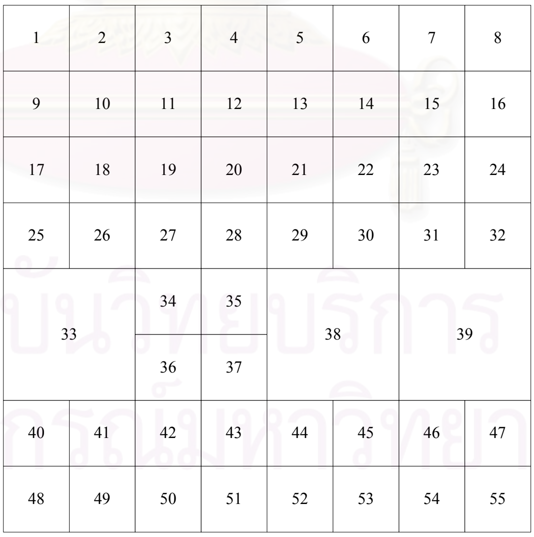
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้โดยการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Barbara โดยใช้ภาพที่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$ เป็นตัวอย่างในการแสดงผลการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ดังรูปที่ 4.12 ต่อไปนี้ โดยในการโปรแกรมครั้งที่ 1 รูปที่ 4.12 (ข) จะแสดงฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต ส่วนในรูป 4.12(ค) จะแสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree) และความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees



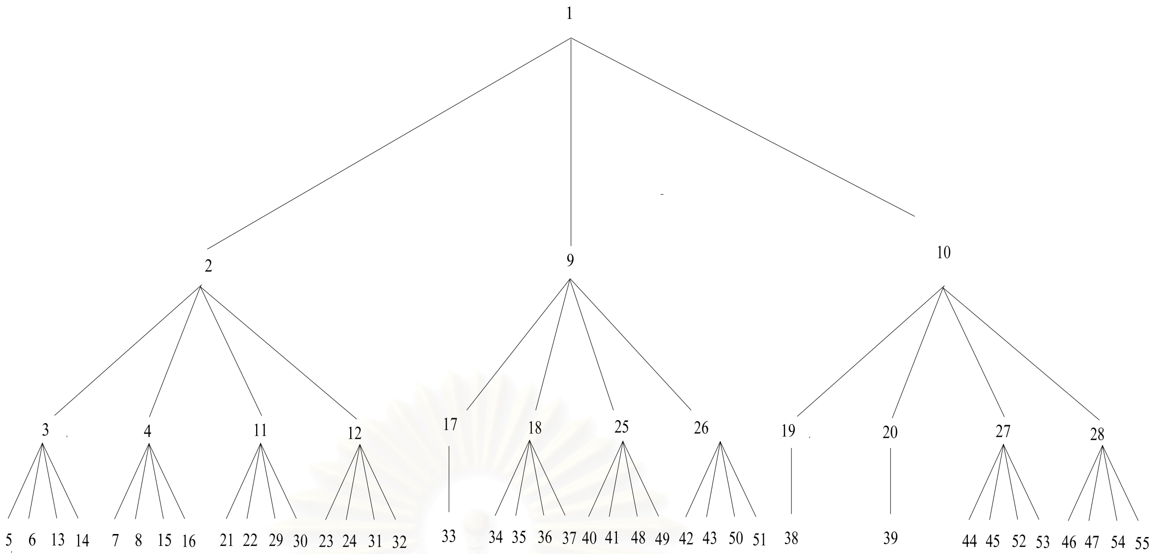
(ก)

รูปที่ 4.12 ภาพการเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Boat

(ก) ภาพสัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.218

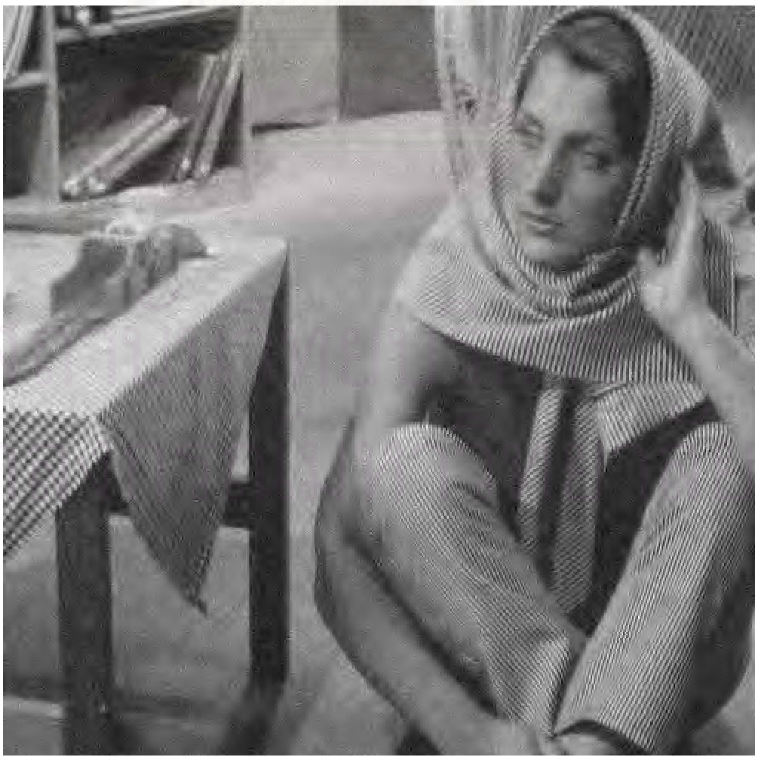


(ข)



(ค)

รูปที่ 4.12 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Barbara
(ข) ภาพฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Barbara ที่สัญญาณรบกวนที่ $\sigma_n^2 = 25$
(ค) แสดงความสัมพันธ์แบบแผนภูมิต้นไม้ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต (Wavelet Packet Tree)
และความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ในการพิจารณาแบบ Zerotrees

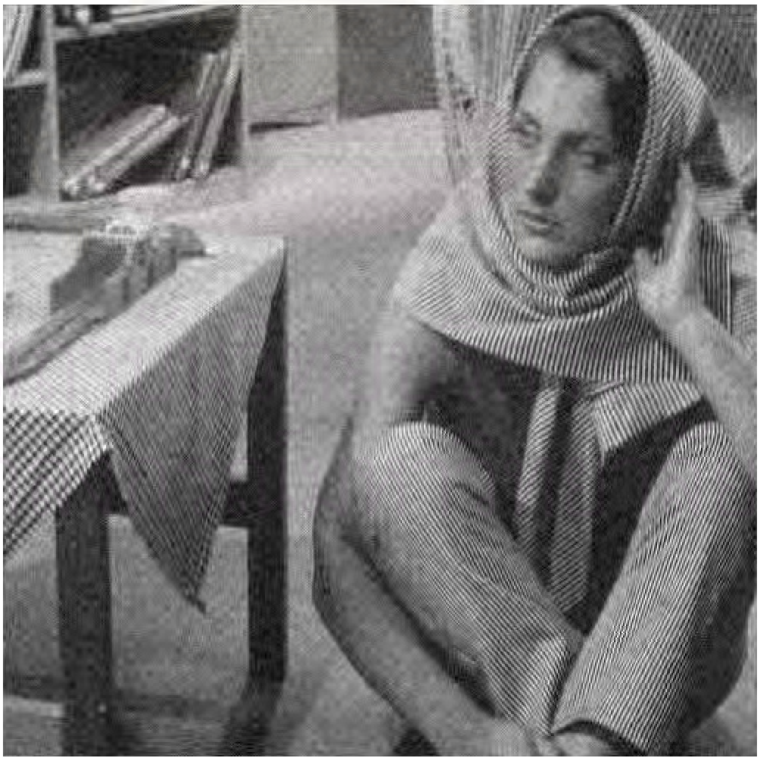


(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)



(ซ)

(ฌ)

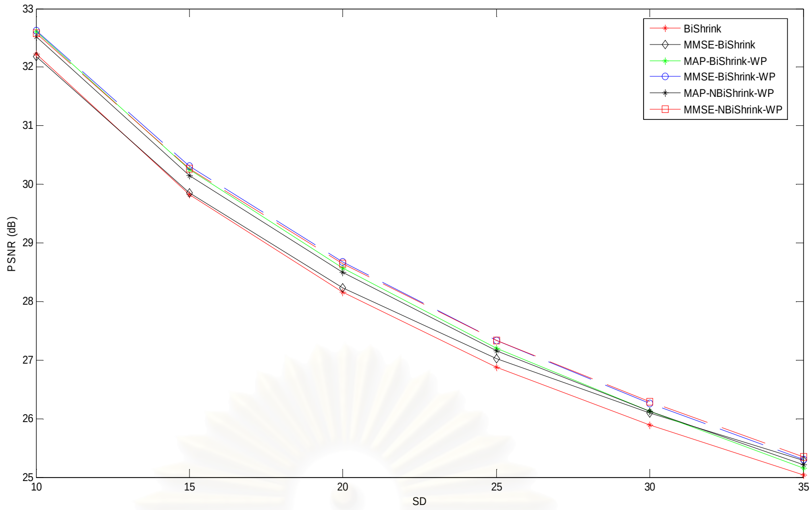
รูปที่ 4.12 (ต่อ) ภาพเปรียบเทียบวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต สำหรับภาพ Barbara (ง) วิธี BiShrink (3×3), PSNR = 26.886 (จ) วิธี MMSE_BiShrink (3×3), PSNR = 27.035 (ฉ) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.202 (ช) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.327 (ซ) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.151 (ฌ) วิธี MMSE_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.328

โดยตารางที่ 4.8 นั้นจะแสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีการลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในการโปรแกรม 3 ครั้งและรูปที่ 4.12 (ญ) และ 4.12 (ด) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะสังเกตเห็นว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบ MMSE_NBiShrink_WP นั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆ ในกรณีที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมีค่ามากและประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 ส่วนวิธี MMSE_BiShrink_WP นั้นจะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5 แต่เมื่อพิจารณาภาพรวมแล้วจะพบว่าวิธี MMSE_BiShrink_WP เมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5 จะเป็นวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ย PSNR สูงที่สุดเมื่อความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมีค่ามาก ดังตารางที่ 4.8

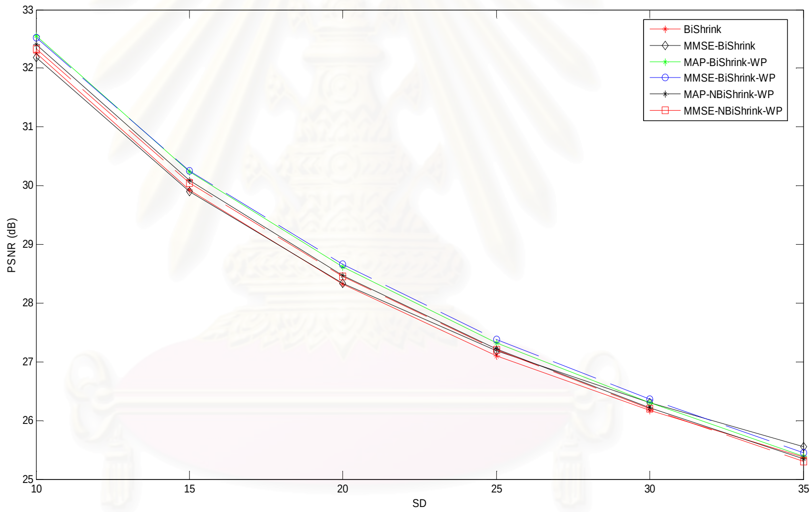
ตารางที่ 4.8 แสดงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนค่า PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ โดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Barbara ในการโปรแกรม 3 ครั้ง

Standard deviation of noise PSNR	10 (28.176)	15 (24.639)	20 (22.159)	25 (20.206)	30 (18.622)	35 (17.281)
BiShrink (3×3) [8]	32.231	29.831	28.156	26.885	25.893	25.04
Variance of PSNR	0.00003266	0.000096	0.00045422	0.0000436	0.00065689	0.0002667
MMSE_BiShrink (3×3)	32.181	29.849	28.237	27.029	26.093	25.289
Variance of PSNR	0.000061	0.000083	0.00045422	0.000024	0.00055756	0.0002162
MAP_BiShrink_WP (3×3)	32.614	30.253	28.578	27.203	26.131	25.153
Variance of PSNR	0.000206	0.00005	0.0012376	0.0000009	0.00011822	0.00139
MMSE_BiShrink_WP (3×3)	**32.623***	**30.316***	**28.677***	27.328	26.265	25.301
Variance of PSNR	0.00014489	0.000067	0.000926	0.000014	0.00016822	0.001308
MAP_NBiShrink_WP (3×3)	32.524	30.145	28.501	27.162	26.129	25.207
Variance of PSNR	0.00035089	0.0000175	0.0011616	0.00008	0.000075	0.001267
MMSE_NBiShrink_WP(3×3)	32.578	30.27	28.653	**27.333***	**26.291***	**25.349***
Variance of PSNR	0.00018689	0.000182	0.00052689	0.000035	0.00025756	0.001261

BiShrink (5×5) [8]	32.258	29.925	28.315	27.105	26.168	25.379
Variance of PSNR	0.00004355	0.000042	0.00068022	0.000009	0.00082822	0.0002069
MMSE_BiShrink (5×5)	32.182	29.898	28.339	27.186	26.298	**25.548***
Variance of PSNR	0.0000462	0.000051	0.00047356	0.00011756	0.00060467	0.0001287
MAP_BiShrink_WP (5×5)	**32.551***	30.243	28.624	27.327	26.307	25.397
Variance of PSNR	0.00000335	0.0000675	0.00035622	0.00011356	0.00032822	0.00118
MMSE_BiShrink_WP (5×5)	32.518	**30.256***	**28.663***	**27.383***	**26.363***	25.453
Variance of PSNR	0.000038	0.000096	0.000422	0.00010822	0.00019756	0.001216
MAP_NBiShrink_WP (5×5)	32.41	30.088	28.469	27.224	26.219	25.344
Variance of PSNR	0.00012067	0.000024	0.00061422	0.000434	0.00050689	0.0007482
MMSE_NBiShrink_WP(5×5)	32.335	30.04	28.455	27.198	26.194	25.303



รูปที่ 4.12 (ญ) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 ในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Barbara ในการโปรแกรม 3 ครั้ง



รูปที่ 4.12 (ด) กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆ โดยใช้หน้าต่างขนาด 5×5 ในผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตกับภาพ Barbara ในการโปรแกรม 3 ครั้ง

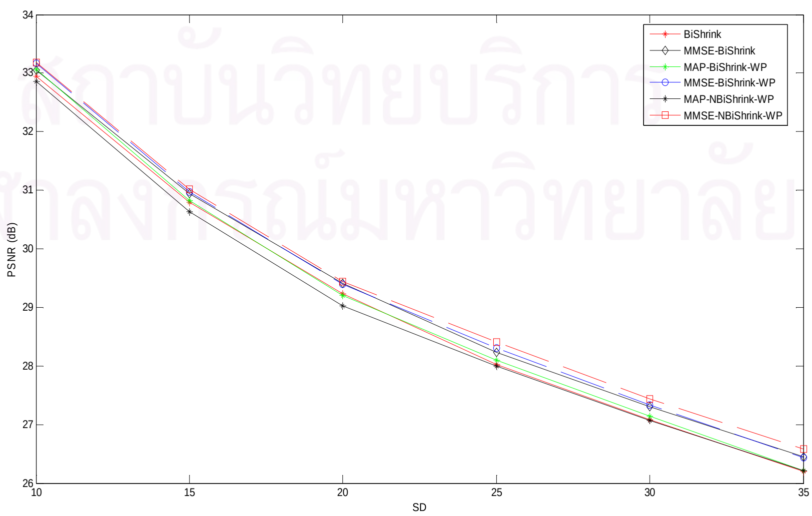
4.2.4 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพ

เช่นเดียวกับวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตในทางปฏิบัติแล้วภาพแต่ละภาพจะมีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งลักษณะรายละเอียดและการกระจายตัวของภาพ ทำให้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำค่าเฉลี่ย PSNR ของทั้ง 3 ภาพ คือ Lena, Boat และ Barbara ซึ่งเป็นตัวแทนของภาพที่มีลักษณะแตกต่างกันมาทำการหาค่าเฉลี่ยเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวน โดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตแต่ละวิธีอีกครั้งหนึ่ง โดยในตารางที่ 4.9 จะแสดงถึงค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆโดยใช้หน้าต่างขนาด 3×3 และ 5×5

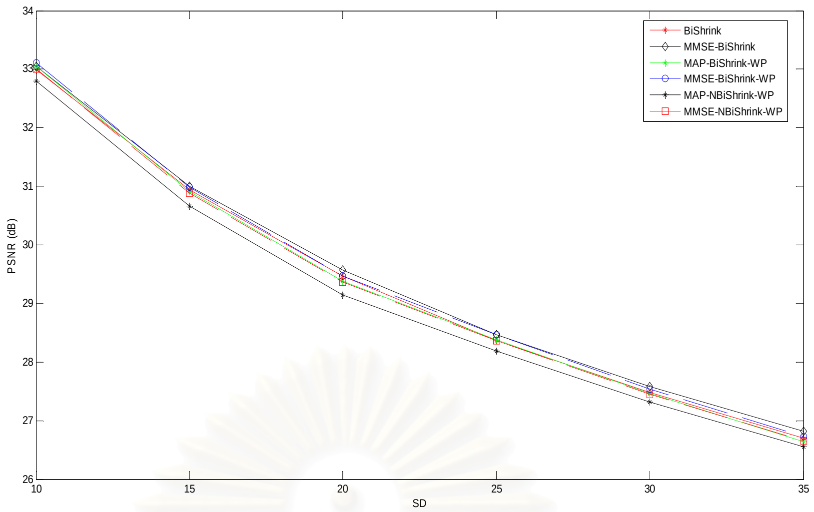
ส่วนในรูปที่ 4.13 และ รูปที่ 4.14 จะแสดงถึงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ในวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ โดยใช้ขนาดหน้าต่าง 3×3 และ 5×5 ตามลำดับ โดยจะสังเกตเห็นว่าวิธี MMSE_NBiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนสูงที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่น เมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 3×3 ส่วนวิธี MMSE_BiShrink นั้นจะเป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพดีที่สุดเมื่อประยุกต์ใช้กับหน้าต่างขนาด 5×5

ตารางที่ 4.9 แสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้ง 3 ภาพของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพโดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตแบบต่างๆ

Standard deviation of noise PSNR	10 (28.168)	15 (24.649)	20 (22.152)	25 (20.202)	30 (18.628)	35 (17.281)
BiShrink (3×3) [8]	32.948	30.801	29.235	28.03	27.086	26.197
MMSE_BiShrink (3×3)	33.044	30.936	29.415	28.236	27.305	26.448
MAP_BiShrink_WP (3×3)	33.059	30.831	29.205	28.1	27.138	26.215
MMSE_BiShrink_WP (3×3)	33.161	30.971	29.401	28.302	27.326	26.429
MAP_NBiShrink_WP (3×3)	32.858	30.629	29.03	27.993	27.07	26.217
MMSE_NBiShrink_WP(3×3)	**33.183***	**31.012***	**29.447***	**28.404***	**27.435***	**26.576***
BiShrink (5×5) [8]	32.988	30.938	29.473	28.358	27.477	26.693
MMSE_BiShrink (5×5)	33.046	**31.009***	**29.567***	**28.465***	**27.58***	**26.815***
MAP_BiShrink_WP (5×5)	33.052	30.92	29.382	28.385	27.47	26.646
MMSE_BiShrink_WP (5×5)	**33.106***	30.99	29.467	28.47	27.543	26.724
MAP_NBiShrink_WP (5×5)	32.795	30.661	29.14	28.194	27.315	26.553
MMSE_NBiShrink_WP(5×5)	33.008	30.877	29.367	28.372	27.446	26.651



รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพ โดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตในขนาดหน้าต่าง 3×3



รูปที่ 4.14 แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ทั้ง 3 ภาพในวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพโดยใช้ผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตแบบต่างๆ ในขนาดหน้าต่าง 5×5

4.2.5 เปรียบเทียบผลการทดสอบของบริเวณที่สนใจในวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบต่างๆในวิธีผลการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต

เนื่องจากในหัวข้อที่ผ่านมามีการแสดงภาพที่ได้จากการลดสัญญาณรบกวน โดยการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตแบบทั้งภาพ ซึ่งอาจทำให้ไม่สามารถสังเกตเห็นรายละเอียดในบริเวณที่เราสนใจได้ ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงจะนำเสนอภาพที่ผ่านการลดสัญญาณรบกวนเฉพาะบริเวณที่เราสนใจ เพื่อสังเกตและเปรียบเทียบผลกระทบที่เกิดขึ้น

4.2.5.1 ผลการเปรียบเทียบภาพ Lena

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Lena ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ ในการโปรแกรมครั้งที่ 1 โดยเลือกบริเวณที่สนใจที่จะใช้ในการเปรียบเทียบเป็นบริเวณปีกหมวกของภาพ ดังรูปที่ 4.15 ต่อไปนี้

(ก)

(ข)

รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Lena ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Lena (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.197

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)

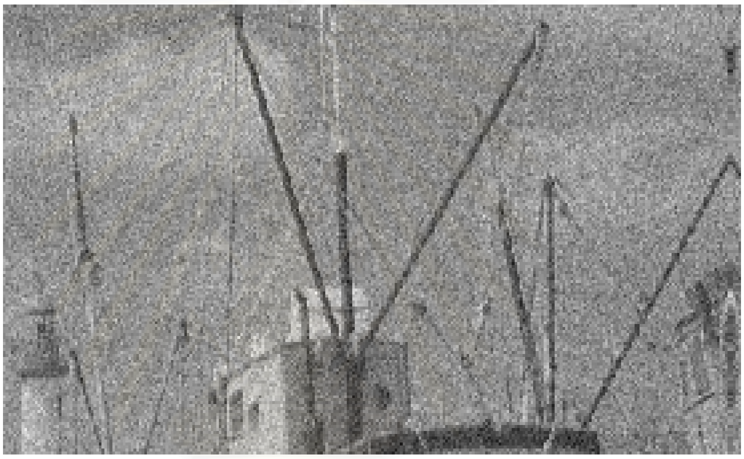
(ซ)

รูปที่ 4.15 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Lena ในบริเวณที่สนใจ (ค) วิธี BiShrink (3×3) , PSNR = 29.434 (ง) วิธี MMSE_BiShrink (3×3) , PSNR = 29.682 (จ) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3) , PSNR = 29.343 (ฉ) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3) , PSNR = 29.577 (ช) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3) , PSNR = 29.233 (ซ) วิธี MMSE_NBiShrink (3×3) , PSNR = 29.765

4.2.5.2 ผลการเปรียบเทียบภาพ Boat

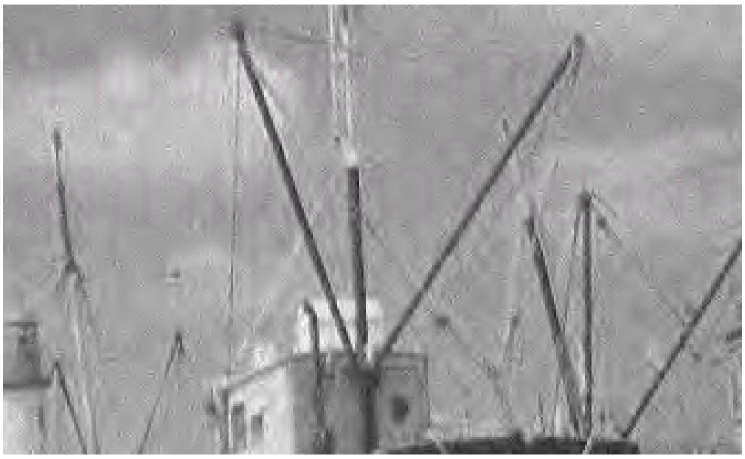
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Boat ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ ในการโปรแกรมครั้งที่ 1 โดยเลือกบริเวณที่สนใจ คือ บริเวณเสากระโดงเรือของภาพดังรูปที่ 4.16 ต่อไปนี้

(ก)



(ข)

รูปที่ 4.16 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Boat ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Boat (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.197



(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

(ช)

(ซ)

รูปที่ 4.16 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Boat ในบริเวณที่สนใจ
(ค) วิธี BiShrink (3×3), PSNR = 27.774 (ง) วิธี MMSE_BiShrink (3×3), PSNR = 27.991
(จ) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.777 (ฉ) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.986
(ช) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.581 (ซ) วิธี MMSE_NBiShrink (3×3), PSNR = 28.089

4.2.5.3 ผลการเปรียบเทียบภาพ Barbara

ในหัวข้อนี้แสดงผลการเปรียบเทียบภาพ Barbara ที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\sigma_n^2 = 25$ ในการโปรแกรมครั้งที่ 1 โดยเลือกบริเวณที่สนใจ คือ บริเวณขากางเกงและขอบโต๊ะดังรูปที่ 4.17 ต่อไปนี้

(ก)

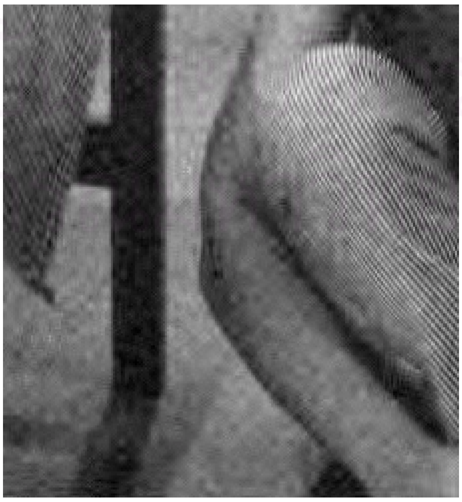
(ข)

รูปที่ 4.17 เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Barbara ในบริเวณที่สนใจ (ก) ภาพต้นแบบ Barbara (ข) ภาพสัญญาณรบกวนที่ความแปรปรวน $\sigma_n^2 = 25$, PSNR = 20.218

(ค)

(ง)

(จ)



(ฉ)

(ช)

(ซ)

รูปที่ 4.17 (ต่อ) เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบเวฟเล็ตแพคเก็ตของภาพ Barbara ในบริเวณที่สนใจ (ค) วิธี BiShrink (3×3), PSNR = 26.886 (ง) วิธี MMSE_BiShrink (3×3), PSNR = 27.035 (จ) วิธี MAP_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.202 (ฉ) วิธี MMSE_BiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.327 (ช) วิธี MAP_NBiShrink_WP (3×3), PSNR = 27.151 (ซ) วิธี MMSE_NBiShrink (3×3), PSNR = 27.328

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนของภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวกโดยพิจารณาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแบบ 2 ตัวแปร ในรูปความสัมพันธ์แบบ Parent และ Child ระหว่างแถบความถี่ย่อยซึ่งได้นำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [8] อันเป็นคุณสมบัติเฉพาะที่เกิดขึ้นในการแปลงเวฟเล็ต และใช้หลักการพื้นฐานทางสถิติ คือ ความน่าจะเป็นภายหลังสูงสุดและค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในการหาสมการประมาณสัญญาณเพื่อลดสัญญาณรบกวน หรือเรียกวิธีดังกล่าวว่าวิธี BiShrink [8] และ วิธี MMSE_BiShrink ตามลำดับ นอกจากนี้ยังประยุกต์ใช้วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแบบท้องถิ่น (NeighShrink) [22] (ซึ่งเป็นการนำผลกระทบจากสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่อยู่ข้างเคียงสัมประสิทธิ์ที่เรากำลังพิจารณามาพิจารณาในการลดสัญญาณรบกวนด้วย) กับวิธีลดสัญญาณรบกวนทั้ง 2 ข้างต้นโดยเรียกว่าวิธี MAP_NBiShrink และ MMSE_NBiShrink ตามลำดับ และในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำหลักการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตมาประยุกต์ใช้ในการลดสัญญาณรบกวน โดยมีวิธีพิจารณา Parent และ Child ในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตตามที่งานวิจัยที่ [24] ได้นำเสนอไว้ มาประยุกต์ใช้กับวิธีลดสัญญาณรบกวนในแบบต่างๆที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยเรียกวิธีการดังกล่าวว่า MAP_BiShrink_WP, MMSE_BiShrink_WP, MAP_NBiShrink_WP และ MMSE_NBiShrink_WP และจากผลการทดลองพบว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตนั้นจะให้ผลดีกับภาพที่มีลักษณะรายละเอียดของภาพเป็นรายคาบ (image with oscillatory) เช่น ภาพ Barbara เป็นต้น ส่วนภาพที่มีรายละเอียดของภาพน้อย เช่น ภาพ Lena หรือ ภาพที่มีรายละเอียดของภาพมากแต่ไม่เป็นรายคาบ เช่น ภาพ Boat นั้นวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตจะให้ประสิทธิภาพที่ดีกว่าโดยเฉพาะ วิธี MMSE_BiShrink และ MMSE_NBiShrink นอกจากนี้ยังพบว่าถ้าเพิ่มระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ตขึ้นแล้วจะทำให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนของภาพด้วยวิธีต่างๆ เพิ่มขึ้นด้วย (โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ประยุกต์ใช้การแปลงเวฟเล็ตแบบ 6 ระดับความละเอียด กับวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตและการแปลงเวฟเล็ตแบบ 3 ระดับความละเอียดกับวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต)

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

1 ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าการเพิ่มระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ตนั้น จะมีผลทำให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนสูงขึ้น ดังนั้นในอนาคตหากมีการพัฒนาโปรแกรมในการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ต มีระดับการแปลงที่สูงขึ้นก็น่าจะทำให้วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยการแปลงเวฟเล็ตแพคเก็ตมีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วย

2 ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ฟังก์ชันต้นทุน (Cost function) แบบ norm entropy (p = 2.5) เป็นฟังก์ชันในการหาฐานที่ดีที่สุดในการแปลงเวฟเล็ต ซึ่งต่อไปในอนาคตอาจมีการออกแบบหรือประยุกต์ใช้ฟังก์ชันต้นทุนชนิดอื่นในการหาฐานที่ดีที่สุด ซึ่งอาจจะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนที่มากขึ้นก็เป็นได้ โดยเป็นหัวข้อวิจัยที่น่าศึกษาและวิจัยต่อไปในอนาคตเป็นอย่างยิ่ง

3 ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกพิจารณาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละแถบความถี่ย่อยในแบบ Parent และ Child ซึ่งเราอาจทดลองพิจารณาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแบบอื่นๆ ดังตัวอย่างที่ได้นำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [30] เพื่อประยุกต์ใช้กับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็เป็นหัวข้อวิจัยที่น่าศึกษาต่อไปในอนาคต อีกเช่นกัน

4 ในงานวิจัยนี้ได้พบปัญหาในการลดสัญญาณรบกวน คือเมื่อทำการลดสัญญาณรบกวนแล้วภาพที่ได้จะมีขอบภาพที่ไม่ชัดเจน ซึ่งจัดได้ว่าเป็นปัญหาสำคัญอีกประการหนึ่งที่เกิดขึ้น โดยงานวิจัยที่ [26] ได้นำเสนอวิธีแก้ไขไว้ในรูปการแปลงแบบใหม่ คือ Curvelet Transform ซึ่งจะไม่ทำให้สัญญาณภาพบริเวณขอบภาพสูญหายไปจากการลดสัญญาณรบกวน ส่วนในงานวิจัยที่ [27] นำเสนอวิธีแก้ไขไว้ โดยใช้วิธี Canny edge detection ในการปรับปรุงขอบภาพให้มีความชัดเจนขึ้น ดังนั้นในอนาคตถ้ามีการประยุกต์ใช้วิธีปรับปรุงขอบภาพกับ วิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็น่าจะทำให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนและความชัดเจนของขอบภาพหลังลดสัญญาณรบกวนดีขึ้นด้วย

5 ในงานวิจัยที่ [11] และ [28] ได้เสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการใช้สมการประมาณสัญญาณแบบเชิงเส้น ซึ่งเป็นวิธีที่สมมุติให้สัญญาณต้นแบบมีการกระจายตัวแบบเกาส์เซียน แต่ให้ความสำคัญกับวิธีคำนวณความแปรปรวนมากกว่าซึ่งในบางกรณีกลับให้ค่า PSNR ที่ดีกว่าวิธีลดสัญญาณรบกวนที่สมมุติให้การกระจายตัวของสัญญาณต้นแบบเป็นแบบ Radial Exponential Distribution ซึ่งนำเสนอไว้ในงานวิจัยที่ [8] เช่น ผลการทดลองในงานวิจัยที่ [28] เป็นต้น ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าวิธีคำนวณความแปรปรวนนั้นมีผลกระทบต่อประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนเช่นกัน ดังนั้นหากประยุกต์ใช้วิธีคำนวณความแปรปรวนของที่เหมาะสมกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ก็น่าจะได้วิธีที่ให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนที่ดีขึ้นซึ่งเป็นงานที่ต้องศึกษา วิจัยต่อไปในอนาคต

6 ในงานวิจัยที่ [29] ได้ประยุกต์การแปลงเวฟเล็ตในรูป Multiwavelet แบบหลายตัวแปรในวิธีลดสัญญาณรบกวนและให้ประสิทธิภาพที่ดีขึ้น ดังนั้นหากนำการแปลงเวฟเล็ตในแบบ Multiwavelet มาประยุกต์ใช้กับวิธีลดสัญญาณรบกวนในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็น่าจะได้วิธีลดสัญญาณรบกวน ที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น เช่นกัน

รายการอ้างอิง

[1] Donoho, D. L. De-Noising by Soft-Thresholding IEEE Transaction Information Theory 41 (May 1995): 613-627.

[2] Vetterli, M., Chang, S. G. and Yu, B. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression IEEE Transaction Image Processing 9, 9 (September 2000): 1523-1546.

[3] Kaur, L., Gupta, S. and Chauhan, R. C. Image Denoising using Wavelet Thresholding IEEE Image Processing 8, 12 (December 2003): 1600-1604.

[4] Li, Q. and H, He, C. Application of Wavelet Thresholding Image De-noising IEEE Image Processing 9, 13 (2006): 205-208.

[5] Zhou, Y., Lai, S. and Lv, Peizhuo. An Improved Approach to Thres hold Function De-noising of Image in CL2 Multi-wavelet Transform Domain IEEE Image Processing 10, 14 (2006): 306-309.

[6] Rangarajan, R., Venkataramanan, R. and Shah, S. Image Denoising Using Wavelets Wavelet & Time Frequencies

[7] Bui, T. and Cho, D. MULTIVARIATE STATISTICAL APPROACH FOR IMAGE DENOISING IEEE Image Processing 7, 8 (2005): 589-592.

[8] Sendur, L and Slesnick, I. A BIVARIATE SHRINKAGE FUNCTION FOR WAVELET-BASED DENOISING. IEEE Image Processing 9, 12 (November 2002): 274-277.

[9] Sendur, L and Slesnick, I. Bivariate Shrinkage Functions for Wavelet-Based Denoising Exploiting Interscale Dependency IEEE Transaction Signal Processing 50, 11 (November 2002): 2744-2756.

[10] Sendur, L and Slesnick, I. Bivariate Shrinkage with Local Variance Estimation IEEE Signal Proce Processing 9, 12 (December 2002): 438-441.

[11] Kivanc, M., Kozintsev, I., Ramchandran, K. and Moulin, P. Low-Complexity Image Denoising Based on Statistical Modeling of Wavelet Coefficients IEEE Signal Processing 6, 12 (December 1999): 300-303.

[12] Pasiaising, P., Pattanavijit, V., Jitapunkul, S. Performance Evaluation of Image Denoising Techniques IWAIT Image Technology (January 2006): 135-139.

[13] Sendur, L and Slesnick, I. Laplace random vectors, Gaussian noise, and the generalized incomplete gamma function In Proc. IEEE Image Processing (ICIP) (October 2006).

[14] Sendur, L and Slesnick, I. MULTIVARIATE SHRINKAGE FUNCTIONS FOR WAVELET-BASED DENOISING IEEE Image Processing 1, 6 (November 2002): 953-957.

[15] Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage Journal of the American Statistical Associate 90, 432 (December 1995): 1200-1224.

[16] Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage Biometrika 81 (1994): 425-455.

[17] Gonzalesz, R. C. and Wood, R. E. Digital Image Processing NJ Prentice-Hall, 2002.

[18] Hillery, A. and Chin, R. Iterative wiener filters for image restoration IEEE Transaction Signal Processing 39, 8 (August 1991): 1892-1899.

[19] Fei, S. and Selesnick, I. MULTIVARIATE QUASI-LAPLACE MIXTURE MODELSFORWAVELET-BASED IMAGE DENOISING IEEE Image Processing 5, 7 (2006): 2625-2628.

[20] Fletcher, A., Goyal, V. and Ramchandran, K. ON MULTIVARIATE ESTIMATION BY THRESHOLDING IEEE Image Processing 9, 10 (2006): 225-229.

[21] Martin, R. Speech Enhancement Based on Minimum Mean-Square Error Estimation and Supergaussian Priors IEEE Transaction Speech and Audio 13, 5 (September 2005): 845-855.

[22] Chen, G., Bui, D. T. and Chen, Y. G. IMAGE DENOISING USING NEIGHBOURING WAVELET COEFFICIENTS International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 2004.

[23] Kotz, S., Tomasz, J. and Podgorski, K. AN ASYMMETRIC MULTIVARIATE LAPLACE DISTRIBUTION The George Washington University, 2000

[24] Rajpoot, M., Wilson, R., Meyer, F. and Coifman, R. Adaptive Wavelet Packet Basis Selection for Zerotree Image Coding IEEE Transactions Image Processing 12, 12 (December 2003).

[25] Shui, P., Zhou, Z. and Li, X. Image denoising algorithm via best wavelet packet base using Winner cost function IET Image Process 1, 3 (2007): 311-318.

[26] Starck, J., Candes, E. and Donoho, D. L. The Curvelet Transform for Image Denoising IEEE Transection Image Processing 11, 6 (June 2002): 670-684.

[27] Liang, C., Xing-mei, L. and Guo-ping, Y. Image denoise based on soft-threshold and edge enhancement IEEE Image Process 7, 6 (2007): 53-56.

[28] Jun, L., Guangmeng, C. and Hu, B. Image Denoising Based on Fuzzy in Wavelet Domain IEEE Image Process (IMTC) 7, 8 (May 2005): 2019-2023.

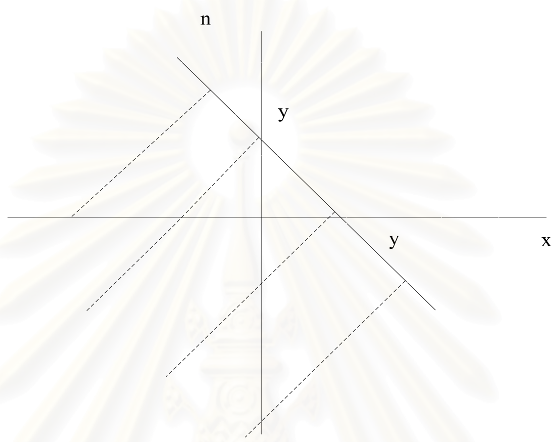
[29] Bala, E. and Ertuzun, A. A Multivariate Thresholding Technique for Image Denoising Using Multi-wavelets IEEE Image Process 9, 10 (2005): 1205-1211

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

พิสูจน์ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของสัญญาณที่สังเกตได้ต่อสัญญาณต้นแบบ

ในกรณีที่ช่องสัญญาณมีลักษณะเป็น $Y = X + n$ เมื่อ X, n เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $f_{y|x}(x,y) = f_n(y-x)$



รูป ก.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปร Y

หาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปร Y

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[X + n \le y]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x} f_{X,n}(x,n)\,dndx$$

ในกรณีที่ตัวแปร X, n เป็นอสิระต่อกัน $f_{X,n}(x,n) = f_X(x) f_n(n)$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x} f_X(x) f_n(n)\,dndx$$

ดังนั้น

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left(\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{y-x} f_n(n)dn\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_n(y-x)dx$$

จาก

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(x,y) f_X(x)dx$$

เพราะฉะนั้น

$$f_{Y|X}(x,y) = f_n(y-x)$$

ภาคผนวก ข

การคำนวณฟังก์ชันแกมมาชนิดไม่สมบูรณ์ทั่วไป (Generalized Incomplete Gamma Function)

นิยาม ฟังก์ชันแกมมาชนิดไม่สมบูรณ์ทั่วไป

$$\Gamma(\alpha, x; b) \quad = \quad \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t - b/t)dt$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบปิดได้ เมื่อ

$$erfc(x) \quad = \quad 1 - erf(x), \quad erf(x) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \quad erfcx(x) \quad = \quad \exp(x^2)erfc(x)$$

$$\Gamma(1/2, x; b) \quad = \quad 0.5\sqrt{\pi}[\exp(-2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}) + \exp(2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x} + \sqrt{b/x})]$$

$$\Gamma(-1/2, x; b) \quad = \quad 0.5\sqrt{\pi/b}[\exp(-2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}) - \exp(2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x} + \sqrt{b/x})]$$

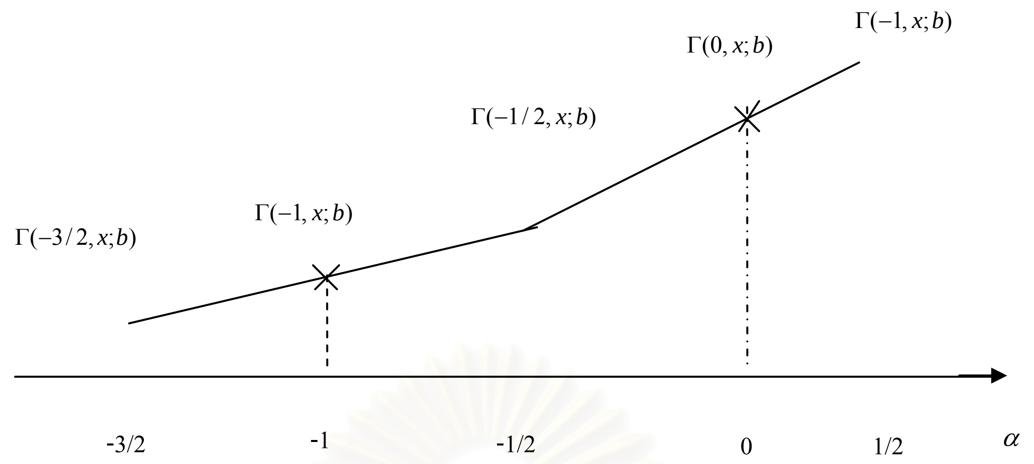
และ

$$\Gamma(\alpha - 1, x; b) \quad = \quad \frac{1}{b}[\Gamma(\alpha+1, x; b) \quad - \quad \alpha\Gamma(\alpha, x; b) \quad - \quad x^\alpha \exp(-x - b/x)] \qquad \text{ข. 1}$$

เมื่อ

$$\alpha \quad = \quad ...., \quad -0.5, \quad -1.5, \quad -2.5, \quad ....$$

ในกรณีสมการที่ 3.5 และ 3.11 เราต้องการฟังก์ชันในรูปของ $\Gamma(-1, x; b)$ และ $\Gamma(0, x; b)$ ซึ่งไม่สามารถหาค่าในรูปแบบปิดได้ ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงสมมุติให้จุดรอบบริเวณที่เราต้องการหาค่าฟังก์ชันนั้นมีการกระจายในแบบเชิงเส้นดังรูปที่ ข. 1 ดังต่อไปนี้



รูป ข. 1 กราฟกรณีสมมุติให้จุดรอบบริเวณที่เราต้องการหาค่าฟังก์ชันนั้นมีการกระจายในแบบเชิงเส้น

พิจารณาเส้นตรงบนจุด $\alpha = 0$ เพื่อหาค่าฟังก์ชัน $\Gamma(0,x;b)$ จะได้ว่า

$$\Gamma(0,x;b) = \frac{1}{2}[\Gamma(1/2,x;b) + \Gamma(-1/2,x;b)] \qquad \text{ข. 2}$$

พิจารณาเส้นตรงบนจุด $\alpha = -1$ เพื่อหาค่าฟังก์ชัน $\Gamma(-1,x;b)$ จะได้ว่า

$$\Gamma(-1,x;b) = \frac{1}{2}[\Gamma(-1/2,x;b) + \Gamma(-3/2,x;b)]$$

จากสมการที่ ข.1

$$\Gamma(-3/2,x;b) = \frac{1}{b}[\Gamma(1/2,x;b) + \frac{\Gamma(-1/2,x;b)}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(-x-\frac{b}{x})]$$

ดังนั้น

$$\Gamma(-1,x;b) = \frac{1}{2}[\Gamma(-1/2,x;b) + \frac{\Gamma(1/2,x;b)}{b} + \frac{\Gamma(-1/2,x;b)}{2b} - \frac{1}{b\sqrt{x}}\exp(-x-\frac{b}{x})] \qquad \text{ข. 3}$$

ภาคผนวก ค

บทความที่ได้รับการเผยแพร่

1. Kittisuwan, P., and Asdornwised, W. Wavelet-Based Image Denoising using NeighShrink and BiShrink Threshold Functions. will be published in Proceedings ECTI-CON 2008 (May 2008)

Wavelet-Based Image Denoising using NeighShrink and BiShrink Threshold Functions

P.Kittisuwan and W. Asdornwised
Digital Signal Processing Research Laboratory, Department of Electrical Engineering,
Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, Bangkok, 10330, Thailand.
Phone (662) 218-6907, Fax (662) 218-6912, E-mail: widhyakorn.A@chula.ac.th, pichidkit@yahoo.com

***Abstract*-This paper presents image-denoising methods performed within wavelet domain scheme by incorporating neighboring coefficients, namely NeighShrink [1], and at the same time, denoising the image with bivariate shrinkage function. The idea of Bivariate Shrinkage function (BiShrink [2]) is to model the signal based on MAP estimation approach. In fact, signal can also be bivariately modeled with MMSE estimator. The first method of this work is to incorporate the BiShrink with MMSE model, called here MMSE_BiShrink. In our second proposed method, we incorporate neighboring wavelet coefficients with BiShrink, which is called here MAP_NBShrink. Finally, we proposed the third approach by applying MMSE estimation method with NeighShrink and BiShrink, which we call here MMSE_NBShrink. Experimental results show that ours proposed methods, MMSE_BiShrink and MAP_NBShrink and MMSE_NBShrink, have better PSNR than NeighShrink and BiShrink, respectively.**

Keywords- NeighShrink, MAP estimator, MMSE estimator, and Bivariate Shrinkage function

I. INTRODUCTION

Eventually, basic wavelet thresholding methods [5] are usually applying to the detail coefficients of wavelet transform to reduce noisy signal. It has been shown that such the algorithm offers the advantages of smoothness and adaptation. However, Coifman and Donoho pointed out, this algorithm exhibits visual artifacts, i.e., Gibbs phenomena in the neighborhood of discontinuities. As a result, Donoho and Coifman proposed in [3] a translation invariant (TI) denoising scheme to suppress such artifacts by averaging over the denoised signals of all circular shifts. Chen and Bui extended the algorithm for image-denoising problem, which is called NeighShrink [1]. By taking into the advantages of NeighShrink with BiShrink, and MAP and MMSE estimators, we establish three new wavelet-based image-denoising methods.

The organization of this paper is as follows. In Section II, we describe the basic idea of parent and child relations of wavelet coefficients. In Section III, we describe incorporating wavelet-based image denoising techniques using neighboring wavelet coefficients. In Section IV and V, we modify the wavelet domain Bayes estimation for image denoising by not only exploiting interscale dependency but also intrascale dependency with NeighShrink. The results of our proposed methods will be compared with NeighShrink and BiShrink in Section VI.

II. INTERSCALE DEPENDENCY

Fig.1 illustrates the Subband regions of the two-dimensional (2-D) critically sampled wavelet transform,

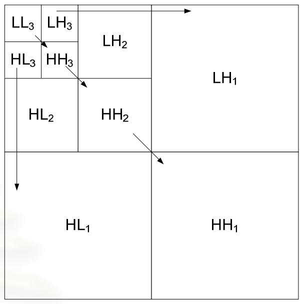


Figure 1 Subband regions of critically sampled wavelet transform

which we can label as HH_k, HL_k, LH_k, and LL_K, where k = 1,…,K. The wavelet coefficients of the k^{th} Subband will be the parent of the coefficients of the k-1^{th} Subband. This way, we can denote P(S) as the parent subband of the subband S. For example, if S is HH_1, then P(S) is HH_2 and if S is HL_2, then P(S) is HL_3. It should be noted that one of the motivations for bivariate thresholding is come from the spatial interscale dependency between the parent and child relation of wavelet coefficients.

III. INCORPORATING NEIGHBOURING WAVELET COEFFICIENTS IN IMAGE DENOISING

Chen and Bui [1] proposed wavelet denoising scheme for image by incorporating neighboring coefficients in thresholding process. If the model is $y = x + n$, where y is the observed signal, x is the original signal, and n is white Gaussian noise sample with variance σ_n^2.

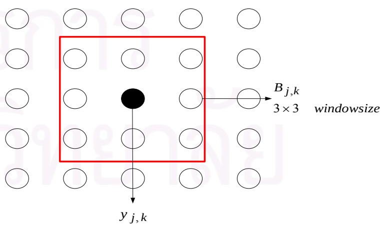


Figure 2 Illustration of the neighborhood window centered at the denoising wavelet coefficient

Given that $y_{j,k}$ is the set of wavelet coefficients of the observed image. For every $y_{j,k}$ of our interest, we need to consider a neighborhood window $B_{j,k}$ around it, which can be window sizes of 3×3, 5×5, or others. Fig. 2 illustrates an 3×3 neighborhood window centered at the wavelet coefficient to be denoising. Let calculates the average value of the wavelet coefficients within the neighborhood window:

$$S_{j,k} = \sum_{(i,l)\in B_{j,k}} y_{i,l}^2 \Big/ k^2 , \qquad (1)$$

where k is here the neighborhood window size in one dimension. However, using the average gets worse denoising results than VisuShrink [1]. Chen and Bui proposed incorporating neighboring wavelet coefficients as

$$S_{j,k} = \sum_{(i,l)\in B_{j,k}} y_{i,l}^2 . \qquad (2)$$

In soft thresholding approach, we get the denoised signal

$$\hat{x}_{j,k}(y_{j,k}) = (1 - \frac{th}{|y_{j,k}|})_+ y_{j,k} , \qquad (3)$$

where $th = \sigma_n\sqrt{2\log n}$, $\sigma_n^2 = (\frac{median(|HH_1|)}{0.6745})^2$, and n is numbers of pixels within Subband. By exploiting neighboring wavelet coefficients (2) in (3), we obtain the shrinkage factor defined as

$$\beta_{j,k} = (1 - \frac{th^2}{S_{j,k}})_+ . \qquad (4)$$

Here, $(g)_+$ is defined as

$$(g)_+ = \begin{cases} 0, & if \quad g < 0 \\ g, & otherwise \end{cases} .$$

Thus, the denoised signal becomes

$$\hat{x}_{j,k}(y_{j,k}) = y_{j,k}\beta_{j,k} , \qquad (5)$$

which is called *NeighShrink*. Experimental results in [1] show that NeighShrink is better than the Wiener filter and the conventional wavelet denoising approaches; such as VisuShrink and SUREShrink.

IV. MAP ESTIMATION WITH NEIGHSHRINK

Sender and Selesnick proposed MAP estimation method for signal denoising. In fact, they consider the dependencies between the coefficients and their parents using non-Gaussian bivariate distributions. Let x_2 represent the parent of the wavelet coefficient x_1. Then we have

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix},$$

where y_1 and y_2 are observed signal of x_1 and x_2, and n_1 and n_2 are noise samples. We can assume that the noise is i.i.d. Gaussian. Thus, we can have the noise pdf as

$$f_{\underline{N}}(\underline{n}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp(-\frac{n_1^2+n_2^2}{2\sigma_n^2}) . \qquad (6)$$

The classical MAP estimator gives us

$$\underline{\hat{x}}(\underline{y}) = \arg\max_{\underline{x}} [f_{\underline{y}|\underline{x}}(\underline{x},\underline{y}) f_{\underline{x}}(\underline{x})] . \qquad (7)$$

In [2], the radial exponential distribution is proposed for modeling the bivariate pdf between the coefficient and its parent,

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{3}{2\pi\sigma^2}\exp(\frac{-\sqrt{3}}{\sigma}\sqrt{x_1^2+x_2^2}) . \qquad (8)$$

Having solved (7) using (6) and (8), the MAP estimator of the denoising coefficient yields the following bivariate shrinkage function (BiShrink) [2]

$$\hat{x}_1(\underline{y}) = \frac{(\sqrt{y_1^2+y_2^2}-\sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma)_+}{\sqrt{y_1^2+y_1^2}} y_1 . \qquad (9)$$

Experimental results in [2] show that BiShrink is better than BayeShrink and HMT (hidden Markov model). BiShrink threshold function can also be written as

$$\hat{x}_1(\underline{y}) = (1 - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}})_+ y_1 . \qquad (10)$$

To apply neighboring wavelet coefficients to BiShrink threshold function in (10), we need to calculate the average value of parent and child coefficients within the neighborhood window

$$S_{j,k} = \frac{\sum_{(i,l)\in B_{j,k}}((y_1)_{i,l}^2+(y_2)_{i,l}^2)}{k^2} . \qquad (11)$$

Then, the shrinkage factor can be easily obtained as

$$\beta_{j,k} = (1 - \frac{(\sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma)^2}{S_{j,k}})_+ . \qquad (12)$$

the MAP estimator of the denoising coefficient becomes

$$(\hat{x}_1)_{j,k} = \beta_{j,k}(y_1)_{j,k} . \qquad (13)$$

Thus, we propose to use (12) and (13) to reduce noise within image by using new threshold function, namely MAP_NBShrink.

V. MMSE ESTIMATION WITH NEIGHSHRINK

A. Generalized incomplete gamma function

In 1994, Chaudhry and Zubair [4] introduced the generalized incomplete gamma function defined as

$$\Gamma(\alpha,x;b) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t-b/t)dt . \qquad (14)$$

For $\alpha = Z+1/2$ there is a closed form expression for generalized incomplete gamma function. For example $\alpha = 1/2$ the formula becomes

$$\Gamma(1/2,x;b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[\exp(-2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x}-\sqrt{b/x})] + \exp(2\sqrt{b})erfc(\sqrt{x}+\sqrt{b/x})] , \qquad (15)$$

where $erf(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ and $erfc(x) = 1 - erf(x)$.

The generalized incomplete gamma function satisfies a recurrence relation that becomes useful for computing its values for other orders α (see [4] for detail). For α not to be in the form $\alpha = Z+1/2$, no closed form expression is available for $\Gamma(\alpha,x;b)$. However, it can still be accurately and very efficiently computed [4].

B. MMSE estimator and incorporating neighboring wavelet coefficients

As described in [4], a spherically symmetric d-component random vector with radial exponential Distribution can be generated by

$$\underline{X} = \sqrt{Z}\,\underline{W},$$

where $\underline{W}$ is a d-component Gaussian random vector having zero mean with variance $(\sqrt{k}\sigma)^2$, and $k = 1/6$. if $\underline{X}$ is d-component radial exponential random vector and Z is an exponential (scalar) random variable have zero mean with variance 1.

The classical MMSE estimator of signal gives us

$$\hat{x}_1(\underline{y}) = \frac{1}{f_{\underline{Y}}(\underline{y})}\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{y}\,|\,\underline{x})\, f_{\underline{X}}(\underline{x})\,|d\underline{x}|. \quad (16)$$

The pdf of $\underline{Y}$ is given by the multivariate convolution

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}(\underline{x}) * f_{\underline{N}}(\underline{n}). \quad (17)$$

Let $Z = A^2$, therefore the pdf of A becomes

$$f_A(a) = 2a\exp(-a^2).$$

Thus, the pdf of $\underline{X}$ can be given by

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_0^\infty 2a\exp(-a^2)\frac{1}{(2\pi a^2(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\left(\frac{-\|\underline{x}\|^2}{2a^2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)da.$$

As we can assume that the noise is i.i.d. Gaussian, we write the noise pdf as

$$f_{\underline{N}}(\underline{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\left(\frac{\|\underline{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right).$$

Use (17) to calculate $f_{\underline{Y}}(\underline{y})$, we obtain

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \int_0^\infty 2a\exp(-a^2)\frac{1}{2\pi(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)^{\frac{d}{2}}}\exp\left(\frac{-\|\underline{y}\|^2}{2(a^2(\sqrt{k}\sigma)^2+\sigma_n^2)}\right)da. \quad (18)$$

Let $t = a^2 + \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}$ and substitute to (18), we get

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{\exp(\sigma_n^2/(\sqrt{k}\sigma)^2)}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right). \quad (19)$$

Thus, (16) becomes

$$\int_{R^d} x_1 f_{\underline{Y}|\underline{X}}(\underline{x},\underline{y})\, f_{\underline{X}}(\underline{x})\,|d\underline{x}| = \frac{\exp(\sigma_n^2/(\sqrt{k}\sigma)^2)}{(2\pi(\sqrt{k}\sigma)^2)^{\frac{d}{2}}}\left[\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right) - \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\Gamma\left(-\frac{d}{2},\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{\|\underline{y}\|^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)\right] \quad (20)$$

Solving (16) using (19) and (20), the MMSE estimator of the denoising coefficient yields the following bivariate shrinkage function $(d = 2 : \|\underline{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2)$

$$\hat{x}_1(\underline{y}) = y_1\left[1 - \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\frac{\Gamma\left(-1,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{y_1^2+y_2^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)}{\Gamma\left(0,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{y_1^2+y_2^2}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)}\right]. \quad (21)$$

Here, we propose (21) as the new denoising shrinkage function, namely MMSE_BiShrink. After applying neighboring wavelet coefficients (11) to MMSE estimator in (21), we obtain

$$(\hat{x}_1)_{j,k} = (y_1)_{j,k}\left[1 - \frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2}\frac{\Gamma\left(-1,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{S_{j,k}}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)}{\Gamma\left(0,\frac{\sigma_n^2}{(\sqrt{k}\sigma)^2};\frac{S_{j,k}}{2(\sqrt{k}\sigma)^2}\right)}\right]. \quad (22)$$

Finally, we propose to use (22) reduce noise within image by using new threshold function, namely MMSE_NBShrink.

It should be noted that our model relation of neighboring wavelet coefficients in (11) can be seen as an extended version of the estimation in (1) and while (10) can be seen as an extended version of the estimation in (3).

VI. EXPERIMENTAL RESULTS

This paper uses a local variance estimation [2] in order to improve an accuracy of the estimated variance of the signal and achieve better PSNR. We compared our proposed algorithms], MMSE_BiShrink in (21), MAP_NBShrink in (13) and MMSE_NBShrink in (22), with the baseline approaches used in [1] and [2]. Furthermore, we use Daubechies filter of length 8 in our experiments, (this filter has also been used for the experiments in [1] and [2]). For visualized evaluation purpose, we illustrate the results of our proposed and the baseline techniques in Fig. 3.

Noisy image | NeighShrink [1] | BiShrink [2]

MMSE_BiShrink | MAP_NBShrink | MMSE_NBShrink

Figure 3 Image Denoising by using different methods on a Noisy image with PSNR = 18.624 (Window Size 3×3)

VII. CONCLUSIONS

In both Lena and Boat image cases, MAP_NBShrink obtained from BiShrink gives worse PSNR than BiShrink. However, It is interesting to see that MAP_ NBShrink perform better PSNR than BiShrink when applying to image contained high-frequency components such as "Barbara". For MMSE criteria, MMSE_NBShrink, derived from MMSE_BiShrink (21), gives better PSNR than MMSE_BiShrink in almost all of cases, especially when (3×3) window size was applied.

TABLE I.

AVERAGE PSNR VALUES OF DENOISED IMAGE OVER FIVE RUNS FOR LENA IMAGE WITH DIFFERENT NOISE LEVELS (σ_n^2)

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [1]	33.839	32.119	30.883	29.906	29.134	**28.461***
BiShrink (3×3) [2]	34.216	32.201	30.733	29.554	28.64	27.741
MMSE_BiShrink (3×3)	34.428	32.432	30.975	29.803	28.88	28.006
MAP_NBShrink (3×3)	33.95	31.956	30.553	29.442	28.592	27.776
MMSE_NBShrink (3×3)	**34.543***	**32.596***	**31.18***	**30.047***	**29.142***	28.31
NeighShrink (5×5) [1]	34.168	31.792	30.053	28.63	27.524	26.429
BiShrink (5×5) [2]	34.338	32.452	31.108	30.059	29.241	28.484
MMSE_BiShrink (5×5)	34.493	32.598	31.24	30.176	29.333	28.564
MAP_NBShrink (5×5)	34.014	32.127	30.813	29.829	29.032	28.363
MMSE_NBShrink (5×5)	**34.514***	**32.624***	**31.268***	**30.213***	**29.374***	**28.623***

TABLE II.

AVERAGE PSNR VALUES OF DENOISED IMAGE OVER FIVE RUNS FOR BARBARA IMAGE WITH DIFFERENT NOISE LEVELS (σ_n^2)

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [1]	31.316	29.149	27.657	26.536	25.649	24.974
BiShrink (3×3) [2]	32.248	29.847	28.184	26.921	25.943	25.113
MMSE_BiShrink (3×3)	32.205	29.872	28.271	27.068	26.138	25.364
MAP_NBShrink (3×3)	32.235	29.817	28.168	26.921	25.969	25.142
MMSE_NBShrink (3×3)	**32.263***	**29.93***	**28.344***	**27.152***	**26.234***	**25.484***
NeighShrink (5×5) [1]	**32.698***	**30.225***	**28.446***	27.066	25.983	24.997
BiShrink (5×5) [2]	32.28	29.947	28.35	27.146	26.219	25.455
MMSE_BiShrink (5×5)	32.21	29.928	28.382	**27.231***	**26.344***	**25.629***
MAP_NBShrink (5×5)	32.241	29.912	28.339	27.16	26.263	25.501
MMSE_NBShrink (5×5)	32.23	29.917	28.366	27.208	26.318	25.609

TABLE III.

AVERAGE PSNR VALUES OF DENOISED IMAGE OVER FIVE RUNS FOR BOAT IMAGE WITH DIFFERENT NOISE LEVELS (σ_n^2)

Standard deviation of noise (SD) PSNR	10 (28.167)	15 (24.644)	20 (22.15)	25 (20.204)	30 (18.624)	35 (17.284)
NeighShrink (3×3) [1]	31.639	29.862	28.587	27.65	26.867	26.249
BiShrink (3×3) [2]	32.432	30.417	28.957	27.834	26.915	26.111
MMSE_BiShrink (3×3)	32.559	30.583	29.155	28.06	27.147	26.362
MAP_NBShrink (3×3)	32.243	30.206	28.748	27.65	26.786	26.026
MMSE_NBShrink (3×3)	**32.611***	**30.659***	**29.261***	**28.194***	**27.302***	**26.546***
NeighShrink (5×5) [1]	**32.662***	30.402	28.734	27.41	26.368	25.375
BiShrink (5×5) [2]	32.405	30.5	29.127	28.09	27.238	26.533
MMSE_BiShrink (5×5)	32.5	**30.603***	**29.242***	**28.222***	**27.367***	**26.661***
MAP_NBShrink (5×5)	32.193	30.245	28.866	27.848	27.04	26.367
MMSE_NBShrink (5×5)	32.48	30.569	29.213	28.194	27.352	26.646

REFERENCES

[1] G. Y. Chen, T. D. Bui and A. Krzyzak, "Image Denoising using neighbouring wavelet coefficients," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 10, no. 10, pp. 917-920, 2004.

[2] L. Sendur and I. W. Selesnick "Bivariate shrinkage with local variance estimation," IEEE Trans. Signal Processing, vol.50, no. 11, pp.2744-2756, 2002.

[3] R. R. Coifman and D. L. Donoho, "Translation invariant denoising," in Wavelets and Statistics, Lecture Notes in Statistic. New York: Springer-Verlag, vol.103, pp. 125-150.

[4] S. Kotz, T. Kozubowski, and K. Podgorski. The Laplace Distribution and Generalizations. Birkhauser, 2001.

[5] D. L. Donoho, "Denoising by soft-thresholding," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 90, no. 432, pp. 1331-1340, 1995.

[6] I. W. Selesnick. Laplace random vectors, Gaussian noise, and the generalize incomplete gamma function. In *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing (ICIP)*, Atlanta, October 2006.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิชิต กิตติสุวรรณ์ เกิดวันที่ 26 เมษายน พ.ศ. 2526 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร เข้าศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ในปีการศึกษา 2544 สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ในปีการศึกษา 2547 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2548