



รายการอ้างอิง

1. G. J. Balas, I. Fialho, A. Packard, J. Renfrow, and C. Mullaney, "On the Design of LPV Controllers for the F-14 Aircraft Lateral-Directional Axis During Powered Approach," *Proc. American Control Conf.*, vol. 1, 1997, pp. 123–127.
2. I. Fialho, G. Balas, A. Packard, J. Renfrow, and C. Mullaney, "Linear Fractional Transformation Control of the F-14 Aircraft Lateral-Directional Axis During Powered Approach Landing," *Proc. American Control Conf.*, vol. 1, 1997, pp. 128–132.
3. P. Gahinet and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to \mathcal{H}_∞ Control," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, 1994, pp. 421–448.
4. P. Apkarian and P. Gahinet, "A Convex Characterization of Gain-Scheduled \mathcal{H}_∞ Controllers," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 40, May 1995, pp. 853–864.
5. P. Apkarian and R. J. Adams, "Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Control Sys. Tech.*, vol. 6, January 1998, pp. 21–32.
6. S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
7. L. E. Ghaoui and S. Iulian Niculescu, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
8. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., 1995.
9. J.-L. C. Laurent El Ghaoui, *LMITool-2.0 package: An Interface to Solve LMI Problems* [Computer Software], 1998. Available from: <http://www.ensta.fr/uer/uma/gropco/lmi/>[2001, August 3].
10. M. C. de Oliveira, D. P. de Farias, and J. C. Geromel, *LMISol (version 1.0)* [Computer Software], 1995. Available from: <http://www.dt.fee.unicamp.br/~carvalho/software.html>[2000, July 20].
11. C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 42, no. 7, 1997, pp. 896–911.
12. H. Kajiwara, P. Apkarian, and P. Gahinet, "LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum," *IEEE Control Sys. Mag.*, vol. 19, February 1999, pp. 44–54.

13. G. Scorletti and V. Fromion, "A New LMI Approach to Performance Control of Linear Parameter-Varying Systems," *Proc. American Control Conf.*, vol. 1, 1998, pp. 542–546.
14. C. Courties and J. Bernussou, "LPV Control by Dynamic Output Feedback," *Proc. American Control Conf.*, vol. 4, 1999, pp. 2267–2271.
15. P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, "Self-Scheduled \mathcal{H}_∞ Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example," *Automatica*, vol. 31, 1995, pp. 1251–1261.
16. S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons Ltd, 1996.
17. G. E. Dullerud and F. Paganini, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Springer-Verlag New York, Inc., 2000.
18. T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problems: LMI existence conditions and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, no. 8, 1994, pp. 1307–1317.
19. K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1998.
20. P. R. Belanger, *Control Engineering: A Modern Approach*. Saunders Colledge Publishing, 1995.
21. Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, *Experiment #5 Ball and Beam Balancing Problem* [Online], 2000. Available from: <http://www.nd.edu/~xxu/ee455/lab5/lab5.ps>[2002, October 5].



ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

การแก้ปัญหาทางระบบควบคุมในอดีต มักหาคำตอบในลักษณะผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ซึ่งต้องการทราบคำตอบที่แน่นอนของปัญหา เนื่องจากไม่มีคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหาบางปัญหาก็ทำได้ไม่่ง่ายนัก เช่น การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบเชิงเส้นด้วยวิธีของเลียปูนอฟ (Lyapunov method) ที่ต้องการหาเมทริกซ์บวกแน่นอน P ที่สมมาตรและสอดคล้องกับอสมการเลียปูนอฟ $A^T P + P A < 0$ นอกจากนี้ ปัญหาในระบบควบคุมอื่นๆ อันได้แก่ การหาอันดับของระบบ การออกแบบตัวควบคุมโดยวางตำแหน่งขั้วในย่านต่างๆ หรือการหาตัวควบคุมแบบเอชอินฟินิตี้ ปัญหาดังกล่าวเหล่านี้ไม่ได้ต้องการผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ กระบวนการแก้ปัญหาโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นวิธีการเชิงเลข (numerical method) ซึ่งสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้อย่างง่ายดาย ในบทนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการ วิธีการวางปัญหาให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ในช่วงท้ายจะแสดงให้เห็นตัวอย่างของการนำวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นไปประยุกต์ใช้กับระบบควบคุมอย่างง่าย

ก.1 บทนำ

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality, LMI) เป็นเครื่องมือตัวหนึ่ง ที่สามารถใช้หาคำตอบของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับระบบควบคุมได้มากมาย โดยปัญหาดังกล่าวอยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าต่ำสุดที่มีวัตถุประสงค์เชิงเส้น (linear objective minimization problem) ปัญหาการหาค่าต่ำสุดของค่าเจาะจงที่วางนัยโดยทั่วไปแล้ว (generalized eigenvalue minimization problem) หรือปัญหาความเป็นไปได้ (feasibility problem) จุดเด่นของวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น คือ

1. จุดประสงค์ของการออกแบบและข้อจำกัด ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีมากมาย
2. การหาคำตอบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นปัญหาคอนเวกซ์ ซึ่งมีขั้นตอนที่ใช้ในการหาคำตอบมากมาย เช่น ขั้นตอนรูปทรงรี (ellipsoid algorithm) และวิธีการจุดภายใน (interior-point methods) เป็นต้น
3. ปัญหาที่มีเงื่อนไขหลายเงื่อนไขหรือมีวัตถุประสงค์หลายอย่าง มักไม่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถหาคำตอบของปัญหาเหล่านี้ได้ วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการหาผลเฉลย

จากข้อดีต่างๆ เหล่านี้ วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงกำลังได้รับความนิยมอย่างมาก ดังจะเห็นได้จากบทความที่ตีพิมพ์ในช่วงสิบกว่าปีที่ผ่านมานี้ นอกจากนี้จำนวนผู้ผลิตซอฟต์แวร์เพื่อใช้หาคำตอบของ

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นก็มีจำนวนมากขึ้น การเลือกแก้ปัญหาด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นเรื่องที่ง่าย

ก.2 รูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นอสมการที่มีรูปแบบเฉพาะแบบหนึ่ง ซึ่งมีนิยามเป็นดังนี้

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (ก.1)$$

โดยที่ $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรคงที่สำหรับทุก ๆ ค่า i

$x \in \mathbb{R}^m$ เป็นตัวแปรที่ต้องการทราบค่า

จากนิยาม พบว่าตัวแปรที่ต้องการทราบค่าอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ในกรณีที่ตัวแปรที่ต้องการทราบค่าเป็นเมทริกซ์ ก็ยังสามารถจัดให้อยู่ในรูปของอสมการที่ (ก.1) ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก.1 ต้องการหาเมทริกซ์ $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$A^T P + P A < 0$$

โดยที่ P เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน

กำหนดให้เมทริกซ์ E_{ij} เป็นเมทริกซ์มูลฐาน (basis) ชุดหนึ่งของเมทริกซ์ P ดังนั้นสามารถเขียนเมทริกซ์ P ได้เป็น

$$P = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} E_{jk}$$

เมื่อนำกลับไปแทนในอสมการจะได้

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= A^T \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} E_{jk} \right) + \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} E_{jk} \right) A \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} (A^T E_{jk} + E_{jk} A) < 0 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยมี $F_i = A^T E_{jk} + E_{jk} A$ และ $x_i = p_{jk}$ โดยที่ $i = (j-1)n + k$ นั้นเอง

นอกจากนี้หากต้องการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจำนวนหลายๆ อสมการ ก็สามารถทำได้ โดยรวมอสมการเหล่านั้นให้เหลือเพียงอสมการเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก.2 กำหนดให้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจำนวน q อสมการเป็นดังนี้

$$F^i(x) = F_0^i + \sum_{j=1}^m x_j^i F_j^i > 0$$

โดยที่ i มีค่าเท่ากับ $1, 2, \dots, q$

x^i เป็นตัวแปรของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นอสมการที่ i

F_j^i เป็นเมทริกซ์สมมาตรคงที่

อสมการจำนวน q อสมการนั้นสามารถยุบรวมเหลือเพียงอสมการเดียวดังนี้

$$F(x) = F_0 + \sum_{j=1}^m X_j F_j > 0$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } F_j &= \text{diag}(F_j^1, F_j^2, \dots, F_j^q), \forall j = 0, 1, \dots, m \\ X_j &= \text{diag}(x_j^1 I, x_j^2 I, \dots, x_j^q I) \end{aligned}$$

ความเป็นคอนเวกซ์

สมบัติสำคัญประการหนึ่งของปัญหาที่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น คือปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาคอนเวกซ์ พิจารณาได้จากอสมการที่ (ก.1) เซ็ทของตัวแปร x ที่สอดคล้องกับอสมการที่ (ก.1) เป็นเซ็ทแบบคอนเวกซ์ (convex set) ดังนี้

กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}^m$, $F(x) > 0$, $F(y) > 0$ และ $\lambda \in (0, 1)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) F_i \\ &= \lambda F_0 + (1 - \lambda)F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i \\ &= \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นการแก้ปัญหาคอนเวกซ์ที่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สามารถแก้ได้ด้วยการโปรแกรมแบบคอนเวกซ์ (convex programming)

Schur Factorization

จากที่กล่าวมาข้างต้น ปัญหาอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นอยู่แล้ว ปัญหาที่ไม่อยู่ในรูปเชิงเส้นบางกรณี สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ โดยใช้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง ก.1 (Schur Factorization) กำหนดให้ P , Q และ R เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่ขนาดเหมาะสม และ P และ Q เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

ก. อสมการเมทริกซ์ต่อไปนี้ เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} P & R \\ R^T & Q \end{bmatrix} > 0$$

ข. เมทริกซ์ P เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน และ

$$Q - R^T P^{-1} R > 0$$

ค. เมทริกซ์ Q เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน และ

$$P - R Q^{-1} R^T > 0$$

พิสูจน์ หาได้ใน [17] หน้า 46-47 เป็นต้น

□

จากบทตั้งนี้ เราสามารถเขียนอสมการเมทริกซ์

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) > 0$$

หรือ

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S^T(x)Q(x)^{-1}S(x) > 0$$

ให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

ตัวอย่าง ก.3 ต้องการหาเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน P ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0, \quad R > 0$$

สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0$$

ซึ่งเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ก.3 แนวทางการแก้ปัญหาโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ปัญหาทางระบบควบคุมโดยทั่วไป มักไม่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและบทตั้ง ก.1 เพียงบทตั้งเดียว ไม่สามารถเปลี่ยนปัญหาไปสู่อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ ปัญหาดังกล่าวมักอยู่ในรูปของอสมการที่มีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปร และตัวแปรเหล่านั้นคูณกันอยู่ หรือมีทั้งตัวแปรและค่าผกผันของตัวแปรอยู่ ทำให้เซตของคำตอบไม่เป็นเซตแบบคอนเวกซ์ จำเป็นต้องจัดรูปอสมการใหม่ วิธีที่ใช้แบ่งได้เป็น 2 วิธี ดังนี้

1. วิธีกำจัดตัวแปร (eliminated variable method)
2. วิธีเปลี่ยนตัวแปร (change of variable method)

ถึงแม้ว่าวิธีทั้งสองนี้มีขั้นตอนในการเปลี่ยนปัญหาให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่ต่างกันออกไป แต่ทั้งสองวิธีนี้สามารถแก้ปัญหาได้เหมือนกัน เช่น หากสามารถใช้วิธีกำจัดตัวแปรเปลี่ยนปัญหาเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ วิธีเปลี่ยนตัวแปรก็สามารถเปลี่ยนปัญหานั้นได้เช่นเดียวกัน

ก.3.1 วิธีกำจัดตัวแปร

หลักการคร่าวๆ ของวิธีกำจัดตัวแปร คือ กำจัดตัวแปรบางตัวออกก่อน เหลือเพียงตัวแปรที่ไม่มีการคูณกันหรือไม่มีค่าผกผันไว้ อสมการที่ได้จะเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น หลังจากได้คำตอบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นนี้แล้ว แทนค่าตัวแปรกลับไปยังอสมการเมทริกซ์ที่ไม่เชิงเส้นเดิม อสมการที่ไม่เชิงเส้นนั้นจะเป็นเชิงเส้นในตัวแปรที่เหลืออยู่ หากคำตอบของอสมการเมทริกซ์อีกครั้งเพื่อให้ได้ตัวแปรทั้งหมด สำหรับวิธีการกำจัดนั้นจำเป็นต้องอาศัยเมทริกซ์ต่อไปนี้

นิยาม ก.1 กำหนดให้ B_{\perp} หมายถึงเมทริกซ์ที่มีค่าลำดับชั้นแถวเต็ม (full row rank) ใดๆที่สอดคล้องกับ

$$\ker B_{\perp} = \text{Im}(B)$$

บทตั้งต่อไปนี้จะแสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของการมีอยู่ของคำตอบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

บทตั้ง ก.2 กำหนดให้ B, C, K , และ Q เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเหมาะสมใดๆ จะมีเมทริกซ์ K ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์

$$BKC^T + CK^TB^T + Q < 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$B_{\perp}QB_{\perp}^T < 0, \text{ และ } C \cdot QC_{\perp}^T < 0$$

โดยที่ $B_{\perp}^T = (B_{\perp})^T$

พิสูจน์ หาได้ใน [18] □

ตัวอย่าง ก.4 พิจารณาระบบที่มีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

เมื่อควบคุมด้วยตัวควบคุมแบบป้อนกลับตัวแปรสถานะ $u = Kx$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพ ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์บวกแน่นอน P และเมทริกซ์ K ที่สอดคล้องกับอสมการเลียปูนอฟ

$$P > 0, \quad (A + BK)P + P(A + BK)^T < 0 \quad (\text{ก.2})$$

อสมการนี้จะป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเมื่อพิจารณาเฉพาะตัวแปร P หรือตัวแปร K แต่จะไม่ป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเมื่อพิจารณาตัวแปร P และ K พร้อมกัน

จากบทตั้งที่ ก.2 เมื่อคูณทางซ้ายและขวาของอสมการที่ (ก.2) ด้วย B_{\perp} และ B_{\perp}^T ตามลำดับ จะได้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่จะมีเมทริกซ์ K สอดคล้องกับอสมการที่ (ก.2) คือ

$$B_{\perp}(AP + PA^T)B_{\perp}^T < 0$$

ซึ่งเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร P หลังจากหาค่าของเมทริกซ์ P ได้แล้ว ตัวควบคุม K หาได้จาก การแทนค่าเมทริกซ์ P ลงในอสมการที่ (ก.2) ซึ่งจะป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร K วิธีดังกล่าวการนี้เรียกว่าวิธีกำจัดตัวแปร

หมายเหตุ เนื่องจากตัวควบคุมในตัวอย่าง ก.4 ป็นตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะ ดังนั้นการมีอยู่ของตัวควบคุม K จึงขึ้นอยู่กับความสามารถในการควบคุมได้ของระบบเท่านั้น เงื่อนไขที่แสดงในตัวอย่างนี้แสดงว่าคู่เมทริกซ์ (A, B) สามารถทำให้มีเสถียรภาพ (stabilizable) ได้หรือไม่

ก.3.2 วิธีเปลี่ยนตัวแปร

หลักการของวิธีเปลี่ยนตัวแปร คือ นิยามตัวแปรขึ้นมาใหม่ และเปลี่ยนตัวแปรบางตัวป็นตัวแปรที่นิยามขึ้นมา โดยอาจจะต้งนิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน (congruence transformation matrix) ขึ้นมา เพื่อแปลงอสมการนั้นให้ป็นเชิงเส้นในตัวแปรใหม่ เมื่อแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแล้ว ต้งแปลงตัวแปรนั้นกลับป็นตัวแปรเดิม ดังนั้นในการนิยามตัวแปรใหม่ต้งคำนึงถึงการแปลงตัวแปรกลับตัว

ตัวอย่าง ก.5 จากตัวอย่างที่ ก.4 กำหนดให้เมทริกซ์ $R = KP$ เมื่อแทนกลับลงในอสมการ (ก.2) จะได้

$$(AP + BR) + (AP + RB)^T < 0$$

ซึ่งจะพบว่าสมการใหม่ที่ได้นี้ เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร R และ P เมื่อแก้สมการหาค่า R และ P ได้แล้ว จะหาค่าเมทริกซ์ K ได้จาก $K = RP^{-1}$ ทั้งนี้เนื่องจาก $P > 0$ ทำให้เมทริกซ์ P^{-1} มีค่า วิธี การนี้เรียกว่าวิธีเปลี่ยนตัวแปร

ในตัวอย่างที่ผ่านมาเราสามารถกำหนดตัวแปรใหม่ขึ้นมาได้ทันที โดยไม่ต้องอาศัยเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการใช้เมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน

ตัวอย่าง ก.6 พิจารณาระบบที่มีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

และตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณออกมีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned}$$

โดยที่จำนวนตัวแปรสถานะของตัวควบคุมเท่ากับจำนวนตัวแปรสถานะของพลาเน็ต

ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ A_{cl} สอดคล้องกับอสมการเสถียรต่อไปนี้

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} < 0 \quad (\text{ก.3})$$

$$\text{โดยที่ } A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B D_c C & B C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}$$

อสมการที่ (ก.3) มีการคูณกันของพารามิเตอร์ของตัวควบคุมและเมทริกซ์ P ดังนั้นจึงยังไม่เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และการนิยามตัวแปรใหม่แต่เพียงอย่างเดียวไม่สามารถเปลี่ยนปัญหาเป็นปัญหาเชิงเส้นได้

กำหนดให้

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \hat{Y} \end{bmatrix}, & P^{-1} &= \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \hat{X} \end{bmatrix} \\ \Pi_1 &= \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & N^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

โดยที่ M และ N เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม (full column rank)

กำหนดเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน $T = \Pi_1$ คูณอสมการที่ (ก.3) ด้านซ้ายและขวาด้วย T^T และ T ตามลำดับ จะได้

$$\Pi_1^T A_{cl}^T \Pi_2 + \Pi_2^T A_{cl} \Pi_1 < 0 \quad (\text{ก.4})$$

ซึ่ง

$$\Pi_2^T A_{cl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} AX + B D_c C X + B C_c M^T & A + B D_c C \\ \left(\begin{array}{l} Y A X + Y B D_c C X + N B_c C X \\ + Y B C_c M^T + N A_c M^T \end{array} \right) & Y A + Y B D_c C + N B_c C \end{bmatrix}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}\hat{A} &= YAX + YBD_cCX + NB_cCX + YBC_cM^T + NA_cM^T \\ \hat{B} &= YBD_c + NB_c \\ \hat{C} &= D_cCX + C_cM^T \\ \hat{D} &= D_c\end{aligned}$$

เมื่อแทนกลับไปในสมการที่ (ก.4) จะได้

$$\begin{bmatrix} (B\hat{C} + AX)^T + (B\hat{C} + AX) & \hat{A}^T + (A + B\hat{D}C) \\ (A + B\hat{D}C)^T + \hat{A} & (\hat{B}C + YA)^T + (\hat{B}C + YA) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{ก.5})$$

ซึ่งเป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , X และ Y

เพื่อให้เมทริกซ์ P เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ต้องเพิ่มสมการเมทริกซ์เชิงเส้นต่อไปนี้เข้าไปด้วย

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{ก.6})$$

สมการเมทริกซ์เชิงเส้นทั้งหมดที่ใช้หาตัวควบคุม คือสมการที่ (ก.5) และ (ก.6) โดยมีตัวแปรที่ต้องการทราบค่า คือ \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , X และ Y เมื่อหาค่าตัวแปรเหล่านี้ได้แล้ว สามารถหาค่า M และ N ได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐานของ $I - YX$ (เนื่องจาก $NM^T = I - YX$) และจะได้พารามิเตอร์ของตัวควบคุมเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}D_c &= \hat{D} \\ C_c &= (\hat{C} - D_cCX)M^{-T} \\ B_c &= N^{-1}(\hat{B} - YBD_c) \\ A_c &= N^{-1}(\hat{A} - NB_cCX - YBC_cM^T - Y(A + BD_cC)X)M^{-T}\end{aligned}$$

ในที่นี้ $(M^{-L})^T = M(M^T M)^{-1}$ และ $N^{-L} = (N^T N)^{-1} N^T$

ก.4 สรุป

สมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือหนึ่งที่สามารถแก้ปัญหาทางระบบควบคุมได้มากมาย จากข้อดีต่างๆ ทำให้วิธีกำลังได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย แนวทางการแก้ปัญหาด้วยวิธีนี้แบ่งได้เป็น 2 วิธี คือวิธีกำจัดตัวแปรและวิธีเปลี่ยนตัวแปร วิธีกำจัดตัวแปรจะกำจัดบางตัวแปรออกไปก่อนเพื่อให้ได้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น แล้วจึงแทนค่าตัวแปรนั้นกลับเพื่อหาตัวแปรที่เหลือ ส่วนวิธีเปลี่ยนตัวแปรจะนิยามตัวแปรขึ้นมาใหม่เพื่อเปลี่ยนปัญหาให้เป็นเชิงเส้น แล้วจึงแปลงตัวแปรนั้นกลับเป็นตัวแปรเดิม ถึงแม้ว่าวิธีแต่ละวิธีจะมีขั้นตอนในการแก้ปัญหาต่างกัน แต่ทั้งสองวิธีสามารถแก้ปัญหาได้เหมือนกัน นั่นคือหากสามารถใช้วิธีการหนึ่งแก้ปัญหาได้ อีกวิธีที่เหลือก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้เช่นเดียวกัน

ภาคผนวก ข

ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ สำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

ในภาคผนวกนี้ แสดงวิธีการหาตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ พารามิเตอร์ของระบบและตัวควบคุมเปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ชุดหนึ่งในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น การแก้ปัญหานี้ใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรเพื่อวางปัญหาให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น วิธีเปลี่ยนตัวแปรนี้อ้างอิงจากบทความ [11] และแนวคิดในการหาตัวควบคุมสำหรับระบบในลักษณะนี้ได้มาจากบทความ [4] นอกจากนี้ ในช่วงท้ายแสดงตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบอันดับหนึ่งอย่างง่าย

ข.1 รูปแบบของพลาเน็ตและตัวควบคุม

แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ที่อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นดังรูปที่ 2.2 เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = F_u(G, \Theta) \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{ข.1})$$

หรือ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_\theta w_\theta(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\theta(t) &= C_\theta x(t) + D_{\theta\theta} w_\theta(t) + D_{\theta 1} w(t) + D_{\theta 2} u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{1\theta} w_\theta(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{2\theta} w_\theta(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\ w_\theta(t) &= \Theta(t) z_\theta(t) \end{aligned} \quad (\text{ข.2})$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ คือตัวแปรสถานะของพลาเน็ต

$w \in \mathbb{R}^{m_w}$ คือสัญญาณเข้าภายนอก

$u \in \mathbb{R}^{m_u}$ คือสัญญาณควบคุม

$z \in \mathbb{R}^{m_z}$ คือสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม

$y \in \mathbb{R}^{m_y}$ คือสัญญาณออกที่วัดได้

$\Theta(t) \in \bar{\Theta}$ เป็นตัวแปรกำหนดของพลาเน็ต และ $\bar{\Theta}$ มีโครงสร้างตามสมการ (ข.3)

$$\bar{\Theta} \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \theta_1(t)I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2(t)I_{m_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_r(t)I_{m_r} \end{bmatrix} : \theta_i(t) \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{ข.3})$$

โดยที่ $n_\theta = \sum_{i=1}^r m_i$

เพื่อให้ง่ายต่อการพิสูจน์ ระบบที่ใช้มีข้อกำหนดเพิ่มเติมดังนี้

1. (A, B_2, C_2) สามารถทำให้เสถียรได้ (stabilizable) และสามารถตรวจจับได้ (detectable)
2. ระบบไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดได้โดยตรง ($D_{22} = 0$)
3. จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกเท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ($n_z = n_w$)

เนื่องจากตัวแปรกำหนดสามารถวัดค่าได้ ดังนั้นกำหนดให้ตัวควบคุม $u = K(s)y$ บรรยายได้โดยสมการสถานะ

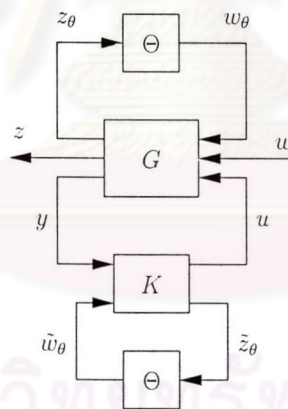
$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_{k1}y(t) + B_{k\theta}\tilde{w}_\theta(t) \\ u(t) &= C_{k1}x_k(t) + D_{k11}y(t) + D_{k1\theta}\tilde{w}_\theta(t) \\ \dot{z}_\theta(t) &= C_{k\theta}x_k(t) + D_{k\theta1}y(t) + D_{k\theta\theta}\tilde{w}_\theta(t) \end{aligned} \quad (\text{ข.4})$$

และ

$$\tilde{w}_\theta(t) = \Theta(t)\tilde{z}_\theta(t) \quad (\text{ข.5})$$

โดยที่ $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ เป็นตัวแปรสถานะของตัวควบคุม และ $\Theta(t)$ มีโครงสร้างเช่นเดียวกับพลาเนตต์ดังสมการ (ข.3)

เมื่อรวมพลาเนตต์ $G(s)$ ดังสมการที่ (ข.1) และตัวควบคุม $K(s)$ ดังสมการที่ (ข.4) เข้าด้วยกัน จะได้บล็อกไดอะแกรมของระบบวงปิดเป็นดังรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1: ระบบวงปิดของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

ย้ายบล็อกตัวแปรกำหนดของตัวควบคุมไปรวมกับตัวแปรกำหนดของพลาเนตต์ดังรูปที่ ข.2 กำหนดพลาเนตต์ที่ถูกรวม (augmented plant) $G_a(s)$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_\theta \\ z_\theta \\ z \\ y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & G(s) & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_a(s)} \begin{bmatrix} \tilde{w}_\theta \\ w_\theta \\ w \\ u \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (\text{ข.6})$$

นิยามให้ $\bar{G}(s)$ มีค่าดังนี้

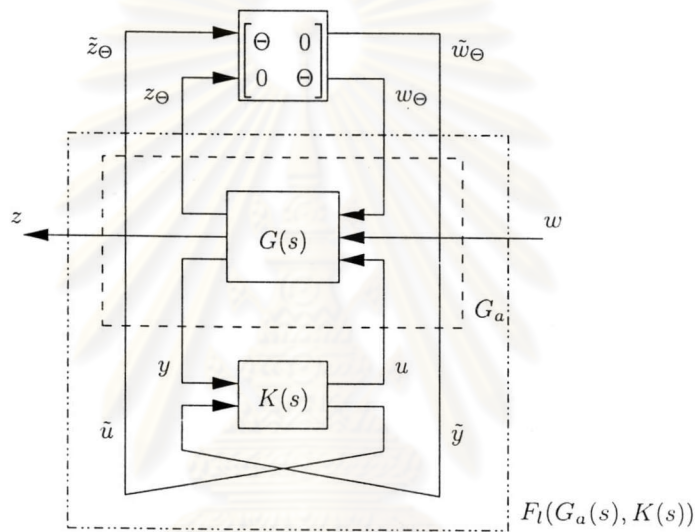
$$\bar{G}(s) \triangleq F_l(G_a(s), K(s)) \quad (\text{ข.7})$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน T_{zw} จากสัญญาณ w ไปยัง z สามารถพิจารณาเป็นการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นดังนี้

$$T_{zw} = F_u \left(F_l(G_a(s), K(s)), \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \right) \quad (\text{ข.8})$$

$$= F_u \left(\bar{G}(s), \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \right) \quad (\text{ข.9})$$

ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นระบบที่มีความไม่แน่นอนแบบมีโครงสร้างได้



รูปที่ ข.2: บล็อกไดอะแกรมของระบบวงปิดที่จัดรูปใหม่

ข.2 การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้

เงื่อนไขที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ระบบวงปิดต้องมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน โดยในที่นี้จะนำทฤษฎีของระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนมาประยุกต์ใช้

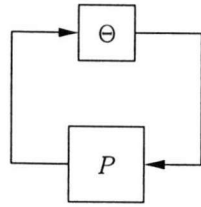
ข.2.1 เสถียรภาพของระบบวงปิด

เนื่องจากต้องการพิจารณาถึงเสถียรภาพของระบบ ในหัวข้อนี้จึงแยกพิจารณาเฉพาะฟังก์ชันถ่ายโอนส่วนที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณ w_Θ และ z_Θ เท่านั้น เสถียรภาพของระบบที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่มีโครงสร้างพิจารณาได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ข.1 (ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็ก (small gain theorem)) กำหนดให้ระบบ $P(s)$ มีเสถียรภาพ และ $\gamma > 0$ ระบบวงปิดดังรูปที่ ข.3 จะมีเสถียรภาพภายในสำหรับ $\Theta(s)$ ทุก ๆ ตัวที่มีเสถียรภาพ โดยที่

$$ก. \|\Theta(s)\|_\infty \leq 1/\gamma \text{ ก็ต่อเมื่อ } \|P(s)\|_\infty < \gamma$$

ข. $\|\Theta(s)\|_\infty < 1/\gamma$ ก็ต่อเมื่อ $\|P(s)\|_\infty \leq \gamma$



รูปที่ ข.3: บล็อกไดอะแกรมที่พิจารณาเฉพาะความไม่แน่นอน

พิสูจน์ หาได้ใน [19] หน้า 137–139 □

ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็กแสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ สำหรับระบุว่าระบบที่มีความไม่แน่นอน มีเสถียรภาพหรือไม่ นั่นคือระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อผลคูณของอัตราขยายของระบบกับอัตราขยายของความไม่แน่นอนมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง การออกแบบตัวควบคุมแบบเอชอินฟินิตี้จะใช้ทฤษฎีบทในการหาตัวควบคุม แต่ความไม่แน่นอนที่กล่าวถึงในทฤษฎีบทนี้เป็นความไม่แน่นอนใดๆ ซึ่งไม่มีโครงสร้าง เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทอัตราขยายเล็กนี้กับระบบที่มีความไม่แน่นอน (หรือตัวแปรกำหนด) ที่มีโครงสร้างดังเช่นในสมการ (ข.3) เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในทฤษฎีบทจะเหลือเพียงเป็นเงื่อนไขเพียงพอเท่านั้น เนื่องจากถ้าเป็นความไม่แน่นอนที่มีโครงสร้าง ถึงแม้ว่าระบบ $P(s)$ จะมีขนาดมากกว่า γ ระบบวงปิดอาจจะยังมีเสถียรภาพก็ได้ การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทนี้จึงมีความอนุรักษ์ วิธีลดผลของความอนุรักษ์นี้วิธีหนึ่งคือการใช้เมทริกซ์การสเกล

เซตของเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับตัวแปรกำหนดในเซต Θ เป็น

$$L_\Theta = \{ L > 0 : L\Theta = \Theta L, \forall \Theta \in \Theta \} \quad (\text{ข.10})$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} \Theta_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\Rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } l > 0 \\ \Theta_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} &\Rightarrow L_2 = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } l_1, l_2 > 0 \\ \Theta_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} &\Rightarrow L_3 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} &\text{โดยที่ } l_1 > 0 \text{ และ } l_1 l_4 - l_2 l_3 > 0 \end{aligned}$$

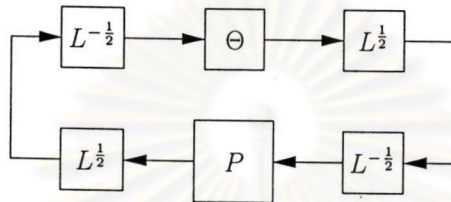
เซตของเมทริกซ์การสเกลจะสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. มีเมทริกซ์เอกลักษณ์เป็นสมาชิก
2. ถ้าเมทริกซ์การสเกล L เป็นสมาชิกของเซต L_Θ แล้ว L^T จะเป็นสมาชิกของเซตด้วย
3. ถ้าเมทริกซ์การสเกล L เป็นสมาชิกของเซต L_Θ แล้ว L^{-1} จะเป็นสมาชิกของเซตด้วย

4. ถ้าเมทริกซ์การสเกล L_1 และ L_2 เป็นสมาชิกของเซต L_{Θ} แล้ว $L_1 L_2 \Theta = \Theta L_1 L_2$ สำหรับทุกๆ $\Theta \in \bar{\Theta}$

5. เซต L_{Θ} เป็นเซตย่อยแบบคอนเวกซ์

เนื่องจากเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์การสเกลหาค่าได้ (เพราะว่า $L > 0$) ดังนั้นเราสามารถแทรกเมทริกซ์การสเกล $L^{\frac{1}{2}}$ และเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์การสเกล $L^{-\frac{1}{2}}$ เข้าไปยังระบบ โดยไม่ทำให้เสถียรภาพของระบบเปลี่ยนไป ดังบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ ข.4



รูปที่ ข.4: บล็อกไดอะแกรมเมื่อมีเมทริกซ์การสเกล

เมื่อแทรกเมทริกซ์ $L^{\frac{1}{2}}$ และ $L^{-\frac{1}{2}}$ แล้ว ขนาดของ $L^{-\frac{1}{2}}\Theta(s)L^{\frac{1}{2}}$ ยังคงเท่าเดิม เนื่องจากเมทริกซ์ $L^{\frac{1}{2}}$ และ $\Theta(s)$ สามารถสลับที่กันได้ ทำให้ $L^{\frac{1}{2}}\Theta(s)L^{-\frac{1}{2}} = \Theta(s)L^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}} = \Theta(s)$ นั่นเอง เป็นผลให้เงื่อนไขเสถียรภาพสำหรับระบบดังรูปที่ ข.3 เปลี่ยนไป นั่นคือสำหรับระบบที่มีตัวแปรกำหนด $\Theta(s)$ ที่มีขนาดน้อยกว่า (น้อยกว่าหรือเท่ากับ) $1/\gamma$ ระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพถ้า $\|L^{\frac{1}{2}}P(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty}$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ (น้อยกว่า) γ ซึ่งได้เป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ข.2 สำหรับตัวแปรกำหนดแบบมีโครงสร้าง $\Theta(s) \in \bar{\Theta}$ ที่มีเสถียรภาพและ $\|\Theta(s)\|_{\infty} \leq 1/\gamma$ และระบบ $P(s)$ ที่มีเสถียรภาพ ระบบวงปิดดังรูปที่ ข.3 จะมีเสถียรภาพภายในสำหรับ $\Theta(s)$ ทุกๆ ตัวที่มีเสถียรภาพ โดยที่

$$\text{ก. } \|\Theta(s)\|_{\infty} \leq 1/\gamma \quad \text{ถ้า} \quad \|L^{\frac{1}{2}}P(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma$$

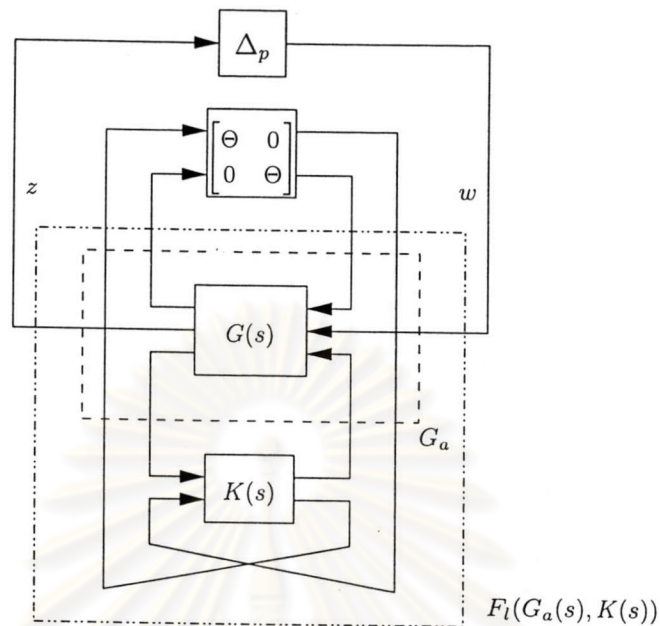
$$\text{ข. } \|\Theta(s)\|_{\infty} < 1/\gamma \quad \text{ถ้า} \quad \|L^{\frac{1}{2}}P(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} \leq \gamma$$

โดย $L \in L_{\Theta}$ เป็นเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับ $\Theta \in \bar{\Theta}$

พิสูจน์ หาได้ใน [16] หน้า 309–311 และ [17] หน้า 246–247 □

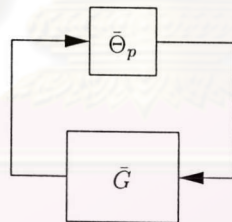
ข.2.2 เงื่อนไขสมรรถนะคงทน

การออกแบบตัวควบคุมนอกจากต้องการให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพแล้ว ระบบยังต้องมีสมรรถนะที่ดีด้วย การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบสามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้เลือกการลดผลของสัญญาณเข้าภายนอก w ต่อสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม z โดยวัดจากนอร์มเหนี่ยวนำ (induced norm) ของระบบวงปิดจากสัญญาณเข้าภายนอกไปยังสัญญาณออกที่ต้องการควบคุมให้มีค่าน้อยกว่าค่าหนึ่ง สมรรถนะนี้สามารถพิจารณาเป็นการเพิ่มความไม่แน่นอนแบบไม่มีโครงสร้าง Δ_p ที่สัญญาณเข้าภายนอกและสัญญาณออกที่ต้องการควบคุมได้ [16, หน้า 322–325] ดังรูปที่ ข.5



รูปที่ ข.5: ระบบวงจรถัดเมื่อเพิ่มเงื่อนไขสมรรถนะคงทน

จากรูปที่ ข.5 เมื่อรวมตัวแปรกำหนดและความไม่แน่นอนจากเงื่อนไขสมรรถนะคงทนเข้าด้วยกันดังรูปที่ ข.6



รูปที่ ข.6: ระบบวงจรถัดเมื่อรวมตัวแปรกำหนดและความไม่แน่นอนจากเงื่อนไขสมรรถนะคงทน

การหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน จะเป็นปัญหาการหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบที่มีความไม่แน่นอนแบบมีโครงสร้างมีเสถียรภาพเช่นเดียวกับหัวข้อที่แล้ว โดยโครงสร้างของความไม่แน่นอนเปลี่ยนไปเล็กน้อยดังนี้

$$\bar{\Theta}_p \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{bmatrix} : \Theta \in \bar{\Theta} \text{ และ } \Delta_p(t) \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\} \quad (\text{ข.11})$$

และเซตเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับเซตของความไม่แน่นอน $\bar{\Theta}_p$ คือ

$$L_{\bar{\Theta}_p} = \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 \\ L_2^T & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} : L_1, L_3 \in L_{\bar{\Theta}} \text{ และ } L_2 \Theta = \Theta L_2 \right\} \quad (\text{ข.12})$$

ข.3 การแปลงปัญหาไปสู่สมการเมทริกซ์

จากหัวข้อที่แล้ว การหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดดังรูปที่ ข.1 มีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน จะสอดคล้องกับการหาตัวควบคุมที่ทำให้

$$\|L^{\frac{1}{2}}\bar{G}(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma \quad (\text{ข.13})$$

โดยที่ $L \in L_{\bar{\Theta}_p}$

อสมการนี้ต้องคำนวณขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนตลอดช่วงความถี่เพื่อหาขนาดที่สูงที่สุด ขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนขึ้นอยู่กับตัวควบคุมและเมทริกซ์การสเกล การแก้ปัญหาดังกล่าวจึงไม่่ง่ายนัก บทตั้งค่าจริงมีขอบเขต (Bounded Real Lemma) ที่จะกล่าวต่อไปนี้ แสดงอสมการเมทริกซ์ที่สมมูลกับปัญหานอร์มอนันต์นี้

บทตั้ง ข.1 สำหรับตัวแปรกำหนดใดๆ ที่มีโครงสร้าง $\bar{\Theta}_p$ ที่สอดคล้องกับเซตของเมทริกซ์การสเกล $L_{\bar{\Theta}_p}$ และระบบวงปิดที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $\bar{G}(s) = D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ จะได้ว่าประโยคต่อไปนี้เป็นสมมูลกัน

ก. A_{cl} มีเสถียรภาพและมี $L \in L_{\bar{\Theta}_p}$ ที่ทำให้ $\|L^{\frac{1}{2}}\bar{G}(s)L^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < \gamma$

ข. มีเมทริกซ์บวกแน่นอน P และ $L \in L_{\bar{\Theta}_p}$ ที่สอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma L & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{ข.14})$$

พิสูจน์ หาได้ใน [4] และ [17] หน้า 248–249 □

จากบทตั้งนี้ ปัญหาการหามอร์มอนันต์ของฟังก์ชันถ่ายโอนได้เปลี่ยนไปเป็นการหาเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite matrix) 2 เมทริกซ์คือเมทริกซ์ P และเมทริกซ์ $L \in L_{\bar{\Theta}_p}$ ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์อสมการหนึ่ง แต่อสมการเมทริกซ์นี้ยังไม่เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เนื่องจากมีทั้ง L และ L^{-1} อยู่ในอสมการ (ยกเว้นในกรณีที่ตัวแปรกำหนดไม่มีโครงสร้าง เมทริกซ์ L และ L^{-1} จะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ จึงสามารถตัดตัวแปรนี้ออกไปได้) นอกจากนี้เมทริกซ์ A_{cl} ที่คูณอยู่กับเมทริกซ์ P นั้น มีพารามิเตอร์ของตัวควบคุมซึ่งเป็นตัวแปรของอสมการรวมอยู่ด้วย ในที่นี้จะใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรในการเปลี่ยนอสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ข.3.1 แบ่งเมทริกซ์และนิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน

พารามิเตอร์ของระบบวงปิด A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} และ D_{cl} เป็นดังนี้

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_{k11} C_2 & B_2 C_{k1} \\ B_{k1} C_2 & A_k \end{bmatrix} \quad (ข.15)$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_2 D_{k1\theta} & B_\theta + B_2 D_{k11} D_{2\theta} & B_1 + B_2 D_{k11} D_{21} \\ B_{k\theta} & B_{k1} D_{2\theta} & B_{k1} D_{21} \end{bmatrix} \quad (ข.16)$$

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} D_{k\theta 1} C_2 & C_{k\theta} \\ C_\theta + D_{\theta 2} D_{k11} C_2 & D_{\theta 2} C_{k1} \\ C_1 + D_{12} D_{k11} C_2 & D_{12} C_{k1} \end{bmatrix} \quad (ข.17)$$

$$D_{cl} = \begin{bmatrix} D_{k\theta\theta} & D_{k\theta 1} D_{2\theta} & D_{k\theta 1} D_{21} \\ D_{\theta 2} D_{k1\theta} & D_{\theta\theta} + D_{\theta 2} D_{k11} D_{2\theta} & D_{\theta 1} + D_{\theta 2} D_{k11} D_{21} \\ D_{12} D_{k1\theta} & D_{1\theta} + D_{12} D_{k11} D_{2\theta} & D_{11} + D_{12} D_{k11} D_{21} \end{bmatrix} \quad (ข.18)$$

ซึ่งจะพบว่า A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} , และ D_{cl} เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของพารามิเตอร์ของตัวควบคุม แบ่งเมทริกซ์ P , P^{-1} , L , และ L^{-1} ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \bar{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \bar{X} \end{bmatrix} \quad (ข.19)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 \\ L_2^T & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 \\ J_2^T & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (ข.20)$$

โดยที่ $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$ และ $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร (symmetric, positive definite matrix)

$L_3 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และ $J_3 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร

$M \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ และ $N \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม (full-column-rank matrix)

$L_2 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และ $J_2 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็ม (full-row-rank matrix)

กำหนดให้

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ I & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \hat{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \\ L_3 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

ซึ่งได้ความสัมพันธ์ระหว่าง P , P^{-1} , Π_1 และ $\hat{\Pi}_1$ ดังนี้

$$P \Pi_1 = \hat{\Pi}_1 \quad \text{หรือ} \quad P^{-1} \hat{\Pi}_1 = \Pi_1$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง L , L^{-1} , Π_2 และ $\hat{\Pi}_2$ เป็นดังนี้

$$L \Pi_2 = \hat{\Pi}_2 \quad \text{หรือ} \quad L^{-1} \hat{\Pi}_2 = \Pi_2$$

นิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน T ดังนี้

$$T = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Pi}_2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ M และ N เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม และเมทริกซ์ L_2 และ J_2 เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็ม ดังนั้นจึงสามารถคูณด้านหน้าสมการที่ (ข.14) ด้วยเมทริกซ์ T^T และคูณด้านหลังด้วยเมทริกซ์ T ได้โดยไม่ทำให้เงื่อนไขของสมการเปลี่ยน ซึ่งจะเปลี่ยนจากสมการ (ข.14) ไปเป็นสมการ (ข.23) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma L & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (ข.21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Pi}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma L & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Pi}_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (ข.22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Pi_1^T A_{cl}^T \hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_1^T A_{cl} \Pi_1 & \hat{\Pi}_1^T B_{cl} \Pi_2 & \Pi_1^T C_{cl}^T \hat{\Pi}_2 \\ \Pi_2^T B_{cl} \hat{\Pi}_1 & -\gamma \hat{\Pi}_2^T \Pi_2 & \Pi_2^T D_{cl}^T \hat{\Pi}_2 \\ \hat{\Pi}_2^T C_{cl} \Pi_1 & \hat{\Pi}_2^T D_{cl} \Pi_2 & -\gamma \hat{\Pi}_2^T \Pi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (ข.23)$$

ข.3.2 จัดให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

กำหนดตัวแปรของตัวควบคุมใหม่เป็นดังนี้

$$\hat{A} = Y A X + Y B_2 D_{k11} C_2 X + N B_{k1} C_2 X + Y B_2 C_{k1} M^T + N A_k M^T \quad (ข.24)$$

$$\hat{B}_1 = Y B_2 D_{k11} + N B_{k1} \quad (ข.25)$$

$$\hat{B}_\theta = Y B_2 D_{k1\theta} J_2 + N B_{k\theta} J_2 + Y B_\theta J_3 + Y B_2 D_{k11} D_{2\theta} J_3 + N B_{k1} D_{2\theta} J_3 \quad (ข.26)$$

$$\hat{C}_1 = D_{k11} C_2 X + C_{k1} M^T \quad (ข.27)$$

$$\hat{C}_\theta = L_2^T D_{k\theta 1} C_2 X + L_3 C_\theta X + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} C_2 X + L_2^T C_{k\theta} M^T + L_3 D_{\theta 2} C_{k1} M^T \quad (ข.28)$$

$$\hat{D}_{11} = D_{k11} \quad (ข.29)$$

$$\hat{D}_{1\theta} = D_{k1\theta} J_2 + D_{k11} D_{2\theta} J_3 \quad (ข.30)$$

$$\hat{D}_{\theta 1} = L_2^T D_{k\theta 1} + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} \quad (ข.31)$$

$$\hat{D}_{\theta\theta} = L_2^T D_{k\theta\theta} J_2 + L_3 D_{\theta 2} D_{k1\theta} J_2 + L_2^T D_{k\theta 1} D_{2\theta} J_3 + L_3 D_{\theta\theta} J_3 + L_3 D_{\theta 2} D_{k11} D_{2\theta} J_3 \quad (ข.32)$$

เมื่อคูณกระจายอสมการที่ (ข.23) แล้วแทนค่าด้วยตัวแปรในสมการที่ (ข.24)-(ข.32) จะได้สมการเมทริกซ์เชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} AX + B_2\hat{C}_1 + XA^T + \hat{C}_1^T B_2^T & * & * & * & * & \dots \\ \hat{A} + A^T + C_2^T \hat{D}_{11} B_2^T & YA + \hat{B}_1 C_2 + A^T Y + C_2^T \hat{B}_1^T & * & * & * & \dots \\ (B_\theta + B_2 \hat{D}_{11} D_{2\theta})^T & (\hat{B}_1 D_{2\theta} + Y B_\theta)^T & -\gamma L_3 & * & * & \dots \\ (B_2 \hat{D}_{1\theta} + B_\theta J_3)^T & \hat{B}_\theta^T & -\gamma I & * & -\gamma J_3 & \dots \\ (B_1 + B_2 \hat{D}_{11} D_{21})^T & (\hat{B}_1 D_{21} + Y B_1)^T & 0 & * & 0 & \dots \\ \hat{C}_\theta & \hat{D}_{\theta 1} C_2 + L_3 C_\theta & \hat{D}_{\theta 1} D_{2\theta} + L_3 D_{\theta\theta} & * & \hat{D}_{\theta\theta} & \dots \\ C_\theta X + D_{\theta 2} \hat{C}_1 & C_\theta + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} C_2 & D_{\theta\theta} + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} D_{2\theta} & * & D_{\theta 2} \hat{D}_{1\theta} + D_{\theta\theta} J_3 & \dots \\ C_1 X + D_{12} \hat{C}_1 & C_1 + D_{12} \hat{D}_{11} C_2 & D_{1\theta} + D_{12} \hat{D}_{11} D_{2\theta} & * & D_{12} \hat{D}_{1\theta} + D_{1\theta} J_3 & \dots \\ \dots & * & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & * & \dots \\ \dots & * & * & * & * & \dots \\ \dots & -\gamma I & * & * & * & \dots \\ \dots & \hat{D}_{\theta 1} D_{21} + L_3 D_{\theta 1} & -\gamma L_3 & * & * & \dots \\ \dots & D_{\theta 1} + D_{\theta 2} \hat{D}_{11} D_{21} & -\gamma I & -\gamma J_3 & * & \dots \\ \dots & D_{11} + D_{12} \hat{D}_{11} D_{21} & 0 & 0 & -\gamma I & \dots \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{ข.33})$$

โดยที่ * คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ที่อยู่ตรงข้ามแนวแยง (diagonal)

อสมการที่ (ข.33) เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร $X, Y, L_3, J_3, \hat{A}, \hat{B}_1, \hat{B}_\theta, \hat{C}_1, \hat{C}_\theta, \hat{D}_{11}, \hat{D}_{1\theta}, \hat{D}_{\theta 1}$ และ $\hat{D}_{\theta\theta}$ การแบ่งเมทริกซ์ P, P^{-1}, L และ L^{-1} โดยสามารถกำหนดเมทริกซ์ $X, Y, L_3, J_3, M, N, L_2$ และ J_2 ได้ นั่น เมทริกซ์ X, Y, L_3 และ J_3 จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

บทตั้ง ข.2 จะมีเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$ และ $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$ และเมทริกซ์ M และ $N \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ ที่สอดคล้องกับ

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \bar{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \bar{X} \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์บวกแน่นอน X และ Y สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{ข.34})$$

และเงื่อนไขค่าลำดับชั้น (rank)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_k \quad (\text{ข.35})$$

พิสูจน์ หาได้ใน [17] หน้า 229-230 □

จากบทตั้ง ข.2 เมทริกซ์ P , P^{-1} , L และ L^{-1} จะเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ X , Y , L_3 และ J_3 สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและเงื่อนไขค่าลำดับชั้นต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{ข.36})$$

$$\begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{ข.37})$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_k \quad (\text{ข.38})$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix} \leq n_\theta + n_\theta \quad (\text{ข.39})$$

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในอสมการที่ (ข.37) นั้นสามารถละทิ้งได้ เนื่องจากเมทริกซ์ในอสมการที่ (ข.33) ต้องเป็นเมทริกซ์ลบแน่นอน (negative definite matrix) ดังนั้นกลุ่มเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่อยู่มุมขวาล่างของเมทริกซ์นั้นจะต้องเป็นเมทริกซ์ลบแน่นอนด้วย นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} -\gamma L_3 & -\gamma I & 0 \\ -\gamma I & -\gamma J_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} \gamma L_3 & \gamma I & 0 \\ \gamma I & \gamma J_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{ข.40})$$

ซึ่งแสดงว่าเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix}$ ต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนเสมอ ดังนั้นอสมการที่ (ข.37) จึงสามารถละทิ้งได้

นอกจากอสมการที่ (ข.37) แล้ว เงื่อนไขค่าลำดับชั้นในอสมการที่ (ข.39) ก็สามารถละทิ้งได้ เนื่องจากเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix}$ มีขนาด $(n_\theta + n_\theta) \times (n_\theta + n_\theta)$ ดังนั้นเงื่อนไขค่าลำดับชั้นจึงเป็นจริงเสมอ

ส่วนเงื่อนไขค่าลำดับชั้นในอสมการที่ (ข.38) ไม่สามารถละทิ้งได้ จึงใช้เป็นเงื่อนไขกำหนดอันดับของตัวควบคุมดังนี้

จากอสมการที่ (ข.38) เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ จะต้องเป็นเมทริกซ์บวกกึ่งแน่นอน (positive semi-definite) และโดยการประยุกต์ใช้บทตั้งที่ ก.1 เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์บวกกึ่งแน่นอน ก็ต่อเมื่อ

$$X \geq 0 \quad \text{และ} \quad X - Y^{-1} \geq 0$$

เนื่องจากเมทริกซ์ X ต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ดังนั้นเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์บวกกึ่งแน่นอนก็ต่อเมื่อ

$$X - Y^{-1} \geq 0$$

$$XY - I \geq 0$$

$$I - XY \leq 0$$

เมื่อเมทริกซ์ X เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนซึ่งจะมีค่าลำดับชั้นเท่ากับ n เสมอ ดังนั้นเพื่อให้ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$ มีค่าน้อยกว่า $n + n_k$ เมทริกซ์ $I - XY$ ต้องมีค่าลำดับชั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับ n_k นั่นคือ

$$\text{rank}(I - XY) \leq n_k \quad (\text{ข.41})$$

เนื่องจากเงื่อนไขค่าลำดับชั้นไม่เป็นเงื่อนไขคอนเวกซ์ จึงกำหนดให้อันดับของตัวควบคุมมีค่าเท่ากับค่าลำดับชั้นของ $I - XY$ ซึ่งจะทำให้สามารถกำจัดเงื่อนไขค่าลำดับชั้นออกไปได้ และเมื่อรวมสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในอสมการที่ (ข.33) และ (ข.36) จะได้เป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ข.3 สำหรับระบบดังสมการที่ (ข.2) ที่ตัวแปรกำหนดมีโครงสร้างดังสมการที่ (ข.3) กำหนดให้เซตของเมทริกซ์การสเกลเป็นดังสมการที่ (ข.10) จะมีตัวควบคุมที่เปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ตามพลานด์์ที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน ถ้ามีเมทริกซ์ $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$, $\hat{B}_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n_\theta}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $\hat{C}_\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$, $\hat{D}_{11} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_v}$, $\hat{D}_{1\theta} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\theta}$, $\hat{D}_{\theta 1} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_v}$, $\hat{D}_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และมีเมทริกซ์บวกแน่นอน $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_3 \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และ $J_3 \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ ที่สอดคล้องกับอสมการที่ (ข.33) และ (ข.36) และตัวควบคุมที่ได้จะมีอันดับเท่ากับ $\text{rank}(I - XY)$

พิสูจน์ ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น □

ข.3.3 แปลงตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม

เมื่อแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในทฤษฎีบท ข.3 แล้ว จะได้ค่าของเมทริกซ์บวกแน่นอน X , Y , L_3 และ J_3 และตัวแปรที่กำหนดขึ้นมาใหม่ \hat{A} , \hat{B}_1 , \hat{B}_θ , \hat{C}_1 , \hat{C}_θ , \hat{D}_{11} , $\hat{D}_{1\theta}$, $\hat{D}_{\theta 1}$ และ $\hat{D}_{\theta\theta}$ ซึ่งแปลงมาจากพารามิเตอร์ของตัวควบคุม ทั้งนี้ยังขาดตัวแปรอีก 4 ตัวที่จำเป็นต้องใช้ในการหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม คือเมทริกซ์ M , N , L_2 และ J_2 ซึ่งมีขั้นตอนการหาค่าดังนี้

1. เนื่องจากเมทริกซ์ PP^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังนั้นเมทริกซ์ที่ตำแหน่ง (1,1) ของเมทริกซ์ PP^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ด้วย ซึ่งจะได้ว่า

$$YX + NM^T = I \quad \text{หรือ} \quad NM^T = I - YX$$

และจากที่กำหนดให้เมทริกซ์ M และ N เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม ดังนั้นเมทริกซ์ M และ N หาได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐาน (singular value decomposition, SVD) ของ $I - YX$

2. ในทำนองเดียวกัน เมทริกซ์ที่ตำแหน่ง (2,2) ของเมทริกซ์ LL^{-1} ต้องมีค่าเท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ

$$L_2^T J_2 + L_3 J_3 = I \quad \text{หรือ} \quad L_2^T J_2 = I - L_3 J_3$$

และจากที่กำหนดให้เมทริกซ์ L_2 และ J_2 เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็ม ดังนั้นเมทริกซ์ L_2 และ J_2 จะหาได้จากการแยกย่อยค่าเอกฐานของ $I - L_3 J_3$

ข้อสังเกต เมทริกซ์ L_2 และ J_2 จะเป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็มเสมอ เนื่องจากเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} J_3 & I \\ I & L_3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน และเมื่อใช้บทตั้งที่ ก.1 เมทริกซ์ $I - L_3 J_3$ ต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนด้วย ดังนั้นค่าลำดับชั้นของ $I - L_3 J_3$ จึงเท่ากับ n_θ เสมอ จึงสามารถหาเมทริกซ์ L_2 และ J_2 ที่เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็มได้

เมื่อหาตัวแปรต่างๆ ได้ครบแล้ว พารามิเตอร์ของตัวควบคุมจะเป็นดังนี้

$$D_{k11} = \hat{D}_{11} \quad (\text{ข.42})$$

$$D_{k1\theta} = (\hat{D}_{1\theta} - D_{k11} D_{2\theta} J_3) J_2^{-R} \quad (\text{ข.43})$$

$$D_{k\theta 1} = (L_2^{-R})^T (\hat{D}_{\theta 1} - L_3 D_{\theta 2} D_{k11}) \quad (\text{ข.44})$$

$$C_{k1} = (\hat{C}_1 - D_{k11} C_2 X) (M^{-L})^T \quad (\text{ข.45})$$

$$C_{k\theta} = (L_2^{-R})^T (\hat{C}_\theta - L_2^T D_{k\theta 1} C_2 X - L_3 C_\theta X - L_3 D_{\theta 2} D_{k11} C_2 X - L_3 D_{\theta 2} C_{k1} M^T) (M^{-L})^T \quad (\text{ข.46})$$

$$B_{k1} = N^{-L} (\hat{B}_1 - Y B_2 D_{k11}) \quad (\text{ข.47})$$

$$B_{k\theta} = N^{-L} (\hat{B}_\theta - Y B_2 D_{k1\theta} J_2 - Y B_\theta J_3 - Y B_2 D_{k11} D_{2\theta} J_3 - N B_{k1} D_{2\theta} J_3) J_2^{-R} \quad (\text{ข.48})$$

$$A_k = N^{-L} (\hat{A} - Y A X - Y B_2 D_{k11} C_2 X - N B_{k1} C_2 X - Y B_2 C_{k1} M^T) (M^{-L})^T \quad (\text{ข.49})$$

โดยที่ $(M^{-L})^T = M (M^T M)^{-1}$ และ $N^{-L} = (N^T N)^{-1} N^T$ เป็นเมทริกซ์ผกผันเทียบทางซ้าย

$J_2^{-R} = J_2^T (J_2 J_2^T)^{-1}$ และ $(L_2^{-R})^T = (L_2 L_2^T)^{-1} L_2$ เป็นเมทริกซ์ผกผันเทียบทางขวา

ข.4 ตัวอย่างการออกแบบ

ในหัวข้อนี้แสดงตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตีสำหรับระบบอันดับหนึ่ง เพื่อเปรียบเทียบลักษณะของผลตอบสำหรับตัวแปรกำหนดแบบต่างๆ และเปรียบเทียบผลการควบคุมระหว่างตัวควบคุมเอชอินฟินิตีที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด และตัวควบคุมเอชอินฟินิตีที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ดังกล่าวไว้ข้างต้น วัตถุประสงค์ของตัวควบคุมในที่นี่ต้องการให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเท่านั้น และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกันได้ ตัวควบคุมทั้งหมดต้องทำให้สมรรถนะเอชทูมีค่าน้อยที่สุดด้วย วิธีการออกแบบตัวควบคุมเอชทูมีหลายวิธี ในที่นี่เลือกใช้วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เนื่องจากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นหลายๆ อสมการ สามารถยุบรวมเหลือเพียงอสมการเดียวได้ การวางปัญหาให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรดังบทความ [11]

ข.4.1 ผลของตัวแปรกำหนด

ระบบอันดับหนึ่งที่เลือกใช้มีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + \theta(t)x(t) + u(t) \quad (\text{ข.50})$$

เขียนให้อยู่ในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= -0.5x(t) + w_\theta(t) + u(t) \\
 z_\infty(t) &= x(t) - w(t) \\
 z_2(t) &= \begin{bmatrix} x(t) - w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\
 y(t) &= x(t) \\
 w_\theta(t) &= \theta(t)z_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{ข.51}$$

โดยที่ $z_\infty(t)$ เป็นสัญญาณออกที่ต้องการให้แอมพลิจูดของ T_{zw} มีค่าน้อยกว่า γ และ $z_2(t)$ เป็นสัญญาณออกที่ต้องการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเชชทุ เนื่องจากต้องการพิจารณาเพียงเสถียรภาพของระบบ ดังนั้นสัญญาณเข้าภายนอก $w(t)$ จึงมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อคำนวณตามทฤษฎีบทที่ ข.3 และเพิ่มเงื่อนไขเชชทุในบทความที่ [11] เมื่อเลือกค่า $\gamma = 2$ ได้ตัวควบคุมดังนี้

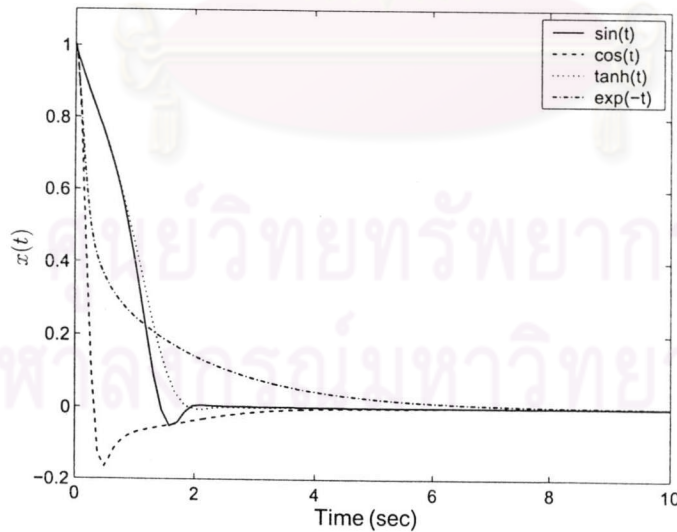
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_k(t) &= -98.26x_k(t) + 23.73y(t) - 19.69\tilde{w}_\theta(t) \\
 u(t) &= 0.0001x_k(t) - 0.09y(t) + 0.40\tilde{w}_\theta(t) \\
 \dot{z}_\theta(t) &= 5.36x_k(t) - 0.34y(t) - 0.13\tilde{w}_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{ข.52}$$

และ

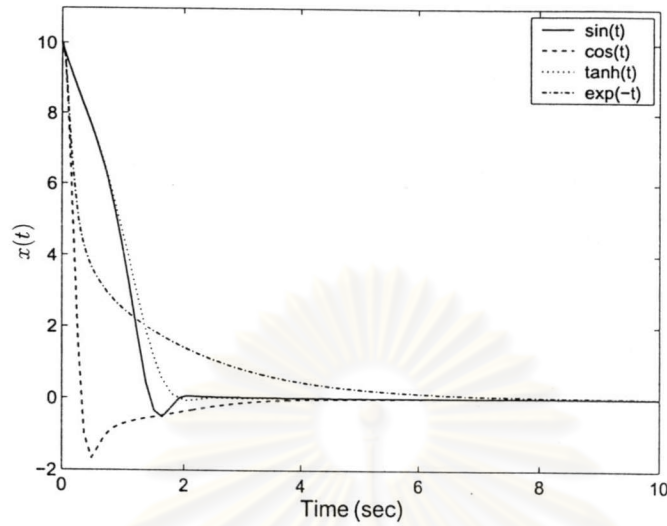
$$\tilde{w}_\theta(t) = \theta(t)\tilde{z}_\theta(t) \tag{ข.53}$$

เมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีขอบเขต

ฟังก์ชันที่เลือกใช้ในที่นี้ ได้แก่ $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\tanh(t)$ และ e^{-t}



รูปที่ ข.7: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีขอบเขต เมื่อ $x_0 = 1$

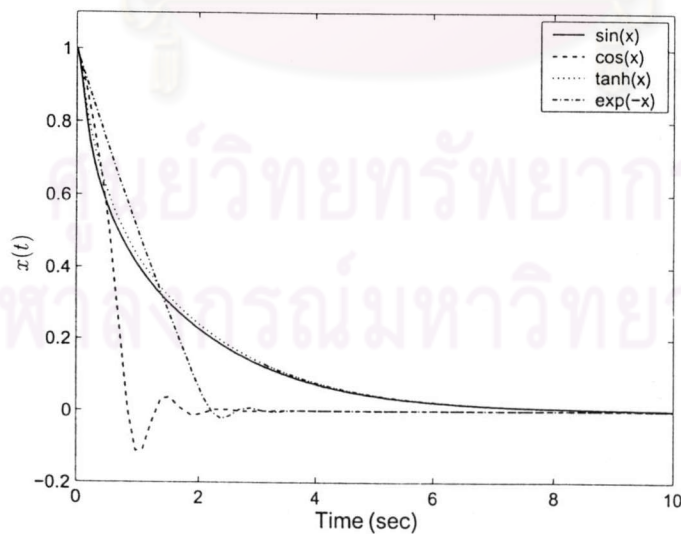


รูปที่ ข.8: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีขอบเขต เมื่อ $x_0 = 10$

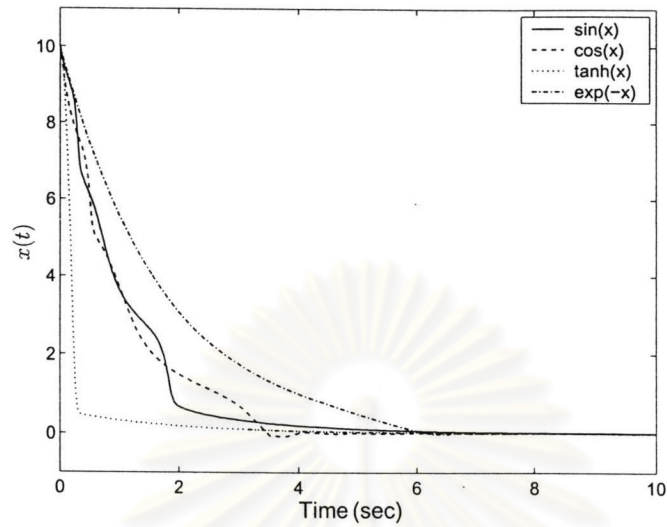
จากรูปที่ ข.7 และ ข.8 พบว่าตัวควบคุมนี้สามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้ไม่ว่าค่าสถานะเริ่มต้นจะเป็นเท่าใดก็ตาม นอกจากนี้ในกรณี $\theta(t) = \sin(t)$ และ $\theta(t) = \cos(t)$ ถึงแม้ว่าค่าพารามิเตอร์มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา แต่ผลตอบเมื่อเวลาเข้าใกล้อนันต์ก็ไม่ได้แกว่งตามพารามิเตอร์ของระบบ

เมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ $x(t)$ ที่มีขอบเขต

ฟังก์ชันที่เลือกใช้ในที่นี้ ได้แก่ $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tanh(x)$ และ e^{-x}



รูปที่ ข.9: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะที่มีขอบเขต เมื่อ $x_0 = 1$

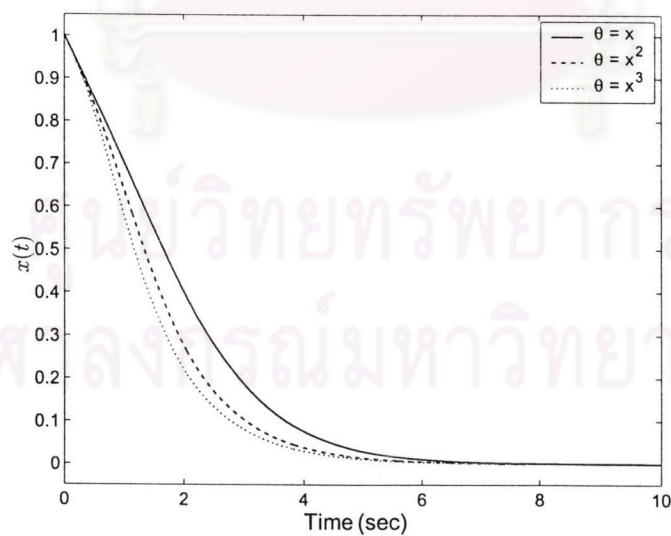


รูปที่ ข.10: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะที่มีขอบเขต เมื่อ $x_0 = 10$

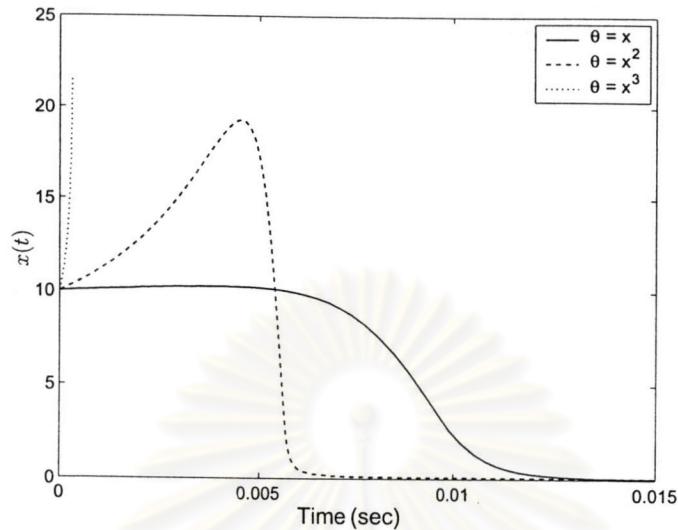
จากรูปที่ ข.9 และ ข.10 พบว่าตัวควบคุมนี้สามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้ไม่ว่าค่าสถานะเริ่มต้นจะเป็นเท่าใดก็ตาม

เมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ $x(t)$ ที่ไม่มีขอบเขต

ฟังก์ชันที่เลือกใช้ในที่นี้ ได้แก่ $x(t)$, $x^2(t)$, และ $x^3(t)$



รูปที่ ข.11: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ เมื่อ $x_0 = 1$



รูปที่ ข.12: ผลตอบเมื่อ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ เมื่อ $x_0 = 10$

จากรูปที่ ข.11 ผลตอบเข้าสู่ศูนย์ทุกตัวแปรกำหนด แสดงว่าตัวควบคุมนี้สามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้ แต่ในรูปที่ ข.12 ผลตอบมีเสถียรภาพในกรณีที่ $\theta = x$ และ $\theta = x^2$ ส่วนในกรณีที่ $\theta = x^3$ ระบบไม่มีเสถียรภาพ และในกรณีที่ $\theta = x^2$ นั้น ผลตอบมีส่วนพุ่งเกินที่สูงมาก เมื่อค่าสถานะเริ่มต้นขนาดใหญ่ขึ้นระบบก็อาจจะไม่มีเสถียรภาพได้ แสดงว่าในกรณีที่ตัวแปรกำหนดเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสถานะที่ไม่มีขอบเขต ตัวควบคุมนี้สามารถทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้ในเวลาที่จำกัดที่ค่าสถานะเริ่มต้นมีค่าน้อยๆ

ข.4.2 ผลของตัวควบคุมแบบต่างๆ

ระบบอันดับหนึ่งที่เลือกใช้มีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + \sin(x(t))x(t) + u(t) \quad (\text{ข.54})$$

เขียนให้อยู่ในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -0.5x(t) + w_\theta(t) + u(t) \\ z_\infty(t) &= x(t) - w(t) \\ z_2(t) &= \begin{bmatrix} x(t) - w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x(t) \\ w_\theta(t) &= \theta(t)z_\theta(t) \end{aligned} \quad (\text{ข.55})$$

ตัวควบคุมที่ใช้เปรียบเทียบ คือ ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด และตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ สำหรับการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ จะพิจารณาให้ $\theta(t)$ เป็นความไม่แน่นอนของ

ระบบ และเลือกค่า $\gamma = 2$ เท่ากับกรณีของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ดัชนีสมรรถนะในการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็นดังนี้

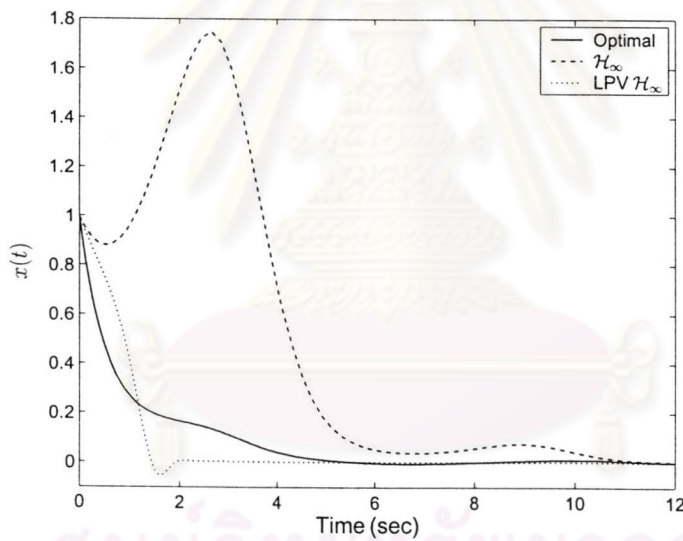
$$J = \int_0^{\infty} x^2(t) + u^2(t) dt \quad (\text{ข.56})$$

สัญญาณควบคุมในกรณีของตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดเป็นฟังก์ชันของเวลาที่ได้จากการคำนวณ และมีค่าขึ้นอยู่กับค่าสถานะเริ่มต้น ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์เป็นดังสมการที่ (ข.52) ส่วนตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$\dot{x}_k = -711.33x_k + 0.27y$$

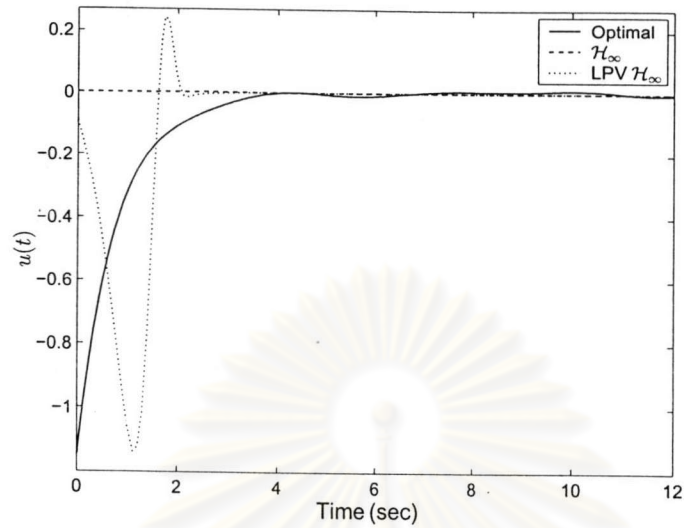
$$u = 0.0023x_k + 0.0015y$$

ผลการควบคุมเมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $x_0 = 1$ เป็นรูปที่ ข.13 และสัญญาณควบคุมเป็นดังรูปที่ ข.14 เนื่องจากสัญญาณควบคุมในกรณีตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้มีขนาดเล็กมาก จึงแสดงไว้ในรูปที่ ข.15

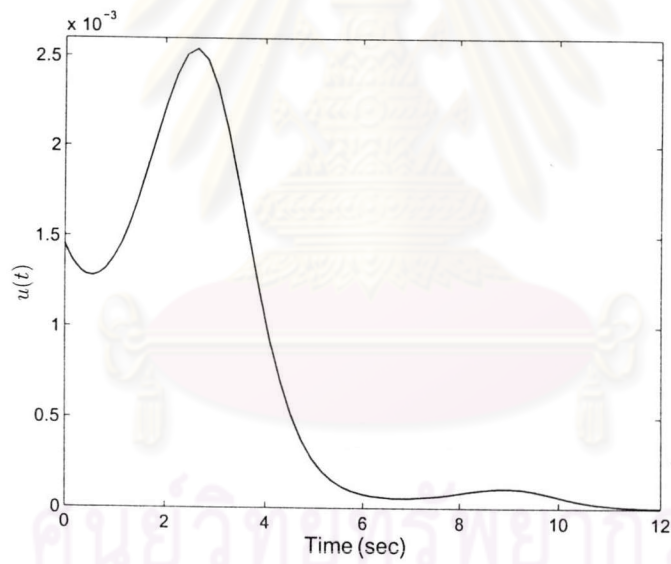


รูปที่ ข.13: ตัวแปรสถานะ เมื่อ $x_0 = 1$

ศูนย์วิจัยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

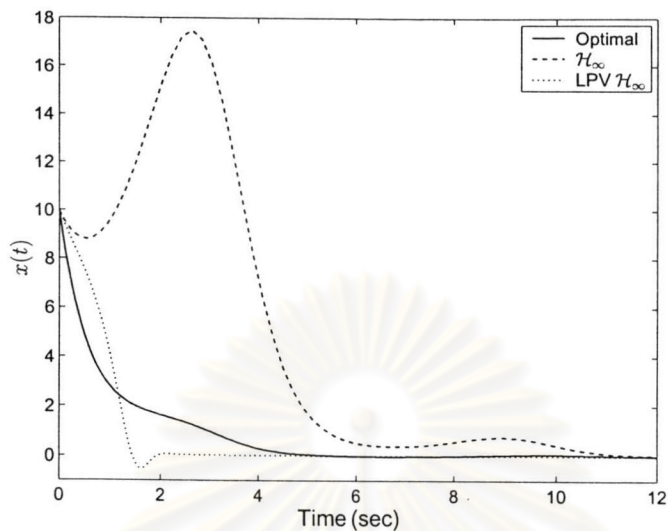


รูปที่ ข.14: สัญญาณควบคุม เมื่อ $x_0 = 1$

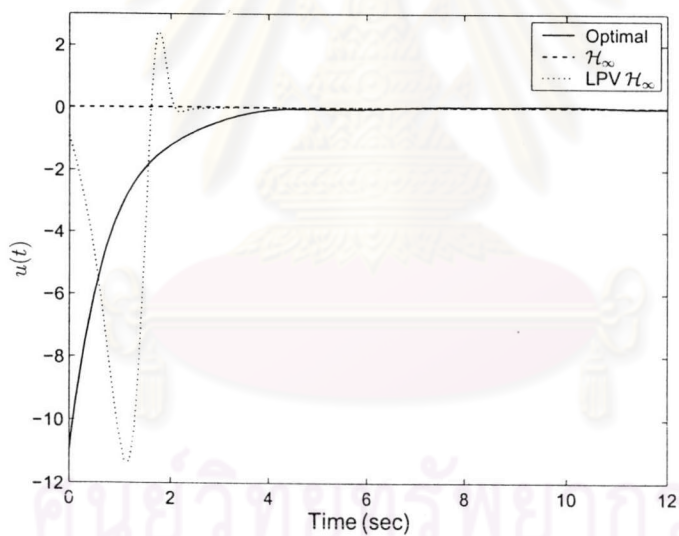


รูปที่ ข.15: สัญญาณควบคุมกรณีตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ เมื่อ $x_0 = 1$

รูปที่ ข.16 และรูปที่ ข.17 เป็นผลการควบคุมเมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $x_0 = 10$ รูปที่ ข.18 เป็นสัญญาณควบคุมกรณีตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์

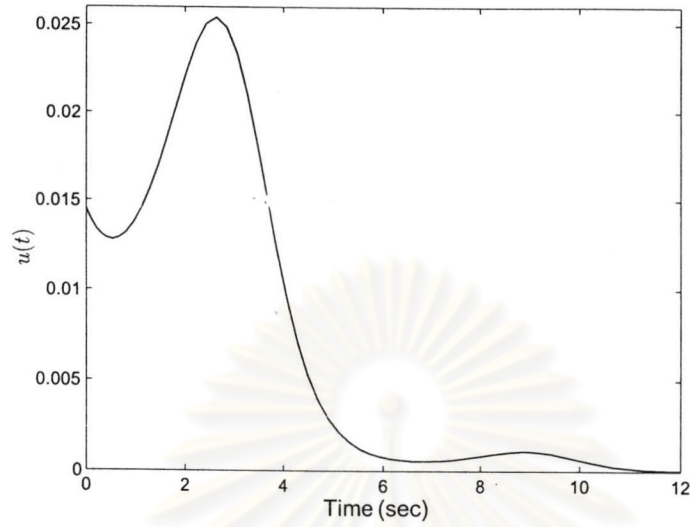


รูปที่ ข.16: ตัวแปรสถานะ เมื่อ $x_0 = 10$

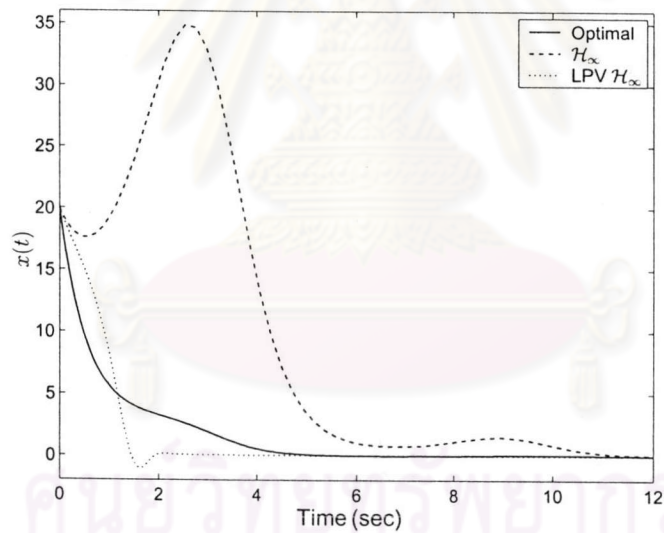


รูปที่ ข.17: สัญญาณควบคุม เมื่อ $x_0 = 10$

รูปที่ ข.19 และ ข.20 เป็นผลการควบคุมเมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $x_0 = 20$ รูปที่ ข.21 เป็นสัญญาณควบคุมกรณีตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์



รูปที่ ข.18: สัญญาณควบคุมของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ เมื่อ $x_0 = 10$

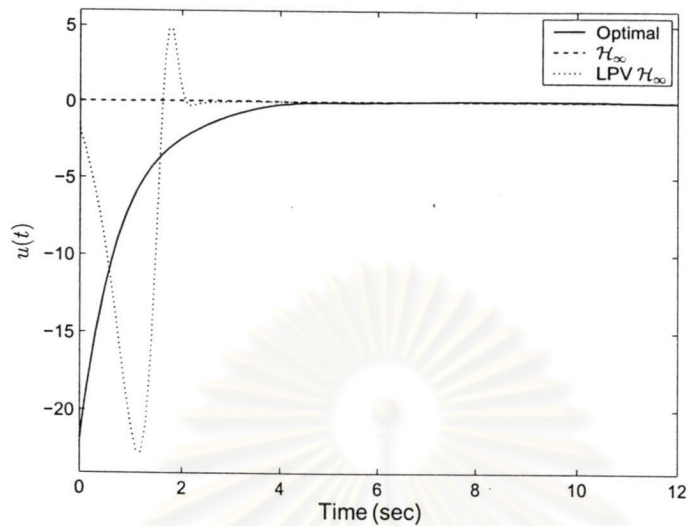


รูปที่ ข.19: ตัวแปรสถานะ เมื่อ $x_0 = 20$

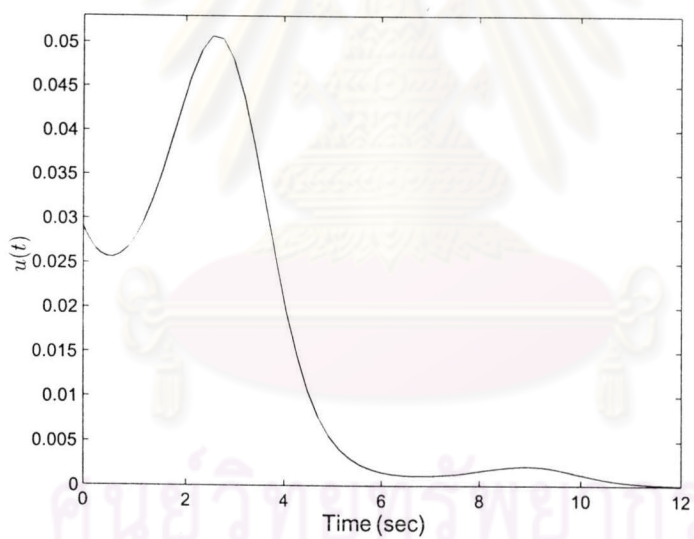
การหาค่าดัชนีสมรรถนะที่แน่นอนของผลตอบแต่ละผลตอบทำได้ยาก จึงหาค่าประมาณแทน โดยใช้ดัชนีสมรรถนะเป็นดังนี้

$$J = \int_0^{10} x^2(t) + u^2(t) dt$$

ได้ค่าดัชนีสมรรถนะของตัวควบคุมต่างๆ ที่ค่าสถานะต่างกันเป็นดังตารางที่ ข.1



รูปที่ ข.20: สัญญาณควบคุม เมื่อ $x_0 = 20$



รูปที่ ข.21: สัญญาณควบคุมของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ เมื่อ $x_0 = 20$

ตารางที่ ข.1: ดัชนีสมรรถนะของตัวควบคุมต่างๆ

ตัวควบคุม	$x_0 = 1$	$x_0 = 10$	$x_0 = 20$
optimal controller	0.9571	94.9081	379.4798
\mathcal{H}_∞ controller	6.8786	687.8722	2751.1
LPV \mathcal{H}_∞ controller	1.4380	143.8327	575.1490

จากตารางที่ ข.1 หากใช้ค่าดัชนีสมรรถนะเป็นเกณฑ์ จะพบว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ สามารถควบคุมระบบได้ดีกว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้มาก และให้ค่าดัชนีสมรรถนะแตกต่างกับตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดไม่มากนัก ซึ่งเป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมนั่นเอง จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า เราสามารถใช้ประโยชน์จากการวัดค่าได้ของตัวแปรกำหนด โดยเปลี่ยนพารามิเตอร์ของตัวควบคุมตามตัวแปรกำหนดนั้น เพื่อให้ได้ผลตอบที่มีสมรรถนะที่ดีขึ้น

ข.5 สรุป

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ สามารถใช้วิธีออกแบบเช่นเดียวกับระบบที่มีความไม่แน่นอน เมื่อเราเลือกใช้ตัวควบคุมที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ ระบบวงปิดจะเสมือนเป็นระบบที่มีความไม่แน่นอนแบบมีโครงสร้าง การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ต้องใช้เมทริกซ์การสเกลมาลดความอนุรักษ์ ถึงแม้ว่าการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีเมทริกซ์การสเกลโดยทั่วไป ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ แต่ในกรณีนี้ เราสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ การแปลงปัญหาการหาตัวควบคุมไปสู่วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถทำได้ 2 วิธีดังที่กล่าวไว้ในภาคผนวก ก ในที่นี้เลือกวิธีเปลี่ยนตัวแปร โดยเริ่มจากแบ่งเมทริกซ์ นิยามเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน จักรูปอสมการและกำหนดตัวแปรใหม่แทนตัวแปรของตัวควบคุม อสมการเมทริกซ์ที่ได้จะเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ศูนย์วิทยพัทยาการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ของระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ

ระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ เป็นระบบที่ต้องการควบคุมให้ลูกตุ้มผกผันอยู่ในแนวตั้งตรง โดยปลายด้านหนึ่งของลูกตุ้มผกผันนี้ยึดติดอยู่กับรถ และอาศัยการเคลื่อนที่ของรถเพื่อพยุงไม่ให้ลูกตุ้มผกผันออกจากแนวตั้งตรง ระบบลูกตุ้มผกผันบนรถมีลักษณะดังรูปที่ ค.1 มีแบบจำลอง [20] เป็นดังนี้

$$\ddot{\phi} = \frac{-F \cos \phi - m l \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + (M + m)g \sin \phi}{l [M + m(1 - \cos^2 \phi)]} \quad (\text{ค.1})$$

$$\ddot{x} = \frac{F + m l \dot{\phi}^2 \sin \phi - m g \sin \phi \cos \phi}{M + m(1 - \cos^2 \phi)} \quad (\text{ค.2})$$

โดยที่ ϕ คือมุมที่เบี่ยงเบนไปจากแนวตั้งของลูกตุ้มผกผัน มีหน่วยเป็น rad

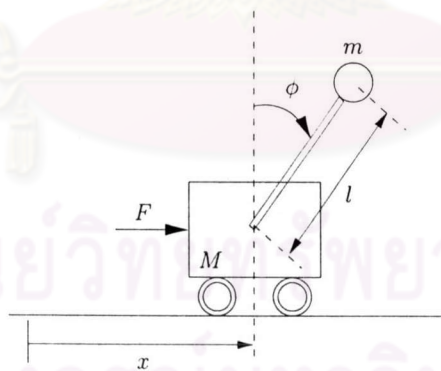
x คือระยะที่รถเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็น m

F คือแรงที่กระทำกับรถ มีหน่วยเป็น N·m

M คือมวลของรถ มีหน่วยเป็น kg

m คือมวลของลูกตุ้มผกผัน มีหน่วยเป็น kg

l คือความยาวของลูกตุ้มผกผัน มีหน่วยเป็น m



รูปที่ ค.1: ระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ

เมื่อกำหนดให้ $M = 0.5$ kg, $m = 0.1$ kg, $l = 0.2$ m แบบจำลองไม่เชิงเส้นของระบบลูกตุ้มผกผันเป็นดังสมการที่ (ค.3) และ (ค.4)

$$\ddot{\phi} = \frac{-F \cos \phi - 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + 5.88 \sin \phi}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi} \quad (\text{ค.3})$$

$$\ddot{x} = \frac{F + 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi - 0.98 \sin \phi \cos \phi}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} \quad (\text{ค.4})$$

การหาแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์แยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่เกี่ยวกับมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มผกผันในสมการที่ (ค.3) และส่วนที่เกี่ยวกับระยะทางที่รถเคลื่อนที่ในสมการที่ (ค.4)

ส่วนที่เกี่ยวกับมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มผกผัน

พิจารณาสมการที่ (ค.3)

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{-F \cos \phi - 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + 5.88 \sin \phi}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi} \\ (0.12 - 0.02 \cos^2 \phi) \ddot{\phi} &= -F \cos \phi - 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + 5.88 \sin \phi \\ 0.12 \ddot{\phi} - (0.02 \cos^2 \phi \ddot{\phi} - 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi) &= -F \cos \phi + 5.88 \sin \phi \\ 0.12 \ddot{\phi} - 0.02 \cos \phi (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) &= -F \cos \phi + 5.88 \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{ค.5})$$

กำหนดให้ $r_x = \sin \phi$ และ $r_y = \cos \phi$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= \cos \phi \dot{\phi} \\ \ddot{r}_x &= \cos \phi \ddot{\phi} - \sin \phi \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

แทนค่า r_x, r_y และ \ddot{r}_x ลงในสมการที่ (ค.5)

$$0.12 \ddot{\phi} - 0.02 r_y \ddot{r}_x = -r_y F + 5.88 r_x \quad (\text{ค.6})$$

กำหนดให้ $v = 0.12 \dot{\phi} - 0.02 r_y \dot{r}_x$ จะได้ว่า

$$\dot{v} = 0.12 \ddot{\phi} - 0.02 r_y \ddot{r}_x - 0.02 \dot{r}_y \dot{r}_x \quad (\text{ค.7})$$

$$\ddot{v} = 0.12 \ddot{\phi} - 0.02 r_y \ddot{r}_x - 0.02 \ddot{r}_y \dot{r}_x - 0.04 \dot{r}_y \dot{r}_x \quad (\text{ค.8})$$

แทนค่า \ddot{v} ในสมการที่ (ค.6) จะได้

$$\ddot{v} + 0.02 \ddot{r}_y \dot{r}_x + 0.04 \dot{r}_y \dot{r}_x = -r_y F + 5.88 r_x \quad (\text{ค.9})$$

$$\ddot{v} = (5.88 - 0.02 \ddot{r}_y) r_x - r_y F - 0.04 \dot{r}_y \dot{r}_x \quad (\text{ค.10})$$

เนื่องจาก $r_x = \sin \phi$ ดังนั้น

$$\dot{r}_x = \cos \phi \dot{\phi}$$

และจากสมการที่ (ค.7) จะได้ว่า

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{v} + 0.02 r_y \dot{r}_x + 0.02 \dot{r}_y \dot{r}_x}{0.12}$$

ดังนั้น

$$\dot{r}_x = \cos \phi \dot{\phi} \quad (\text{ค.11})$$

$$\dot{r}_x = r_y \left(\frac{\dot{v} + 0.02 r_y \dot{r}_x + 0.02 \dot{r}_y \dot{r}_x}{0.12} \right) \quad (\text{ค.12})$$

$$(0.12 - 0.02 r_y^2) \dot{r}_x = r_y \dot{v} + 0.02 r_y \dot{r}_y \dot{r}_x \quad (\text{ค.13})$$

$$\dot{r}_x = \frac{r_y}{(0.12 - 0.02 r_y^2)} \dot{v} + \frac{0.02 r_y \dot{r}_y}{(0.12 - 0.02 r_y^2)} r_x \quad (\text{ค.14})$$

ในสมการที่ (ค.14) มีตัวหารเป็น $0.12 - 0.02r_y^2$ แต่เนื่องจาก $0 < r_y \leq 1$ ดังนั้น \dot{r}_x จึงมีค่าที่จำกัดเสมอ แทนค่า \dot{r}_x จากสมการที่ (ค.14) ลงในสมการ (ค.10)

$$\ddot{v} = \left(5.88 - 0.02\ddot{r}_y - \frac{0.0008r_y\dot{r}_y^2}{0.12 - 0.02r_y^2} \right) r_x - \frac{0.04r_y\dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} \dot{v} - r_y F \quad (\text{ค.15})$$

สมการที่ (ค.14) และ (ค.15) เป็นสมการสถานะที่เกี่ยวกับมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มผกผัน

ส่วนที่เกี่ยวกับระยะทางที่รถเคลื่อนที่

พิจารณาสมการที่ (ค.4) ซึ่งเป็นสมการที่บรรยายการเคลื่อนที่ของรถ จากสมการนี้สามารถหาสมการสถานะได้ทันทีดังนี้

$$\ddot{x} = \frac{1}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} F + \frac{0.02\dot{\phi}^2}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} r_x - \frac{0.98r_y}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} r_x$$

แต่เมื่อนำไปหาตัวควบคุมซึ่งจะนำเสนอในบทที่ 3 จะไม่สามารถหาตัวควบคุมได้ จึงจัดรูปสมการดังกล่าวใหม่ และทำการประมาณให้เป็นเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F + 0.02\dot{\phi}^2 \sin \phi - 0.98 \sin \phi \cos \phi}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} \\ (0.6 - 0.1 \cos^2 \phi) \ddot{x} &= F + 0.02\dot{\phi}^2 \sin \phi - 0.98 \sin \phi \cos \phi \\ (0.6 - 0.1 \cos^2 \phi) \ddot{x} \cos \phi &= F \cos \phi + 0.02\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - 0.98 \sin \phi \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (\text{ค.16})$$

เมื่อบวกสมการ (ค.5) และ (ค.16) เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\ddot{x} \cos \phi + 0.2\ddot{\phi} = 9.8r_x$$

ทำการประมาณให้เป็นเชิงเส้นรอบๆ จุด $\phi^* = 0$ จะได้

$$\ddot{x} + 0.2\ddot{\phi} = 9.8r_x \quad (\text{ค.17})$$

สมการ (ค.17) เป็นสมการสถานะที่บรรยายการเคลื่อนที่ของรถเมื่อตัวแปรสถานะคือ $x + 0.2\phi$

สมการสถานะของระบบ

จากสมการที่ (ค.14), (ค.15) และ (ค.17) กำหนดตัวแปรสถานะใหม่ดังนี้

$$x_1 = \dot{v}, \quad x_2 = r_x, \quad x_3 = \dot{x} + 0.2\dot{\phi} \quad \text{และ} \quad x_4 = x + 0.2\phi$$

สมการสถานะของระบบเป็นดังนี้

$$\dot{x}_1 = 5.88x_2 - r_y F - \frac{0.04r_y\dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_1 - \left(0.02\ddot{r}_y + \frac{0.0008r_y\dot{r}_y^2}{0.12 - 0.02r_y^2} \right) x_2 \quad (\text{ค.18})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{r_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_1 + \frac{0.02r_y\dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_2 \quad (\text{ค.19})$$

$$\dot{x}_3 = 9.8x_2 \quad (\text{ค.20})$$

$$\dot{x}_4 = x_3 \quad (\text{ค.21})$$

ในการออกแบบตัวควบคุม จำเป็นต้องเขียนสมการเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น ดังที่จะแสดงต่อไปนี้

กำหนดให้ตัวแปรกำหนดของระบบเป็น

$$\theta'_1 = r_y \quad \text{และ} \quad \theta'_2 = \frac{r_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} \quad (\text{ค.22})$$

และความไม่แน่นอนของระบบเป็น

$$\Delta_1 = \frac{0.02r_y\dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} \quad \text{และ} \quad \Delta_2 = 0.02\ddot{r}_y + \frac{0.0008r_y\dot{r}_y^2}{0.12 - 0.02r_y^2} \quad (\text{ค.23})$$

เราสามารถกำหนดตัวแปรกำหนดและความไม่แน่นอนดังสมการที่ (ค.22) และ (ค.23) ได้ เนื่องจากค่ามุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มผกผันสามารถวัดค่าได้ ทำให้สามารถคำนวณค่า θ'_1 และ θ'_2 ได้ แต่ค่าอนุพันธ์ของมุมของลูกตุ้มผกผันที่เบี่ยงเบนวัดได้ยาก จึงไม่สามารถวัดค่า Δ_1 และ Δ_2 ได้

เมื่อกำหนดให้มุมของลูกตุ้มผกผันที่เบี่ยงเบนมากที่สุดเป็น ϕ_m จะได้ว่า

$$\cos \phi_m < \theta'_1 < 1 \quad (\text{ค.24})$$

$$\frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m} < \theta'_2 < \frac{1}{0.1} \quad (\text{ค.25})$$

ทำตัวแปรกำหนดให้เป็นบรรทัดฐาน (normalize) ดังนี้

- θ'_1

เนื่องจาก $\cos \phi_m < \theta'_1 < 1$ ดังนั้น

$$\theta'_1 = \frac{1 - \cos \phi_m}{2} \theta_1 + \frac{1 + \cos \phi_m}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{2\theta'_1}{1 - \cos \phi_m} - \frac{1 + \cos \phi_m}{1 - \cos \phi_m}$$

ซึ่งจะได้ $\theta_1 \in (-1, 1)$

- θ'_2

เนื่องจาก $\frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m} < \theta'_2 < \frac{1}{0.1}$ ดังนั้น

$$\theta'_2 = \frac{1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}{2} \theta_2 + \frac{1 + \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{2\theta'_2}{1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}} - \frac{1 + \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}{1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}$$

ซึ่งจะได้ $\theta_2 \in (-1, 1)$

เมื่อแทนค่าตัวแปรกำหนดที่ได้ลงในสมการสถานะ จะได้

$$\dot{x}_1 = 5.88x_2 - \left(\frac{1 + \cos \phi_m}{2}\right) u - \left(\frac{1 - \cos \phi_m}{2}\right) w_{\theta 1} - w_{\Delta 1} \quad (\text{ค.26})$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{1 + \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}{2}\right) x_1 + \left(\frac{1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}}{2}\right) w_{\theta 2} + w_{\Delta 2} \quad (\text{ค.27})$$

$$\dot{x}_3 = 9.8x_2 \quad (\text{ค.28})$$

$$\dot{x}_4 = x_3 \quad (\text{ค.29})$$

$$z = -x_2 + w_1 \quad (\text{ค.30})$$

$$y = -x_2 + w_1 \quad (\text{ค.31})$$

$$z_{\theta 1} = u \quad (\text{ค.32})$$

$$z_{\theta 2} = x_1 \quad (\text{ค.33})$$

$$z_{\Delta 1} = 2x_1 \quad (\text{ค.34})$$

$$z_{\Delta 2} = x_2 \quad (\text{ค.35})$$

$$\text{โดยที่ } \Theta = \begin{bmatrix} \frac{2\theta'_1}{1 - \cos \phi_m} - \frac{1 + \cos \phi_m}{1 - \cos \phi_m} & 0 & 1 + \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m} \\ 0 & \frac{2\theta'_2}{1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m}} - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m} & 1 - \frac{\cos \phi_m}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi_m} \end{bmatrix}$$

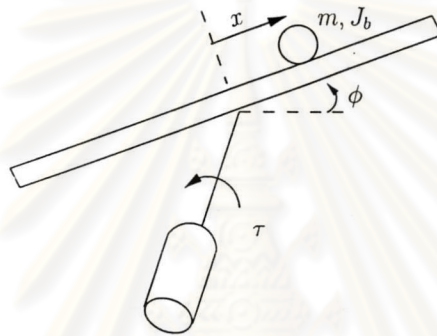
$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{0.02r_y \dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} & 0.02\ddot{r}_y + \frac{0.0008r_y \dot{r}_y^2}{0.12 - 0.02r_y^2} \\ 0 & \frac{0.02r_y \dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} \end{bmatrix}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ของระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน

ระบบเลี้ยงลูกบอลบนคานเป็นระบบที่อาศัยการปรับมุมของคาน เพื่อขยับให้ลูกบอลอยู่ในตำแหน่งกึ่งกลางของคานหรือตำแหน่งที่ต้องการ คานที่ใช้ยึดติดกับมอเตอร์ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของคาน และมุมของคานจะขึ้นอยู่กับมุมของมอเตอร์โดยตรง ระบบนี้มีลักษณะดังรูปที่ ง.1

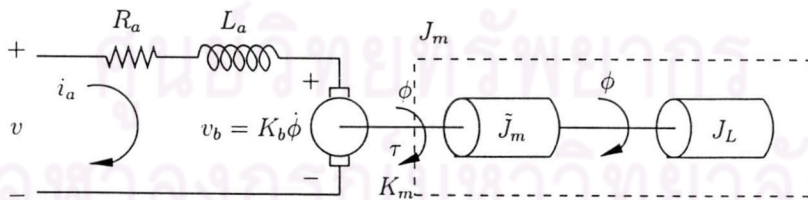


รูปที่ ง.1: ระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน

สมการบรรยายระบบนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนของมอเตอร์และคาน และส่วนของลูกบอล

สมการของมอเตอร์และคาน

ในที่นี้เลือกให้มอเตอร์ที่ควบคุมมุมของคานเป็นมอเตอร์กระแสตรง ที่ควบคุมด้วยกระแสที่ขดลวดโรเตอร์ ดังรูปที่ ง.2



รูปที่ ง.2: แผนภาพของมอเตอร์และคาน

จากรูปที่ ง.1 และ ง.2 ตัวแปรและค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เป็นดังนี้

i_a คือกระแสในขดลวดโรเตอร์ของมอเตอร์ (A)

v คือแรงดันที่ป้อนให้กับมอเตอร์ (V)

¹ค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ได้มาจาก [21]

ϕ คือมุมของมอเตอร์ซึ่งเท่ากับมุมของคานที่ทำกับแนวระนาบ (rad)

x คือตำแหน่งของลูกบอล (m)

K_b คือค่าคงตัวแรงดันย้อนกลับ มีค่า 0.00767 V/(rad/sec)

K_m คือค่าคงตัวแรงบิดของมอเตอร์ มีค่า 0.00767 Nm/A

J_m คือมวลภาวะที่มอเตอร์ (Kg·m²)

\bar{J}_m คือความเฉื่อยที่ขดลวดโรเตอร์และความเฉื่อยของคาน มีค่า 0.0029 (kg·m²)

J_L คือความเฉื่อยอันเนื่องมาจากลูกบอลและการเคลื่อนที่ของลูกบอล (kg·m²)

L คือความยาวของคาน มีค่า 43.18 cm

R_a คือค่าความต้านทานในวงจรขั้วมอเตอร์ มีค่า 2.6 Ω

L_a คือค่าความเหนี่ยวนำในวงจรขั้วมอเตอร์ มีค่า 0.18 mH

m คือมวลของลูกบอล มีค่า 0.1 kg

r คือรัศมีของลูกบอล มีค่า 0.015 m

J_b คือความเฉื่อยของลูกบอล มีค่า 1×10^{-5} kg·m²

ได้สมการของวงจรขั้วมอเตอร์เป็นดังนี้

$$v = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + K_b \ddot{\phi} \quad (ง.1)$$

สมการการเคลื่อนที่ของมอเตอร์เป็นดังนี้

$$\tau = J_m \ddot{\phi} + mgx \cos \phi^* \quad (ง.2)$$

ทำการประมาณสมการที่ (ง.2) ให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดสมดุล $\phi^* = 0$ ได้เป็น

$$\tau = J_m \ddot{\phi} + mgx \quad (ง.3)$$

โดยที่แรงบิด τ มีความสัมพันธ์กับกระแสที่ขดลวดโรเตอร์ดังนี้

$$\tau = K_m i_a \quad (ง.4)$$

สมการของลูกบอล

จากสมการของลากรางจ์สามารถหาสมการที่บรรยายการเคลื่อนที่ของลูกบอลได้ดังนี้

$$\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) \ddot{x} + \frac{J_b}{r} \ddot{\phi} - mx\dot{\phi}^2 = mg \sin \phi \quad (ง.5)$$

ทำการประมาณสมการที่ (ง.5) ให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดสมดุล $\phi^* = 0$ ได้เป็น

$$\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) \ddot{x} + \frac{J_b}{r} \ddot{\phi} - mx\dot{\phi}^2 = mg\phi \quad (ง.6)$$

สมการสถานะของระบบ

จัดรูปสมการที่ (ง.1) (ง.3) (ง.4) และ (ง.6) ใหม่ได้ดังนี้

$$\ddot{\phi} = \frac{K_m}{J_m} i_a - \frac{mg}{J_m} x \quad (ง.7)$$

$$i_a = -\frac{K_b}{L_a} \dot{\phi} - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{v}{L_a} \quad (ง.8)$$

$$\ddot{x} = \frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{mr^2 + J_b} x + \frac{mgr^2}{mr^2 + J_b} \phi \quad (ง.9)$$

กำหนดให้ $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = i_a$, $x_4 = \phi$, $x_5 = \dot{\phi}$ และ $u = v$ ได้สมการสถานะเป็นดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (ง.10)$$

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{mr^2 \dot{\phi}^2}{mr^2 + J_b} \right) x_1 + \left(\frac{mgr^2}{mr^2 + J_b} \right) x_4 \quad (ง.11)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R_a}{L_a} x_3 - \frac{K_b}{L_a} x_5 + \frac{1}{L_a} u \quad (ง.12)$$

$$\dot{x}_4 = x_5 \quad (ง.13)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{mg}{J_m} x_1 + \frac{K_m}{J_m} x_3 \quad (ง.14)$$

โดยทั่วไปพิจารณา J_m เป็นค่าคงที่ โดย $J_L = J_b$ หรือ $J_m = \bar{J}_m + J_b$ แต่ในความเป็นจริงแล้วค่า J_L มีการเปลี่ยนแปลงตามระยะทางที่ลูกบอลเคลื่อนที่ นั่นคือ

$$J_L = J_b + mx^2$$

ดังนั้น

$$J_m = \bar{J}_m + J_b + mx^2 \quad (ง.15)$$

ให้ $J = \bar{J}_m + J_b$ และ $\bar{\Delta} = mx^2$ เป็นความไม่แน่นอนเนื่องจากการประมาณค่า J_L จึงได้ว่า

$$J_m = J + \bar{\Delta} \quad (ง.16)$$

$$\frac{1}{J_m} = \frac{1}{J} + \frac{-\bar{\Delta}}{J(J + \bar{\Delta})} \quad (ง.17)$$

$$\frac{1}{J_m} = \frac{1}{J} + \Delta \quad (ง.18)$$

เนื่องจากเราสามารถวัดค่าความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ได้ ดังนั้นเราจึงสามารถเลือกใช้ค่า $\dot{\phi}^2$ เป็นตัวแปรกำหนดได้ และจาก Δ ในสมการที่ (ง.18) เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ จะได้สมการสถานะในรูปแบบของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นเป็นดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{ง.19})$$

$$\dot{x}_2 = 6.785x_4 + 0.692w_\theta \quad (\text{ง.20})$$

$$\dot{x}_3 = -1.4444 \times 10^4 x_3 - 42.611x_5 + 5.5555 \times 10^3 u \quad (\text{ง.21})$$

$$\dot{x}_4 = x_5 \quad (\text{ง.22})$$

$$\dot{x}_5 = -3.3677 \times 10^2 x_1 + 2.6357x_3 + w_\Delta \quad (\text{ง.23})$$

$$z_\theta = x_1 \quad (\text{ง.24})$$

$$z_\Delta = -0.981x_1 + 0.767 \times 10^{-2} x_3 \quad (\text{ง.25})$$

$$w_\theta = \theta z_\theta \quad (\text{ง.26})$$

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta \quad (\text{ง.27})$$

โดยที่ $\theta = \phi^2$ และ $\Delta = \frac{-\bar{\Delta}}{J(J+\bar{\Delta})}$



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวกมลวรรณ ทิพย์ถาวรณกุล เกิดเมื่อวันจันทร์ที่ 3 กันยายน พ.ศ. 2522 เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของนายอุดมศักดิ์ ทิพย์ถาวรณกุล และนางมาลี แซ่ตั้ง สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2542 และศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เมื่อ พ.ศ. 2543



ศูนย์วิทยพัชร์พยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย