# บทที่ 3

# ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับระบบเชิงเส้น ที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่มีโครงสร้าง

จากภาคผนวก ข พบว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ ให้ผลตอบที่มีสมรรถนะที่ดี แต่แบบจำลองที่ใช้มีข้อกำหนดที่ว่าต้องสามารถวัดค่าตัวแปรกำหนดได้ทั้งหมด ซึ่งเป็นข้อจำกัดของแบบจำลองดังกล่าว เนื่องจากตัวแปรกำหนดบางตัวไม่สามารถวัดค่าได้จริง ในบทนี้จึงแบ่งตัวแปรกำหนดออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่วัดค่าได้และส่วนที่วัดค่าไม่ได้ โดยเรียกส่วนที่วัดค่าได้ว่าตัวแปรกำหนดเช่นเดิม และเรียกส่วนที่วัดค่าไม่ได้ว่าความไม่แน่นอน ตัวแปรกำหนดนี้อาจเป็นตัวแปรกำหนดที่มีโครงสร้างหรือไม่ก็ได้ แต่ความไม่แน่นอนของระบบนี้ต้องเป็นความไม่แน่นอนที่ไม่มีโครงสร้างเท่านั้น

ในบทนี้ แสดงรูปแบบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่มีโครงสร้าง พร้อมทั้งวิธีการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ ในช่วงท้ายแสดงตัวอย่างการออกแบบ และเปรียบเทียบผลการควบคุมในกรณีที่ละเลยความไม่แน่นอนของระบบกับกรณีที่คิดผลของความไม่แน่นอนของระบบ ระบบตัวอย่างที่เลือกใช้ได้แก่ ระบบลูกตุ้มผกผันบนรถและระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน

## 3.1 รูปแบบของระบบ

จากระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ดังสมการที่ (2.1) หากตัวแปรกำหนดบางส่วนไม่สามารถวัดค่าได้ หรือระบบนี้มีความไม่แน่นอน แบบจำลองจึงควรมีความไม่แน่นอนด้วย แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอน มีสมการบรรยายระบบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \bar{A}(\theta(t),\Delta(t))\,x(t) + \bar{B}_1(\theta(t),\Delta(t))\,w(t) + \bar{B}_2(\theta(t),\Delta(t))\,u(t) \\
z(t) &= \bar{C}_1(\theta(t),\Delta(t))\,x(t) + \bar{D}_{11}(\theta(t),\Delta(t))\,w(t) + \bar{D}_{12}(\theta(t),\Delta(t))\,u(t) \\
y(t) &= \bar{C}_2(\theta(t),\Delta(t))\,x(t) + \bar{D}_{21}(\theta(t),\Delta(t))\,w(t) + \bar{D}_{22}(\theta(t),\Delta(t))\,u(t)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\theta(t)$ เป็นตัวแปรกำหนดที่สามารถวัดค่าได้

$\Delta(t)$ เป็นตัวแปรกำหนดที่ไม่สามารถวัดค่าได้และความไม่แน่นอนของระบบ

ระบบที่เลือกใช้นี้มีข้อกำหนดเช่นเดียวกับที่กล่าวไว้ในบทที่แล้ว ดังนี้

1. ระบบสามารถทำเสถียรได้ (stabilizable) และสามารถตรวจจับได้ (detectable)

2. ระบบไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดได้โดยตรง ($D_{22} = 0$)

3. จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกเท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ($n_z = n_w$)

ระบบดังสมการที่ (3.1) เขียนในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นได้ดังนี้

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{x}(t) & = & A\,x(t) + B_\theta\,w_\theta(t) + B_\Delta\,w_\Delta(t) + B_1\,w(t) + B_2\,u(t) \\
z_\theta(t) & = & C_\theta\,x(t) + D_{\theta\theta}\,w_\theta(t) + D_{\theta\Delta}\,w_\Delta(t) + D_{\theta 1}\,w(t) + D_{\theta 2}\,u(t) \\
z_\Delta(t) & = & C_\Delta\,x(t) + D_{\Delta\theta}\,w_\theta(t) + D_{\Delta\Delta}\,w_\Delta(t) + D_{\Delta 1}\,w(t) + D_{\Delta 2}\,u(t) \\
z(t) & = & C_1\,x(t) + D_{1\theta}\,w_\theta(t) + D_{1\Delta}\,w_\Delta(t) + D_{11}\,w(t) + D_{12}\,u(t) \\
y(t) & = & C_2\,x(t) + D_{2\theta}\,w_\theta(t) + D_{2\Delta}\,w_\Delta(t) + D_{21}\,w(t)
\end{array}
\qquad (3.2)
$$

ตัวแปรกำหนดและความไม่แน่นอน เป็นดังสมการ (3.3)

$$
\begin{array}{rcl}
w_\theta(t) & = & \Theta(t)\,z_\theta(t) \\
w_\Delta(t) & = & \Delta(t)\,z_\Delta(t)
\end{array}
\qquad (3.3)
$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ คือตัวแปรสถานะของพลานต์

$w \in \mathbb{R}^{n_w}$ คือสัญญาณเข้าภายนอก

$u \in \mathbb{R}^{n_u}$ คือสัญญาณควบคุม

$z \in \mathbb{R}^{n_w}$ คือสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$ คือสัญญาณออกที่วัดได้

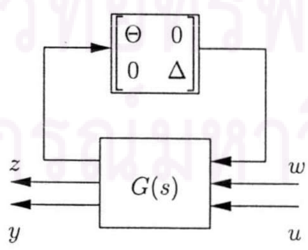
$\Theta(t) \in \bar{\Theta}$ เป็นตัวแปรกำหนดของพลานต์ และ $\bar{\Theta}$ มีโครงสร้างตามสมการ (2.4)

$\Delta(t) \in \bar{\Delta}$ เป็นความไม่แน่นอนที่ไม่มีโครงสร้างของพลานต์ และ $\bar{\Delta}$ มีโครงสร้างตามสมการ (3.4)

$$
\bar{\Delta} \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_{11}(t) & \Delta_{12}(t) & \cdots & \Delta_{1n_\Delta}(t) \\ \Delta_{21}(t) & \Delta_{22}(t) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n_\Delta 1}(t) & \cdots & \cdots & \Delta_{n_\Delta n_\Delta}(t) \end{bmatrix} : \Delta_{ij}(t) \in \mathbb{R} \right\} \qquad (3.4)
$$

พลานต์ดังกล่าวสามารถรวมตัวแปรกำหนด $\Theta(t)$ และความไม่แน่นอน $\Delta(t)$ เข้าด้วยกัน ได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ (3.5) และมีบล็อกไดอะแกรมเป็นดังรูปที่ 3.1

$$
\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = F_u\left(G, \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad (3.5)
$$




รูปที่ 3.1: พลานต์เชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ที่มีความไม่แน่นอน

กำหนดให้ตัวควบคุม $K(s)$ เป็นแบบเชิงเส้นและมีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ตามตัวแปรกำหนดของพลานต์ดังนี้

$$
u = F_l(K(s), \Theta)\,y \qquad (3.6)
$$

ซึ่งมีสมการสถานะเป็นดังนี้

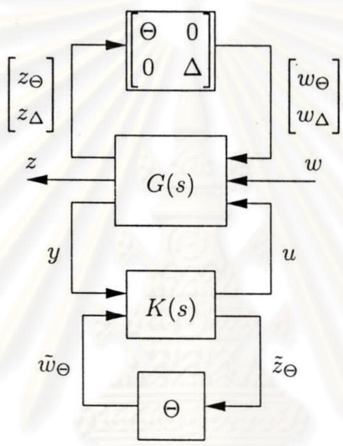
$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_{k1} y(t) + B_{k\theta} \tilde{w}_\theta(t) \\ u(t) &= C_{k1} x_k(t) + D_{k11} y(t) + D_{k1\theta} \tilde{w}_\theta(t) \\ \tilde{z}_\theta(t) &= C_{k\theta} x_k(t) + D_{k\theta 1} y(t) + D_{k\theta\theta} \tilde{w}_\theta(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

และ

$$\tilde{w}_\theta(t) = \Theta(t) \tilde{z}_\theta(t) \tag{3.8}$$

โดยที่ $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ เป็นตัวแปรสถานะของตัวควบคุม และ $\Theta(t)$ มีโครงสร้างเช่นเดียวกับพลานต์ดังสมการ (2.4)

รวมพลานต์และตัวควบคุมเข้าด้วยกันได้บล็อกไดอะแกรมเป็นดังรูปที่ 3.2



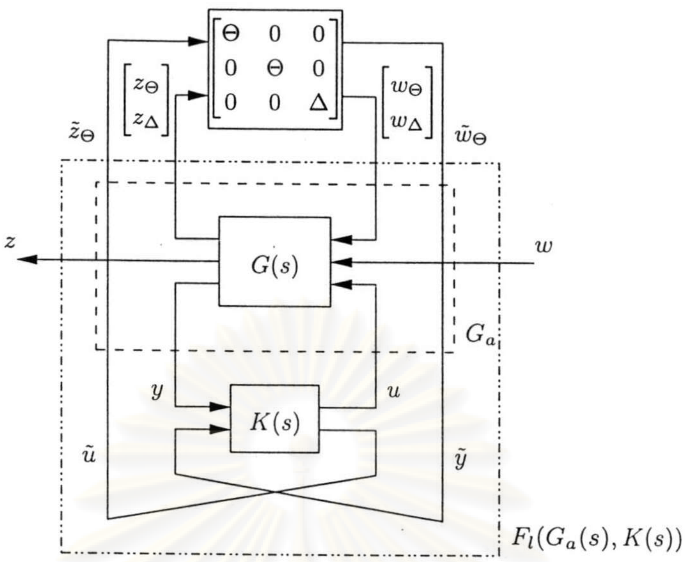

รูปที่ 3.2: ระบบวงปิดของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

ย้ายบล็อกตัวแปรกำหนดของตัวควบคุมไปรวมกับตัวแปรกำหนดและความไม่แน่นอนของพลานต์ดังรูปที่ 3.3 และกำหนดพลานต์ที่ถูกต่อเติม (augmented plant) $G_a(s)$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_\Theta \\ \hdashline z_\Theta \\ z_\Delta \\ z \\ y \\ \hdashline \tilde{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & G(s) & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_a(s)} \begin{bmatrix} \tilde{w}_\Theta \\ \hdashline w_\Theta \\ w_\Delta \\ w \\ u \\ \hdashline \tilde{u} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

นิยามให้ $\bar{G}(s)$ มีค่าดังนี้

$$\bar{G}(s) \triangleq F_l\left(G_a(s), K(s)\right) \tag{3.10}$$




รูปที่ 3.3: บล็อกไดอะแกรมของระบบวงปิดที่จัดรูปใหม่

ระบบวงปิดจะมีฟังก์ชันถ่ายโอน $T_{zw}$ จาก $w$ ไปยัง $z$ เป็นดังนี้

$$T_{zw} = F_u\left(F_l\left(G_a(s), K(s)\right), \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}\right) \tag{3.11}$$

$$= F_u\left(\bar{G}(s), \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}\right) \tag{3.12}$$

จุดประสงค์ของการควบคุม คือ

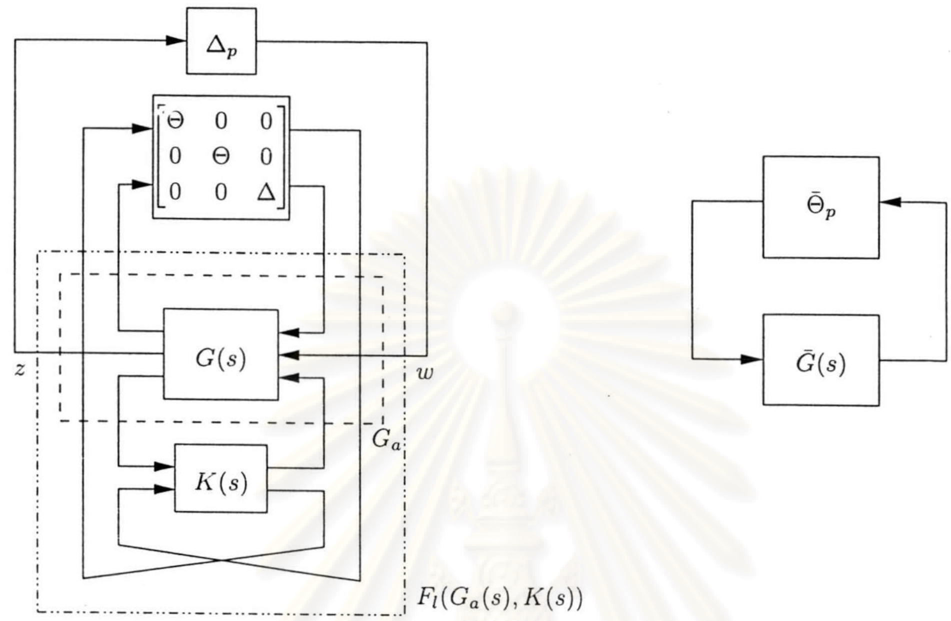
1. ระบบวงปิด $T_{zw}$ มีเสถียรภาพภายในสำหรับตัวแปรกำหนด $\Theta$ ทุกตัวที่สอดคล้องกับ $\|\Theta\|_\infty \leq 1/\gamma$ และความไม่แน่นอน $\Delta$ ทุกตัวที่สอดคล้องกับ $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$
2. นอร์มเหนี่ยวนำของ $T_{zw}$ มีค่าน้อยกว่า $\gamma$ หรือ $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$

จากจุดประสงค์ของการควบคุมข้างต้น จุดประสงค์ข้อแรกเพื่อประกันเสถียรภาพของระบบวงปิด ส่วนจุดประสงค์ข้อที่สองเพื่อให้ระบบวงปิดมีสมรรถนะคงทน นอกจากนี้ ขนาดของตัวแปรกำหนด ความไม่แน่นอน และนอร์มเหนี่ยวนำของ $T_{zw}$ ถูกจำกัดให้มีค่าน้อยกว่า $\gamma$ ค่าเดียวกัน หากพลานต์ที่ต้องการออกแบบมีขนาดของตัวแปรกำหนด ความไม่แน่นอน หรือนอร์มเหนี่ยวนำของ $T_{zw}$ ที่ไม่ใช่ค่าเดียวกัน สามารถทำให้เป็นค่าเดียวกันได้โดยสเกลบางเมทริกซ์ของสมการสถานะ

## 3.2 การออกแบบตัวควบคุม

จากหัวข้อที่แล้ว จุดประสงค์ของการควบคุมข้อแรกสามารถนำทฤษฎีบท ข.2 มาประยุกต์ใช้ได้ และจุดประสงค์ข้อที่สองใช้วิธีการเดียวกับหัวข้อ ข.2.2 ในภาคผนวก ข นั่นคือ เพิ่มความไม่แน่นอนแบบไม่มี

โครงสร้างเข้าไปในระบบดังรูปที่ 3.4(ก) และรวมตัวแปรกำหนดกับความไม่แน่นอนเข้าด้วยกันได้ดังรูปที่ 3.4(ข)




(ก) (ข)

รูปที่ 3.4: ระบบวงจรปิดเมื่อเพิ่มเงื่อนไขสมรรถนะคงทน

กำหนดให้

$$\bar{\Theta}_p \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_p \end{bmatrix} : \Theta \in \bar{\Theta},\ \Delta \in \bar{\Delta} \text{ และ } \Delta_p \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w} \right\} \tag{3.13}$$

เซตของเมทริกซ์การสเกลที่สอดคล้องกับตัวแปรกำหนดในเซต $\bar{\Theta}$ เป็น

$$L_{\bar{\Theta}} = \{\ L > 0 \ :\ L\Theta = \Theta L, \quad \forall \Theta \in \bar{\Theta}\} \tag{3.14}$$

เซทของเมทริกซ์การสเกล $L_{\bar{\Theta}_p}$ ที่สอดคล้องกับ $\bar{\Theta}_p$ เป็นดังนี้

$$L_{\bar{\Theta}_p} = \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 & 0 \\ L_2^T & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} : L_1,\ L_3 \in L_{\bar{\Theta}} \text{ และ } L_2\Theta = \Theta L_2 \right\} \tag{3.15}$$

อาศัยบทตั้งที่ ข.1 เพื่อเปลี่ยนปัญหาจากอสมการของนอร์มอนันต์ไปเป็นอสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{cl}}^T P + P A_{\mathrm{cl}} & P B_{\mathrm{cl}} & C_{\mathrm{cl}}^T \\ B_{\mathrm{cl}}^T P & -\gamma L & D_{\mathrm{cl}}^T \\ C_{\mathrm{cl}} & D_{\mathrm{cl}} & -\gamma L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.16}$$

โดยที่ $L \in L_{\bar{\Theta}_p}$ และพารามิเตอร์ของระบบวงปิดเป็นดังนี้

$$A_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_{k11} C_2 & B_2 C_{k1} \\ B_{k1} C_2 & A_k \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$B_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} B_2 D_{k1\theta} & B_\theta + B_2 D_{k11} D_{2\theta} & B_\Delta + B_2 D_{k11} D_{2\Delta} & B_1 + B_2 D_{k11} D_{21} \\ B_{k\theta} & B_{k1} D_{2\theta} & B_{k1} D_{2\Delta} & B_{k1} D_{21} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$C_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} D_{k\theta 1} C_2 & C_{k\theta} \\ C_\theta + D_{\theta 2} D_{k11} C_2 & D_{\theta 2} C_{k1} \\ C_\Delta + D_{\Delta 2} D_{k11} C_2 & D_{\Delta 2} C_{k1} \\ C_1 + D_{12} D_{k11} C_2 & D_{12} C_{k1} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$D_{\mathrm{cl}} = \begin{bmatrix} D_{k\theta\theta} & D_{k\theta 1} D_{2\theta} & D_{k\theta 1} D_{2\Delta} & D_{k\theta 1} D_{21} \\ D_{\theta 2} D_{k1\theta} & D_{\theta\theta} + D_{\theta 2} D_{k11} D_{2\theta} & D_{\theta\Delta} + D_{\theta 2} D_{k11} D_{2\Delta} & D_{\theta 1} + D_{\theta 2} D_{k11} D_{21} \\ D_{\Delta 2} D_{k1\theta} & D_{\Delta\theta} + D_{\Delta 2} D_{k11} D_{2\theta} & D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} D_{k11} D_{2\Delta} & D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2} D_{k11} D_{21} \\ D_{12} D_{k1\theta} & D_{1\theta} + D_{12} D_{k11} D_{2\theta} & D_{1\Delta} + D_{12} D_{k11} D_{2\Delta} & D_{11} + D_{12} D_{k11} D_{21} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

แบ่งเมทริกซ์ $P$, $P^{-1}$, $L$, และ $L^{-1}$ ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \bar{Y} \end{bmatrix} > 0 \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \bar{X} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 & 0 \\ L_2^T & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \qquad L^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 & 0 \\ J_2^T & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

โดยที่ $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$ และ $Y \in \mathcal{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร (symmetric, positive definite matrix)

$L_3 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และ $J_3 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนสมมาตร

$M \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ และ $N \in \mathcal{R}^{n \times n_k}$ เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นหลักเต็ม (full-column-rank matrix)

$L_2 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ และ $J_2 \in \mathcal{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ เป็นเมทริกซ์ค่าลำดับชั้นแถวเต็ม (full-row-rank matrix)

กำหนดให้

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & J_2 & 0 & 0 \\ I & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \qquad \hat{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 & 0 \\ L_3 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

กำหนดเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน $T$ ตัวแปรของตัวควบคุมใหม่ และแปลงปัญหาเช่นเดียวกับในภาคผนวก ข เมื่อแทนค่าด้วยตัวแปรในสมการที่ (ข.24)-(ข.32) และเพิ่มเงื่อนไขที่ทำให้เมทริกซ์ $P$, $P^{-1}$, $L$ และ $L^{-1}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน จะได้เป็นทฤษฎีบทดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.1** *สำหรับระบบดังสมการที่* (3.2) *ที่ตัวแปรกำหนดมีโครงสร้างดังสมการที่* (2.4) *และมีความไม่แน่นอนที่มีโครงสร้างดังสมการที่* (3.4) *กำหนดให้เซตของเมทริกซ์การสเกลเป็นดังสมการที่* (3.15) *จะมีตัวควบคุมที่เปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ตามพลานต์ที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะคงทน ถ้ามีเมทริกซ์* $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $\hat{B}_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n_\theta}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $\hat{C}_\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$, $\hat{D}_{11} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $\hat{D}_{1\theta} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\theta}$, $\hat{D}_{\theta 1} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_y}$, $\hat{D}_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ *และมีเมทริกซ์บวกแน่นอน* $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_3 \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ *และ* $J_3 \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$ *ที่สอดคล้องกับอสมการที่* (3.23) *และ* (ข.36) *และตัวควบคุมที่ได้จะมีอันดับเท่ากับ* $\operatorname{rank}(I - XY)$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc}
AX + B_2\hat{C}_1 + XA^T + \hat{C}_1^T B_2^T & \star & \star & \star & \cdots \\
\hat{A} + A^T + C_2^T \hat{D}_{11} B_2^T & YA + \hat{B}_1 C_2 + A^T Y + C_2^T \hat{B}_1^T & \star & \star & \cdots \\
(B_\theta + B_2\hat{D}_{11}D_{2\theta})^T & (\hat{B}_1 D_{2\theta} + YB_\theta)^T & -\gamma L_3 & \star & \cdots \\
(B_2\hat{D}_{1\theta} + B_\theta J_3)^T & \hat{B}_\theta^T & -\gamma I & -\gamma J_3 & \cdots \\
(B_\Delta + B_2\hat{D}_{11}D_{2\Delta})^T & (\hat{B}_1 D_{2\Delta} + YB_\Delta)^T & 0 & 0 & \cdots \\
(B_1 + B_2\hat{D}_{11}D_{21})^T & (\hat{B}_1 D_{21} + YB_1)^T & 0 & 0 & \cdots \\
\hat{C}_\theta & \hat{D}_{\theta 1}C_2 + L_3 C_\theta & \hat{D}_{\theta 1}D_{2\theta} + L_3 D_{\theta\theta} & \hat{D}_{\theta\theta} & \cdots \\
C_\theta X + D_{\theta 2}\hat{C}_1 & C_\theta + D_{\theta 2}\hat{D}_{11}C_2 & D_{\theta\theta} + D_{\theta 2}\hat{D}_{11}D_{2\theta} & D_{\theta 2}\hat{D}_{1\theta} + D_{\theta\theta}J_3 & \cdots \\
C_\Delta X + D_{\Delta 2}\hat{C}_1 & C_\Delta + D_{\Delta 2}\hat{D}_{11}C_2 & D_{\Delta\theta} + D_{\Delta 2}\hat{D}_{11}D_{2\theta} & D_{\Delta 2}\hat{D}_{1\theta} + D_{\Delta\theta}J_3 & \cdots \\
C_1 X + D_{12}\hat{C}_1 & C_1 + D_{12}\hat{D}_{11}C_2 & D_{1\theta} + D_{12}\hat{D}_{11}D_{2\theta} & D_{12}\hat{D}_{1\theta} + D_{1\theta}J_3 & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & -\gamma I & \star & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & 0 & -\gamma I & \star & \star & \star & \star \\
\cdots & \hat{D}_{\theta 1}D_{2\Delta} + L_3 D_{\theta\Delta} & \hat{D}_{\theta 1}D_{21} + L_3 D_{\theta 1} & -\gamma L_3 & \star & \star & \star \\
\cdots & D_{\theta\Delta} + D_{\theta 2}\hat{D}_{11}D_{2\Delta} & D_{\theta 1} + D_{\theta 2}\hat{D}_{11}D_{21} & -\gamma I & -\gamma J_3 & \star & \star \\
\cdots & D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2}\hat{D}_{11}D_{2\Delta} & D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2}\hat{D}_{11}D_{21} & 0 & 0 & -\gamma I & \star \\
\cdots & D_{1\Delta} + D_{12}\hat{D}_{11}D_{2\Delta} & D_{11} + D_{12}\hat{D}_{11}D_{21} & 0 & 0 & 0 & -\gamma I
\end{array}\right] < 0 \quad (3.23)
$$

*โดยที่ $\star$ คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ที่อยู่ตรงข้ามแนวทแยง (diagonal)*

**พิสูจน์** เป็นไปในลักษณะเดียวกับภาคผนวก ข □

การแปลงตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม มีขั้นตอนเช่นเดียวกับในหัวข้อ ข.3.3 ในภาคผนวก ข

## 3.3 ตัวอย่างการออกแบบ

ตัวอย่างที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้มีสองตัวอย่าง คือระบบลูกตุ้มผกผันบนรถและระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน

### 3.3.1 ระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ

จากภาคผนวก ค กำหนดให้สมการสถานะของระบบลูกตุ้มผกผันบนรถเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 5.88x_2 - \left(\frac{1+\cos\phi_m}{2}\right)u - \left(\frac{1-\cos\phi_m}{2}\right)w_{\theta 1} - w_{\Delta 1} && (3.24)\\
\dot{x}_2 &= \left(\frac{1+\dfrac{\cos\phi_m}{0.12-0.02\cos^2\phi_m}}{2}\right)x_1 + \left(\frac{1-\dfrac{\cos\phi_m}{0.12-0.02\cos^2\phi_m}}{2}\right)w_{\theta 2} + w_{\Delta 2} && (3.25)\\
\dot{x}_3 &= 9.8x_2 && (3.26)\\
\dot{x}_4 &= x_3 && (3.27)\\
z_\infty &= -x_2 + w && (3.28)\\
y &= \begin{bmatrix} -x_2 + w \\ -x_4 \end{bmatrix} && (3.29)\\
z_{\theta 1} &= u && (3.30)\\
z_{\theta 2} &= x_1 && (3.31)\\
z_{\Delta 1} &= 2x_1 && (3.32)\\
z_{\Delta 2} &= x_2 && (3.33)
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\Theta = \begin{bmatrix} \dfrac{2\theta_1'}{1-\cos\phi_m} - \dfrac{1+\cos\phi_m}{1-\cos\phi_m} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\theta_2'}{1-\dfrac{\cos\phi_m}{0.12-0.02\cos^2\phi_m}} - \dfrac{1+\dfrac{\cos\phi_m}{0.12-0.02\cos^2\phi_m}}{1-\dfrac{\cos\phi_m}{0.12-0.02\cos^2\phi_m}} \end{bmatrix}$

$$
\Delta = \begin{bmatrix} \dfrac{0.02r_y\dot{r}_y}{(0.12-0.02r_y^2)} & 0.02\ddot{r}_y + \dfrac{0.0008r_y\dot{r}_y^2}{0.12-0.02r_y^2} \\ 0 & \dfrac{0.02r_y\dot{r}_y}{(0.12-0.02r_y^2)} \end{bmatrix}
$$

ในที่นี้พิจารณาเฉพาะปัญหาเสถียรภาพของระบบเท่านั้น จะไม่พิจารณาปัญหาการตามรอย ดังนั้นสัญญาณเข้าภายนอก $w_1$ จึงมีค่าเป็นศูนย์ นอกจากนี้ตำแหน่งของรถเป็นค่าที่ได้จากการวัดตำแหน่งเทียบกับจุดอ้างอิงเท่านั้น ดังนั้นค่าสถานะเริ่มต้นของตำแหน่งรถไม่มีผลต่อเสถียรภาพของระบบ จึงกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ พิจารณาเพียงกรณีที่ค่าสถานะเริ่มต้นของมุมที่เบี่ยงเบนไปไม่เท่ากับศูนย์ และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบผลการควบคุมได้ จึงเพิ่มเงื่อนไขเอชทู สำหรับระบบลูกตุ้มผกผันนี้ ตัวแปรสถานะที่มีผลต่อเสถียรภาพของระบบมาก คือมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม ดังนั้นจึงกำหนดให้สัญญาณออกที่ต้องการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเอชทูเป็นดังนี้

$$
z_2 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0.5u \end{bmatrix}
$$

การกำหนดเช่นนี้ทำให้รถเข้าสู่ตำแหน่งเริ่มต้นช้ามาก โดยระบบจะพยายามให้มุมที่เบี่ยงเบนมีขนาดเล็กมากๆก่อน แล้วจึงค่อยๆขยับให้รถวิ่งกลับไปสู่ตำแหน่งเริ่มต้น ดังนั้นการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์จะแสดงเฉพาะในช่วงเวลาที่มุมเบี่ยงเบนของลูกตุ้มมีการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วและมีขนาดใหญ่พอสมควรเท่านั้น โดยจะแสดงผลตอบถึงช่วงสภาวะอยู่ตัวเพียงกรณีเดียว คือกรณีที่มีการเบี่ยงเบนสูงสุดที่ตัวควบคุมยังสามารถทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้

กำหนดให้มุมที่เบี่ยงเบนสูงสุดคือ $\phi_m = 70°$ และ $\gamma = 2$ จากค่า $\phi_m$ และค่า $\gamma$ สามารถคำนวณช่วงของมุมที่เบี่ยงเบนสูงสุด ที่ยังรับประกันเสถียรภาพของระบบวงปิดได้เท่ากับ 57.66° เนื่องจากความไม่แน่นอนมีค่านอร์มอนันต์น้อยกว่าค่านอร์มอนันต์ของตัวแปรกำหนดมาก จึงปรับค่า $B_\Delta$ ของระบบเป็น $\gamma\|\Delta\|_\infty B_\Delta$ ได้ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
A_k &= \begin{bmatrix} 1.06 & 1.76 & 1.29 & -4.99 \\ -6.01 & -4.93 & 6.27 & -17.52 \\ 5.15 & 3.29 & -10.49 & 21.32 \\ 3.26 \times 10^2 & 4.78 \times 10^2 & 3.51 \times 10^2 & 8.90 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
B_{k1} &= \begin{bmatrix} -10.50 & -0.87 \\ 45.87 & 4.39 \\ -49.86 & -3.96 \\ 1.23 \times 10^2 & -2.37 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
B_{k\theta} &= \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 \\ -0.14 & 1.23 \\ 0.15 & -1.77 \\ 3.77 & 11.00 \end{bmatrix} \\
C_{k1} &= \begin{bmatrix} 2.57 & 2.65 & -0.82 & -0.02 \end{bmatrix} \\
C_{k\theta} &= \begin{bmatrix} -1.46 & -1.51 & 0.46 & -0.08 \\ -0.26 & 0.28 & 4.50 & 20.86 \end{bmatrix} \\
D_{k11} &= \begin{bmatrix} -20.90 & -1.91 \end{bmatrix} \\
D_{k1\theta} &= \begin{bmatrix} 0.93 & -0.28 \end{bmatrix} \\
D_{k\theta 1} &= \begin{bmatrix} 11.88 & 1.09 \\ 8.90 & 0.29 \end{bmatrix} \\
D_{k\theta\theta} &= \begin{bmatrix} -0.53 & 0.16 \\ -0.02 & 0.60 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่คำนึงถึงความไม่แน่นอนของระบบ ที่คำนวณตามวิธีในภาคผนวก ข เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
A_k &= \begin{bmatrix} 0.95 & 1.56 & 1.36 & -4.97 \\ -5.56 & -4.61 & 6.07 & -15.79 \\ 4.61 & 3.05 & -10.61 & 20.90 \\ 3.14 \times 10^2 & 4.18 \times 10^2 & 2.91 \times 10^2 & -7.87 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
B_{k1} &= \begin{bmatrix} -9.37 & -0.75 \\ 45.27 & 4.28 \\ -50.58 & -3.93 \\ 1.06 \times 10^2 & -2.17 \times 10^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$B_{k\theta} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.05 \\ -0.14 & 1.25 \\ 0.15 & -1.84 \\ 3.48 & 8.01 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} 2.45 & 2.45 & -0.87 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$C_{k\theta} = \begin{bmatrix} -1.41 & -1.41 & 0.49 & -0.07 \\ -9.60 \times 10^{-3} & 0.30 & 4.18 & 19.24 \end{bmatrix}$$

$$D_{k11} = \begin{bmatrix} -20.54 & -1.85 \end{bmatrix}$$

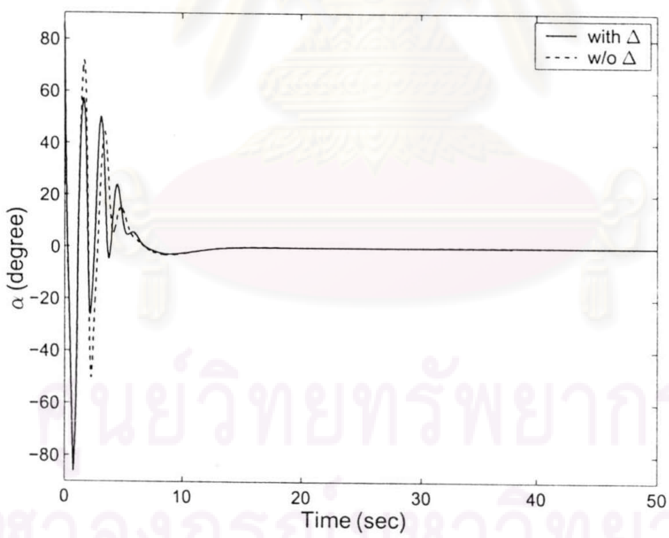
$$D_{k1\theta} = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.30 \end{bmatrix}$$

$$D_{k\theta 1} = \begin{bmatrix} 11.79 & 1.06 \\ 8.59 & 0.24 \end{bmatrix}$$

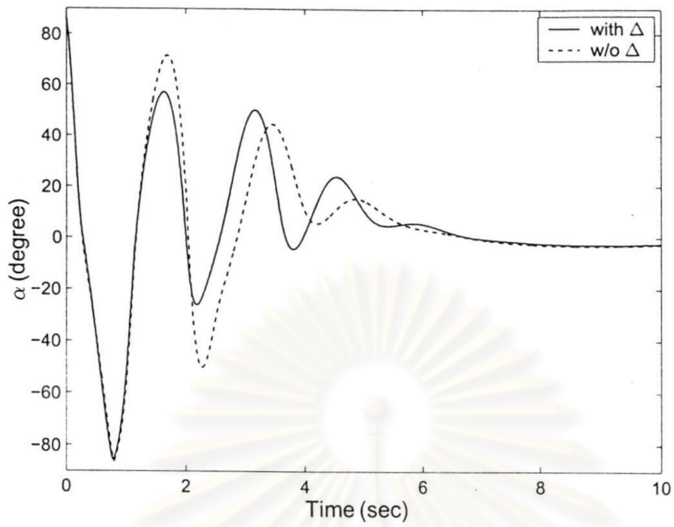
$$D_{k\theta\theta} = \begin{bmatrix} -0.53 & 0.17 \\ -0.02 & 0.49 \end{bmatrix}$$

ผลการจำลองระบบที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นต่างๆกันเป็นดังนี้

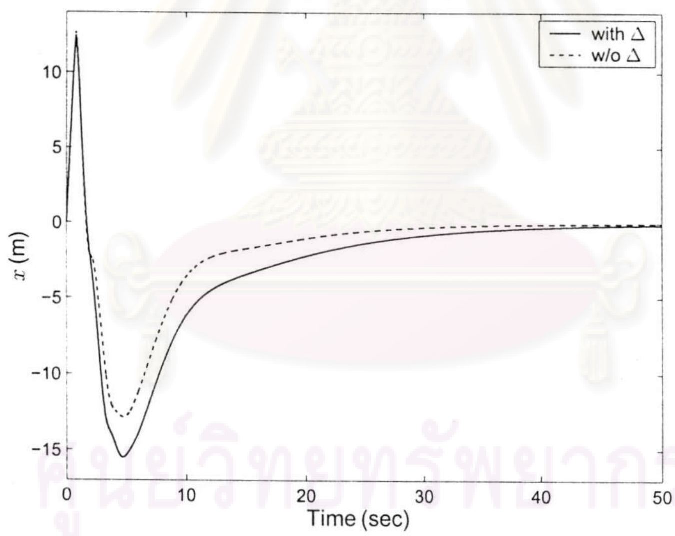
- กรณีที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้น $\alpha_0 = 86°$




รูปที่ 3.5: มุมที่เบี่ยงเบนไปของลูกตุ้มผกผันเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ (ตั้งแต่สภาวะเริ่มต้นถึงสภาวะอยู่ตัว)

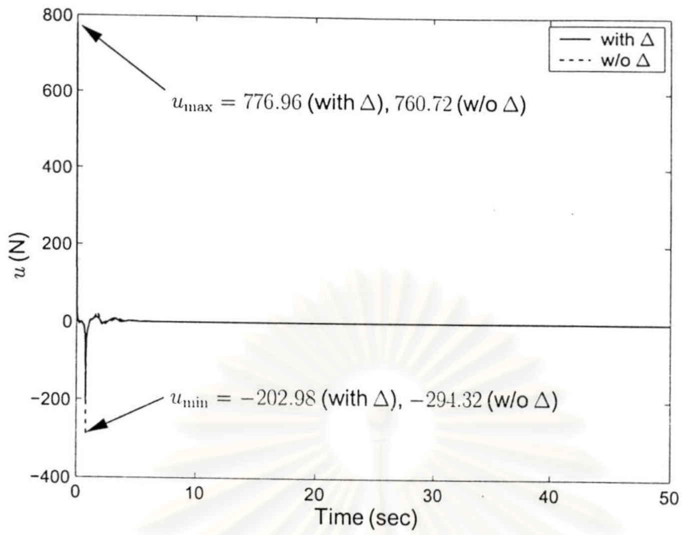



รูปที่ 3.6: มุมที่เบี่ยงเบนไปของลูกตุ้มผกผันเมื่อ $\alpha_0 = 86°$

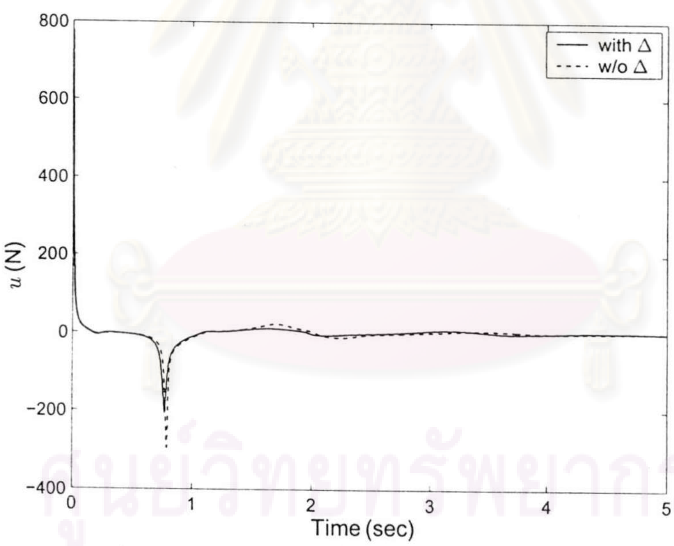



รูปที่ 3.7: ตำแหน่งของรถเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ (ตั้งแต่สภาวะเริ่มต้นถึงสภาวะอยู่ตัว)

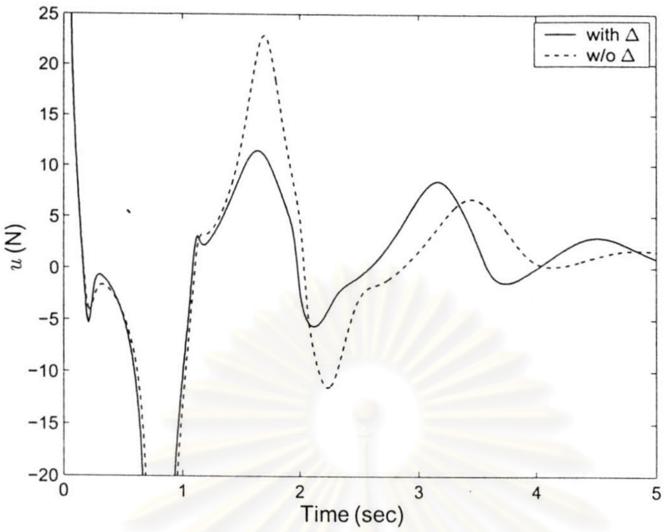
เมื่อพิจารณาผลตอบของมุมของลูกตุ้มในรูปที่ 3.6 พบว่าตัวควบคุมที่คำนึงถึงความไม่แน่นอนให้ผลตอบที่ดีกว่า เนื่องจากผลตอบมีการแกว่งน้อยกว่า ส่วนในรูปที่ 3.7 ซึ่งเป็นผลตอบของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ พบว่ากรณีที่ละเลยความไม่แน่นอน รถสามารถวิ่งกลับสู่ตำแหน่งเดิมได้เร็วกว่า



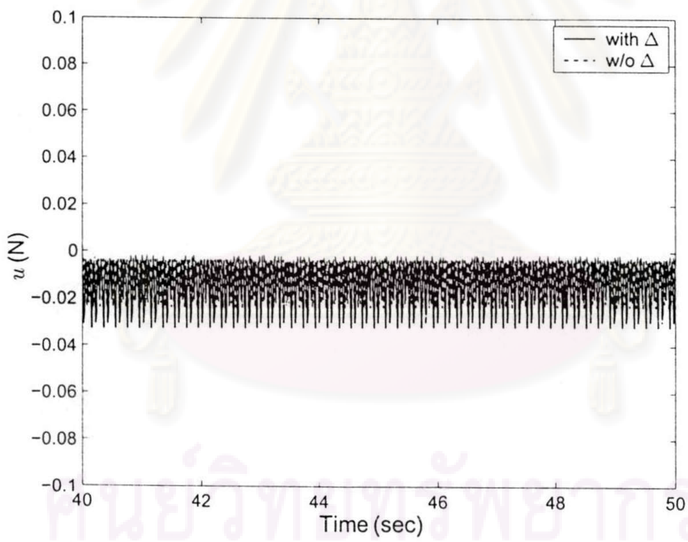

รูปที่ 3.8: สัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ (ตั้งแต่สภาวะเริ่มต้นถึงสภาวะอยู่ตัว)




รูปที่ 3.9: สัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ ในช่วง 5 วินาทีแรก




รูปที่ 3.10: ภาพขยายของสัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ ในช่วง 5 วินาทีแรก

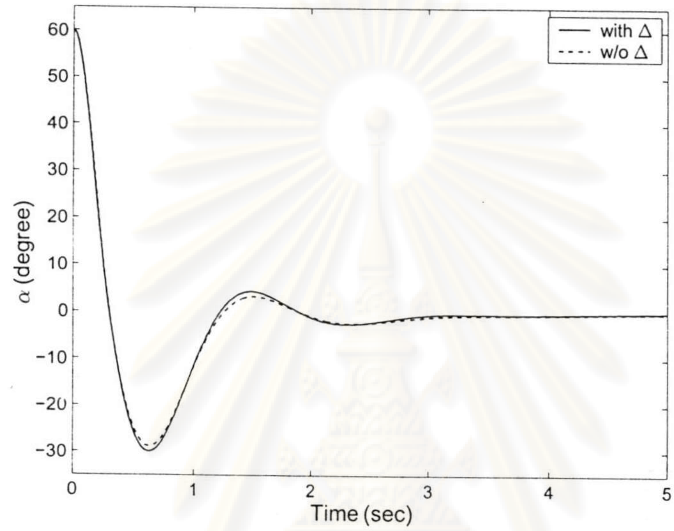



รูปที่ 3.11: ภาพขยายของสัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 86°$ ในช่วง 10 วินาทีสุดท้าย

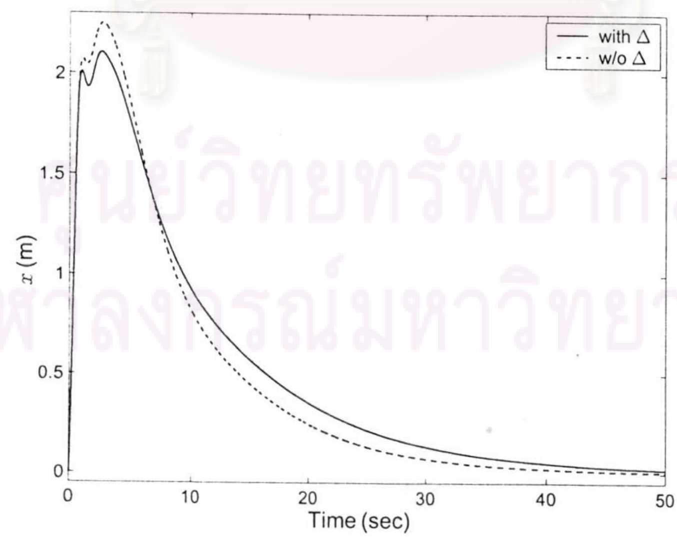
สัญญาณควบคุมนี้มีขนาดใหญ่มากในช่วงเวลาเริ่มต้นและลดลงอย่างรวดเร็ว ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากมุมที่เบี่ยงเบนในสภาวะเริ่มต้น และตัวควบคุมทั้งสองกรณีให้สัญญาณควบคุมที่มีค่าไม่ต่างกันมากนัก ในทางปฏิบัติสัญญาณควบคุมที่มีขนาดใหญ่เช่นนี้จำเป็นต้องใช้พลังงานสูง จึงนำตัวควบคุมนี้ไปควบคุมลูกตุ้มผกผันที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นสูงขนาดนี้ได้ลำบาก ควรใช้วิธีการควบคุมด้วยวิธีอื่นๆ เช่น ปล่อยให้ลูกตุ้มตกไปอยู่ในตำแหน่ง 180° ก่อนแล้วจึงแกว่งลูกตุ้มนี้ขึ้นมาในภายหลัง หรือกำหนดให้สัญญาณควบคุมมีการอิ่มตัว นอกจากนี้ยังมีวิธีการควบคุมแบบพลังงานน้อยที่สุด (minimum energy)

• กรณีที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้น $\alpha_0 = 60°$

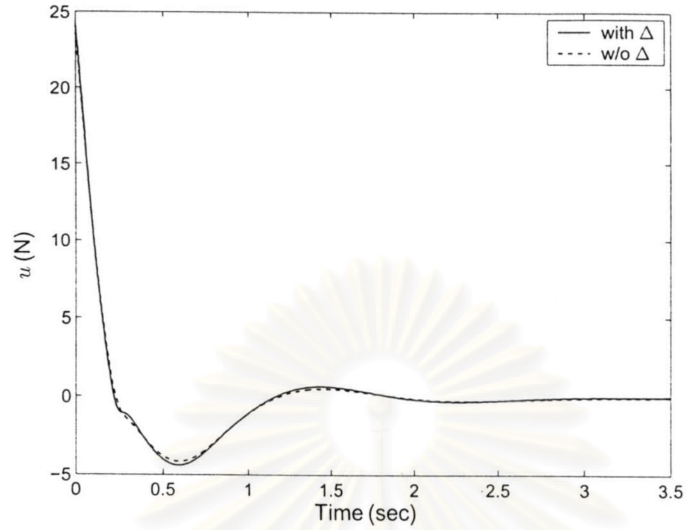
ในรูปที่ 3.12 ตัวควบคุมที่ละเลยความไม่แน่นอนให้ผลตอบที่แกว่งน้อยกว่า เมื่อพิจารณาระยะที่รถเคลื่อนที่ในรูปที่ 3.13 พบว่าตัวควบคุมที่คำนึงถึงความไม่แน่นอนมีส่วนพุ่งเกินต่ำกว่า แต่ก็วิ่งกลับไปสู่ตำแหน่งเริ่มต้นช้ากว่าด้วย สัญญาณควบคุมในรูปที่ 3.14 แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมทั้งสองกรณีให้สัญญาณควบคุมที่มีขนาดใกล้เคียงกัน และขนาดของสัญญาณควบคุมในขณะเริ่มต้นก็มิได้มีค่าสูงเช่นกรณีที่แล้ว




รูปที่ 3.12: มุมที่เบี่ยงเบนไปของลูกตุ้มผกผันเมื่อ $\alpha_0 = 60°$



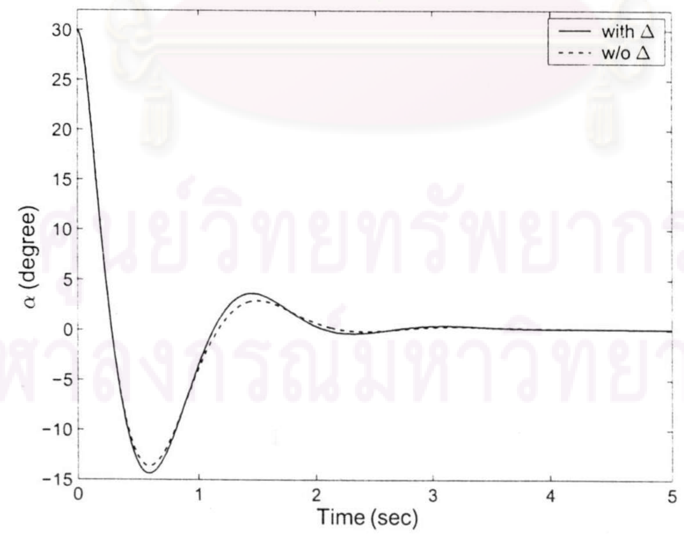

รูปที่ 3.13: ตำแหน่งของรถเมื่อ $\alpha_0 = 60°$



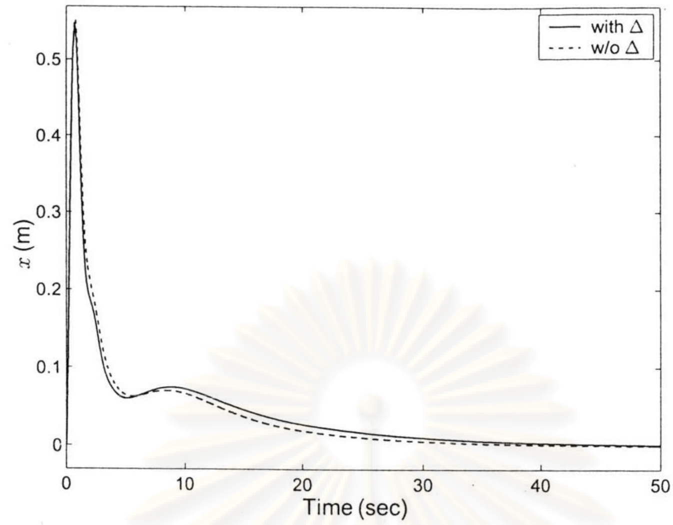

รูปที่ 3.14: สัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 60°$

- กรณีที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้น $\alpha_0 = 30°$

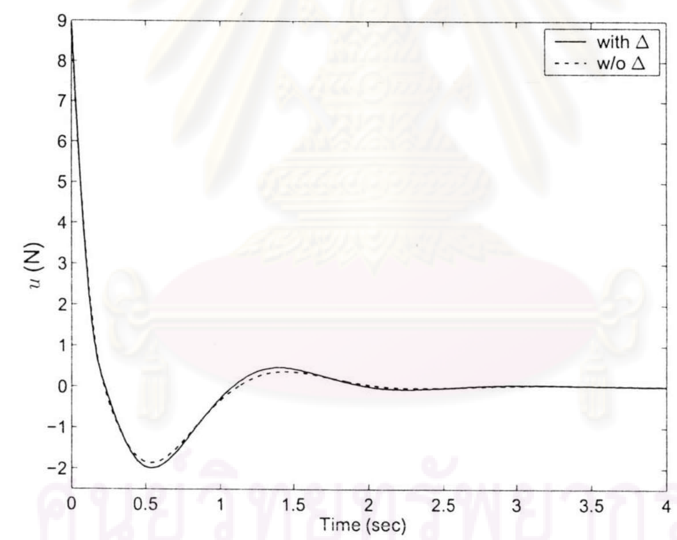
ในกรณีนี้ ผลตอบที่ได้เป็นไปในทางเดียวกับกรณีที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นเป็น $\alpha_0 = 60°$ นั่นคือ ผลตอบของมุมเบี่ยงเบนของตัวควบคุมที่ละเลยผลของความไม่แน่นอนแกว่งน้อยกว่า และรถก็วิ่งกลับไปสู่จุดเริ่มต้นเร็วกว่าด้วย ในขณะที่สัญญาณควบคุมที่ใช้แตกต่างกันน้อยมาก




รูปที่ 3.15: มุมที่เบี่ยงเบนไปของลูกตุ้มผกผันเมื่อ $\alpha_0 = 30°$

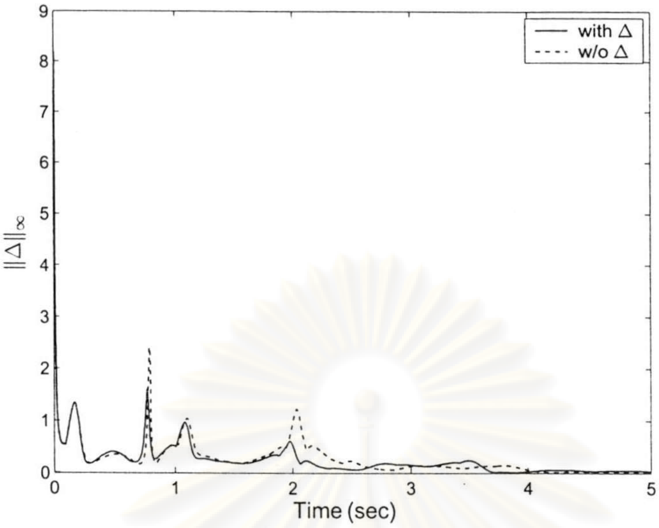



รูปที่ 3.16: ตำแหน่งของรถเมื่อ $\alpha_0 = 30°$




รูปที่ 3.17: สัญญาณควบคุมเมื่อ $\alpha_0 = 30°$

เมื่อพิจารณาโดยรวมแล้ว พบว่าตัวควบคุมที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอน มีผลตอบที่ใกล้เคียงกับกรณีที่ละเลยความไม่แน่นอน และมุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นสูงสุดที่ตัวควบคุมยังสามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้มีค่าใกล้เคียงกัน แสดงว่าการคำนึงถึงความไม่แน่นอนไม่ได้ทำให้ระบบมีเสถียรภาพที่ดีขึ้นดังที่คาดไว้ เมื่อพิจารณาถึงสาเหตุจะพบว่าความไม่แน่นอนในกรณีนี้มีค่าแค่ในช่วงเริ่มต้น ขณะที่มุมเบี่ยงเบนมีค่ามากหรือมีการเปลี่ยนแปลงมุมอย่างรวดเร็วเท่านั้นดังแสดงในรูปที่ 3.18




รูปที่ 3.18: นอร์มอนันต์ของความไม่แน่นอนของระบบลูกตุ้มผกผันบนรถเมื่อ $\alpha_0 = 86^\circ$

### 3.3.2 ระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน

จากภาคผนวก ค สมการสถานะของระบบเลี้ยงลูกบอลบนคานเป็นดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.34}$$

$$\dot{x}_2 = 6.785x_4 + 0.692w_\theta \tag{3.35}$$

$$\dot{x}_3 = -1.4444 \times 10^4 x_3 - 42.611x_5 + 5.5555 \times 10^3 u \tag{3.36}$$

$$\dot{x}_4 = x_5 \tag{3.37}$$

$$\dot{x}_5 = -3.3677 \times 10^2 x_1 + 2.6357x_3 + w_\Delta \tag{3.38}$$

$$z_\infty = -x_1 + w \tag{3.39}$$

$$y = \begin{bmatrix} -x_1 + w \\ -x_5 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$z_\theta = x_1 \tag{3.41}$$

$$z_\Delta = -0.981x_1 + 0.767 \times 10^{-2} x_3 \tag{3.42}$$

$$w_\theta = \theta z_\theta \tag{3.43}$$

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta \tag{3.44}$$

โดยที่ $\theta = \dot{\phi}^2$ และ $\Delta = \frac{-\dot{\Delta}}{J(J+\dot{\Delta})}$

เป้าหมายของการควบคุมนี้ คือ ต้องการให้ลูกบอลอยู่ตำแหน่งกึ่งกลางของคาน ดังนั้นสัญญาณเข้าภายนอกจึงมีค่าเป็นศูนย์ นอกจากนี้ลูกบอลต้องอยู่บนคานตลอดเวลา และมอเตอร์ไม่ควรหมุนด้วย

ความเร็วรอบที่สูง จึงเลือกสัญญาณออกที่ต้องการให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเอชทูเป็นดังนี้

$$z_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_5 & u \end{bmatrix}^T$$

กำหนดให้ $\gamma = 3.5$ และปรับค่า $B_\Delta$ ของระบบเป็น $\gamma\|\Delta\|_\infty B_\Delta$ เช่นเดียวกับกรณีระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ ได้ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่มีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$A_k = \begin{bmatrix} -2.911\times10^4 & -1.01\times10^4 & 1.345\times10^4 & 4182 & 4404 \\ -3.118\times10^4 & -1.083\times10^4 & 1.442\times10^4 & 4483 & 5010 \\ 2.166\times10^4 & 7514 & -1.001\times10^4 & -3111 & -3241 \\ -1.584\times10^4 & -5514 & 7353 & 2278 & 2491 \\ 3081 & 2283 & -3058 & -2118 & -1.857\times10^5 \end{bmatrix}$$

$$B_{k1} = \begin{bmatrix} -233 & 808.4 \\ -249.7 & 865.8 \\ 174 & -601.4 \\ -153 & 441 \\ -38.44 & -176.9 \end{bmatrix}$$

$$B_{k\theta} = \begin{bmatrix} -0.2394 \\ -0.2585 \\ 0.1727 \\ -0.1461 \\ -0.01109 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} 1656 & 1141 & -1519 & -472.4 & -504 \end{bmatrix}$$

$$C_{k\theta} = \begin{bmatrix} 3.652 & -7.742 & 19.44 & 1.029 & 385.9 \end{bmatrix}$$

$$D_{k11} = \begin{bmatrix} 26.31 & -91.3 \end{bmatrix}$$

$$D_{k1\theta} = 0.02704$$

$$D_{k\theta1} = \begin{bmatrix} 3.668 & 0.4477 \end{bmatrix}$$

$$D_{k\theta\theta} = -8.282\times10^{-7}$$

ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ไม่คำนึงถึงความไม่แน่นอนของระบบ ที่คำนวณตามวิธีในภาคผนวก ข เป็นดังนี้

$$A_k = \begin{bmatrix} -1.445\times10^4 & -108.3 & 23.28 & 0.3078 & 2.58 \\ -603 & -24.14 & 13.56 & -24.7 & -222.9 \\ -149.4 & -2.519 & 0.1573 & -1.558 & 200.5 \\ 188 & -102.8 & 61.14 & -137.5 & -403.8 \\ -3767 & -763.1 & 432.5 & -877.2 & -8990 \end{bmatrix}$$

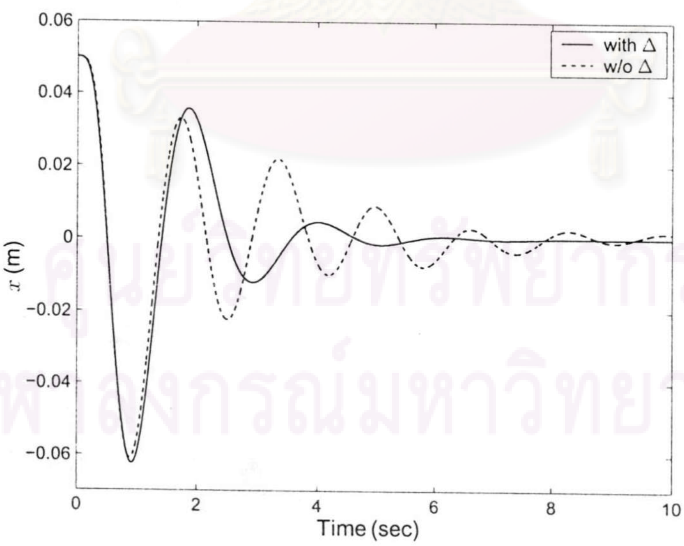
$$B_{k1} = \begin{bmatrix} 7524 & 387.9 \\ 168 & -4.435 \\ 154.2 & -56.45 \\ -617.4 & 293.4 \\ -8265 & 1623 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
B_{k\theta} &= \begin{bmatrix} -1.978 \times 10^{-3} \\ -3.996 \times 10^{-5} \\ -1.264 \times 10^{-4} \\ 6.869 \times 10^{-5} \\ -3.767 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
C_{k1} &= \begin{bmatrix} 0.079 & 2.077 & -0.4464 & -0.00603 & -0.04939 \end{bmatrix} \\
C_{k\theta} &= \begin{bmatrix} 23.78 & -197.8 & 53.69 & 372.7 & -2.361 \times 10^{4} \end{bmatrix} \\
D_{k11} &= \begin{bmatrix} -144.3 & -7.439 \end{bmatrix} \\
D_{k1\theta} &= 3.792 \times 10^{-5} \\
D_{k\theta 1} &= \begin{bmatrix} 16.66 & 60.47 \end{bmatrix} \\
D_{k\theta\theta} &= -3.683 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

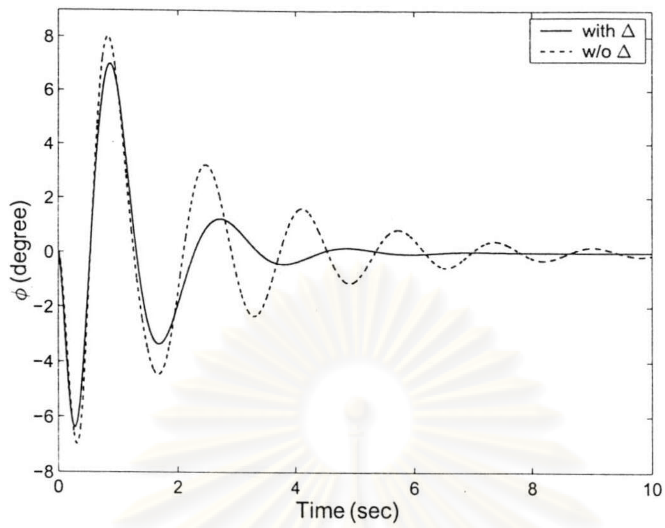
ผลการควบคุมเป็นดังนี้

- กรณีที่ตำแหน่งลูกบอลเริ่มต้นที่ $x_0 = 0.05$ m

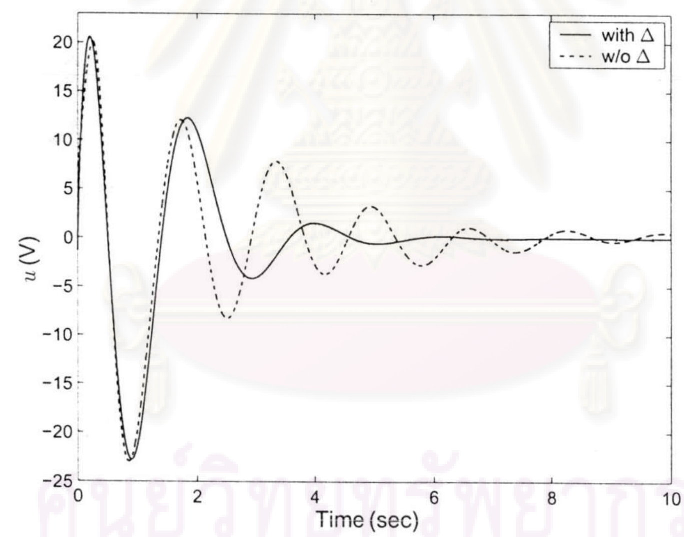
จากผลตอบของตำแหน่งลูกบอลในรูปที่ 3.19 ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอน ให้ผลตอบที่แกว่งน้อยกว่ากรณีที่ละเลยความไม่แน่นอน และลูกบอลหยุดนิ่งที่จุดกึ่งกลางของคานเร็วกว่า ทั้งนี้เนื่องจากมุมของคานในกรณีที่ละเลยความไม่แน่นอนมีส่วนพุ่งเกินที่สูงกว่า ลูกบอลจึงกลิ้งด้วยความเร็วที่สูงกว่า ดังนั้นผลตอบของตำแหน่งของลูกบอลจึงมีลักษณะที่แกว่งมากกว่า




รูปที่ 3.19: ตำแหน่งของลูกบอลเมื่อ $x_0 = 0.05$ m




รูปที่ 3.20: มุมของคานเมื่อ $x_0 = 0.05$ m

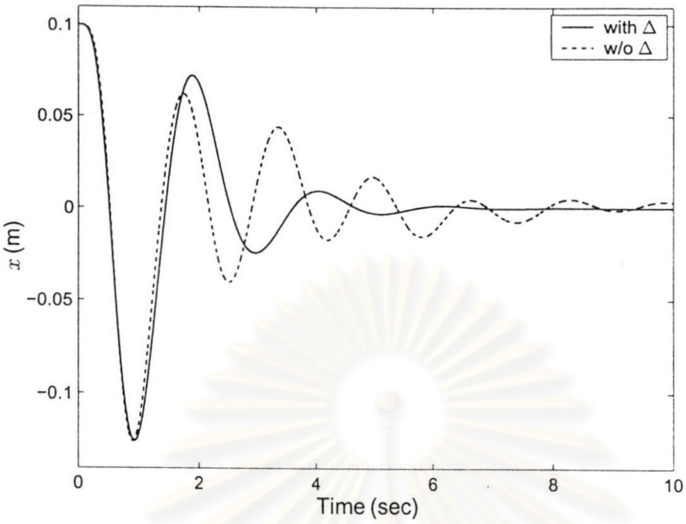



รูปที่ 3.21: สัญญาณควบคุมเมื่อ $x_0 = 0.05$ m

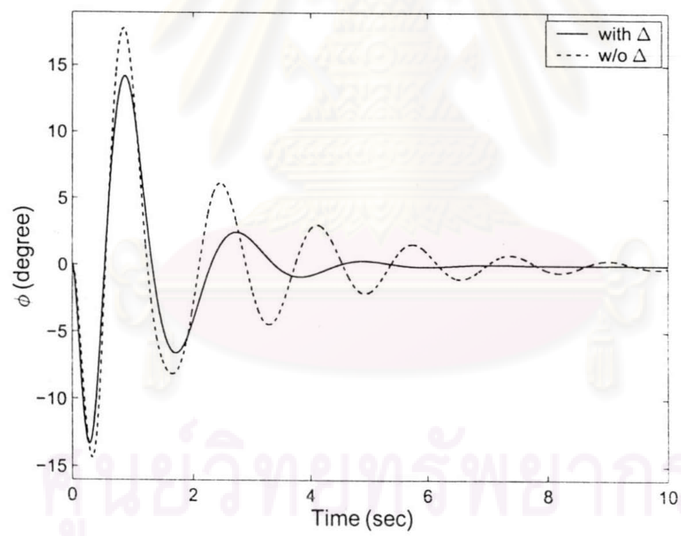


- กรณีที่ตำแหน่งลูกบอลเริ่มต้นที่ $x_0 = 0.1$ m

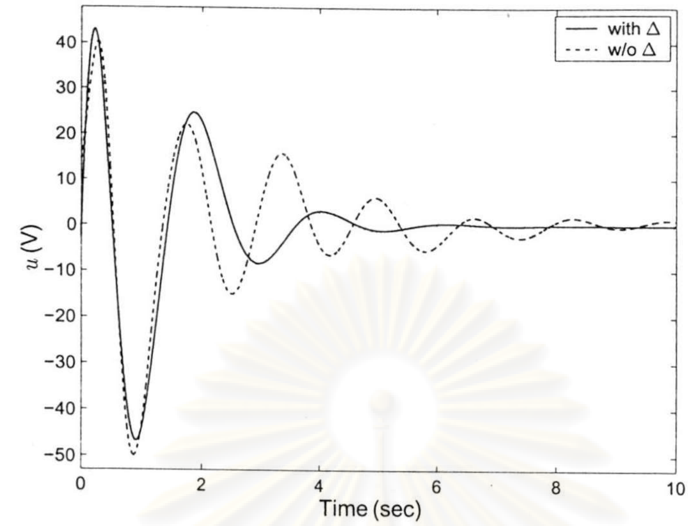
จากรูปที่ 3.22 และ 3.23 ผลตอบของตำแหน่งลูกบอลและมุมของคานในกรณีของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่ละเลยผลของความไม่แน่นอน มีการแกว่งมากกว่ากรณีที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอนเช่นเดียวกับกรณีที่เริ่มต้นที่ตำแหน่ง $x_0 = 0.05$ m




รูปที่ 3.22: ตำแหน่งของลูกบอลเมื่อ $x_0 = 0.1$ m



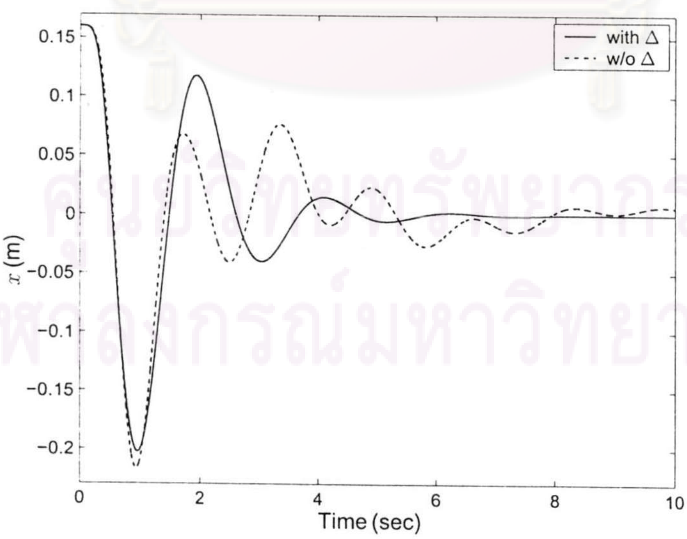

รูปที่ 3.23: มุมของคานเมื่อ $x_0 = 0.1$ m



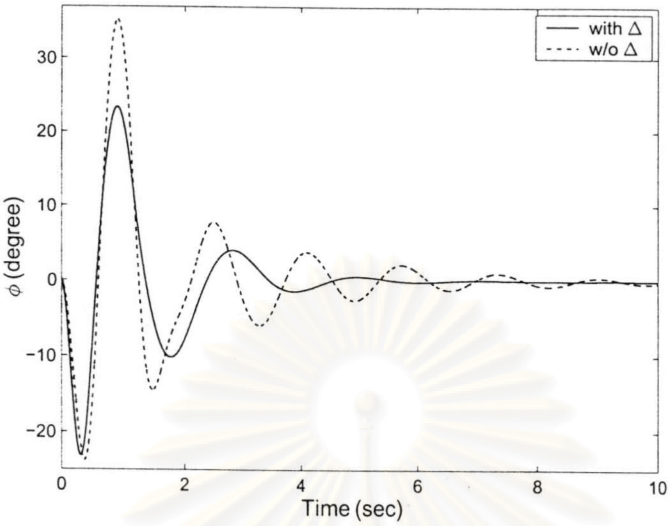

รูปที่ 3.24: สัญญาณควบคุมเมื่อ $x_0 = 0.1$ m

- กรณีที่ตำแหน่งลูกบอลเริ่มต้นที่ $x_0 = 0.16$ m

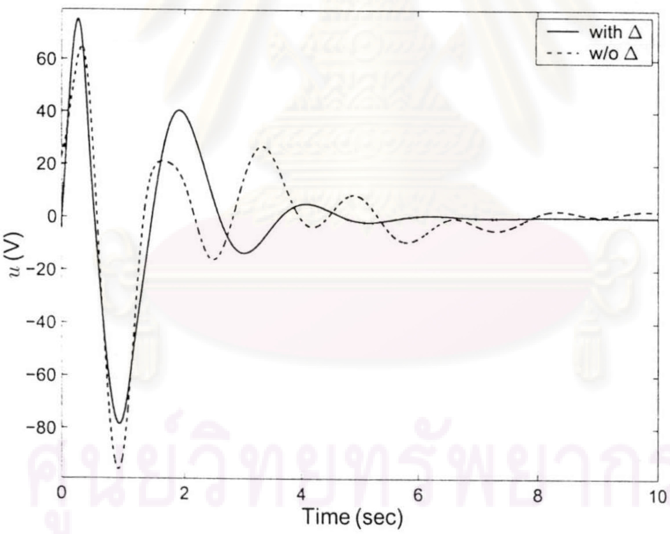
จากรูปที่ 3.25 ตำแหน่งของลูกบอลกรณีที่คำนึงถึงความไม่แน่นอน ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางคานมากที่สุดเท่ากับ 0.2027 m ซึ่งยังคงอยู่บนคาน แต่กรณีที่ละเลยความไม่แน่นอน จุดที่ห่างที่สุดมีค่าเท่ากับ 0.2171 m ซึ่งมากกว่าความยาวครึ่งหนึ่งของคาน ดังนั้นในกรณีที่ละเลยความไม่แน่นอนนี้ ลูกบอลจะกลิ้งตกจากคานตั้งแต่วินาทีที่ 0.9




รูปที่ 3.25: ตำแหน่งของลูกบอลเมื่อ $x_0 = 0.16$ m

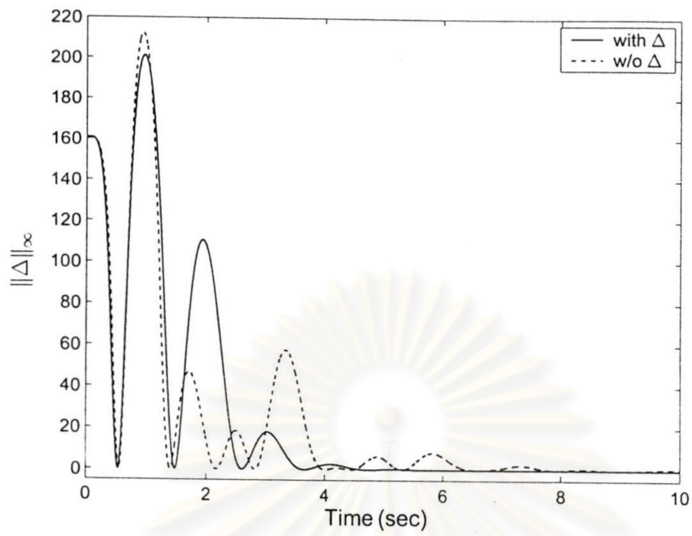



รูปที่ 3.26: มุมของคานเมื่อ $x_0 = 0.16$ m




รูปที่ 3.27: สัญญาณควบคุมเมื่อ $x_0 = 0.16$ m

จากผลตอบของระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน ผลตอบทุกผลตอบแสดงให้เห็นว่าตรงกันว่า การละเลยความไม่แน่นอนมีผลต่อการควบคุม ในรูปที่ 3.28 แสดงนอร์มอนันต์ของความไม่แน่นอนที่เวลาต่าง ๆ พบว่ากรณีที่คำนึงถึงความไม่แน่นอน นอร์มอนันต์จะลดลงได้เร็วกว่า และมีค่าเป็นศูนย์เร็วกว่าซึ่งเป็นผลมาจากการที่ลูกบอลหยุดที่จุดกึ่งกลางของคานได้เร็วกว่านั่นเอง




รูปที่ 3.28: นอร์มอนันต์ของความไม่แน่นอนของระบบเลี้ยงลูกบอลบนคานเมื่อ $x_0 = 0.16$ m

## 3.4 สรุป

ในบทนี้แสดงวิธีการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ สำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารา-มิเตอร์ ที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่มีโครงสร้าง ในช่วงท้ายได้แสดงตัวอย่างการควบคุมระบบลูกตุ้มผกผันบนรถและระบบเลี้ยงลูกบนคาน พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการควบคุมด้วยตัวควบคุมที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอน กับตัวควบคุมที่ละเลยความไม่แน่นอน จากผลตอบของระบบลูกตุ้มผกผันบนรถพบว่าตัวควบ-คุมทั้งสองสามารถควบคุมระบบได้ไม่ต่างกัน แต่ในกรณีของระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน ตัวควบคุมที่คิดถึงผลของความไม่แน่นอนสามารถควบคุมระบบได้ดีกว่า

จากตัวอย่างทั้งสองนี้ แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ละเลยความไม่แน่นอนที่เกิดจากการละเลยพลวัตช่วงความถี่สูงของระบบ (ดังเช่นกรณีระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ) ซึ่งเป็นความไม่แน่นอนที่มีค่าอยู่ในช่วงเวลาสั้นๆ หรือเป็นความไม่แน่นอนที่มีขนาดเล็กๆ ตัวควบคุมที่คำนึงถึงความไม่แน่นอนชนิดนี้ให้ผลการควบคุมไม่ต่างจากกรณีที่ละเลยผลของความไม่แน่นอน แต่ในกรณีที่ความไม่แน่นอนมีผลกับระบบในระยะยาวหรือมีขนาดใหญ่ (ดังเช่นกรณีระบบเลี้ยงลูกบอลบนคาน) ตัวควบคุมที่คำนึงถึงความไม่แน่นอนจะให้ผลการควบคุมที่ดีกว่า ดังนั้นในการนำตัวควบคุมนี้ไปประยุกต์ใช้กับระบบจริง ควรคำนึงถึงลักษณะของความไม่แน่นอนด้วย หากความไม่แน่นอนมีค่าภายในช่วงเวลาสั้นหรือเป็นความไม่แน่นอนที่มีขนาดเล็ก ความไม่แน่นอนในลักษณะนี้ส่งผลถึงสัญญาณออกน้อย ตัวควบคุมที่นำเสนอซึ่งเป็นตัวควบคุมที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอน จะให้ผลตอบที่ไม่ต่างจากกรณีที่ละเลยผลของความแน่แน่นอน แต่หากความไม่แน่นอนมีผลต่อสัญญาณออกมาก ตัวควบคุมที่คำนึงถึงผลของความไม่แน่นอนจะให้ผลตอบที่ดีกว่า