

บรรณานุกรม



หนังสือ

จุง เต ฟาน. ตารางวิเคราะห์ข้อสอบ. จัดพิมพ์ในประเทศไทย ใ้รับอนุญาตจาก E.T.S.  
แห่งสหรัฐอเมริกา. พระนคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2514.

จุมพล สวัสดิ์ติยากร. การร่างแบบสอบถาม และ ABC ในการวิจัย. กรุงเทพมหานคร:  
โรงพิมพ์สุวรรณภูมิ, 2520.

ชวาล แพร์ดีกุล. เทคนิคการวัดผล. พิมพ์ครั้งที่ 1. พระนคร: อักษรเจริญทัศน์, 2506.

ประคอง กรรณสูต. สถิติศาสตร์ประยุกต์สำหรับครู. พิมพ์ครั้งที่ 3. พระนคร:  
ไทยวัฒนาพานิช, 2515.

ประชุม สุวัठी และคนอื่นๆ. เสริมทักษะคณิตศาสตร์แผนใหม่ เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร:  
โรงพิมพ์อักษรประเสริฐ, 2520.

ไพศาล พลวัน. "การเรียนโดยการอภิปรายร่วมกัน." ใน โลกเวลาสอน: นวัตกรรมที่น่าสนใจ,  
หน้า 253 - 260. ลพบุรี: หัดดโกศลการพิมพ์, 2521.

อุทัย พิพิธกุล. การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: กรุงเทพมหานครการพิมพ์,  
2519.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือการสอนการศึกษาผู้ใหญ่แบบเบ็ดเสร็จ. กรุงเทพมหานคร:  
กองการศึกษาผู้ใหญ่, 2517.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี, สถาบัน. ข้อสอบวัดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม  
วิชาคณิตศาสตร์ ค.412. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์สุรสภา, 2522.

\_\_\_\_. แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.412 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพมหานคร:  
โรงพิมพ์สุรสภา, 2520.

สุจริต เพียรชอบ และนันทนา เนียมศรีจันทร์. ศิลปการประชุม. กรุงเทพมหานคร:  
อักษรเจริญทัศน์, 2521.

สุพล สุวรรณพ และคนอื่น ๆ. กณิตศาสตร์เชิงพฤติกรรม เล่ม 2 ก.412. กรุงเทพมหานคร: นิยมวิทยา, 2520.

สุเทพ จันทรสัมศักดิ์ และคนอื่น ๆ. แบบเรียนกณิตศาสตร์ ก.412. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

อัจฉรา ประไพตระกูล, "วิธีสอนแบบอภิปราย," ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับหลักสูตรและการสอนระดับมัธยมศึกษา, หน้า 69 - 71. สุจิต เพ็ชรชอบ และอัจฉรา ประไพตระกูล, ผู้รวบรวม. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

อุทุมพร ทองอุไทย. แบบสอบถาม: การสร้างและการใช้. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

### บทความ

สุเทพ จันทรสัมศักดิ์. "กณิตศาสตร์ในปัจจุบัน," สัปดาห์สาร 2 (ตุลาคม 2518 - มกราคม 2519): 16.

เอกวิทย์ ณ ถกลาง. "แนวการปฏิรูปเนื้อหาสาระและกระบวนการเรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษา คณะกรรมการวางแผนพื้นฐานเพื่อปฏิรูปการศึกษา." วารสารครูศาสตร์ 5 (พฤศจิกายน - ธันวาคม 2517): 5.

### เอกสารอื่น ๆ

คณะนิติบัญญัติสภาการศึกษา กณิตศาสตร์. เอกสารรายงานวิชาสัมมนา กณิตศาสตร์. ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ภาคต้น ปีการศึกษา 2522, (อัสสำเนา)

ทัศนีย์ อ่องโพบูลย์. "การสืบค้นปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการเรียนจากนัก เรียนชั้นมัธยมศึกษาของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดพระนคร." วิทยานิพนธ์ปริญญาโท บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2513.

- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. "การประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ (ฉบับที่ 2)." กรุงเทพมหานคร: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2520.
- \_\_\_\_. "บทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการเขียนข้อสอบวิชาพฤติกรรมชั้นต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์." กรุงเทพมหานคร: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2520.
- \_\_\_\_. เอกสารเสริมความรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพมหานคร: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2522.
- สุธีรา ทานตวนิช. "เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาวาทกรรม." กรุงเทพมหานคร: วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2516.
- ไสว นวลตรณี. "ภาคตัดกรวย." เอกสารการอบรมครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สภาคณบดีคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย, 2520.

### Books

- Best, John W. Research in Education. New Delhi: Prentice - Hall of India, 1963.
- Blaine, R. Worthen. "A Study of Discovery and Expository Presentation: Implication for Teaching." In Current Research in Elementary School Mathematics, pp. 135 - 155. Edited by Robert B. Ashlock and Wayne L. Herman, Jr. London: Macmillan Co., 1970.
- Bloom, Benjamin S.; Hastings, J. Thomas; and Madaus, George F. Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. New York: McGraw - Hill Book Co., 1971.
- Clark, Leonard H.; and Starr, Irving S. Secondary School Teaching Method. New York: Macmillan Co., 1976.

- Cooney, Thomas; Davis, Edward J.; and Handerson, K.B. Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics. Boston: Houghton Mifflin Co., 1975.
- Ebel, Robert L. Encyclopedia of Educational Research. London: Macmillan Co., 1969.
- \_\_\_\_\_. Measuring Educational Achievement. Englewood Cliffs: Prentice - Hall, 1965.
- Edwards, Allen L. Techniques of Attitude Scale Construction. New York: Appleton Century - Crofts, 1957.
- Entuistle, Harold. Child Centered Education. London: Mathuen Co., 1970.
- Gerlach, Vernon S.; and Ely, David P. Teaching and Media: A Systematic Approach. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice - Hall, 1971.
- Lardizabal, Amparo S., et al. Methods and Principles of Teaching. Quezen City: Alemar Pheenix, 1970.
- Leonard, Joan M., et al. General Methods of Effective Teaching. New York: Thomas Y. Crowell Co., 1972.
- Mckeachie, Wilbert J. "Research on Teaching at the College and University Level." Handbook of Research on Teaching International. Chicago: Rand McNally and Co., 1963.
- Moor, John T. Fundamental Principles of Mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1960.

Polya, George. Mathematical discovery. New York: John Wiley & Sons, 1962.

Reeve, William David. Mathematics for the Secondary School. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1960.

Standford, G.; and Standford, B.D. Learning Discussion Skills Through Games. New York: Citation Press, 1969.

Wood, Dorothy Adkins. Test Construction. Ohio: Charles E. Merrill Books, 1960

#### Other Materials

Davidson, Dennis. "Learning Mathematics in a Group Situation." Mathematics Teacher 21 (February 1974): 101 - 106.

Gilbert, Mages. "A Comparison of an Active Learning Approach with a Lecture Discussion Approach on a Unit in Probability and Statistics Developed for the Preservice Elementary School Teacher." Dissertation Abstracts International 36 (January 1976): 4419 - A.

Taylor, Loretta May. "Independent Study versus Presentation by Lecture and Discussion: A Comparative Study of Attitude and Achievement in Two Algebra I Classes." Dissertation Abstracts International 32 (January 1972): 3877 - A.

Wright, David William. "A Comparative Study of Two Leadership Styles in Goal-Bound Group Discussions." Dissertation Abstracts International 26 (June 1972): 7121 -A.



ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก.

1. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือได้ของแบบทดสอบก่อนนำไปใช้ในการวิจัยตามลำดับ ดังนี้
- 1.1 หาค่ามัธยฐาน เลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

x	f	fx	fx <sup>2</sup>
50	3	150	7500
49	1	49	2401
48	1	48	2304
47	1	47	2209
46	2	92	4232
45	1	45	2025
44	1	44	1936
43	3	129	5547
42	1	42	1764
41	2	82	3362
40	1	40	1600
39	6	234	9126
38	1	38	1444
37	3	111	4107
35	2	70	2450
34	6	204	6936
33	2	66	2178
32	4	128	4096

1.1 หาค่ามัธยฐานเลขคณิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ต่อ)

x	f	fx	fx <sup>2</sup>
31	3	93	2883
30	3	90	2700
29	3	87	2523
28	5	140	3920
27	1	27	729
26	7	182	4732
25	1	25	625
24	4	96	2304
23	3	69	1587
22	2	44	968
18	4	72	1296
16	5	80	1280
15	3	45	675
14	4	56	784
12	5	60	720
10	4	40	400
9	2	18	162
	N = 100	$\sum fx = 2843$	$\sum fx^2 = 93505$



ก. หาค่ามัธยฐานเลขคณิต

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร} \quad \bar{X} &= \frac{\sum fx}{N} \\
 &= \frac{2843}{100} \\
 &= 28.43
 \end{aligned}$$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร} \quad \text{S.D.} &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{93505}{100} - \left(\frac{2843}{100}\right)^2} \\
 &= \sqrt{935.05 - 808.2649} \\
 &= \sqrt{126.7851} \\
 &= 11.26
 \end{aligned}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.2 หากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือใจของแบบทดสอบเรื่อง "ภาคตัดกรวย" ก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร } r_{tt} &= \frac{n (S.D)^2 - \bar{X} (n - \bar{X})}{(S.D)^2 (n-1)} \\
 \bar{X} &= 28.43 \\
 (S.D.)^2 &= 126.7851 \\
 n &= 50 \\
 r_{tt} &= \frac{50 (126.7851) - 28.43 (50 - 28.43)}{(126.7851)(50 - 1)} \\
 &= \frac{50 (126.7851) - 28.43 (21.57)}{(126.7851)(49)} \\
 &= \frac{6339.255 - 613.2351}{6212.4699} \\
 &= \frac{5726.0199}{6212.4699} \\
 &= 0.9216978
 \end{aligned}$$

ดังนั้นแบบทดสอบที่สร้างขึ้นมีความเชื่อมั่น 0.92

2. แสดงการวิเคราะห์แบบทดสอบเรื่อง "ภาคตัดกรวย" เพื่อเลือกข้อที่มีอำนาจจำแนกและระดับความยากง่ายสูง (ใช้วิธีวิเคราะห์แบบตัด 27%)

ข้อที่	$P_H$	$P_L$	ความยากง่าย (P)	อำนาจจำแนก (r)	หมายเหตุ
1	1.00	0.85	0.94	0.47	
2	1.00	0.40	0.77	0.76	
3	1.00	0.77	0.91	0.56	
4	0.77	0.55	0.66	0.25	
5	0.74	0.37	0.56	0.38	
6	0.51	0.22	0.36	0.31	
7	0.85	0.22	0.54	0.62	*
8	0.85	0.15	0.50	0.68	*
9	0.92	0.22	0.60	0.70	*
10	1.00	0.56	0.83	0.69	
11	1.00	0.56	0.83	0.69	
12	0.96	0.52	0.78	0.59	
13	0.70	0.26	0.48	0.44	*
14	0.74	0.30	0.52	0.44	*
15	0.48	0.07	0.25	0.52	
16	0.70	0.26	0.48	0.44	
17	0.59	0.11	0.33	0.53	*
18	0.62	0.22	0.41	0.41	
19	0.66	0.11	0.36	0.58	*
20	1.00	0.33	0.74	0.79	*
21	0.96	0.44	0.74	0.64	
22	0.96	0.18	0.61	0.78	*
23	0.96	0.37	0.71	0.68	
24	0.96	0.11	0.57	0.82	*
25	0.63	0.00	0.25	0.78	
26	0.74	0.41	0.58	0.34	*
27	0.93	0.33	0.66	0.65	
28	0.77	0.03	0.35	0.77	*

2. แสดงการวิเคราะห์แบบทดสอบเรื่อง "ภาคตัดกรวย" เพื่อเลือกข้อที่มีอำนาจจำแนกและระดับความยากง่ายสูง (ใช้วิธีวิเคราะห์แบบตัด 27%) (ต่อ)

ข้อที่	$P_H$	$P_L$	ความยากง่าย (P)	อำนาจจำแนก (r)	หมายเหตุ
29	0.93	0.33	0.66	0.65	
30	0.81	0.19	0.50	0.61	*
31	1.00	0.33	0.74	0.79	
32	0.96	0.11	0.57	0.82	*
33	1.00	0.03	0.54	0.92	*
34	0.77	0.11	0.42	0.66	
35	0.88	0.33	0.62	0.57	
36	0.85	0.18	0.52	0.65	*
37	0.93	0.22	0.60	0.71	*
38	0.81	0.30	0.56	0.51	*
39	0.96	0.26	0.66	0.74	*
40	0.96	0.26	0.66	0.74	
41	0.74	0.29	0.52	0.45	*
42	0.88	0.18	0.54	0.68	*
43	0.92	0.11	0.52	0.78	*
44	0.92	0.18	0.57	0.73	*
45	0.74	0.22	0.48	0.52	*
46	0.85	0.04	0.41	0.80	
47	0.89	0.48	0.70	0.48	
48	0.93	0.11	0.53	0.79	*
49	0.89	0.26	0.59	0.64	
50	0.89	0.22	0.57	0.67	

จำนวนข้อสอบทั้งหมด	50	ข้อ
ข้อที่มีเครื่องหมาย * เก็บไว้ใช้	25	ข้อ
ข้ออื่น ๆ ตัดทิ้งไป	25	ข้อ

3. แสดงการหาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อใจของแบบทดสอบที่เลือกไว้ 25 ข้อ สำหรับใช้กับกลุ่มตัวอย่างประชากรจริง

3.1 หากคำข้อมติเลขกิตของคะแนนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบที่เลือกมา 25 ข้อ

x	f	fx	fx <sup>2</sup>
25	4	100	2500
23	4	92	2116
22	4	88	1936
21	5	105	2205
20	3	60	1200
19	6	114	2166
18	2	36	648
17	3	51	867
16	3	48	768
15	6	90	1350
14	5	70	980
13	8	104	1352
12	10	120	1440
11	4	44	484
10	3	30	300
9	3	27	243
7	5	35	245
6	6	36	216
5	6	30	150
3	6	18	54
2	4	8	16
	N = 100	$\Sigma fx = 1306$	$\Sigma fx^2 = 21236$

ก. หาค่ามัธยฐานเลขคณิต

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร } \bar{X} &= \frac{\sum fx}{N} \\
 &= \frac{1306}{100} \\
 &= 13.06
 \end{aligned}$$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร } S.D. &= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{21236}{100} - \left(\frac{1306}{100}\right)^2} \\
 &= \sqrt{212.36 - 170.5636} \\
 &= \sqrt{41.7964} \\
 &= 6.47
 \end{aligned}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2 หากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อถือได้ของแบบทดสอบเรื่อง "ภาคตัดกรวย" ที่เลือกมา 25 ข้อ สำหรับใช้กับกลุ่มตัวอย่างประชากรจริง

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร} \quad r_{tt} &= \frac{n (S.D.)^2 - \bar{X} (n - \bar{X})}{(S.D.)^2 (n - 1)} \\
 \bar{X} &= 13.06 \\
 (S.D.)^2 &= 41.7964 \\
 n &= 25 \\
 r_{tt} &= \frac{25 (41.7964) - 13.06 (25 - 13.06)}{(41.7964)(25 - 1)} \\
 &= \frac{25 (41.7964) - 13.06 (11.94)}{(41.7964)(24)} \\
 &= \frac{1044.91 - 155.9364}{1003.1136} \\
 &= \frac{888.9736}{1003.1136} \\
 &= 0.8862142
 \end{aligned}$$

ดังนั้นแบบทดสอบ 25 ข้อนี้มีความเชื่อมั่น 0.89

## ภาคผนวก ข.

1. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัธยฐานเลขคณิตจากการสอบก่อนการทดลอง ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง					กลุ่มควบคุม				
คะแนน	$x_1$	$f_1$	$f_1 x_1$	$f_1 x_1^2$	คะแนน	$x_2$	$f_2$	$f_2 x_2$	$f_2 x_2^2$
81 - 85	83	3	249	20667	76 - 80	78	12	936	73008
76 - 80	78	7	546	42588	71 - 75	73	7	511	37303
71 - 75	73	11	803	58619	66 - 70	68	11	748	50864
66 - 70	68	7	476	32368	61 - 65	63	2	126	7938
61 - 65	63	10	630	39690	56 - 60	58	5	290	16820
56 - 60	58	2	116	6728	51 - 55	53	3	159	8427
51 - 55	53	1	53	2809	46 - 50	48	1	48	2304
46 - 50	48	1	48	2304	41 - 45	43	1	43	1849
		$N_1 = 42$	$\sum f_1 x_1 = 2921$	$\sum f_1 x_1^2 = 205773$			$N_2 = 42$	$\sum f_2 x_2 = 2861$	$\sum f_2 x_2^2 = 198513$

$$N_1 = 42$$

$$\sum f_1 x_1 = 2921$$

$$\sum f_1 x_1^2 = 205773$$

$$N_2 = 42$$

$$\sum f_2 x_2 = 2861$$

$$\sum f_2 x_2^2 = 198513$$



กลุ่มทดลอง

$$\bar{X} = \frac{\sum f_1 x_1}{N_1}$$

$$= \frac{2921}{42}$$

$$= 69.55$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum f_1 x_1^2}{N_1} - \left(\frac{\sum f_1 x_1}{N_1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{205773}{42} - \left(\frac{2921}{42}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4899.3571 - 4836.8711}$$

$$= \sqrt{62.486}$$

$$= 7.91$$

$$\sigma_1^2 = 62.486$$

กลุ่มควบคุม

$$\bar{X} = \frac{\sum f_2 x_2}{N_2}$$

$$= \frac{2861}{42}$$

$$= 68.12$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum f_2 x_2^2}{N_2} - \left(\frac{\sum f_2 x_2}{N_2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{198513}{42} - \left(\frac{2861}{42}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4726.5 - 4640.2045}$$

$$= \sqrt{86.2955}$$

$$= 9.29$$

$$\sigma_2^2 = 86.2955$$

ศูนย์วิทยศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{69.55 - 68.12}{\sqrt{\frac{62.486}{42} + \frac{86.2955}{42}}} \\
 &= \frac{1.43}{\sqrt{3.5424166}} \\
 &= \frac{1.43}{1.8821308} \\
 &= 0.7598
 \end{aligned}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$\text{แต่ } 0.76 < 2.58$$

ดังนั้น ค่าสถิติมีเลขคี่ของคะแนนก่อนการทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01

ไม่แตกต่างกัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



2. แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัธยฐานเลขคณิตจากการสอบหลังการทดลองของนักเรียน  
กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง				กลุ่มควบคุม			
$x_1$	$f_1$	$f_1 x_1$	$f_1 x_1^2$	$x_2$	$f_2$	$f_2 x_2$	$f_2 x_2^2$
25	2	50	1250	25	2	50	1250
24	3	72	1728	23	1	23	529
23	3	69	1587	22	1	22	484
22	3	66	1452	21	4	84	1764
21	4	84	1764	20	5	100	2000
20	7	140	2800	19	5	95	1805
19	2	38	722	18	1	18	324
18	2	36	648	17	2	34	578
17	8	136	2312	16	6	96	1536
16	1	16	256	15	3	45	675
15	1	15	225	14	1	14	196
14	1	14	196	13	1	13	169
13	2	26	338	12	2	24	288
12	3	36	432	11	3	33	363
	$N_1$ = 42	$\sum f_1 x_1$ = 798	$\sum f_1 x_1^2$ = 15710	10	3	30	300
				9	1	9	81
				6	1	6	36
				$N_2$ = 42	$\sum f_2 x_2$ = 696	$\sum f_2 x_2^2$ = 12378	

$$\begin{aligned}
 & \text{กลุ่มทดลอง} \\
 N_1 &= 42 \\
 \sum f_1 x_1 &= 798 \\
 \sum f_1 x_1^2 &= 15710 \\
 \bar{x} &= \frac{\sum f_1 x_1}{N_1}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{798}{42}$$

$$= 19$$

$$s_1^2 = \sqrt{\frac{\sum f_1 x_1^2}{N_1} - \left(\frac{\sum f_1 x_1}{N_1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{15710}{42} - \left(\frac{798}{42}\right)^2}$$

$$= \sqrt{374.0476 - 361}$$

$$= \sqrt{13.0476}$$

$$= 3.61$$

$$s_1^2 = 13.0476$$

$$\begin{aligned}
 & \text{กลุ่มควบคุม} \\
 N_2 &= 42 \\
 \sum f_2 x_2 &= 696 \\
 \sum f_2 x_2^2 &= 12378 \\
 \bar{x}_2 &= \frac{\sum f_2 x_2}{N_2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{696}{42}$$

$$= 16.57$$

$$s_2^2 = \sqrt{\frac{\sum f_2 x_2^2}{N_2} - \left(\frac{\sum f_2 x_2}{N_2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12378}{42} - \left(\frac{696}{42}\right)^2}$$

$$= \sqrt{294.7143 - 274.6122}$$

$$= \sqrt{20.1021}$$

$$= 4.48$$

$$s_2^2 = 20.1021$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{19 - 16.57}{\sqrt{\frac{13.0476}{42} + \frac{20.1021}{42}}} \\
 &= \frac{2.43}{\sqrt{0.7893}} \\
 &= \frac{2.43}{0.8884134} \\
 &= 2.74
 \end{aligned}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

แต่  $2.74 > 2.58$

ดังนั้น มีขีดมีเลขกิติยของคะแนนหลังการทดลองที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01  
แตกต่างกัน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก.

## แผนการสอน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรื่อง "ภาคตัดกรวย"

1. เขียนความสัมพันธ์แนววงกลมได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมให้
2. หาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. หารัศมีของวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนกราฟแทนความสัมพันธ์ของวงกลมได้อย่างถูกต้อง
5. เขียนความสัมพันธ์แนวกราฟวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
6. ระบุสมการที่มีกราฟเป็นวงกลมได้อย่างถูกต้อง
7. บอกจุดที่อยู่บนวงกลมได้อย่างถูกต้อง
8. หาความสัมพันธ์แนววงกลมได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดผ่านให้
9. เขียนความสัมพันธ์แนววงกลมได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและเส้นสัมผัสให้
10. หาสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
11. หาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตรงได้อย่างถูกต้อง
12. หาจุดตัดของวงกลมสองวงได้อย่างถูกต้อง
13. เขียนสมการวงกลมที่มีความสัมพันธ์กับวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
14. ระบุสมการที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง
15. บอกลักษณะกราฟของสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
16. เขียนความสัมพันธ์แทนพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและไตเรคตริกซ์
17. หาความสัมพันธ์แทนพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดผ่าน จุดโฟกัสและจุดยอด
18. หาสมการพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดยอดและจุดโฟกัสให้
19. เขียนกราฟแทนความสัมพันธ์ของพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง
20. ระบุความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง
21. หาจุดโฟกัสได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของพาราโบลาให้

22. หาสมการโคเรลทริกซ์ใดถูกต้อง เมื่อกำหนดสมการพาราโบลามาให้
23. หาจุดตัดของพาราโบลากับเส้นตรงใดอย่างถูกต้อง
24. ระบุสมการที่มีกราฟเป็นวงรีใดอย่างถูกต้อง
25. หาสมการวงรีที่สอดคล้องกับรูปที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
26. เขียนความสัมพันธ์แทนวงรีใดอย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและผลบวกของระยะจากจุดใด ๆ ไปยังจุดโฟกัสให้
27. สร้างสมการวงรีใดอย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดตัดบนแกน  $X$  และแกน  $Y$  ให้
28. หาจุดโฟกัสของสมการวงรีที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
29. หาผลบวกคงที่ของระยะจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังจุดโฟกัสทั้งสองใดอย่างถูกต้อง
30. ระบุความสัมพันธ์แทนวงรีที่สอดคล้องกับจุดโฟกัสและจุดผ่านที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
31. หาจุดยอดของสมการวงรีที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
32. หาความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ของกราฟวงรีที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
33. ระบุสมการที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง
34. บอกลักษณะกราฟของสมการไฮเพอร์โบล่าที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
35. เขียนความสัมพันธ์แทนไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและผลต่างระหว่างระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่าไปยังโฟกัสทั้งสอง
36. บอกควอดรันต์ของกราฟไฮเพอร์โบล่าที่กำหนดให้ใดอย่างถูกต้อง
37. หาสมการที่สอดคล้องกับกราฟไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง
38. หาจุดตัดของไฮเพอร์โบล่ากับเส้นตรงใดอย่างถูกต้อง
39. หาจุดยอดของไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง
40. หาจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง
41. หาผลต่างคงที่ของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่าไปยังจุดโฟกัสทั้งสองใดอย่างถูกต้อง
42. หาความสัมพันธ์แทนไฮเพอร์โบล่าใดอย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดผ่านและจุดยอดให้

## ตอนที่ 1

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

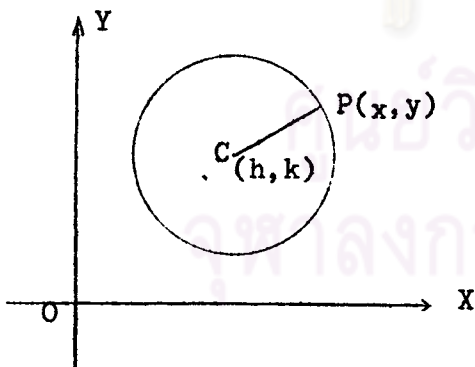
เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าส่วนโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ เป็น วงกลม วงรี พาราโบลาหรือไฮเพอร์โบลา
2. บอกนิยามของวงกลมได้ถูกต้อง
3. แสดงวิธีหาสูตรทั่วไปของสมการวงกลมได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์ที่เกี่ยวกับชั่วโมงได้ถูกต้อง 90%
5. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 85%

### รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. ถ้าตัดกรวยกลมด้วยระนาบที่ขนานกับฐานของกรวย รอยตัดจะเป็นรูปวงกลม ถ้าตัดในแนวที่ไม่ขนานกับฐานจะเป็นรูปวงรี แต่ถ้าตัดให้ขนานกับสูงเอียงของกรวยจะเป็นรูปพาราโบลา และถ้าตัดให้ตั้งฉากกับฐานของกรวยจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

2. วงกลมคือเซตของจุดทุกจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดหนึ่งที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดศูนย์กลางนี้เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า รัศมีของวงกลม



$P(x, y)$  เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ซึ่งมี  $C(h, k)$

$$|CP| = r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

ดังนั้น สูตรทั่วไปของสมการวงกลมคือ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + C = 0$$

3. โจทย์ที่เกี่ยวกับชั่วโมง

1. ถ้าตัดกรวยกลมด้วยระนาบที่ขนานกับสูงเอียง ส่วนโค้งที่เกิดขึ้นเป็นชนิดใด
2. จงหารัศมีและจุดศูนย์กลางของสมการ  $x^2 + y^2 = 5$
3. จงหารัศมีและจุดศูนย์กลางของสมการ  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
4. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 1, 4 - 7 หน้า 42 - 43



วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะกลุ่มทดลองชั้นนำ

ให้นักเรียนบอกสูตรระยะระหว่างจุด 2 จุด

ขั้นสอน

1. แจกเอกสารแนบแนวทางชุดที่ 1 ให้นักเรียนทำการทดลองเป็นกลุ่มย่อยอภิปรายผลการทดลองตัดกรวยกลมควัวยระนาบ
2. ให้นักเรียนอภิปรายเกี่ยวกับเรื่องของวงกลม
3. ให้นักเรียนช่วยกันหาสูตรทั่วไปของสมการวงกลม

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรทั่วไปของสมการวงกลม

กลุ่มควบคุมชั้นนำ

เหมือนกลุ่มทดลอง

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการตัดกรวยกลมควัวยระนาบในแนวต่าง ๆ โดยใช้หุ่นจำลองรูปกรวยกลม
2. ครูบอกนิยามของวงกลม
3. ครูแสดงวิธีหาสูตรทั่วไปของสมการวงกลม

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	ส่วนมากสนใจดี	ส่วนมากสนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	พยายามตอบคำถามดี	ชอบตอบ เป็นกลุ่ม
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	ให้ความร่วมมือดี	_____
4. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามเพื่อนในกลุ่ม	การซักถามมีน้อยมาก

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
5. ให้ทำใจที่ยืน 3 ข้อ	ทำถูก 3 ข้อ 36 คน ทำถูก 2 ข้อ 6 คน	ทำถูก 3 ข้อ 32 คน ทำถูก 2 ข้อ 10 คน
6. ให้ทำแบบฝึกหัดการบ้าน 5 ข้อ	ทำถูก 5 ข้อ 30 คน ทำถูก 4 ข้อ 12 คน	ทำถูก 5 ข้อ 28 คน ทำถูก 4 ข้อ 10 คน ทำถูก 3 ข้อ 4 คน

ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## เอกสารแนวทางการชุดที่ 1

### ตอนที่ 1 การตัดกรวยกลม

อุปกรณ์ ดินน้ำมันปั้นเป็นรูปกรวยกลม มีด

- กิจกรรม 1. ให้นักเรียนสังเกตรอยตัด ที่ระนาบตัดกรวยกลมในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้
- 1.1 ตัดกรวยกลมด้วยระนาบที่ขนานกับฐานของกรวย
  - 1.2 ตัดกรวยกลมด้วยระนาบที่ขนานกับสูงเอียงของกรวย
  - 1.3 ตัดกรวยกลมด้วยระนาบซึ่งไม่ตั้งฉาก ไม่ขนานกับฐานของกรวยและไม่ขนานกับสูงเอียง
  - 1.4 ตัดกรวยกลมสองอันที่มีจุดยอดรวมกันด้วยระนาบซึ่งตั้งฉากกับฐานของกรวยกลมทั้งสอง
2. ให้นักเรียนสรุปผลการทดลองว่า ส่วนโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมในแต่ละลักษณะเป็นอย่างไรบ้าง

### ตอนที่ 2 การอภิปรายเรื่อง "วงกลม"

1. วงกลมคืออะไร ?
2. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$  และมีรัศมี 3 หน่วย
3. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(1,2)$  และมีรัศมี 3 หน่วย  
(ขอแนะนำ : รัศมีวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน)
4. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h,k)$  และมีรัศมี  $r$  หน่วย แล้วสรุปสูตรทั่วไปของสมการวงกลม

## ตอนที่ 2

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
2. เขียนกราฟวงกลมจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. อธิบายลักษณะของวงกลมจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
5. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

### รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-2, 5)$  และมีรัศมี 2 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-2, 5)$  รัศมี 2 หน่วย คือ

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$$

$\therefore$  ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0\}$

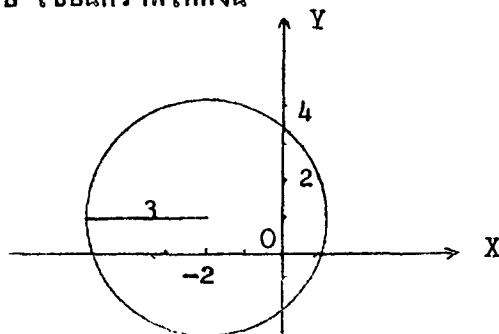
- ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0\}$

วิธีทำ  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$\therefore$  ความสัมพันธ์นี้มีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-2, 1)$  และมีรัศมี 3 หน่วย เขียนกราฟได้ดังนี้



2. ข้อสังเกต 1. พิจารณาสมการ  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$
- $$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = -1$$
- $$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$$
- ดังนั้น สมการนี้ไม่ใช่สมการวงกลมที่แท้จริง (imaginary circle หรือวงกลมจินตภาพ)
2. พิจารณาสมการ  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$
- $$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$$
- สมการนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ  $(x + 1)^2 = 0$  และ  $(y + 3)^2 = 0$
- นั่นคือ  $x = -1$  และ  $y = -3$
- ดังนั้นกราฟคือจุด  $(-1, -3)$  ซึ่งเรียกว่า วงกลมจุด (point circle)

### 3. โจทย์พิเศษ

1. สมการต่อไปนี้ เป็นสมการของวงกลมจุด วงกลมที่แท้จริง หรือวงกลมจินตภาพ

ก.  $(x - 3)^2 + y^2 - 9 = 0$

ข.  $(x - 3)^2 + y^2 + 9 = 0$

ค.  $(x - 3)^2 + y^2 + 9 = 9$

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของความสัมพันธ์  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 3y = 0\}$

4. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 2, 3, 8, 9, 10 หน้า 42 - 43

### วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<u>ชั้นนำ</u>	<u>ชั้นนำ</u>
1. ทบทวนเรื่องกำลังสองสมบูรณ์	เหมือนกลุ่มทดลอง
2. ทบทวนสูตรทั่วไปของสมการวงกลม	
<u>ชั้นสอน</u>	<u>ชั้นสอน</u>
1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างบนกระดานให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำกลุ่มละ 1 ข้อ	1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
2. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมาอธิบายโจทย์ ตัวอย่าง นักเรียนทั้งชั้นแสดงความคิดเห็น และซักถามข้อสงสัย	2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2
3. นักเรียนร่วมกันอภิปรายลักษณะของวงกลม จุดและวงกลมจินตภาพ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง	3. ครูอธิบายเรื่องวงกลมจุดและวงกลมจินตภาพพร้อมทั้งยกตัวอย่าง
<u>ขั้นสรุป</u>	<u>ขั้นสรุป</u>
1. นักเรียนช่วยกันสรุปขั้นตอนการทำโจทย์ 2. นักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะของวงกลมแบบต่าง ๆ	1. ครูสรุปขั้นตอนการทำโจทย์ 2. ครูสรุปลักษณะของวงกลมแบบต่าง ๆ

### การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจและการรวมกิจกรรม	สนใจและรวมกิจกรรมดี	ให้ความสนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	แสดงความคิดเห็นมากขึ้น	ชอบตอบเป็นกลุ่ม
3. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ส่วนมากซักถามเพื่อนในกลุ่ม	มีการถามครูบ้าง
4. ให้ทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ	ทำข้อ 1 ผิด 9 คน	ทำข้อ 1 ผิด 14 คน
5. ให้ทำโจทย์การบ้าน 5 ข้อ	ทำข้อ 2 ผิด 7 คน	ทำข้อ 2 ผิด 25 คน
	ทำถูก 5 ข้อ 4 คน	ทำถูก 4 ข้อ 15 คน
	ทำถูก 4 ข้อ 22 คน	ทำถูก 3 ข้อ 18 คน
	ทำถูก 3 ข้อ 12 คน	ทำถูก 2 ข้อ 7 คน
	ทำถูก 2 ข้อ 4 คน	ทำถูก 1 ข้อ 2 คน

### ตอนที่ 3

#### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาคความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและเส้นสัมผัสให้
2. หาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. หาจุดศูนย์กลางและรัศมีได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดบนเส้นรอบวงให้
4. อธิบายลักษณะของการตัดกันของวงกลมกับเส้นตรงในกรณีต่าง ๆ ได้ถูกต้อง
5. อธิบายลักษณะของการตัดกันของวงกลม 2 วงในกรณีต่าง ๆ ได้ถูกต้อง
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
7. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

#### รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. ตัวอย่างที่ 3 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(6, 1)$  และสัมผัสเส้น

$$\text{ตรง } 2x + y - 8 = 0$$

วิธีทำ

$$\text{รัศมีของวงกลม } = \frac{|2(6) + 1 - 8|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

จุดศูนย์กลางคือ  $(6, 1)$

$$\text{สมการวงกลมที่ต้องการคือ } (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 2y + 32 = 0$$

$$\text{ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ } \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 12x - 2y + 32 = 0\}$$

2. ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม  $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$  ที่จุด  $(2, 1)$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 5$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ  $(0, 2)$

$$\text{ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด } (0, 2) \text{ และ } (2, 1) \text{ คือ } \frac{2 - 1}{0 - 2} = \frac{1}{2}$$

ความชันของเส้นสัมผัสเป็น 2

$$\text{สมการเส้นสัมผัสคือ } y - 1 = 2(x - 2)$$

$$2x - y - 3 = 0$$

3. ตัวอย่างที่ 5 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่ผ่านจุด (2,3), (1,4) และ (5,2)

วิธีทำ ให้สมการวงกลมที่ต้องการ คือ  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  (1)

ผ่านจุด (2,3);  $2^2 + 3^2 + 2A + 3B + C = 0$

$$2A + 3B + C = -13 \quad (2)$$

ผ่านจุด (1,4);  $1^2 + 4^2 + A + 4B + C = 0$

$$A + 4B + C = -17 \quad (3)$$

ผ่านจุด (5,2);  $5^2 + 2^2 + 5A + 2B + C = 0$

$$5A + 2B + C = -29 \quad (4)$$

$$(2) - (3) \quad A - B = 4 \quad (5)$$

$$(4) - (2) \quad 3A - B = -16 \quad (6)$$

$$(6) - (5) \quad 2A = -20$$

$$A = -10$$

$$B = -14$$

$$C = 49$$

แทนค่า A, B, C ใน (1)  $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 49 = 0$

$$(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 25$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (5,7) รัศมี 5 หน่วย

4. โจทย์ที่ ๓ ทำอย่างไร

จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม สัมผัสแกน y ที่จุด (0,1) และมีรัศมี 3 หน่วย

5. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 13 - 16 หน้า 43

วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

กลุ่มควบคุม

ชี้แนะ

ชี้แนะ

1. ทบทวนเรื่อง การหาสมการเส้นตรง

เหมือนกลุ่มทดลอง

2. ทบทวนเรื่อง การหาระยะตั้งฉาก



กลุ่มทดลองชั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างบนกระดาน มอบให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำกลุ่มละ 1 ข้อ นักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อหาวิธีแก้ปัญหาโจทย์
2. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกไปอธิบายโจทย์ตัวอย่าง นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันแสดงความคิดเห็นและซักถามข้อสงสัย
3. นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายเรื่อง
  - ก. ลักษณะการตัดกันของวงกลม 2 วง
  - ข. ลักษณะการตัดกันของวงกลมกับเส้นตรง
  - ค. วิธีการหาจุดตัดในข้อ ก. และ ข.

ชั้นสรุป

นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีแก้ปัญหาโจทย์ในลักษณะต่าง ๆ

กลุ่มควบคุมชั้นสอน

1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 3
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4
3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 5
4. ครูแสดงการตัดกันของวงกลม 2 วงในลักษณะต่าง ๆ
5. ครูแสดงการตัดกันของวงกลมกับเส้นตรงในลักษณะต่าง ๆ
6. ครูอธิบายวิธีหาจุดตัดในข้อ 4 และ 5

ชั้นสรุป

ครูสรุปวิธีแก้ปัญหาโจทย์ในลักษณะต่าง ๆ

การวัดและประเมินผล

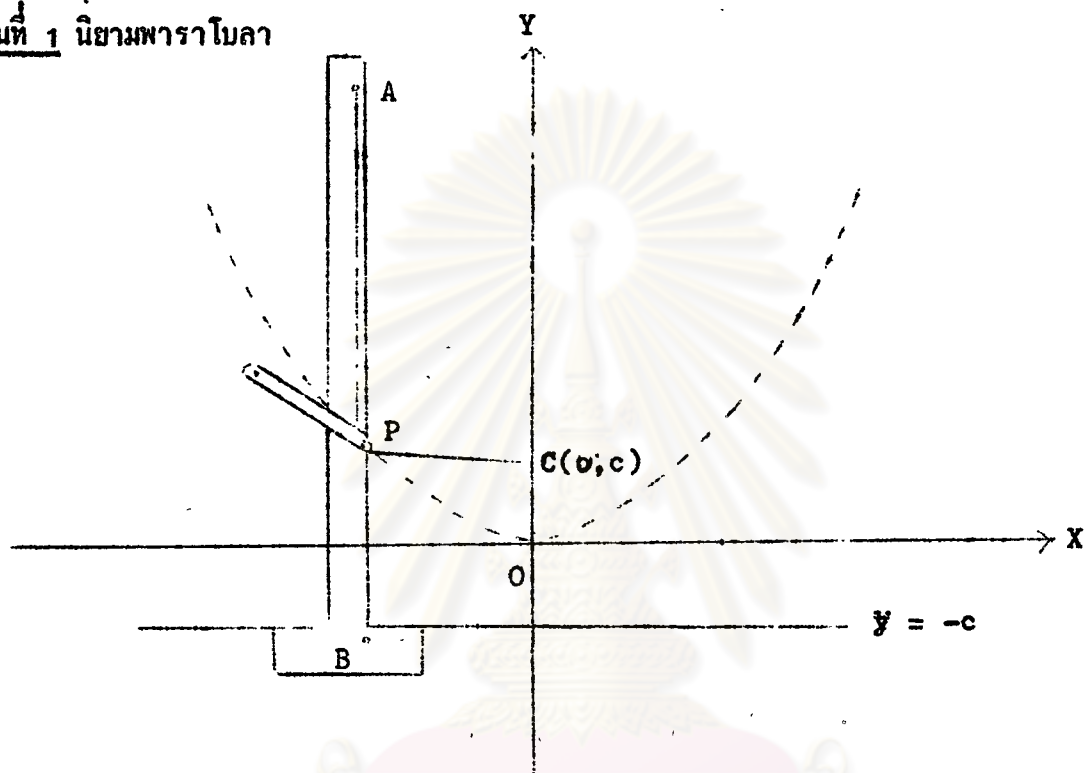
การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจและการรวมกิจกรรม	สนใจและรวมกิจกรรมดี	มีนักเรียนบางคนคุยกัน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	พยายามตอบคำถามดี	มีนักเรียนตอบคำถามอยู่กลุ่มเดียว
3. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	ถามครูบ้าง แต่ส่วนใหญ่ถามเพื่อนในกลุ่ม	มีการถามครูบ้าง
4. ให้ทำโจทย์ที่ ๗ 1 ข้อ	ทำถูก 30 คน	ทำถูก 22 คน
5. ให้ทำโจทย์การบ้าน 4 ข้อ	ทำถูก 4 ข้อ 5 คน	ทำถูก 3 ข้อ 10 คน
	ทำถูก 3 ข้อ 18 คน	ทำถูก 2 ข้อ 9 คน
	ทำถูก 2 ข้อ 15 คน	ทำถูก 1 ข้อ 13 คน
	ทำถูก 1 ข้อ 4 คน	ทำผิดหมด 10 คน

การสั่งงาน (สำหรับกลุ่มทดลอง)

1. ให้นักเรียนศึกษาประโยชน์ของพาราโบลา
2. ให้นักเรียนศึกษาเกี่ยวกับนิยามของพาราโบลา
3. ให้นักเรียนศึกษาวิธีหาสูตรทั่วไปของสมการพาราโบลา
4. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2

## เอกสารแนวทางการชุดที่ 2

### ตอนที่ 1 นิยามพาราโบลา



อุปกรณ์ แผ่นโฟม เชือก เข็มหมุด ไม้ T

- กิจกรรม
1. ปักเข็มหมุดตรงจุด C ให้ C อยู่ห่างจากแกน  $x = c$  (C เป็นจุดโฟกัส)
  2. ลากเส้นตรง  $y = -c$  เส้นตรงนี้จะเส้นไถเรคตริกซ์
  3. ผูกเส้นเชือกซึ่งยาวเท่ากับ AB โดยปลายหนึ่งผูกติดที่จุด C อีกปลายหนึ่งผูกที่ C
  4. เวลาจะเขียนกราฟ ให้เลื่อนไม้ T ไปตามแนวเส้นไถเรคตริกซ์ ใช้ดินสอดับเส้นเชือกวาดตามแนวไม้ T (ดังรูป)
  5. ให้นักเรียนพิจารณาแต่ละจุดบนกราฟว่าจุดที่ได้มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจุดคงที่ C และเส้นตรงที่กำหนดให้คือ  $y = -c$
  6. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของพาราโบลา

## ตอนที่ 2 การหาสูตรทั่วไปของสมการพาราโบลา

1. จงหาสมการพาราโบลาซึ่งโคเรคทริกซ์ คือ เส้นตรง  $x = -2$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $(2, 0)$  พร้อมทั้งเขียนกราฟคร่าว ๆ (ข้อแนะนำ : ใช้คุณสมบัติของนิยาม)
2. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งโคเรคทริกซ์เป็น  $x = -c$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $(c, 0)$
3. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งโคเรคทริกซ์เป็น  $y = -c$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $(0, c)$
4. สรุปสูตรทั่วไปของสมการพาราโบลา (ผลจากข้อ 2 และ 3)



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 4

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

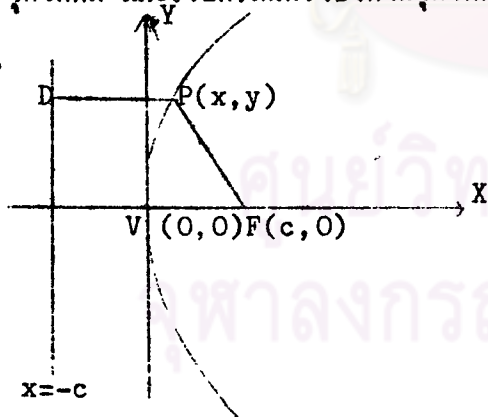
เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สรุปนิยามพาราโบลาได้ถูกต้อง
2. แสดงวิธีหาสูตรทั่วไปของสมการพาราโบลาได้ถูกต้อง
3. หาสมการพาราโบลาได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและเส้นไคเรตริกซ์ให้
4. เขียนกราฟพาราโบลาจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 90%
6. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 85%

รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. พาราโบลาเป็นเซตของจุดทุกจุด ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งและจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ เรียกเส้นตรงคงที่ที่กำหนดให้ว่า เส้นไคเรตริกซ์ เรียกจุดคงที่ที่กำหนดให้ว่า จุดโฟกัส และเรียกเส้นตรงซึ่งผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับไคเรตริกซ์ว่า แกนของพาราโบลา

2.



ให้จุด  $F(c, 0)$  เป็นจุดโฟกัส จุด  $V(0, 0)$  เป็น

จุดยอด

เส้นตรง  $x = -c$  เป็นเส้นไคเรตริกซ์

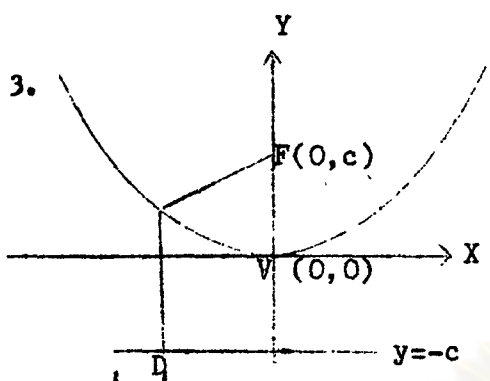
ถ้า  $P(x, y)$  เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

จะได้  $|PF| = |PD|$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c$$

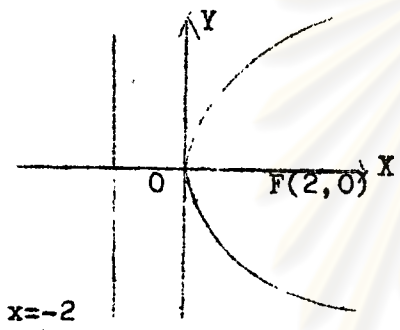
$$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$$

$$y^2 = 4cx$$



ถ้าจุดโฟกัสอยู่ที่  $(0,c)$   
 และโคเรคทริกซ์คือ  $y = -c$   
 จะได้  $x^2 = 4cy$

4. ตัวอย่างที่ 6 จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(2,0)$  และเส้นตรง  $x = -2$  เป็นโคเรคทริกซ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟคร่าว ๆ



จุดโฟกัสคือ จุด  $(2,0)$   
 โคเรคทริกซ์คือ  $x = -2$   
 สมการพาราโบลา คือ  $y^2 = 4(2)x$   
 $y^2 = 8x$

5. โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่  $(\frac{1}{2}, 0)$  และโคเรคทริกซ์คือ  $x = -\frac{1}{2}$

6. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 3 - 5 หน้า 49

วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<u>ขั้นนำ</u>	<u>ขั้นนำ</u>
นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายถึงประโยชน์ของพาราโบลา	ครูเล่าถึงประโยชน์ของพาราโบลา
<u>ขั้นสอน</u>	<u>ขั้นสอน</u>
1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มทดลองตามเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 2 อภิปรายผลเพื่อสรุปนิยามพาราโบลา	1. ครูบอกนิยามพาราโบลา
2. นักเรียนช่วยกันแสดงวิธีหาสูตรทั่วไปของ	2. ครูแสดงวิธีหาสูตรทั่วไปของสมการ

กลุ่มทดลอง

สมาการพาราโบล่า

ชั้นสรุป

นักเรียนร่วมกันสรุปนิยามและสูตรทั่วไปของ  
สมาการพาราโบล่า

กลุ่มควบคุม

พาราโบล่า

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6

ชั้นสรุป

ครูสรุปนิยามและสูตรทั่วไปของสมาการ  
พาราโบล่า

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจและการร่วมกิจกรรม	ให้ความร่วมมือดี	ส่วนใหญ่สนใจดี
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	มีการตอบคำถามน้อย	มีการตอบคำถามน้อย
3. สังเกตจากการซักถามครูและเพื่อน	มีการซักถามในกลุ่มมาก	มีการถามครูบ้าง
4. ให้ทำโจทย์พิเศษ 1 ข้อ	ทำถูก 40 คน	ทำถูก 38 คน
5. ให้ทำโจทย์การบ้าน 3 ข้อ	ทำถูก 3 ข้อ 35 คน ทำถูก 2 ข้อ 7 คน	ทำถูก 3 ข้อ 32 คน ทำถูก 2 ข้อ 10 คน

ตอนที่ 5



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาจุดโฟกัส ไคเรตริกซ์และแกนสมมาตรได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดสมการให้
2. ระบุลักษณะกราฟพาราโบลาได้ถูกต้อง เมื่อกำหนดสมการให้
3. บอกความแตกต่างของสมการพาราโบลา วงกลมและเส้นตรงได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 90%
5. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 85%

รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. สมการ  $y^2 = 4cx$  เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่  $(0,0)$  จุดโฟกัส  $(c,0)$  ไคเรตริกซ์คือ  $x=-c$  กราฟที่ได้สมมาตรกับแกน  $x$  ถ้า  $c > 0$  พาราโบลานี้จะเปิดทางขวา และถ้า  $c < 0$  จะเปิดทางซ้าย

สมการ  $x^2 = 4cy$  เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่  $(0,0)$  จุดโฟกัส  $(0,c)$  ไคเรตริกซ์คือ  $y=-c$  กราฟที่ได้สมมาตรกับแกน  $y$  ถ้า  $c > 0$  พาราโบลานี้จะหงาย ถ้า  $c < 0$  ไคเรตริกซ์คือ

2. ตัวอย่างที่ 7 จงหาจุดโฟกัส ไคเรตริกซ์และแกนสมมาตร ของสมการพาราโบลา

$$y^2 = -8x$$

วิธีทำ จาก  $y^2 = 4ax$  และ  $y^2 = -8x$

$$\therefore 4ax = -8x$$

$$a = -2$$

จุดโฟกัส คือ  $(-2,0)$

ไคเรตริกซ์ คือ  $x = 2$

แกน  $x$  เป็นแกนสมมาตร

3. โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาจุดโฟกัสและสมการไคเรตริกซ์ของสมการต่อไปนี้

1.  $x^2 = -6y$



$$2. y = -x^2$$

4. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 1, 6 หน้า 48 - 49

วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<p><u>ขั้นนำ</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ทบทวนนิยามของพาราโบลา</li> <li>2. ทบทวนสูตรทั่วไปของสมการพาราโบลา</li> </ol>	<p><u>ขั้นนำ</u></p> <p>เหมือนกลุ่มทดลอง</p>
<p><u>ขั้นสอน</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจกเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 3 ให้ นักเรียนแบ่งกลุ่มอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะกราฟพาราโบลาจากสมการที่กำหนดให้</li> <li>2. ให้นักเรียนร่วมกันหาจุดโฟกัส ไคเรคตริกซ์ และแกนสมมาตรจากสมการที่กำหนดให้</li> <li>3. กำหนดสมการเส้นตรง พาราโบลาและวงกลม ให้นักเรียนร่วมกันจำแนกว่า เป็นสมการชนิดใดบ้าง และหาผลสรุปว่าสมการแต่ละชนิดแตกต่างกันอย่างไร</li> </ol>	<p><u>ขั้นสอน</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ครูอธิบายลักษณะของกราฟพาราโบลา เมื่อกำหนดสมการมาให้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ</li> <li>2. ครูยกตัวอย่างสมการพาราโบลา พร้อมทั้งแสดงวิธีหาจุดโฟกัส ไคเรคตริกซ์และแกนสมมาตร</li> <li>3. ครูอธิบายความแตกต่างของสมการเส้นตรง พาราโบลา และวงกลม พร้อมทั้งยกตัวอย่าง</li> </ol>
<p><u>ขั้นสรุป</u></p> <p>นักเรียนร่วมกันสรุปลักษณะของสมการชนิดต่าง ๆ</p>	<p><u>ขั้นสรุป</u></p> <p>เหมือนกลุ่มทดลอง</p>

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดีมาก	สนใจเรียนดี
2. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	ให้ความร่วมมือดี	-
3. สังเกตจากการตอบคำถาม	พยายามตอบคำถามดี	ตอบคำถามได้ถูกต้อง
4. ใ้หัวใจหทัยที่ 2 ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ 40 คน ทำผิด 1 ข้อ 2 คน	ทำถูก 2 ข้อ 40 คน ทำผิด 1 ข้อ 2 คน
5. ใ้หัวใจหทัยที่บ้าน 2 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 37 คน ทำผิด 1 ข้อ 5 คน	ทำได้ถูกต้อง 35 คน ทำผิด 1 ข้อ 7 คน

การสั่งงาน (สำหรับกลุ่มทดลอง)

1. ใ้ให้นักเรียนศึกษาประโยชน์ของวงรี
2. ใ้ให้นักเรียนศึกษานิยามของวงรี
3. ใ้ให้นักเรียนศึกษาวิธีหาสมการทั่วไปของวงรี
4. ใ้ให้นักเรียนศึกษาเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 3

1. จากสมการพาราโบลาต่อไปนี้ จงหาจุดโฟกัส ไตเรคตริกซ์ แกนสมมาตร และเขียนกราฟ  
กราฟ ๆ

1.  $y^2 = 12x$

2.  $y^2 = -12x$

3.  $x^2 = 12y$

4.  $x^2 = -12y$

2. ผลจากข้อ 1 จงอธิบายลักษณะกราฟของสมการต่อไปนี้

1.  $y^2 = 4cx$

2.  $x^2 = 4cy$

3. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการเส้นตรง วงกลม พาราโบลา

1.  $x = 4y$

2.  $y^2 + x = 0$

3.  $-y = x^2$

4.  $5x^2 + 10x + 5y^2 = 15$

5.  $x + 2y - 5 = 0$

6.  $y^2 = 25 - x^2$

4. ผลจากข้อ 3 จงอธิบายความแตกต่างของสมการทั้ง 3 ชนิด

### เอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4

#### ตอนที่ 1 นิยามวงรี

อุปกรณ์ โฟม ตะปู เชือก ปากกาเมจิก

- กิจกรรม
1. ผูกเชือกเป็นวง คล้องไว้กับตะปู
  2. ใช้ปากกาเมจิกดันเชือกให้ตึง แล้วเขียนจุดต่าง ๆ ตามที่เชือกหมุนไป
  3. ให้นักเรียนพิจารณากราฟว่าเกี่ยวข้องกับความยาวเส้นเชือกอย่างไร
  4. ให้นักเรียนสรุปนิยามวงรี

#### ตอนที่ 2 การหาสูตรทั่วไปของสมการวงรี

1. จงหาสมการวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด  $P(x, y)$  ใด ๆ บนวงรีไปยังจุด  $(3, 0)$  และ  $(-3, 0)$  เท่ากับ 10  
(ขอแนะนำ : ใช้คุณสมบัติของนิยามวงรี)
2. จงหาสมการวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด  $P(x, y)$  ใด ๆ บนวงรีไปยังจุด  $(c, 0)$  และ  $(-c, 0)$  เท่ากับ  $2a$
3. จงหาสมการวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด  $P(x, y)$  ใด ๆ บนวงรีไปยังจุด  $(0, c)$  และ  $(0, -c)$  เท่ากับ  $2a$
4. สรุปสมการทั่วไปของวงรี (ผลจากข้อ 2 และ 3)

ศูนย์วิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาพที่ 6

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

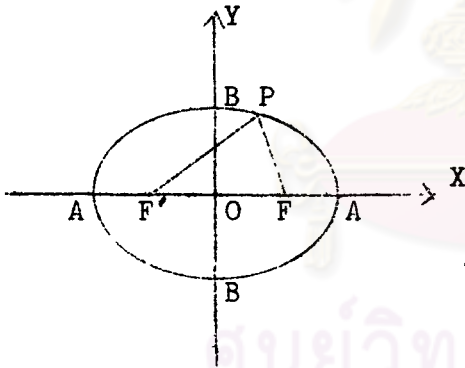
เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สรุปนิยามวงรีได้ถูกต้อง
2. ระบุส่วนต่าง ๆ ของรูปวงรีที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. หาสมการทั่วไปของวงรีได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
5. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

### รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. นิยาม วงรีเป็นเซตของจุดทุกจุดซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนส่วนโค้งของวงรีไปยังจุดคงที่ 2 จุดมีค่าคงที่

2.



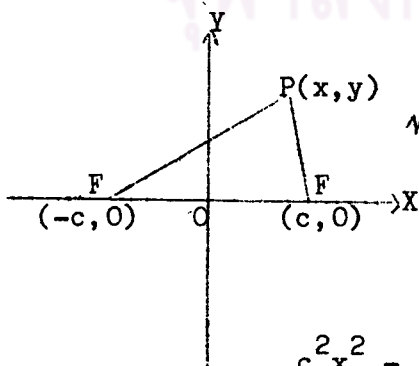
จุด F และ F' เป็นจุดคงที่ที่เรียกว่า จุดโฟกัส

จุด A และ A' เป็นจุดยอดของวงรี เรียกเส้นตรง AA' ว่าแกนหลักของวงรี

เรียกเส้นตรง BB' ว่า แกนรอง

$|PF| + |PF'|$  มีค่าคงที่

3. สมการทั่วไปของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน X



$P(x, y)$  เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

จะได้  $|PF| + |PF'| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

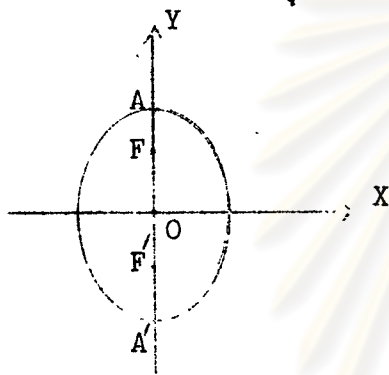
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

$0 < c < a$  ดังนั้น  $a^2 - c^2$  มีค่าเป็นบวก ให้  $a^2 - c^2 = b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. สมการทั่วไปของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $y$



จุดโฟกัสคือ  $F(0, c)$  และ  $F'(0, -c)$

จุดยอดคือ  $A(0, a)$  และ  $A'(0, -a)$

จะได้สมการวงรีคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

โดยที่  $a^2 - c^2 = b^2$

5. โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงหาสมการวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดโฟกัส  $(3, 0)$  และ  $(-3, 0)$  เท่ากับ 10

6. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 2, 3, 5, 6, 7.

วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

ขั้นนำ

นักเรียนร่วมกันอภิปรายประโยชน์ของวงรี

ขั้นสอน

1. นักเรียนแบ่งกลุ่มทดลองตามเอกสารแนะแนวทางชุดที่ 4 อภิปรายผลการทดลองเพื่อสรุปนิยามของวงรี

กลุ่มควบคุม

ขั้นนำ

ครูเล่าถึงประโยชน์ของวงรี เช่น ใช้ในการคำนวณการโคจรของดาวเคราะห์

ขั้นสอน

1. ครูบอกนิยามของวงรี แสดงวิธีเขียนรูปวงรีเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจนิยามมากยิ่งขึ้น

กลุ่มทดลอง

2. ให้นักเรียนออกมอธิบายส่วนต่าง ๆ ของ วงรีที่กำหนดให้ พร้อมทั้งบอกชื่อของแต่ละส่วน

3. นักเรียนช่วยกันแสดงวิธีหาสมการทั่วไป ของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $x$

4. ให้นักเรียนตั้งสมมุติฐานว่า สมการทั่วไป ของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $y$  เป็นอย่างไร พร้อมทั้งพิสูจน์ว่าตรงตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามและสมการทั่วไป ของวงรี

กลุ่มควบคุม

2. ครูอธิบายส่วนต่าง ๆ ของวงรี พร้อมทั้งบอกชื่อของแต่ละส่วน

3. ครูอธิบายวิธีหาสมการทั่วไปของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $x$

4. ครูอธิบายวิธีหาสมการทั่วไปของวงรี เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $y$

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดีมาก	สนใจเรียนดี
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	กระตือรือร้นในการทำกิจกรรมดี	ให้ความร่วมมือดี
3. สังเกตจากการตอบคำถาม	ตอบคำถามได้ถูกต้อง	ตอบคำถามได้ถูกต้อง
4. สังเกตจากการซักถาม	มีการซักถามในกลุ่มย่อยมาก	มีการซักถามครูบ้างเล็กน้อย
5. ให้ทำโจทย์พิเศษ 1 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 38 คน	ทำได้ถูกต้อง 32 คน
6. ให้ทำโจทย์การบ้าน 5 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 30 คน ทำผิด 1 ข้อ 8 คน ทำผิด 2 ข้อ 4 คน	ทำได้ถูกต้อง 25 คน ทำผิด 1 ข้อ 10 คน ทำผิด 2 ข้อ 7 คน

## ตอนที่ 7

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สร้างสมการวงรีจากสิ่ง โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง
2. หาจุดโฟกัสของวงรีจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. หาจุดยอดของวงรีจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
4. เขียนกราฟวงรีจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. ทำโจทย์ที่เกี่ยวกับชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
6. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

### รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการวงรี ซึ่งผลบวกของระยะจากจุดใด ๆ ไปยังจุดโฟกัส (3,0) และ (-3,0) เท่ากับ 8

วิธีทำ

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

$$c = 3$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$\therefore \text{สมการที่ต้องการคือ } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

2. ตัวอย่างที่ 9 จงหาจุดโฟกัสและจุดยอดของวงรี  $9x^2 + 4y^2 = 36$  แล้วเขียนกราฟคร่าว ๆ

วิธีทำ

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

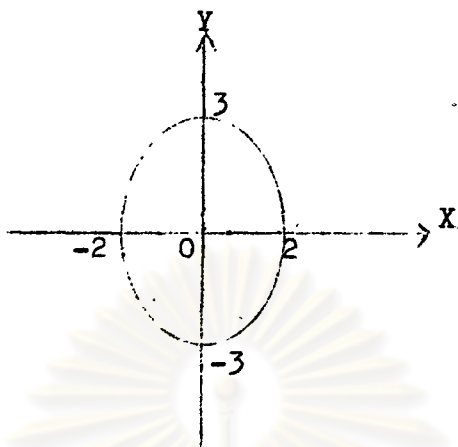
$$a^2 = 9, \quad b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

จุดโฟกัสคือ จุด  $(0, \sqrt{5})$  และจุด  $(0, -\sqrt{5})$

จุดยอดคือ จุด  $(0, 3)$  และจุด  $(0, -3)$





### 3. โจทย์ที่ท้าทายชั่วโมง

1. จงหาสมการวงรีซึ่งมีจุด  $(-8,0)$  และจุด  $(8,0)$  เป็นจุดโฟกัส จุด  $(10,0)$  และจุด  $(-10,0)$  เป็นจุดยอด

2. จงหาจุดยอดและจุดโฟกัสของวงรี  $25x^2 + 9y^2 = 225$

4. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 4, 8 หน้า 53 - 54

### วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

#### กลุ่มทดลอง

#### ขั้นนำ

1. ทบทวนนิยามวงรี
2. ทบทวนสมการทั่วไปของวงรี

#### ขั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 8 นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเพื่อหาวิธีแก้ปัญหาค้นหาโจทย์
2. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 9 นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเพื่อหาวิธีแก้ปัญหาค้นหาโจทย์
3. ครูเขียนสมการวงรีในลักษณะต่าง ๆ กันให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงความแตกต่างของสมการวงรีที่จุดโฟกัสอยู่บนแกนที่ต่างกัน

#### กลุ่มควบคุม

#### ขั้นนำ

เหมือนกลุ่มทดลอง

#### ขั้นสอน

1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 9
3. ครูอธิบายความแตกต่างของสมการวงรีที่จุดโฟกัสอยู่บนแกนที่ต่างกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่าง

<u>กลุ่มทดลอง</u>	<u>กลุ่มควบคุม</u>
<u>ชั้นสรุป</u> นักเรียนร่วมกันสรุปวิวัฒนาการจุดยอดและจุดโฟกัส จากสมการวงรีที่กำหนดให้	<u>ชั้นสรุป</u> เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

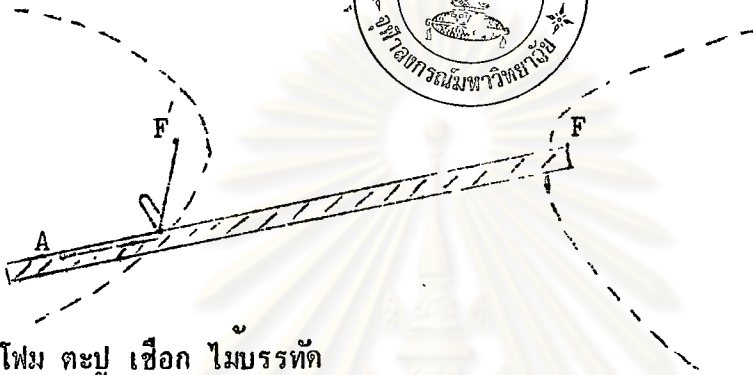
การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดี	นักเรียนบางกลุ่มคุยกัน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ตอบคำถามได้ถูกต้อง	ตอบคำถามเป็นบางกลุ่ม
3. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	ให้ความร่วมมือดี	-
4. ให้ทำโจทย์ที่ ๒ ข้อ	ทำถูก 2 ข้อ 32 คน	ทำถูก 2 ข้อ 28 คน
	ทำถูก 1 ข้อ 10 คน	ทำถูก 1 ข้อ 8 คน
5. ให้โจทย์การบ้าน 2 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 35 คน	ทำได้ถูกต้อง 33 คน
	ทำผิด 1 ข้อ 6 คน	ทำผิด, 1 ข้อ 7 คน

การสั่งงาน (สำหรับกลุ่มทดลอง)

- ให้นักเรียนศึกษาประวัติการค้นพบไฮเปอร์โบล่า
- ให้นักเรียนศึกษานิยามของไฮเปอร์โบล่า
- ให้นักเรียนศึกษาวิธีหาสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า
- ให้นักเรียนศึกษาเอกสารแนบแนวชุดที่ 5

## เอกสารแนวทางการชุดที่ 5

### ตอนที่ 1 นิยามไฮเปอร์โบล่า



อุปกรณ์ แผ่นโฟม ตะปู เชือก ไม้บรรทัด

- กิจกรรม
1. ใช้ปลายหนึ่งของเชือกผูกตรงมุมค้ำที่ปักอยู่บนไม้บรรทัด (ตรงจุด A ตามรูป) อีกปลายหนึ่งของเส้นเชือกผูกตรงจุดค้ำที่  $F'$
  2. ปลายข้างหนึ่งของไม้บรรทัดติดแน่นที่จุด F
  3. เมื่อจะเขียนกราฟ ลากคินส์ตามรอยเชือก โดยให้เชือกแนบกับไม้บรรทัดที่อยู่เสมอ
  4. จากข้อ 1 และ 2 เปลี่ยน  $F'$  เป็น F และเปลี่ยน F เป็น  $F'$  ตามลำดับ แล้วทำตามข้อ 3
  5. ให้นักเรียนพิจารณากราฟว่าเกี่ยวข้องกับความยาวของเส้นเชือกและไม้บรรทัดอย่างไร
  6. ให้นักเรียนสรุปนิยามของไฮเปอร์โบล่า

### ตอนที่ 2 การหาสูตรทั่วไปของสมการไฮเปอร์โบล่า

1. จงหาสมการของไฮเปอร์โบล่า ซึ่งผลต่างของระยะจาก  $P(x,y)$  ใด ๆ บนไฮเปอร์โบล่าไปยังจุดค้ำที่  $(4,0)$  และ  $(-4,0)$  เท่ากับ 3 (ข้อแนะนำ : ใช้คุณสมบัติของนิยาม)
2. จงหาสมการไฮเปอร์โบล่า ซึ่งผลต่างของระยะจาก  $P(x,y)$  ใด ๆ บนไฮเปอร์โบล่าไปยังจุดค้ำที่  $(c,0)$  และ  $(-c,0)$  เท่ากับ  $2a$
3. สรุปสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า

ภาพที่ 8

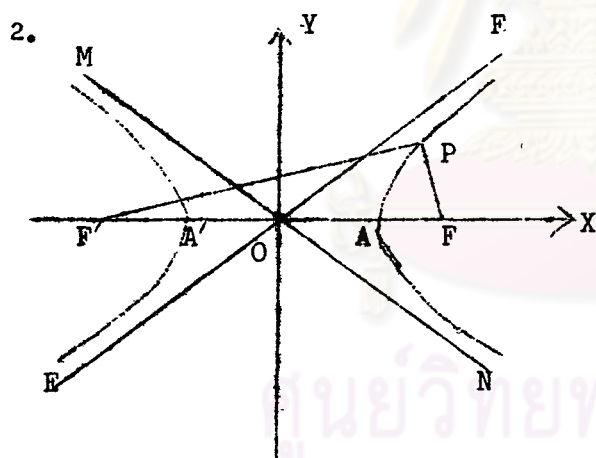
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สรุบนิยามไฮเปอร์โบล่าได้ถูกต้อง
2. ระบุส่วนต่าง ๆ ของรูปไฮเปอร์โบล่าได้ถูกต้อง
3. หาสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่าได้ถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
5. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

รายละเอียดเนื้อหาวิชา

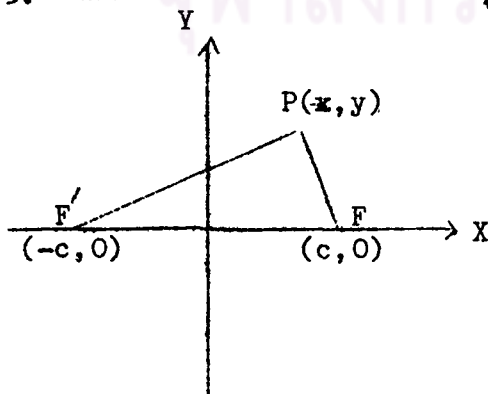
1. นิยาม ไฮเปอร์โบล่าเป็นเซตของจุดทุกจุด ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนส่วนโค้ง ไปยังจุดคงที่ 2 จุด มีค่าคงที่



จุด F และ F' เป็นจุดคงที่ที่เรียกว่าจุดโฟกัส  
จุด A และ A' เป็นจุดยอดของไฮเปอร์โบล่า  
เรียกเส้นตรง EF และ MN ว่า เส้นอะซิมโทต  
ให้ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบล่า

$|PF'| - |PF|$  มีค่าคงที่

3. สมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน X



P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเปอร์โบล่า

จะได้  $|PF'| - |PF| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

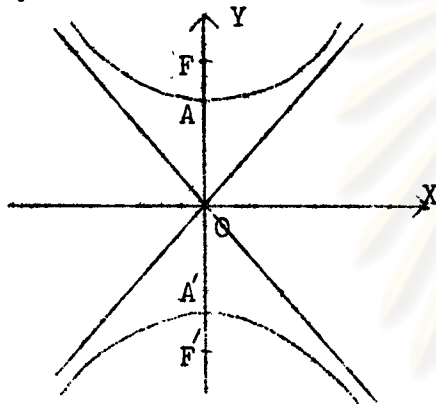
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$0 < a < c$  ดังนั้น  $c^2 - a^2$  มีค่าเป็นบวก ให้  $c^2 - a^2 = b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. สมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลา เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน y



จุดโฟกัสคือ F (0,c) และ F' (0,-c)

จุดยอดคือ A (0,a) และ A' (0,-a)

จะได้สมการวงรีคือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

โดยที่  $c^2 - a^2 = b^2$

5. โจทย์ที่ ๓ หน้า ๖๖

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดโฟกัส (5,0) และ (-5,0) เท่ากับ 8

6. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 2, 3, 5, 6

วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

กลุ่มทดลอง

ชั้นนำ

นักเรียนออกมาเล่าประวัติการค้นพบ

ไฮเพอร์โบลา

ขั้นสอน

- นักเรียนแบ่งกลุ่มทดลองตามเอกสารแนบแนวทางชุดที่ 5 อภิปรายผลการทดลองเพื่อ

กลุ่มควบคุม

ชั้นนำ

ครูเล่าประวัติการค้นพบไฮเพอร์โบลา

ขั้นสอน

- ครูอธิบายนิยามไฮเพอร์โบลา พร้อมทั้งแสดงวิธีเขียนรูปประกอบด้วย เพื่อให้เข้าใจดี

กลุ่มทดลอง

สรุปนิยามของไฮเปอร์โบล่า

2. ให้นักเรียนออกมามีอธิบายส่วนต่าง ๆ ของไฮเปอร์โบล่าที่กำหนดให้ พร้อมทั้งบอกชื่อของแต่ละส่วน

3. นักเรียนช่วยกันแสดงวิธีหาสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า เมื่อโฟกัสอยู่บนแกน  $x$ ,  $y$  เป็นอย่างไร พร้อมทั้งพิสูจน์ว่าตรงตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้หรือไม่

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามและสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า

กลุ่มควบคุม

ยิ่งขึ้น

2. ครูอธิบายส่วนต่าง ๆ ของไฮเปอร์โบล่า พร้อมทั้งบอกชื่อของแต่ละส่วน

3. ครูอธิบายวิธีหาสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า เมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน  $x, y$

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดีมาก	สนใจเรียนดี
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	ตั้งใจทำกิจกรรมดี	ให้ความร่วมมือดี
3. สังเกตจากการตอบคำถาม	ตอบคำถามได้ถูกต้อง	ตอบคำถามได้ถูกต้อง
4. ให้ความสนใจพิเศษ 1 ข้อ	ทำได้อีก 39 คน	ทำได้อีก 35 คน
5. ให้ความสนใจการบ้าน 4 ข้อ	ทำผิด 1 ข้อ 9 คน ทำผิด 2 ข้อ 3 คน	ทำผิด 1 ข้อ 8 คน ทำผิด 2 ข้อ 9 คน

ตอนที่ 9

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบตามแล้ว นักเรียนสามารถ

1. สร้างสมการไฮเพอร์โบล่าจากสิ่งทีโจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง
2. หาจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบล่าจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. หาจุดยอดของไฮเพอร์โบล่าจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
4. เขียนกราฟไฮเพอร์โบล่าจากสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 85%
6. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 80%

รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. ตัวอย่างที่ 10 จงหาสมการไฮเพอร์โบล่า โดยที่จุด  $(4,0)$  และ  $(-4,0)$  เป็นจุดโฟกัส และผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ ถึงจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

$$c = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore \text{สมการที่ต้องการคือ } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

2. ตัวอย่างที่ 11 จงหาจุดโฟกัสและจุดยอดของไฮเพอร์โบล่า  $16y^2 - 9x^2 = 144$  แล้ว

เขียนกราฟคร่าว ๆ

วิธีทำ

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

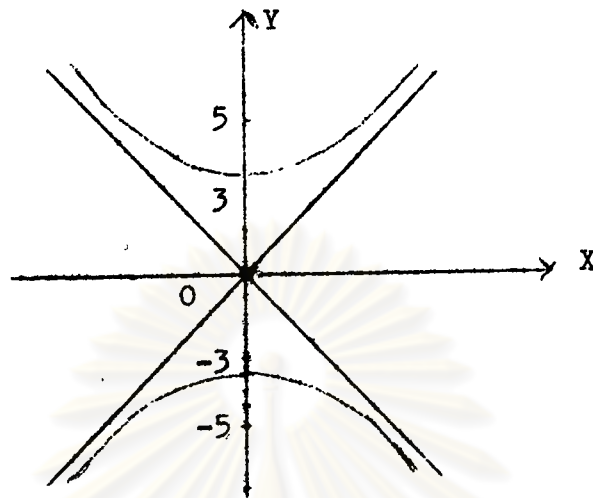
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 9 \quad b^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$$

จุดโฟกัสคือจุด  $(0,5)$  และจุด  $(0,-5)$

จุดยอดคือจุด  $(0,3)$  และจุด  $(0,-3)$



### 3. โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุด  $(0, 5)$  และจุด  $(0, -5)$  เป็นจุดยอด จุด  $(0, 7)$  และจุด  $(0, -7)$  เป็นจุดโฟกัส

2. จงหาจุดยอดและจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

4. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 1.1, 1.2 และข้อ 4 หน้า 59 - 60

### วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

#### กลุ่มทดลอง

#### ขั้นนำ

1. ทบทวนนิยามวงรี
2. ทบทวนสมการทั่วไปของวงรี

#### ขั้นสอน

1. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 10 นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปราย เพื่อหาวิธีแก้ปัญหาโจทย์
2. ครูเขียนโจทย์ตัวอย่างที่ 11 นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปราย เพื่อหาวิธีแก้ปัญหาโจทย์

#### กลุ่มควบคุม

#### ขั้นนำ

เหมือนกลุ่มทดลอง

#### ขั้นสอน

1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 10
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 11



กลุ่มทดลอง

3. ครูเขียนสมการไฮเปอร์โบล่าในลักษณะต่าง ๆ กัน ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงความแตกต่างของสมการไฮเปอร์โบล่าที่จุดโฟกัสอยู่บนแกนที่ต่างกัน

ขั้นสรุป

นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีหาจุดยอด และจุดโฟกัสจากสมการวงรีที่กำหนดให้

กลุ่มควบคุม

3. ครูอธิบายความแตกต่างของสมการไฮเปอร์โบล่าที่จุดโฟกัสอยู่บนแกนที่ต่างกัน พร้อมทั้งยกตัวอย่าง

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดี	นักเรียนบางกลุ่มคุยกัน
2. สังเกตจากการตอบคำถาม	ตอบคำถามได้ถูกต้อง	ตอบคำถามเป็นบางกลุ่ม
3. สังเกตจากการซักถาม	มีการซักถามในกลุ่มย่อยมาก	มีส่วนน้อยที่ซักถามครู
4. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	ให้ความร่วมมือดี	-
5. ให้ทำโจทย์พิเศษ 2 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 35 คน ทำผิด 1 ข้อ 7 คน	ทำได้ถูกต้อง 28 คน ทำผิด 1 ข้อ 5 คน
6. ให้ทำโจทย์การบ้าน 3 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 30 คน ทำผิด 1 ข้อ 6 คน ทำผิด 2 ข้อ 5 คน	ทำได้ถูกต้อง 29 คน ทำผิด 1 ข้อ 6 คน ทำผิด 2 ข้อ 4 คน

การสั่งงาน (สำหรับกลุ่มทดลอง)

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มไปหาโจทย์เกี่ยวกับเรื่อง "ภาคตัดกรวย" มากลุ่มละ 3 ข้อ

ภาพที่ 10

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบคาบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟไฮเพอร์โบลาคณิตมจากได้ถูกต้อง
2. ระบุดาวอครันต์ของกราฟไฮเพอร์โบลาคณิตมจากที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
3. หาสมการเส้นอะซิมโทตของไฮเพอร์โบลาคณิตมจากได้ถูกต้อง
4. บอกชนิดของสมการที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. บอกลักษณะความแตกต่างของสมการแต่ละชนิดได้ถูกต้อง
6. ทำแบบฝึกหัดในห้องเรียนได้ถูกต้อง 90%
7. ทำแบบฝึกหัดการบ้านได้ถูกต้อง 85%

รายละเอียดเนื้อหาวิชา

1. สมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลาคณิตมจากคือ  $xy = k$



ถ้า  $k > 0$  กราฟของสมการ  $xy = k$  จะอยู่ภายในดาวอครันต์ที่ 1 และที่ 3  
 ถ้า  $k < 0$  กราฟของสมการ  $xy = k$  จะอยู่ภายในดาวอครันต์ที่ 2 และที่ 4

กราฟของสมการ  $xy = k$  มีสมการ  $x = 0$  และ  $y = 0$  เป็นเส้นอะซิมโทต

2. โจทย์แบบฝึกหัดในห้องเรียน

จงบอกว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการเส้นตรง วงกลม วงรี พาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลาคณิตม

1.  $x = \frac{5}{y}$
2.  $4x^2 + 9y^2 = 36$

3.  $y^2 = x$

4.  $4x^2 + 4y^2 = 1$

5.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

6.  $\frac{x}{25} + \frac{y}{36} = 1$

7.  $4x^2 + 5y^2 = 1$

8.  $x^2 + y = 0$

9.  $2x^2 = 1 - 2y^2$

10.  $x^2 = 1 + y^2$

3. โจทย์แบบฝึกหัดเป็นการบ้าน ข้อ 1.3, 1.4, 7, 8 หน้า 59 - 60

### วิธีสอนและกิจกรรมเสนอแนะ

#### กลุ่มทดลอง

#### ขั้นนำ

ให้นักเรียนกล่าวถึงสมการไฮเปอร์โบลาคณิต

มูมจากที่เคยเรียนมา

#### ขั้นสอน

1. ครูเขียนสมการ  $xy = 6$  และ  $xy = -6$

บนกระดานดำ ให้นักเรียนเขียนกราฟ

2. ให้นักเรียนสรุปสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบล่า และบอกถวอครันต์ของกราฟในเงื่อนไขต่าง ๆ พร้อมทั้งหาสมการของเส้นอะซิมีโทต

3. ครูเขียนสมการชนิดต่าง ๆ ให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นสมการชนิดใด พร้อมทั้งอภิปรายว่าสมการแต่ละชนิดมีลักษณะแตกต่างกันอย่างไร

#### กลุ่มควบคุม

#### ขั้นนำ

เหมือนกลุ่มทดลอง

#### ขั้นสอน

1. ครูบอกสมการทั่วไปของไฮเปอร์โบลาคณิต

มูมจาก และสมการเส้นอะซิมีโทต

2. ครูแสดงวิธีเขียนกราฟของสมการ  $xy = 6$

และ  $xy = -6$  พร้อมทั้งอธิบายวิธี

พิจารณาว่ากราฟจะอยู่ในควอครันต์ใด

3. ครูอธิบายลักษณะความแตกต่างของสมการ

เส้นตรง วงกลม วงรี พาราโบล่า และ

ไฮเปอร์โบล่า พร้อมทั้งยกตัวอย่างของสมการแต่ละชนิด

กลุ่มทดลอง

4. แบ่งกลุ่มนักเรียนให้แข่งขันทำโจทย์แบบฝึกหัดในห้องเรียน ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ชนะเลิศ

5. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมาเสนอปัญหาที่กลุ่มของตนไปค้นคว้ามา นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายวิธีแก้ปัญหา

ขั้นสรุป

- ให้นักเรียนร่วมกันสรุปลักษณะความแตกต่างของสมการแต่ละชนิด
- ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยาม สมการทั่วไปของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

กลุ่มควบคุม

4. ให้นักเรียนทำโจทย์แบบฝึกหัดในห้องเรียนเป็นรายบุคคล

5. ครูอธิบายปัญหาที่นักเรียนสงสัยให้แบบฝึกหัดเพิ่มเติม โจทย์ข้อใดยากครูอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นสรุป

เหมือนกลุ่มทดลอง

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล	
	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากความสนใจ	สนใจเรียนดีมาก	มีนักเรียนบางกลุ่มเฉยๆ
2. สังเกตจากการรวมกิจกรรม	มีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมดี	ให้ความร่วมมือ
3. สังเกตจากการตอบคำถาม	ตอบคำถามได้ถูกต้อง	ตอบคำถามได้ถูกต้อง
4. สังเกตจากการซักถาม	มีการซักถามในกลุ่มมาก และมีการซักถามครูบ้าง	มีการซักถามครูบ้าง
5. ให้ทำโจทย์แบบฝึกหัดในห้องเรียน 10 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 5 กลุ่ม ทำผิด 1 ข้อ 2 กลุ่ม	ทำได้ถูกต้อง 28 คน ทำผิด 1 ข้อ 10 คน ทำผิด 2 ข้อ 4 คน
6. ให้ทำโจทย์การบ้าน 4 ข้อ	ทำได้ถูกต้อง 35 คน ทำผิด 1 ข้อ 5 คน ทำผิด 2 ข้อ 2 คน	ทำได้ถูกต้อง 24 คน ทำผิด 1 ข้อ 10 คน ทำผิด 2 ข้อ 6 คน



5. ความสัมพันธ์ใดมีกราฟเป็นวงกลมที่ผ่านจุด  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  และ  $(-1,0)$  ?

ก.  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + x - y = 0\}$  ง.  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - x - y = 0\}$

ข.  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - x + y = 0\}$  จ.  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - x - y = 1\}$

ค.  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + x + y = 0\}$

6. เส้นตรงในข้อใดสัมผัสวงกลม  $x^2 + y^2 = 2$  ที่จุด  $(1,-1)$  ?

ก.  $x + y + 2 = 0$

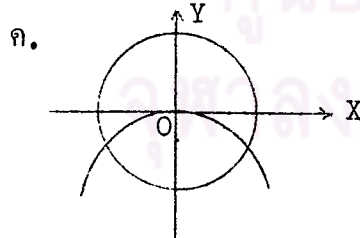
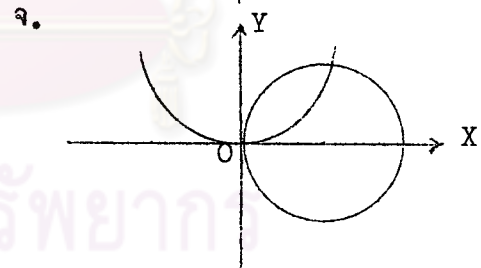
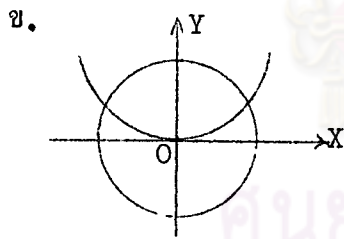
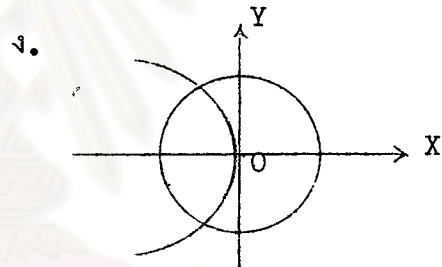
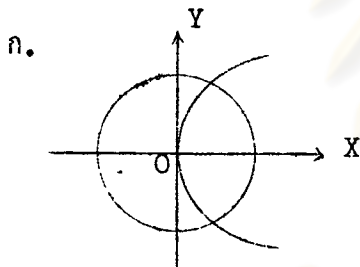
ง.  $x + y = 0$

ข.  $x - y + 2 = 0$

จ.  $x - y = 0$

ค.  $x - y - 2 = 0$

7. ถ้า  $x^2 + y^2 = 16$  และ  $x^2 = 6y$  ตัดกัน จะเขียนกราฟได้กี่รูปใด ?



8. กราฟพาราโบลาจุดยอด  $(0,0)$  จุดโฟกัส  $(0,-3)$  มีสมการเป็นข้อใด ?

ก.  $x^2 = 3y$

ง.  $y^2 = 12x$

ข.  $x^2 = 12y$

จ.  $y^2 = -12x$

ค.  $x^2 = -12y$







20. จุดยอดของกราฟของสมการ  $4y^2 - 25x^2 = 100$  คือข้อใด ?
- ก. (2,0) และ (-2,0)                      ง. (0,5) และ (0,-5)
- ข. (0,2) และ (0,-2)                      จ. (0,10) และ (0,-10)
- ค. (5,0) และ (-5,0)
21. สมการไฮเพอร์โบล่าในข้อใด มีโฟกัส (-8,0) และ (8,0) มีจุดยอดอยู่ที่ (-5,0) และ (5,0) ?
- ก.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{39} = 1$                       ง.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$
- ข.  $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{25} = 1$                       จ.  $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$
- ค.  $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{25} = 1$
22. จุดโฟกัสของสมการไฮเพอร์โบล่า  $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$  คือข้อใด ?
- ก. (0,2) และ (0,-2)                      ง. (0,3) และ (0,-3)
- ข. (2,0) และ (-2,0)                      จ. (3,0) และ (-3,0)
- ค. ( $\sqrt{5}$ ,0) และ ( $-\sqrt{5}$ ,0)
23. จากสมการในข้อ 22 ผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนกราฟไปยังจุดโฟกัสทั้งสองยาวกี่หน่วย ?
- ก. 2 หน่วย                                      ง. 10 หน่วย
- ข. 4 หน่วย                                      จ. 20 หน่วย
- ค.  $2\sqrt{5}$  หน่วย
24. จากสมการไฮเพอร์โบล่า  $16x^2 - 25y^2 = 400$  กราฟของสมการนี้ตัดแกน x ที่จุดใด ?
- ก. (3,0) และ (-3,0)
- ข. (4,0) และ (-4,0)
- ค. (5,0) และ (-5,0)
- ง. (0,5) และ (0,-5)
- จ. (0,4) และ (0,-4)
25. จากสมการ  $1 - \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{9}$  ถ้าเขียนกราฟจะได้รูปอะไร ?
- ก. วงกลม                                      ง. ไฮเพอร์โบล่า
- ข. วงรี    จ. ไฮเพอร์โบล่าชนิดมุมฉาก
- ค. พาราโบลา





## ภาคผนวก จ.

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียน  
ที่มีต่อการเรียนโดยวิธีสอนแบบอภิปราย

1. รองศาสตราจารย์ ดร.สุจริต เพียรชอบ
2. รองศาสตราจารย์ โรจน์ จะโนภาษ
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียน



นางสาวยุพิน จิรสุขานนท์ เกิดวันที่ 27 มกราคม พ.ศ. 2498 สำเร็จ  
ปริญญาตรีศึกษาศาสตร์บัณฑิต จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา  
2519 สาขาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา ปัจจุบันเป็นอาจารย์โรงเรียน  
เบญจมราชาลัย สังกัดกรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

ศูนย์วิทยุทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย