บรรณานุกรม

ภาษาไทย

หนังสือ

กระทรวงศึกษาธิการ. กรมวิชาการ. หนังสืออุเทศวิชาคณิตศาสตร์แผนปัจจุบันประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย. พระนคร: กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ, 2517.

คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตวัสดุอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์. ชุดการเรียนการสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์ (ฉบับร่าง). กรุงเทพมหานคร: ทบวงมหาวิทยาลัย, 2523.

จุง เต ฟาง. ตารางวิเคราะห์ข้อสอบ. พระนคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2514.

ชัยยงค์ พรหมวงศ์. "แนวคิดในการผลิตชุดการสอน." เอกสารทางวิชาการนวกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา. พระนคร: แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

_____. และคนอื่น ๆ. ระบบสื่อการสอน. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2521.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ. หลักการทฤษฎีเทคโนโลยีและนวกรรมทางการศึกษา. กาฬสินธุ์: ประสานการพิมพ์, 2521.

ประคอง กรรณสูต. สถิติประยุกต์สำหรับครู. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2520.

ยุพิน พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์, 2523.

_____. การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: กรุงเทพการพิมพ์, 2519.

_____. กิจกรรมคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

วิรุฬ ลีลาพฤกษ์. <u>สื่อการสอนและการเรียนรู้.</u> ม.ป.ท. , 2521.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. <u>แบบเรียนคณิตศาสตร์ 411 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.</u> กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2521.

______. <u>คู่มือการสอนคณิตศาสตร์ 411 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.</u> กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2521.

สุชาติ รัตนกุล และพิทักษ์ รักษาพลเดช. <u>วิธีสอนคณิตศาสตร์.</u> พระนคร: โรงพิมพ์คุรุสภา, 2512.

สุนันท์ ปัทมาคม. "การผลิตชุดการสอน." <u>เอกสารประกอบการเรียนวิชาสื่อการสอนในชั้นมัธยมศึกษา.</u> กรุงเทพมหานคร: แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

______. "ชุดการสอน." <u>เอกสารประกอบการเรียนวิชาสื่อการสอนในชั้นมัธยมศึกษา.</u> กรุงเทพมหานคร: แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. <u>คณิตศาสตร์ 411 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.</u> กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2523.

<u>บทความ</u>

ชัยยงค์ พรหมวงศ์. "แนวคิดการวัดพัฒนาหลักสูตรและห้องเรียนแบบศูนย์การเรียน." <u>วารสารครุศาสตร์</u> 4 (พฤศจิกายน-ธันวาคม 2517) : 29-30.

______. "ศูนย์การเรียน แนวทางใหม่สำหรับการปฏิรูปห้องเรียน." <u>วารสารครุศาสตร์</u> 3 (ตุลาคม 2516 - มกราคม 2517) : 55.

______. "ศูนย์การเรียน แนวโน้มการจัดการศึกษาเพื่อมวลชนในอนาคต." <u>วารสารศรีนครินทรวิโรฒ</u> 5 (ธันวาคม, 2517) : 4.

เลขา ปิยะอัจฉริยะ. "การสอนตามเอกัตภาพ." วารสารครุศาสตร์ 3 (กุมภาพันธ์-พฤษภาคม 2517) : 18-29.

สายหยุด จำปาทอง. "Learning to be." วารสารคณะกรรมการแห่งชาติว่าด้วยการศึกษาฯสหประชาชาติ 4 (มกราคม, 2517) : 17.

สิปปนนท์ เกตุทัต. "การวางแผนเพื่อปฏิรูปการศึกษา." วารสารครุศาสตร์ 3 (สิงหาคม-ตุลาคม 2517) : 7.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. "คณิตศาสตร์ในปัจจุบัน." ศรีนครินทร์สาร 2 (ตุลาคม 2518 - มกราคม 2519) : 16.

อรสา ดิสสระ. "การสอนเป็นรายบุคคล." ศรีนครินทร์สาร 1 (มิถุนายน - กันยายน 2517) : 5.

วิทยานิพนธ์และเอกสารอื่น

บุษบัน สุนทรศารทูล. "การสร้างชุดการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนชั้นอนุบาลปีที่ 2." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

ปรัชญา ใจสะอาด. "การสร้างชุดการสอนสำหรับห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนวิชาภูมิศาสตร์ในหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2519.

ผ่องฉวี ไวยาวัจมัย. "เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "อัตราส่วนและร้อยละ" โดยใช้สื่อประสมกับวิธีสอนแบบบอกให้รู้." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

วิไล แก้วงามอรุณ. "การสร้างบทเรียนแบบโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "เส้นตรง" สำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย." วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2518.

ศรีวิไล ดอกจันทร์. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์วิชาภาษาไทยของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนในห้องแบบศูนย์การเรียนกับนักเรียนที่เรียนในห้องเรียนแบบครูเป็นศูนย์กลาง." วิทยานิพนธ์หลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์-มหาวิทยาลัย, 2521.

ศิริอร สุขตระกูลเวศ. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาภูมิศาสตร์จากห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนกับห้องเรียนที่มีครูเป็นศูนย์กลาง." วิทยานิพนธ์หลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2521.

อรจรีย์ ณ ตะกั่วทุ่ง. "การสร้างชุดการสอนคณิตศาสตร์สำหรับห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนโรงเรียนที่พระเป็นผู้สอน ในกรุงเทพมหานคร." วิทยานิพนธ์หลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

<u>ภาษาอังกฤษ</u>

<u>Books</u>

Cooney, Thomas.; Davis, Edward J. and Handerson, K.B. <u>Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics.</u> Boston: Houghton Miffin Co., 1975.

Dale, Edgar. <u>Audio Visual Methods in Teaching.</u> New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Erickson, Carlton W.H. <u>Administering Instructional Media Programs.</u> New York: Macmillan Co., 1968.

_____. and Cure, David H. <u>Fundamentals of Teaching with Audiovisval Technology.</u> New York: Macmillan Co., 1972.

Good, Carter V. Dictionary of Education. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.

Ricky, Robert W. Planning for Teaching An Introduction to Education. New York: McGraw-Hill Book Co., 1958.

Rita, Dunn, and Stefford, Dunn. Practical Approached Individualizing Instruction : Contracts and other effection Teaching Strategies. New York: Perkery, 1972.

Shores, Louis. Instructional Materials. New York: Ronald Press Co., 1960.

Stanley, Julian C. and Hopkins, Kenneth D. Educational and Psychologycial Measurement and Evaluation. New Delhi: Prentice Hall of India Private Limit, 1978.

Articles

Krulik, Stephen. "Learning Packages for Mathematics in Struction Some Consideration." Mathenatics Teacher. (April 1974) : 348.

Moore, Nancy M. "Learning Centers : Turning on an Elementary Classroom." Educational Technology XIV (November 1974) : 24-26.

Other Materials

Armstrong, Marth Harper Jane. "The Development and Evaluation of a multi-media Self-Instructional Package in Begining French at Tarraw Country Junior College. Dissertation Abstracts International. Vol 30, No 10 (April 1972), p.5669-A.

Hanneman, Jame Howard. "An Experimental Comparison of Independent Study and Conventional Group Instruction Tenth Grade Geometry." Dissertation Abstracts. Vol. 32, No. 11 (1972), p. 6289.

McCarthy, John Patrick. "A Study of Perception of Students, Teachers and Administrators toward the Learning Center in Selected Secondary School." Dissertation Abstracts International. Vol 37, No.9 (March 1977), p. 1347-A.

McDonald, Ellen Jean Baird. "The Development and Evaluation of a Set of Multi-Media Self Instructional Learning Activity Package for Use in Remedial English at Urban Community College." Dissertation Abstracts. Vol 34, No. 4 (1973), p. 1590-A.

Whettier, Robert Henry."Relationship of Learning Center Experience to Change in Attitude and Achiement of Girls and Boys." Dissertation Abstracts. Vol 35, No. 2 (1973), p. 216A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

ตารางที่ 3 ตารางหาตัวกลางเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทดสอบก่อนนำมาใช้ในการวิจัย

X	f	fX	X^2	fX^2
40	2	80	1600	3200
39	1	39	1521	1521
38	3	114	1444	4332
37	0	0	0	0
36	5	150	1296	6480
35	2	70	1225	2450
34	5	170	1156	5780
33	0	0	0	0
32	4	128	1024	4096
31	6	186	961	5766
30	4	120	960	5600
29	5	145	841	4205
28	3	84	784	2352
27	5	135	729	3645
26	4	104	676	2704
25	4	100	625	2500
24	6	144	576	3456
23	8	184	529	4232
22	9	198	484	4356
21	3	63	441	1323

ตารางที่ 3 (ต่อ)

X	f	fX	X^2	fX^2
20	6	120	400	2400
19	2	38	361	722
18	4	72	324	1296
17	3	51	289	867
16	2	32	256	512
15	2	30	225	450
14	0	0	0	0
13	0	0	0	0
12	2	24	144	288
Σ	100	2581	-	73433

ตารางที่ 4 ตารางแสดงค่าความยากง่าย (P) และอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบที่นำมาใช้ในการวิจัย

ข้อที่	P_L	P_H	P	r
1	.40	.88	.66	.52
2	.11	.29	.20	.28
3	.66	.92	.78	.49
4	.55	.92	.76	.48
5	.92	.50	.68	.34
6	.44	.96	.74	.64
7	.37	.96	.71	.68
8	.33	.62	.40	.36
9	.51	.90	.70	.51
10	.14	.77	.44	.63
11	.40	.74	.57	.35
12	.25	.66	.45	.42
13	.25	.59	.31	.25
14	.48	.96	.76	.62
15	.22	.40	.31	.21
16	.55	.96	.79	.57
17	.55	.92	.76	.48
18	.51	.85	.69	.39
19	.33	.62	.48	.30
20	.51	.74	.63	.25

ตารางที่ 4 (ต่อ)

ข้อที่	P_L	P_H	P	r
21	.35	.82	.65	.48
22	.40	.81	.61	.43
23	.25	.74	.49	.49
24	.22	.77	.49	.54
25	.40	.88	.66	.52
26	.29	.66	.39	.35
27	.29	.59	.44	.31
28	.40	.74	.57	.35
29	.55	.88	.73	.40
30	.25	.92	.61	.68
31	.55	.88	.73	.40
32	.44	.77	.61	.35
33	.29	.85	.58	.57
34	.14	.48	.30	.39
35	.33	.88	.62	.57
36	.25	.74	.49	.49
37	.22	.81	.52	.58
38	.25	.66	.45	.42
39	.18	.55	.36	.40
40	.48	.92	.72	.53
41	.14	.29	.21	.21

ตารางที่ 4 (ต่อ)

ข้อที่	P_L	P_H	P	r
42	.44	.77	.61	.35
43	.29	.77	.53	.48
44	.22	.55	.27	.24
45	.40	.81	.52	.43
46	.22	.74	.48	.52
47	.18	.62	.21	.48
48	.14	.55	.33	.45
49	.29	.55	.42	.27
50	.29	.48	.38	.23

ข้อมูลในตารางที่ 1 หาตัวกลางเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทดสอบก่อนนำมาใช้ในการวิจัยได้ดังนี้

ก. มัชฌิมเลขคณิต

จากสูตร $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$

$$= \frac{2581}{100} = 25.81$$

ข. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จากสูตร $S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{73433}{100} - \left(\frac{2581}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{734.33 - (25.81)^2}$$

$$= \sqrt{734.33 - 666.1561}$$

$$= \sqrt{68.1739}$$

$$S.D. = 8.256$$

หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ ก่อนนำไปใช้ในการวิจัย

จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{ks^2 - \bar{X}(k-\bar{X})}{(k-1)s^2}$$

$$= \frac{50(8.25674)^2 - 25.81\ (50 - 25.81)}{(8.256.74)^2\ (50-1)}$$

$$= \frac{50\ (68.1739) - 25.81\ (24.29)}{(68.1739)\ (49)}$$

$$= \frac{3408.695 - 629.9249}{3340.52}$$

$$= \frac{2778.770}{3340.52}$$

$$= 0.831$$

นั่นคือแบบทดสอบมีความเชื่อมั่น 0.83

ตารางที่ 5 ตารางแสดงผลการทดลองโดยใช้ศูนย์การเรียนขั้น 5 คน

คนที่ \ คะแนน	สอบก่อนเรียน (50)	แบบฝึกหัด (48)	สอบหลังเรียน (50)	ความก้าวหน้า
1	15	41	43	28
2	12	44	42	30
3	14	40	39	25
4	13	43	40	27
5	14	45	45	31
เฉลี่ย	13.6	42.6	41.8	-
ร้อยละ	27.2	88.75	83.6	-

ตารางที่ 6 เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบก่อนและหลังเรียน โดยใช้ศูนย์การเรียน

ตัวอย่างประชากร อันดับที่	คะแนนสอบก่อนเรียน (50)X_1	คะแนนสอบหลังเรียน (50)X_2	$D=X_2-X_1$	D^2	คะแนนแบบฝึกหัดรวม(48)
1	12	41	29	841	43
2	15	45	20	400	43
3	13	40	27	729	40
4	10	39	29	841	41
5	12	41	29	841	42
6	14	42	28	784	41
7	11	41	30	900	42
8	16	36	20	400	40
9	12	39	2[illegible]	729	40
10	10	37	22	729	41
11	10	39	29	841	39
12	12	41	29	841	40
13	15	45	30	900	47
14	17	43	26	676	42
15	15	37	22	484	41
16	18	44	26	676	42
17	11	41	31	961	41
18	10	38	28	784	40
19	12	40	28	784	[illegible]2
20	13	44	31	961	4[illegible]
รวม	258	814			830
ร้อยละ	25.8	81.4			86.45
		$\bar{X}$= 40.7			$\bar{X}$ = 41.5

ตารางที่ 7 แสดงผลการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนขั้นต่าง ๆ ที่ได้จากการทดลอง

จำนวนผู้เรียน	คะแนนแบบฝึกหัดคิดเป็นร้อยละ	X คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนเป็นร้อยละ	Y คะแนนแบบทดสอบหลังเรียนเป็นร้อยละ	ประสิทธิภาพของชุดการสอน	ความก้าวหน้า Y - X
1 คน	81.25	24.00	82.00	81.25/82.00	52.00
5 คน	88.75	27.20	83.60	88.75/83.60	56.40
20 คน	86.45	25.80	81.40	86.45/81.40	55.60

ตารางที่ ๘ เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบก่อนและหลังการเรียน
ของกลุ่มควบคุม

ประชากรอันดับที่	คะแนนสอบก่อนเรียน	คะแนนสอบหลังเรียน
1	12	37
2	11	32
3	14	36
4	15	32
5	14	33
6	10	34
7	12	30
8	11	34
9	13	43
10	10	32
11	13	29
12	14	31
13	10	32
14	16	40
15	12	30
16	14	39
17	14	35
18	11	37
19	10	32
20	12	35
ผลรวม	248	640
ค่าเฉลี่ย	$\bar{X} = 12.4$	$\bar{X} = 34.2$

ตารางที่ 9 การหาผลสัมฤทธิ์ของการเรียนจากห้องเรียนโดยใช้ศูนย์การเรียนกับการเรียนเป็นชั้นปกติ

ประชากรอันดับที่	X_1 $\bar{X}_1=34.20$	x_2 $\bar{X}_2=40.7$	$X_1-\bar{X}$	$X_2-\bar{X}$	x_1^2	x_2^2
1	37	41	2.8	0.30	7.84	0.09
2	32	45	-2.2	4.30	4.84	18.49
3	36	40	1.8	0.70	3.24	0.49
4	32	39	-2.2	-0.30	4.84	0.09
5	33	41	-1.2	0.30	1.44	0.09
6	34	42	-0.2	1.30	0.04	1.69
7	30	41	-4.2	0.30	17.64	0.09
8	34	36	-0.2	-4.70	0.04	22.09
9	43	39	8.8	-1.70	77.44	2.89
10	32	37	-2.2	-3.70	4.84	13.69
11	29	39	-5.2	-1.70	27.04	2.89
12	31	41	-3.2	0.30	10.24	0.09
13	32	45	-2.2	4.30	4.84	18.49
14	40	43	5.8	2.30	33.64	5.29
15	30	37	-4.2	-3.70	17.64	13.69
16	39	44	-5.2	3.30	27.04	10.89
17	35	42	[illegible]	1.30	0.64	1.69
18	37	38	2.8	-2.70	7.84	7.29
19	32	40	-2.2	-0.30	4.84	0.09
20	35	44	0.8	3.30	0.64	10.89
Σ รวม	640	814			256.6	131

แสดงการทดสอบความแตกต่างของมัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

$$\therefore \quad Ho = \mu_1 \neq \mu_2$$

จากสูตร $$t = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$$

$$\bar{X}_2 = 40.70$$

$$\bar{X}_1 = 34.20$$

คำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\because \sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = = \sqrt{\frac{\Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}$$

$$= \frac{256.6 + 131}{20 + 20 - 2} \times \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{387.6}{38} \times 0.1$$

$$= 1.02$$

$$= 1.009$$

แทนค่า

$$t = \frac{40.7 - 34.20}{1.009}$$

$$= 6.44$$

ที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.01 df 38 มีค่า t เท่ากับ 2.714 ดังนั้น คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

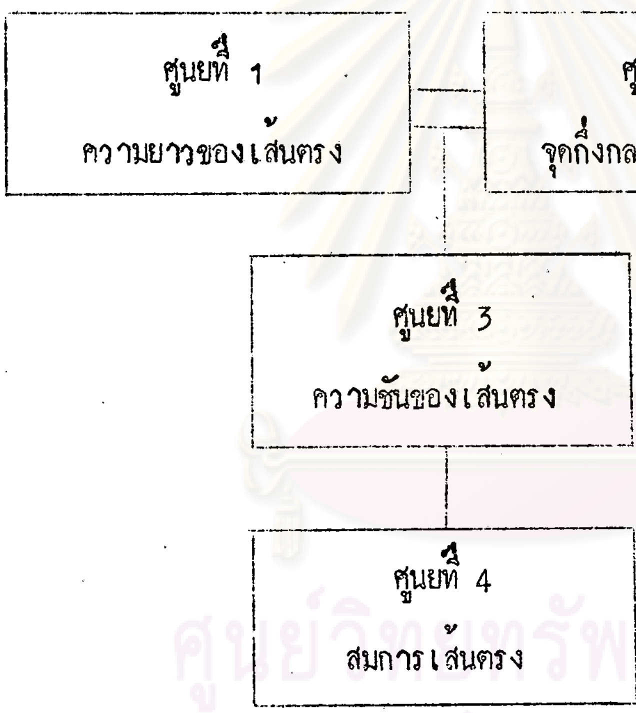
ภาคผนวก ข.

ศูนย์ที่ 1

บัตรคำสั่ง

โปรดอ่านคำสั่งนี้ แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. ให้นักเรียนเลือกเรียนที่ศูนย์การเรียนทั้ง 4 ศูนย์ให้ครบ โดยให้เริ่มทำที่ศูนย์ที่ 1 หรือศูนย์ที่ 2 ศูนย์ใดก่อนก็ได้ เมื่อทำศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2 แล้วจึงไปทำศูนย์ที่ 3 และศูนย์ที่ 4 ตามลำดับ



2. ก่อนลงมือเรียนให้ทำแบบทดสอบ เพื่อประเมินผลการเรียนเรื่อง "เส้นตรง" โดยทำที่ศูนย์ที่หนึ่งหรือศูนย์ที่ 2 เพียงศูนย์เดียว
3. ศึกษาจากบัตรกิจกรรม ถ้ายังไม่เข้าใจให้ศึกษาจากบัตรเนื้อหาเพิ่มเติม
4. ทำบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
5. ทำบัตรทดสอบพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
6. เปลี่ยนศูนย์การเรียนสลับกันระหว่างศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2

ศูนย์ที่ 1

การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

จุดประสงค์

1. ให้มีความรู้ในเรื่องโปรเจคชัน (Projection)
   1.1 หาโปรเจคชันของจุด P บนแกน x และโปรเจคชันของจุด P บนแกน y ได้
   1.2 หาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่อยู่บนแกน x และแกน y ได้โดยที่เส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกนทั้งสองได้
2. เพื่อให้รู้วิธีหาความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด
   2.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ให้ นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้
   2.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ให้ นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้
   2.3 นักเรียนสามารถสรุปสูตรของการหาระยะทางระหว่างจุดที่ทราบค่าโคออร์ดิเนตได้
   2.4 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y ให้นักเรียนสามารถคำนวณความยาวของเส้นตรงที่เชื่อม 2 จุดนี้ได้

ชุดการเรียนการสอน

เรื่อง

เส้นตรง

หลักการและเหตุผล

เนื่องจากการเรียนการสอนในปัจจุบันนี้ ครูไม่ใช่จะเป็นผู้บอกหรือผู้อธิบายให้... นักเรียนนั่งฟังแต่เพียงฝ่ายเดียว ครูสามารถนำวิธีการสอนแบบต่าง ๆ ใหม่ ๆ มาใช้ในการเรียนการสอน เพื่อจะทำให้การเรียนการสอนได้ผลดียิ่งขึ้น การเรียนโดยใช้ศูนย์การเรียนก็เป็นวิธีหนึ่งที่ยึดหลักการเรียนตามเอกัตภาพ ให้นักเรียนได้ศึกษาและเรียนรู้ด้วยตนเองและทำกิจกรรมตามบัตรคำสั่งที่ระบุไว้ในแต่ละศูนย์จนครบ สำหรับเนื้อหาเรื่อง "เส้นตรง" นั้นก็เป็นเรื่องที่จะให้ความรู้ ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ อันเป็นเรื่องที่น่าสนใจเรื่องหนึ่ง และเรื่องนี้ก็สามารถใช้วิธีการเรียนโดยใช้ศูนย์การเรียน

วัตถุประสงค์

1. ให้มีความรู้ในเรื่องโปรเจคชัน (Projection)

   1.1 หาโปรเจคชันของจุด P บนแกน x และโปรเจคชันของจุด P บนแกน y ได้

   1.2 หาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่อยู่บนแกน x และแกน y ได้โดยที่เส้นตรงไม่ขนานกับแกนทั้งสอง

2. เพื่อให้รู้วิธีหาความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด

   2.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ให้นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้

   2.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ให้นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้

   2.3 นักเรียนสามารถสรุปสูตรของการหาระยะทางระหว่างจุดที่ทราบค่าโคออร์ดิเนตได้

2.4 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรง ที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y ให้นักเรียนสามารถคำนวณหาความยาวของเส้นตรงที่เชื่อม 2 จุดนี้ได้

3. เพื่อให้รู้วิธีหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

3.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถสรุปสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้

3.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตขอ จุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองโดยใช้สูตรได้

3.3 สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดได้ ในเมื่อกำหนดอีกจุดหนึ่ง และจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้

4. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องความเอียงและความชันของเส้นตรง

4.1 เมื่อกำหนดเส้นตรงในระบบแกนมุมฉากให้นักเรียนสามารถบอกความหมายของมุมเอียงของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

4.2 บอกความหมายของความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

4.3 เมื่อกำหนดความเอียงของเส้นตรง ให้นักเรียนสามารถบอกเงื่อนไขของความชันและลักษณะของเส้นตรงบนแกนพิกัดฉากได้ถูกต้อง

4.4 บอกเงื่อนไขของเส้นตรงที่ไม่สามารถหาความชันได้ถูกต้อง

4.5 เมื่อกำหนดจุด 2 จุด ให้สามารถหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมโยงระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้

4.6 สามารถหาความชันของเส้นตรงจากรูปกราฟที่กำหนดให้ได้

4.7 สามารถใช้ความรู้ในการหาความชันของเส้นตรงมาพิจารณาว่าจุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันบ้าง

4.8 บอกเงื่อนไขของความชันของเส้นตรงที่ขนานกันได้

4.9 บอกเงื่อนไขของความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกันได้

4.10 บอกได้ว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน

4.11 บอกได้ว่าเส้นตรงคู่ใดตั้งฉากกัน

5. เพื่อให้มีความรู้ในเรื่องสมการเส้นตรง

5.1 นักเรียนสามารถหาสมการเส้นตรงได้เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ให้

5.2 บอกได้ว่าความสัมพันธ์ใดมีกราฟเป็นเส้นตรงตามเงื่อนไขต่าง ๆ ตามที่กำหนดให้

5.3 เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้สามารถหาความชันของเส้นตรงนั้นได้

5.4 บอกได้ว่าสมการเส้นตรงใดมีความชันเท่ากับความชันของเส้นตรงที่กำหนดสมการให้

5.5 หาจุดตัดบนแกน x และแกน y ของเส้นตรงที่กำหนดสมการให้

5.6 บอกได้ว่าสมการเส้นตรงใด ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดสมการให้ได้

5.7 เมื่อกำหนดจุดบนเส้นตรงที่รู้ค่าของความชันให้สามารถชี้บ่งได้ว่าเส้นตรงนั้นจะผ่านจุดใด

5.8 สามารถหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดความชันให้ได้

5.9 สามารถหาความชันของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดความชันให้ได้

5.10 สามารถเขียนสมการเส้นตรงในรูปทั่วไปได้

5.11 สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเส้นตรงและความชันมาแก้โจทย์ปัญหาได้

<u>ความรู้พื้นฐาน</u>

นักเรียนควรมีความรู้ในเรื่องระบบแกนพิกัดฉาก

<u>การประเมินผลก่อนเรียน</u>

1. ทำแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้ในเรื่อง "เส้นตรง" ถ้าทำได้ตั้งแต่ 80 % ขึ้นไป ไม่ต้องเรียนบทเรียนนี้

<u>กิจกรรมการนักเรียน</u>

1. ทำแบบทดสอบเพื่อประเมินผลก่อนเรียนเรื่อง "เส้นตรง"

2. ทำกิจกรรมจากศูนย์การเรียน ตามลำดับขั้นดังนี้

2.1 เลือกศึกษาจากศูนย์การเรียนศูนย์ใดก่อนก็ได้ใน 2 ศูนย์ ที่จัดให้ คือ

ศูนย์ที่ 1 เรื่อง ความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด

ศูนย์ที่ 2 เรื่อง จุดกึ่งกลางของเส้นตรง

2.2 เมื่อศึกษาในศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2 ครบแล้ว ให้ศึกษาในศูนย์ที่ 3 เรื่องความชันของเส้นตรง

2.3 เมื่อศึกษาในศูนย์ที่ 3 เรียบรอยแล้ว ให้ไปศึกษาในศูนย์ที่ 4 เรื่อง สมการเส้นตรง

2.4 ศึกษาในศูนย์สำรอง เรื่อง "การหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุด 2 จุด" ถ้าหากทำกิจกรรมในข้างต้นเสร็จก่อนเวลา

<u>การประเมินผลหลังการเรียน</u>

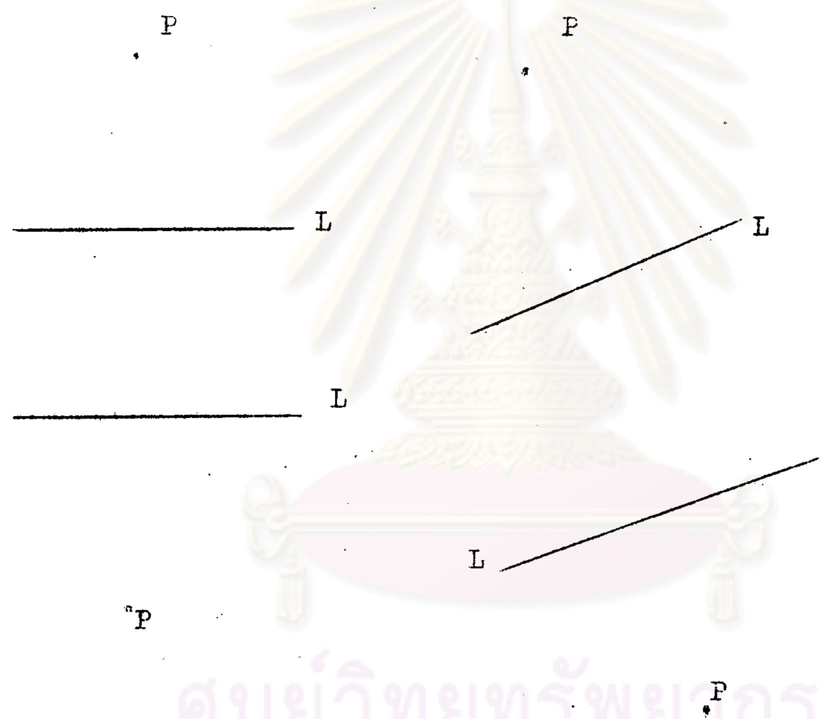
ทำแบบทดสอบเพื่อประเมินผลการเรียน จากแบบทดสอบชุดเดียวกันกับแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้ก่อนเรียน

ศูนยที่ 1

บัตรกิจกรรม

เรื่อง การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

1.1.1 กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ถ้า P อยู่นอกเส้นตรง L ให้นักเรียนลากเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L

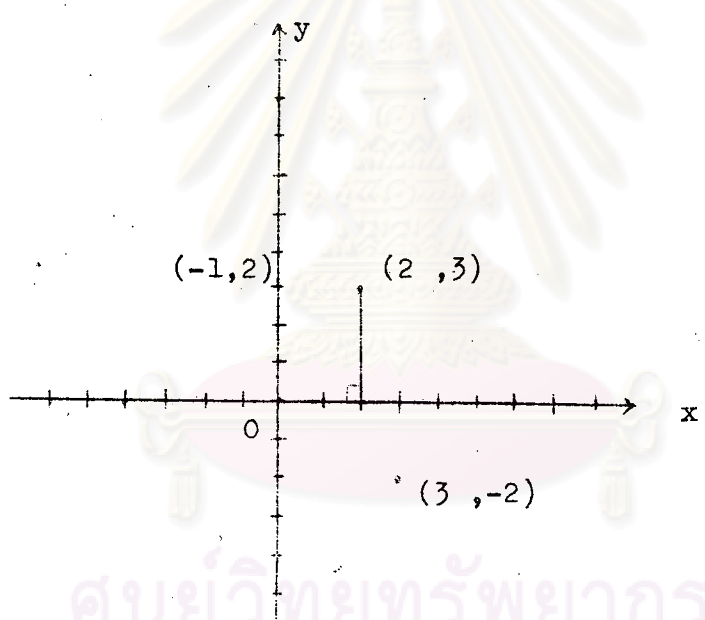


จุดที่เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด P มาตั้งฉากกับเส้นตรง L ใส่ชื่อว่าจุด Q

จะเรียกจุด Q ว่าเป็นโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L ซึ่งเขียนสั้น ๆ ได้ คือ $\text{Proj}_{L}(P) = Q$

1.2 ดังนั้น ถ้าให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงในระนาบ ถ้าลากเส้นตรง L_1 จากจุด P ไป ....
(ตั้งฉาก / ไม่ตั้งฉาก)
กับเส้นตรง L จะเรียกจุดตัดของเส้นตรง L_1 กับเส้นตรง L ว่า.................................ของจุด P บนเส้นตรง L

1.3 พิจารณารูป

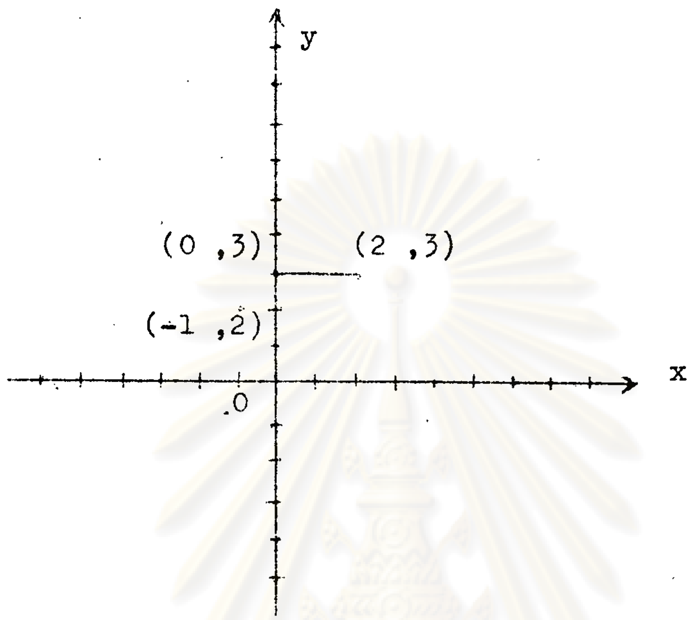


จุด (2 , 0) เป็นโปรเจคชันของจุด (2 , 3) บนแกน x

จุด________________ เป็นโปรเจคชันของจุด (−1 , 2) บนแกน x

จุด________________ เป็นโปรเจคชันของจุด (3 , −2) บนแกน x

1.4

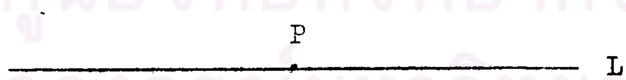


จุด (0 , 3) เป็นโปรเจคชันของจุด (2 , 3) บนแกน y

จุด __________ เป็นโปรเจคชันของจุด (-1 , 2) บนแกน y

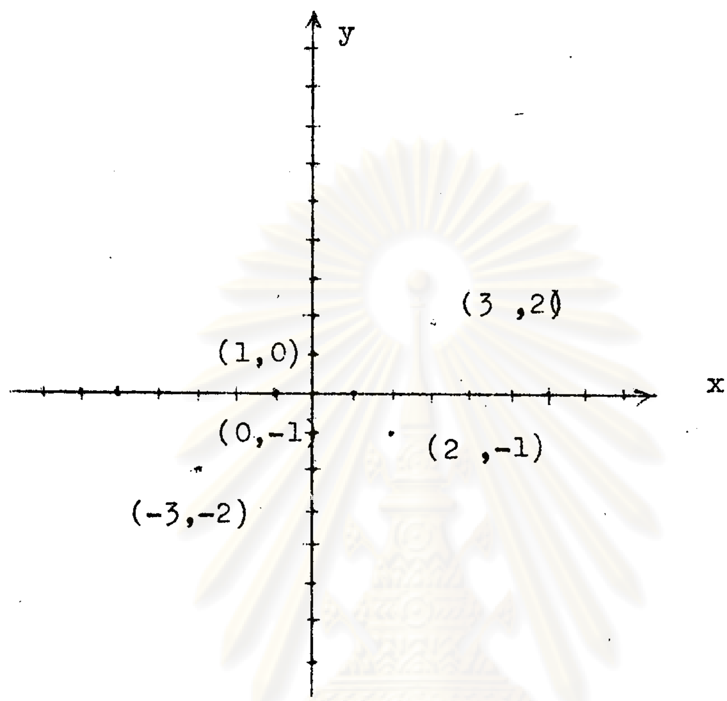
จุด __________ เป็นโปรเจคชันของจุด (3 , -2) บนแกน y

1.5



ถ้า P อยู่บนเส้นตรง L โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือ จุด P

ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า ถ้า P เป็นจุดบนเส้นตรง L โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือ __________



1.6 จากรูป

โปรเจคชันของจุด (3 , 2) บนแกน x คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (3 , 2) บนแกน y คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (−3 , −2) บนแกน x คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (−3 , −2) บนแกน y คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (2 , −1) บนแกน x คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (2 , −1) บนแกน y คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (1 , 0) บนแกน x คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (1 , 0) บนแกน y คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (0, −1) บนแกน x คือจุด ____________________

โปรเจคชันของจุด (0, −1) บนแกน y คือจุด ____________________

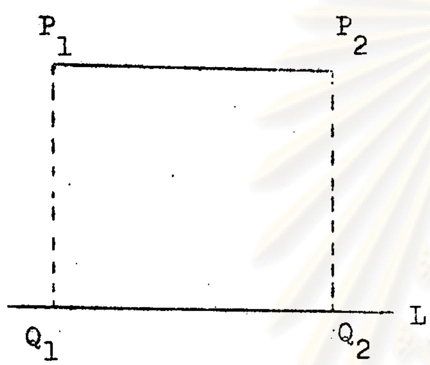
1.7 ข้อสังเกต

โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน x คือจุด(____________) เสมอ

โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน y คือจุด(____________) เสมอ

2.

2.1



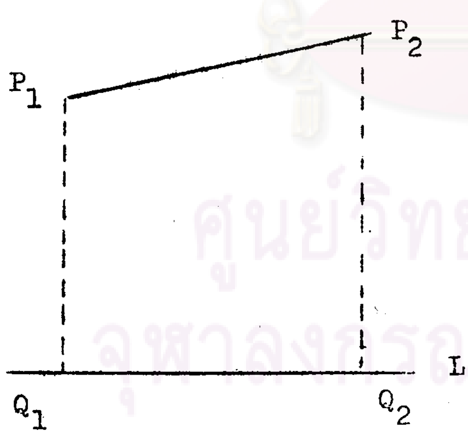
(1)

จากรูป 1

ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ขนานกับเส้นตรง L จุด Q_1 เป็น ____________ ของจุด P_1 บนเส้นตรง L

จุด Q_2 เป็น ____________ ของจุด P_2 ____________

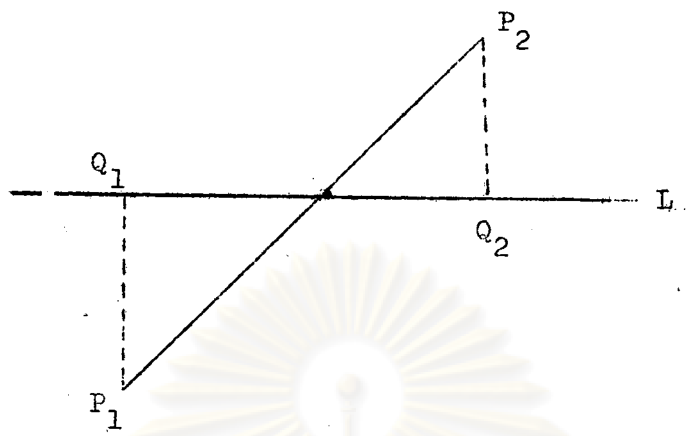
2.2



(2)

จากรูป 2 และรูป 3

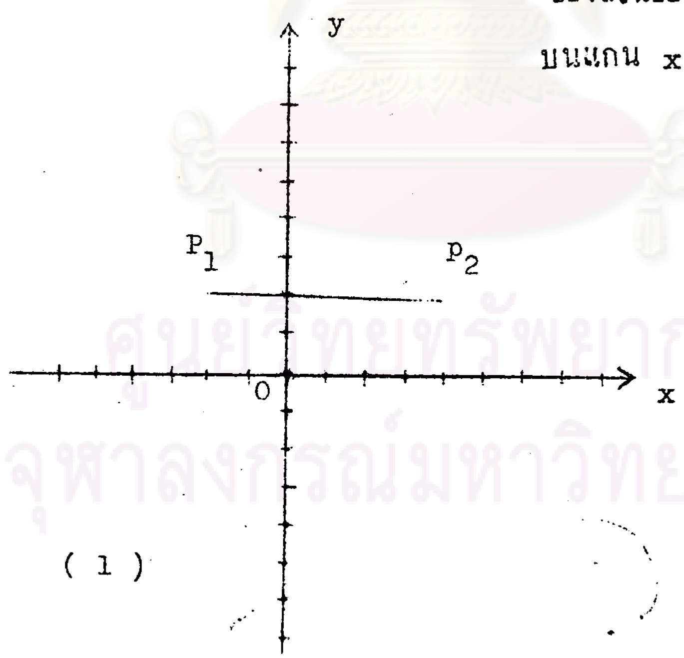
ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ไม่ขนานกับเส้นตรง L จุด Q_1 เป็น ____________ ของจุด ____________ บน ____________ จุด Q_2 เป็น ____________ ของ จุด ____________ บน

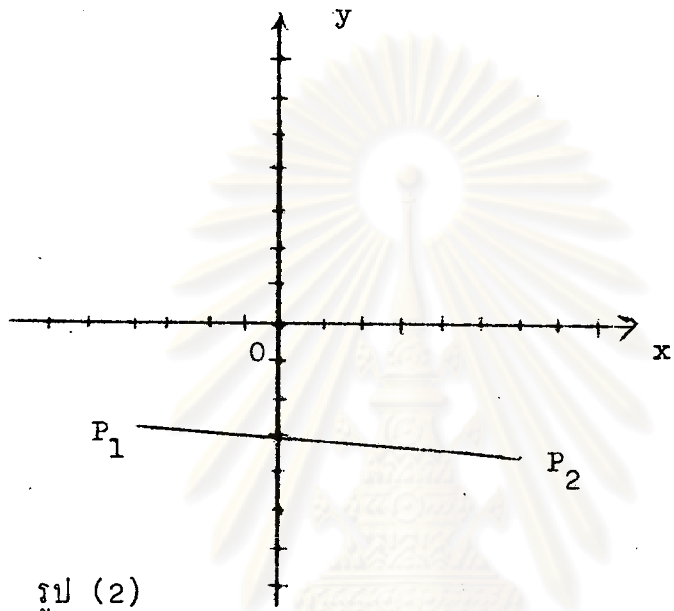


จะเรียกส่วนของเส้นตรง Q_1Q_2 ว่าโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 บนเส้นตรง L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Proj_L\ P_1P_2 = Q_1Q_2$

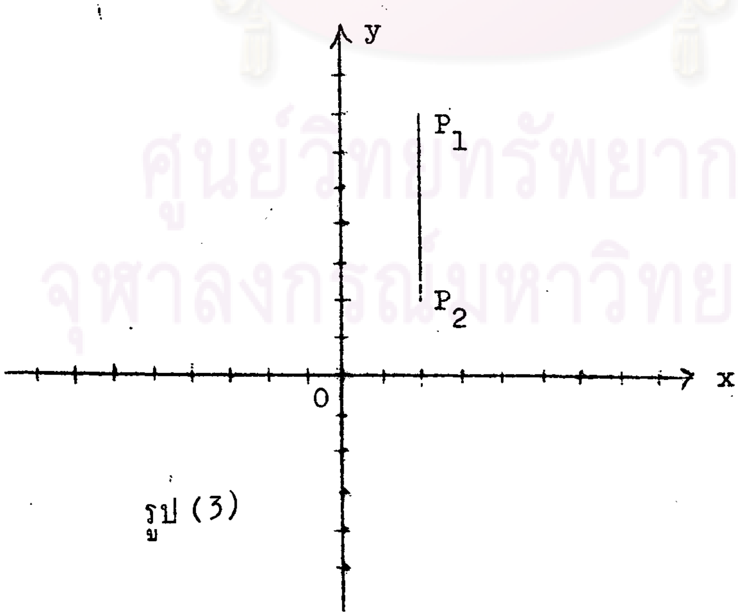
2.3 จากรูป

จงเขียนรูปแสดงโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 บนแกน x





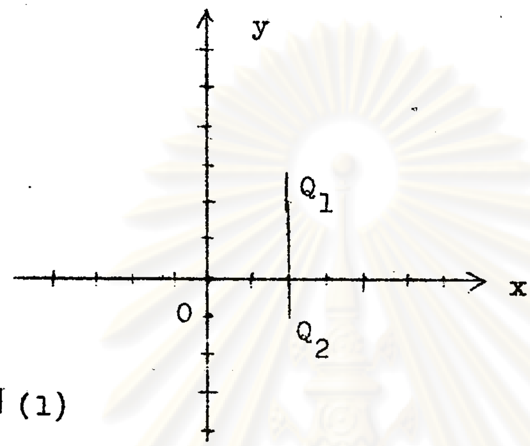
รูป (2)



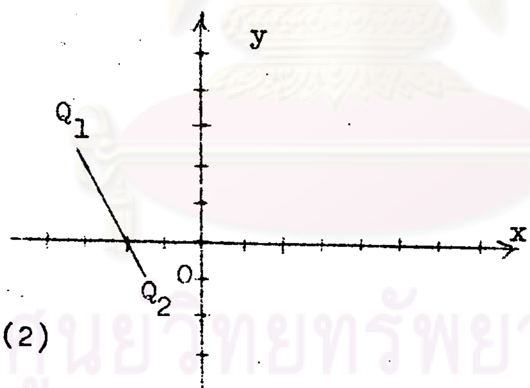
รูป (3)

2.4 จากรูป 1 – 3

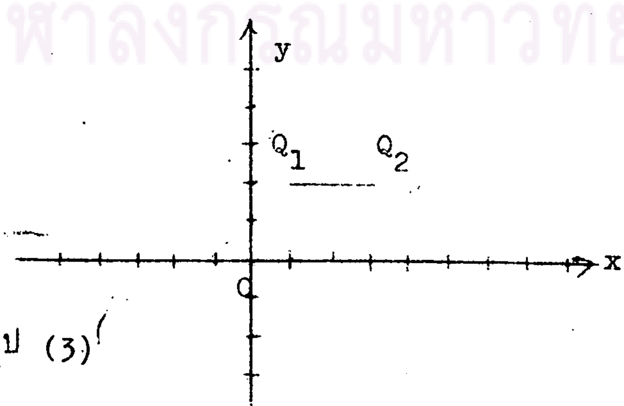
จงเขียนรูปแสดงโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง Q_1Q_2 บนแกน y



รูป (1)

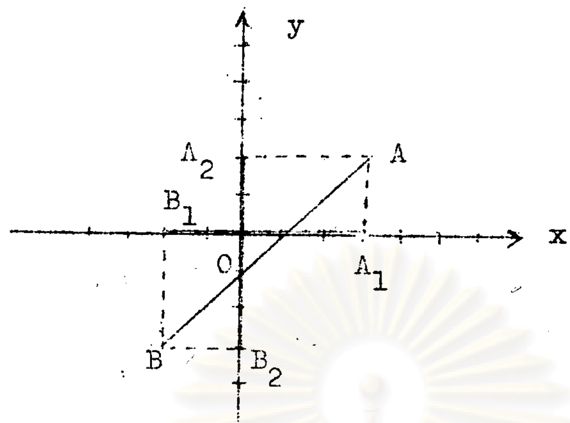


รูป (2)



รูป (3)

2.5



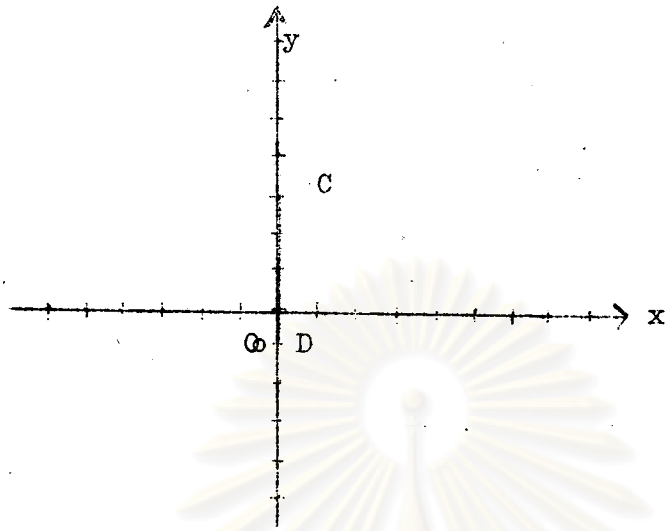
จากรูป 4 ส่วนของเส้นตรง ____________ เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x

ส่วนของเส้นตรง ____________ เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y

3.

3.1

จากความรู้เกี่ยวกับเรื่องของเส้นจำนวนระยะทางจากจุด A ถึงจุด B มีค่า ____________ อาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB มีค่า ____________



3) ระยะทางจากจุด C ถึงจุด D

มีค่า ____________

อาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า

ความยาวของส่วนของเส้นตรง

CD มีค่า ____________

3.3 ถ้า P และ Q เป็นจุด 2 จุด ใด ๆ ในระนาบ ระยะทางระหว่างจุด P ถึง Q หมายถึงความยาวของเส้นตรง PQ และแทนด้วยสัญลักษณ์ | PQ |

| PQ | อ่านว่า ค่าสัมบูรณ์ของ PQ

จากความรู้เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

3.4 | 5 | ค่าสัมบูรณ์ของ 5 มีค่า

| −3 | ค่าสัมบูรณ์ของ −3 มีค่า

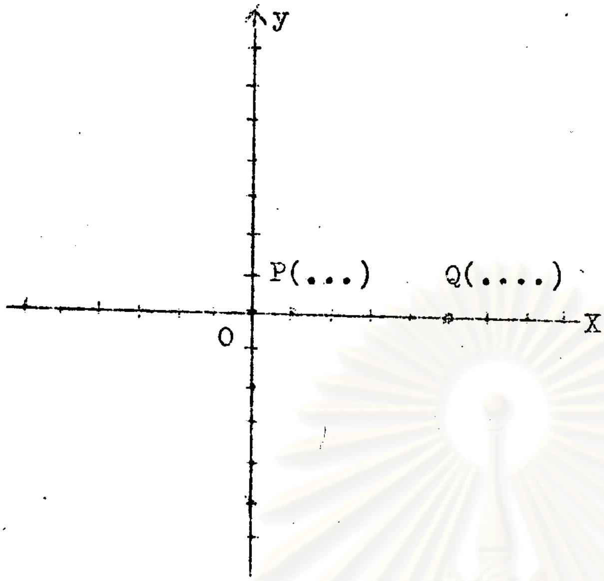
| $\frac{2}{5}$ | ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{2}{5}$ มีค่า

|5 + 2 | ค่าสัมบูรณ์ของ (5 + 2) มีค่า

|5 − 2 | ค่าสัมบูรณ์ของ (−5−2) มีค่า

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ จะมีค่าเป็น ____________ เสมอ

(บวก / ลบ)



3.5

จากรูป โคออร์ดิเนต ของ

จุด P มีค่า ________

จุด Q มีค่า ________

ระยะทางจากจุด P ถึงจุด Q = $|PQ| = 3$

$3 = |4 - 1|$

4 เป็นค่าแอบซิสสาของจุด P

1 เป็นค่าแอบซิสสาของจุด Q

ดังนั้น ถ้าจุด P_1 เป็นจุดอยู่บนแกน x มีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_1, 0)$

จุด P_2 เป็นจุดอยู่บนแกน x มีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_2, 0)$

ระยะทางจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 = $|x_1 - x_2|$ หรือ $|x_2 - x_1|$

P_1P_2 = $|x_1 - x_2|$ หรือ $|x_2 - x_1|$

3.6

จากรูป

จุด Q_1 มีโคออร์ดิเนต ________

จุด Q_2 มีโคออร์ดิเนต ________

ระยะทางจากจุด Q_1 ถึงจุด Q_2 $= |Q_1Q_2|$

$$|Q_1Q_2| = 3$$
$$= |2-(-1)| = |3| = 3$$
หรือ $= |-1-2| = |-3| =$

ถ้าจุด Q_1 เป็นจุดอยู่บนแกน y มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0 , y_1)$

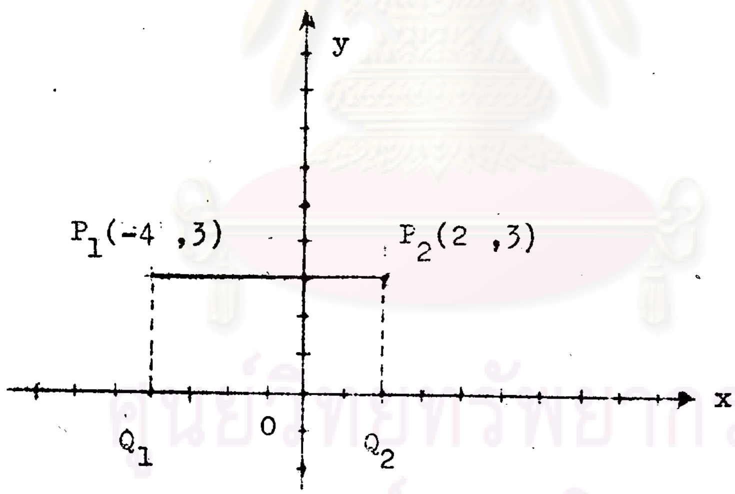
จุด Q_2 เป็นจุดอยู่บนแกน y มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0 , y_2)$

ระยะทางจาก Q_1 ถึง Q_2 $= |Q_1Q_2| = |y_1 - y_2|$

หรือ $= |y_2 - y_1|$

4. กำหนดจุด P_1 $(-4 , 3)$ และ P_2 $(2 , 3)$

แสดงโคออร์ดิเนตของจุดทั้งสองบนแกนพิกัดฉากได้ดังนี้



4.1 โปรเจคชันของจุด P_1 บนแกน x คือ ________

4.2 โปรเจคชันของจุด P_2 บนแกน x คือ ________

4.3 ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 จะ ________ กับแกน x

4.4 จุด P_1 และ P_2 มีค่าของ ________ เท่ากัน

4.5 ความยาวของเส้นตรง $|Q_1Q_2| = |Q_1Q_2| =$ ________

4.6 เนื่องจากส่วนของเส้นตรง P_1P_2 และส่วนของเส้นตรง Q_1Q_2 เป็นด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น $|P_1P_2| = |$ ________ $|$

4.7 เมื่อ $|P_1P_2| = |Q_1Q_2| = |\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|$

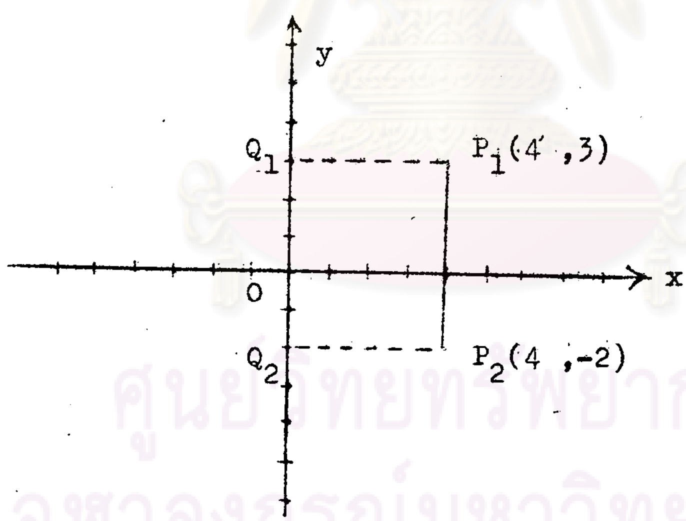
4.8 ∴ สามารถหาระยะทางจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 ซึ่งขนานกับแกน x ได้คือ ____________________

4.9 ในกรณีทั่วไป ถ้าจุด $P_1(x_1,y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน x จะได้ว่า $y_1 = y_2$ ถ้าจุด $Q_1 (x_1, 0)$ และจุด $Q_2 (x_2, 0)$ เป็นโปรเจคชันของจุด ______________ และ ______________ บนแกน x แล้ว

$$|P_1P_2| = |Q_1Q_2| = \text{หรือ } |\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|$$

5. กำหนดจุด $P_1 (4, 3)$ และจุด $P_2 (4, -2)$

แสดงโคออร์ดิเนตของจุดทั้งสองบนแกนพิกัดฉากได้ดังนี้



5.1 โปรเจคชันของจุด P_1 บนแกน y คือ ______________

5.2 โปรเจคชันของจุด P_2 บนแกน y คือ ______________

5.3 ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 จะ ______________ กับแกน y

5.4 จุด P_1 และจุด P_2 มีค่าของ ______________ เท่ากัน

5.5 ความยาวของเส้นตรง $Q_1Q_2 = |Q_1Q_2| = |\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|$

5.6 เนื่องจากส่วนของเส้นตรง P_1P_2 และส่วนของเส้นตรง Q_1Q_2 เป็นด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น $|P_1P_2| = |$ ______ $|$

5.7 เมื่อ $|P_1P_2| = |Q_1Q_2| = |\quad| = |$ ______ $|$ ดังนั้น สามารถหาระยะทางจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 เมื่อ P_1P_2 ขนานกับแกน y ได้มีค่า = ______

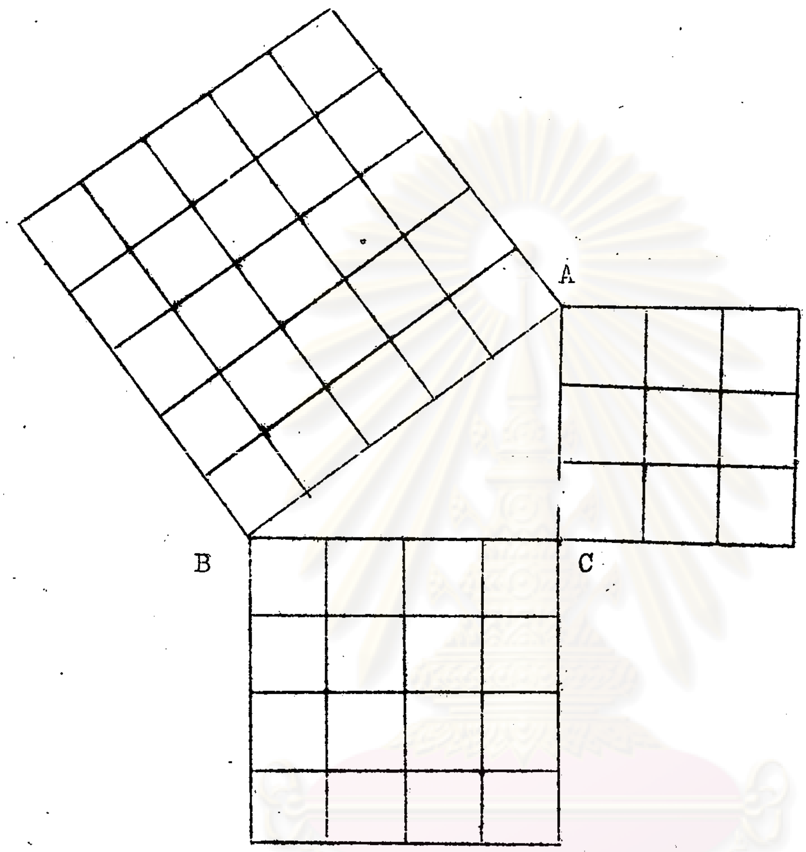
5.8 ในกรณีทั่วไป ถ้าจุด $P_1(x_1 , y_1)$และจุด $P_2 (x_2 , y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน y จะได้ว่า $x_1 = x_2$ จุด Q_1 $(0 , y_1)$ และจุด Q_2 $(0 , y_2)$ จะเป็นโปรเจคชันของจุด P_1 (x_1 , y_1) และ P_2 (x_2 , y_2) บนแกน y ดังนั้น

$P_1P_2 = |$ ______ $| = |$ ______ $| = |$ ______ $|$

5.9 สรุป

สูตร $P_1P_2 = |x_1 - x_2| = |x_2 - x\ |$ เป็นสูตรของการหาระยะทางของเส้นตรงที่ ______ กับแกน ______

5.10 สูตร $P_1P_2 = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ เป็นสูตรของการหาระยะทางของส่วนของเส้นตรงที่ ______ กับแกน ______



6.1 จากรูป

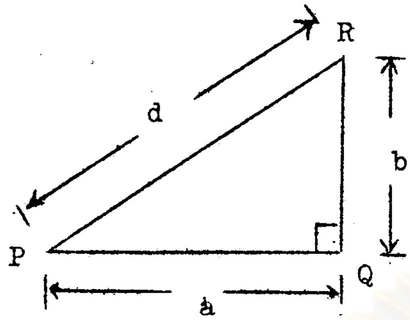
พื้นที่จัตุรัสบนด้าน AB หรือ AB^2 = 25 หน่วย

พื้นที่จัตุรัสบนด้าน BC หรือ BC^2 = 16 หน่วย

พื้นที่จัตุรัสบนด้าน AC หรือ AC^2 = 9 หน่วย

$AB^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$

<u>เรียกว่าทฤษฎีของพิธากอรัส</u> (Pythagorus)



จากสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

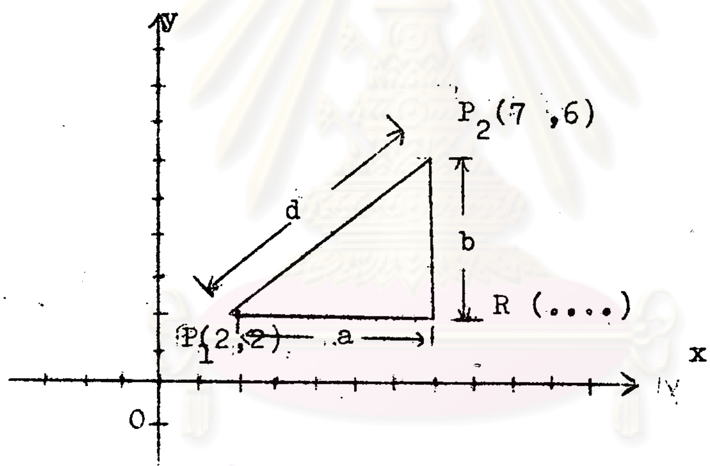
ตามทฤษฎีของ ______________

จะได้ว่า

d^2 = ______________

หรือ d = ______________

6.3



จากรูป

โคออร์ดิเนตของ R คือ ______________

ความยาวของ $a = |P_1R|$ = ______________

ความยาวของ $b = |P_2R|$ = ______________

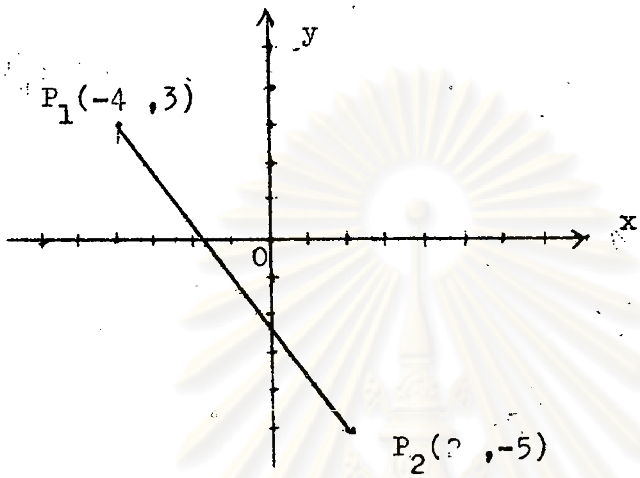
จะได้ว่า

d^2 = ______________

d = ______________

ต่อไปจะนำความรู้ในเรื่อง ทฤษฎีของพิธากอรัส
ไปใช้ในการหาระยะทางของเส้นตรง

7. กำหนดจุด P_1 (−4 , 3) และ P_2 (2 , −5)
แสดงโคออร์ดิเนตของจุดทั้งสองบนแกนพิกัดฉากได้ดังนี้



จากจุด P_1 ลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน x
จากจุด P_2 ลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน y
กำหนดจุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกันแทนด้วยจุด Q

7.1 จุด Q มีโคออร์ดิเนตเป็น ____________________

7.2 เส้นตรง P_1P_2 ____________ กับแกน x

7.3 เส้นตรง P_1P_2 ____________ กับแกน y

7.4 พิจารณาสามเหลี่ยม P_1 Q P_2 เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้าน

$|P_1Q|$ = ____________________

$|P_2Q|$ = ____________________

7.5 สามเหลี่ยม P_1 Q P_2 เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม Q เป็นมุม ____________

7.6 ดังนั้นสามเหลี่ยม P_1 Q P_2 เป็นสามเหลี่ยม ______________

7.7 เนื่องจากสามเหลี่ยม P_1 Q P_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีของ
พิธากอรัส

$|P_1P_2|^2 \quad = \quad$ ____________________

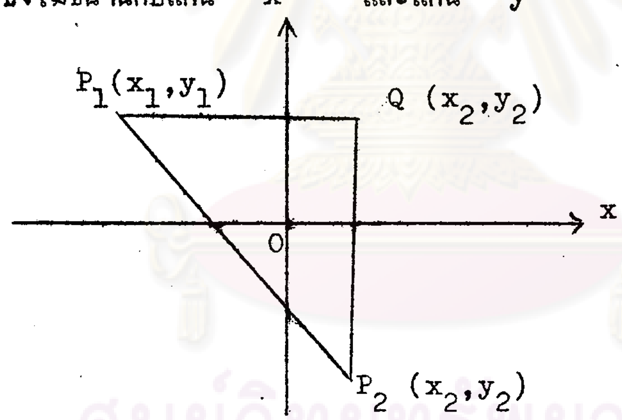
$|P_1P_2| \quad = \quad$ ____________________

$= \quad$ ____________________

จะเห็นได้ว่า P_1P_2 เป็นเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน x และแกน y และเราสามารถหาระยะทางของ P_1P_2 หรือ ความยาวของ P_1P_2 ได้เมื่อทราบค่าของโคออร์ดิเนตของ P_1 และ P_2

8.

8.1 ในกรณีทั่วไป ถ้าจุด $P_1(x_1 , y_1)$และ $P_2 (x_2 , y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน x และแกน y



จุด Q เป็นจุดตัดของเส้นตรงลากจากจุด P_1 ขนานกับแกน x และเส้นตรงจากจุด P_2 ขนานกับแกน y

Q จะมีโคออร์ดิเนต (x_2 , y_1)

จะได้

$|P_1 Q| = |x_1 - x_2|$ หรือ $|x_2 - x_1|$

$P_2 Q = |$_______$|$ หรือ $|$_______$|$

8.2 เนื่องจาก P_1P_2Q เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีของพิธากอรัส

$$|P_1P_2|^2 = (\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_\_\_)^2$$

$$|P_1P_2| = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_}$$

หรือ $$= \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_}$$

8.3 ข้อสรุป

ถ้า $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ และ $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบบนแกนพิกัดฉากระยะห่างระหว่างจุดทั้งสองแทนด้วย d

จะได้ $$|P_1P_2| = d = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

ศูนย์ที่ 1

บัตรเนื้อหา

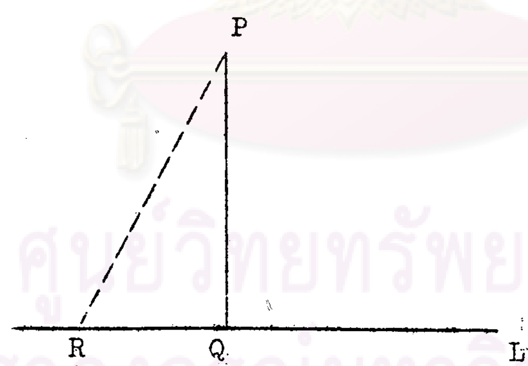
เรื่อง การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

เส้นตรงและส่วนของเส้นตรง

เส้นตรง หมายถึง เส้นตรงที่ไม่มีขอบเขตหรือไม่มีจุดสิ้นสุด

ส่วนของเส้นตรง หมายถึง ส่วนหนึ่งของเส้นตรงโดยมีจุดปลายทั้งสองข้างที่แน่ชัด

โปรเจคชัน ให้ P เป็นจุดจุดหนึ่งในระนาบ ซึ่งอาจจะอยู่บนเส้นตรง L หรือนอกเส้นตรง L ก็ได้ ถ้าลากเส้นตรง L_1 จาก P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L เรียกจุดตัดของเส้นตรง L_1 กับ L ว่าโปรเจคชัน (Projection) ของจุด P บนเส้นตรง L



จากรูป

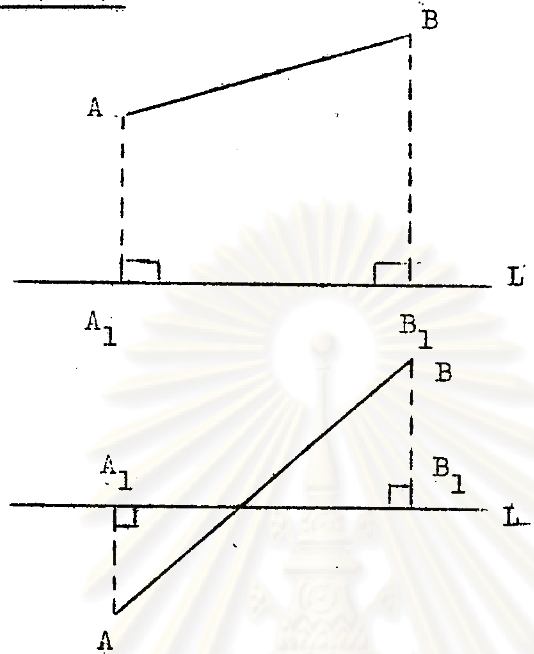
จุด Q คือโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L

จุด R ไม่ใช่โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L

โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือจุด Q เขียนสั้น ๆ ได้ คือ

$$\mathrm{Proj}_L(P) = Q$$

<u>โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง</u>



จากรูป

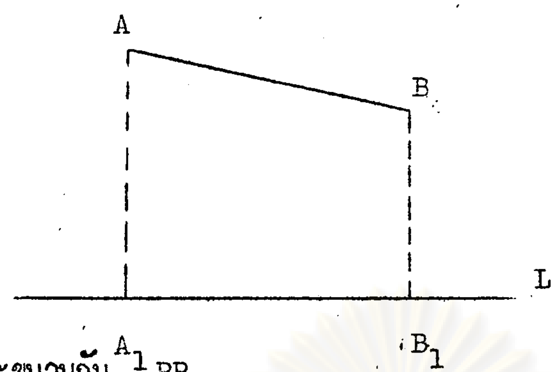
A_1B_1 เป็นโปรเจคชันของ AB บนเส้นตรง L

ซึ่งเขียนสั้น ๆ ได้ คือ $\text{Proj}_L\,(AB) = A_1B_1$

อ่านว่า โปรเจคชันของ AB บนเส้นตรง L คือ A_1B_1

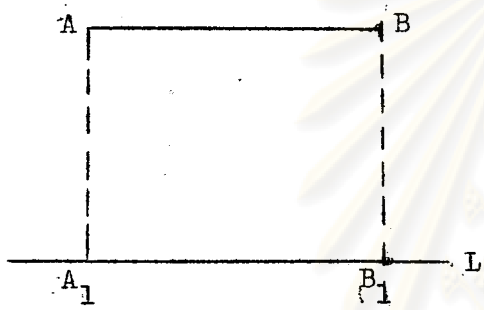
<u>ข้อสรุป</u>

1. โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน x คือ (a , o) เสมอ
2. โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน y คือ (o , b) เสมอ
3. P ย่อมเป็นโปรเจคชันของ P บนเส้นตรง L เมื่อ P อยู่บน L
4. AB และ A_1B_1 เป็นโปรเจคชันซึ่งกันและกันบนเส้นตรง L_1 และ L_2 ต่อเมื่อ L_1 ขนานกับ L_2
5. ถ้า A_1B_1 เป็นโปรเจคชันของ AB บนเส้นตรงหนึ่งแล้ว AA_1 ย่อมขนานกับ BB_1

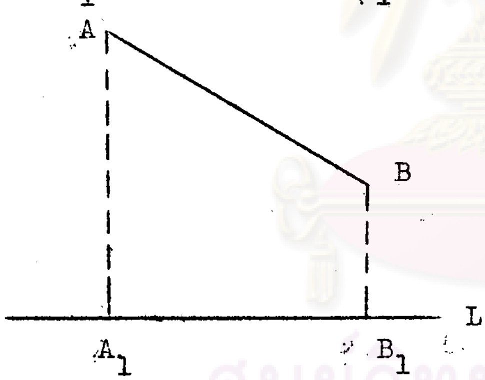


AA_1 จะขนานกับ BB_1

6. ส่วนของเส้นตรง ย่อมยาวกว่าหรือเท่ากับโปรเจคชันของมันเสมอ



$AB = A_1B_1$



$AB > A_1B_1$

<u>ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด</u>

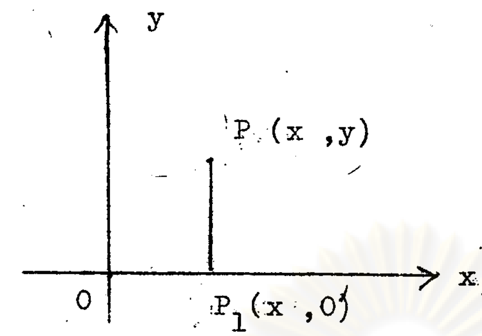
1. ถ้าจุด P_1 และ P_2 ซึ่งอยู่บนแกน x หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x แล้ว

$$P_1P_2 = |x_1 - x_2| \quad \text{หรือ} \quad |x_2 - x_1|$$

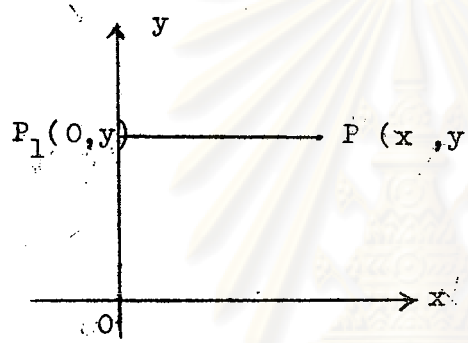
2. ถ้าจุด P_1 และ P_2 ซึ่งอยู่บนแกน y หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y แล้ว

$$P_1P_2 = |y_1 - y_2| \quad \text{หรือ} \quad |y_2 - y_1|$$

3. ระยะทางระหว่างจุด $P(x, y)$ กับแกน x เท่ากับ $|y|$



4. ระยะทางระหว่างจุด $P(x, y)$ กับแกน y เท่ากับ $|x|$



5. ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ

ถ้าจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ

d = ระยะทางระหว่างจุด P_1 ถึง P_2

$= |P_1P_2|$

สูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เมื่อทราบโคออร์ดิเนต คือ

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

หรือ

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะทางระหว่างจุด

ก. $(3, -1)$ และ $(2, 4)$

ข. $(-1, -2)$ และ $(3, -4)$

ค. (3 , 5) และ (–2 , 5)

ง. (0 , –6) และ (0 , 8)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ก. ให้ (3 , –1) $= (x_1 , y_1)$

(2 , 4) $= (x_2 , y_2)$

$$d = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-1 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

ข. (–1 , –2) และ (3 , –4)

$$d = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 + 4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ค. (3 , 5) และ (–2 , 5)

$$d = \sqrt{(3 - (-2)^2 + (5 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 0} = \sqrt{5^2} = 5$$

ง. (0 , –6) และ (0 , 8)

$$d = \sqrt{(0 - 0)^2 + (-6 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{(-14)^2} = 14$$

<u>ตัวอย่าง</u>

ถ้าระยะทางระหว่างจุด (k , 1) และ (–2 , 1) เป็น 3 จงหาค่า k

วิธีทำ

จุด (k , 1) และ (−2 , 1) มีค่าโคออร์ดิเนตเท่ากัน

จากสูตร ระยะทางระหว่างจุดทั้งสาม $= |k - (-2)|$

$= |k + 2|$

เพราะว่า $k + 2 = 3$

ดังนั้น $k + 2 = 3$ และ $k + 2 = -3$

ถ้า $k + 2 = 3$

$k = 1$

ถ้า $k + 2 = -3$

$k = -5$

ดังนั้น ค่าของ k คือ 1 , − 5

ตัวอย่าง 3 สามเหลี่ยมที่กำหนดโคออร์ดิเนตของจุดยอดให้นี้เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด A (−5 , −1) , B (2 , 3) , C(3 , −2)

วิธีทำ

แนวคิด การตรวจสอบว่าเป็นสามเหลี่ยมชนิดใดนั้นตรวจสอบที่ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม

ก. ถ้าด้านทั้งสามด้านเท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ข. ถ้าด้านทั้งสองด้านเท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ค. ถ้าด้านสามด้านมีความสัมพันธ์กันเข้าลักษณะตามทฤษฎีของพิธากอรัสจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ง. ถ้าด้านสามด้านไม่เท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ดังนั้น จากโจทย์ หาความยาวทีละด้าน

$$AB = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(-5-3)^2 + (\frac{-1}{5} + 2)^2} = \sqrt{65}$$

ดังนั้น $AB = AC = 65$

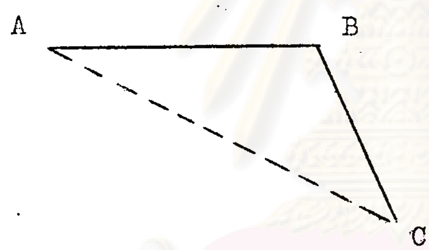
สรุปได้ว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

<u>ตัวอย่าง</u> จุด P (−2 , −4) , Q (10 , 2) , R (4,− 1) จุดทั้งสามนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> แนวคิดในการแสดงว่าจุดทั้งสามจุดจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ให้ทำดังนี้

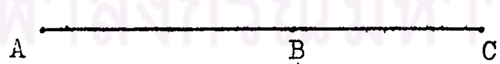
ให้ A , B , C เป็นจุด 3 จุด

ก. ถ้า A , B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



จะได้ $AB + BC > AC$ (เพราะด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่ 3)

แต่ถ้า A , B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



จะต้องได้ $AB + BC = AC$ เสมอ

ฉะนั้น เมื่อตรวจสอบว่า จุดทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ให้

1. หาระยะทางระหว่างจุดทุกคู่
2. นำระยะทางในข้อ 1 มาบวกกัน ถ้าเข้ากรณีข้อ ข. แสดงว่าจุดทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น ในการคิดโจทย์ข้อนี้ จุด P (−2 , −4) , Q (10 , 2) ,

R (4 , −1)

จะได้ว่า

$$PQ = \sqrt{(-12)^2 + (-b)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$OR = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$PR = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$PQ = OR + PR$$

$6\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ จริง ดังนั้นจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ศูนย์ที่ 1

บัตรงาน

เรื่อง การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

คำสั่ง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ โดยพยายามทำให้สมบูรณ์ที่สุด

1. จงหาโปรเจคชันของจุด P (1 , 3) , Q (−2 , 2) , R (−3 , −2) และ S (2 , −1) บนแกน x และแกน y

วิธีทำ

โปรเจคชันของจุด P (1 , 3) บนแกน x คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (1 , 3) บนแกน y คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (−2, 2) บนแกน x คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (−2, 2) บนแกน y คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (−3,−2) บนแกน x คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (−3,−2) บนแกน y คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (2 ,−1) บนแกน x คือ ____________

โปรเจคชันของจุด P (2, −1) บนแกน y คือ ____________

2. จงหาโปรเจคชันของบนแกน x และบนแกน y ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดต่อไปนี้

2.1 A (3 , 2) และ B (7 , 5)

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x เท่ากับ ____________

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y เท่ากับ ____________

2.2 C (−3 , 4) และ D (4 , −3)

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง CD บนแกน x เท่ากับ ____________

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง CD บนแกน y เท่ากับ ____________

2.3 E (−5 , 2) และ F (−2 , 6)

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง EF บนแกน x เท่ากับ ________

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง EF บนแกน y เท่ากับ ________

2.4 G (3 , −3) และ H (7 , 6)

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง GH บนแกน x เท่ากับ ________

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง GH บนแกน y เท่ากับ ________

4. จุด A (2 , −1) ; B (2 , 4) และ C (3 , 1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหาความยาวของด้านทั้งสามและจงบอกว่าสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

เพราะว่า ความยาวของด้าน AB = ____________________

ความยาวของด้าน BC = ____________________

ความยาวของด้าน AC = ____________________

สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยม ____________

เพราะ ____

5. จงแสดงว่าจุด P (1 , 1) Q (4 , 4) และ R (9 , −1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะว่า ความยาวด้าน PQ = ____________________

ความยาวด้าน QR = ____________________

ความยาวด้าน PR = ____________________

____

____

____

6. จงแสดงว่า $P(-2, 2)$ $Q(5, 1)$ และ $R(1, 3)$ เป็นจุดบนวงกลม ซึ่งมี $C(1, -2)$ เป็นจุดศูนย์กลาง

เพราะว่า ความยาว PC = ______________________

ความยาว QC = ______________________

ความยาว RC = ______________________

PC = QC = RC

ดังนั้น C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีด้าน

PC = QC = RC เท่ากับ รัศมีของวงกลม

7. จุด $A(1, 2)$ $B(3, 5)$ และ $C(5, 5)$ จุดทั้งสามนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

____

____

____

____

____

____

____

____

ศูนย์ที่ 1

บัตรปัญหา

1. ให้ P และ Q เป็นจุดบนเส้นตรง L จุด P_1 และ Q_1 เป็นจุดบนเส้นตรง L_1 ถ้า P_1Q_1 เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง PQ บน L_1

   1.1 โดยทั่วไป PQ จะเป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1Q_1 บนเส้นตรง L หรือไม่ ถ้าไม่เป็นจงแสดงตัวอย่างให้ดู

   1.2 โดยทั่วไปความยาวของ PQ จะเท่ากับความยาวของ P_1Q_1 หรือไม่ ถ้าไม่เท่าจงแสดงตัวอย่างให้ดู

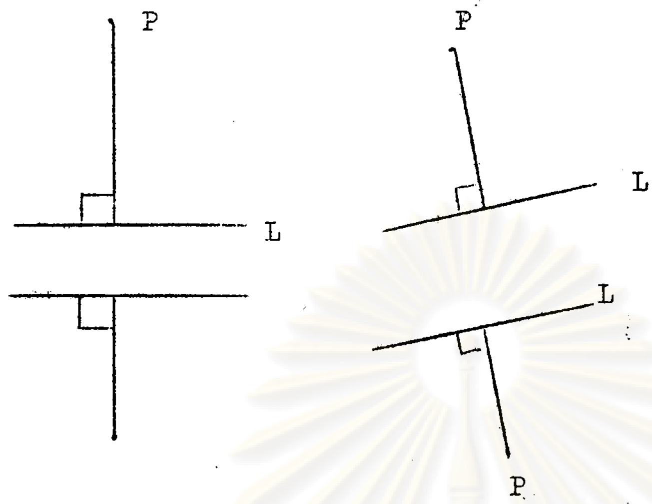
2. ให้ $M(a, b+c)$, $N(b, c+a)$ และ $P(c, a+b)$ จุดทั้งสามนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

3. จงหาจุดบนแกน y ที่อยู่ห่างจากจุด $(-4, 4)$ และ $(4, 10)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

ศูนย์ที่ 1

บัตรเฉลยกิจกรรม

1.1



1.2 ตั้งฉาก , โปรเจคชัน

1.3 (−1 , 0) , (3 , 0)

1.4 (0 , 2) , (0 , −2)

1.5 จุด P

1.6 (3 , 0) , (0 , 2)

(−3 , 0) , (0 , −2)

(2 , 0) , (0 , −1)

(1 , 0) , (0 , 0)

(0 , 0) , (0 , −1)

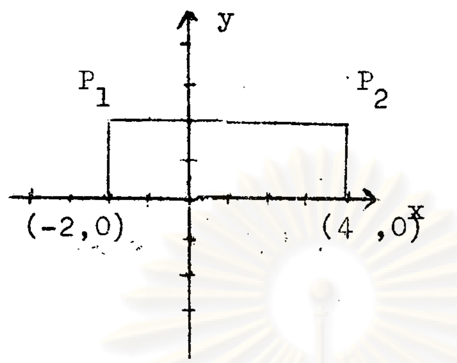
1.7 (a , o) , (o , b)

2.1 โปรเจคชัน , โปรเจคชัน

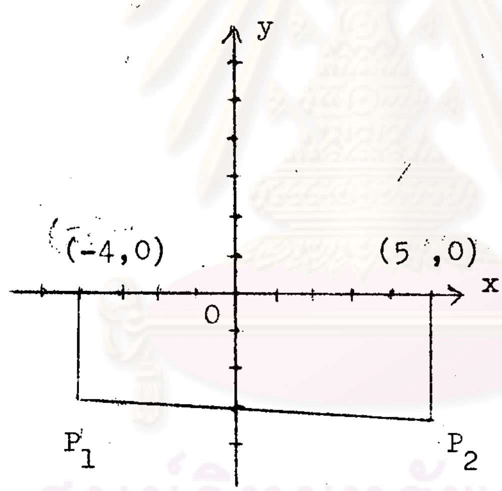
2.2 โปรเจคชัน , P_1 เส้นตรง L

โปรเจคชัน , P_2 เส้นตรง L

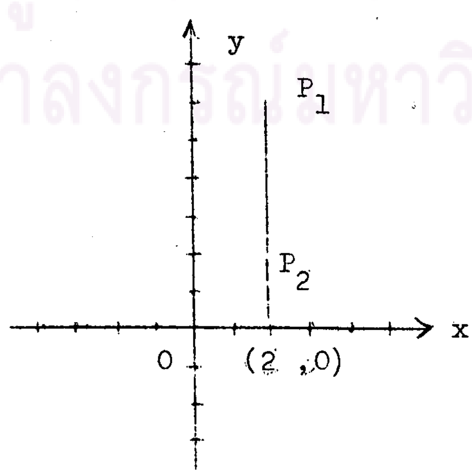
2.3



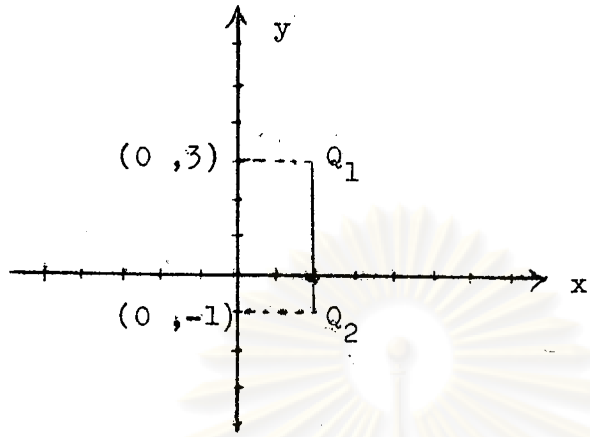
(2)

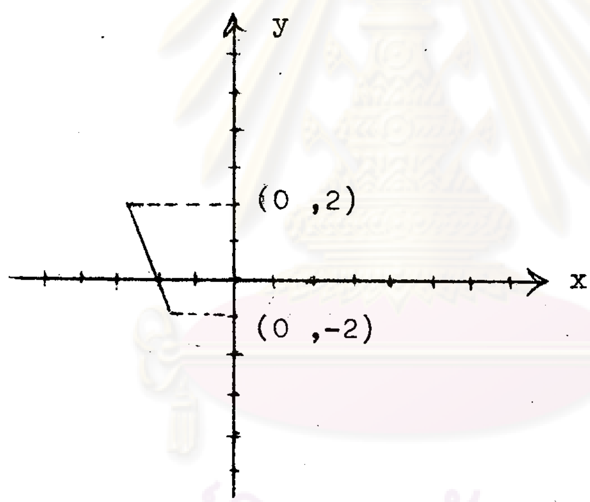


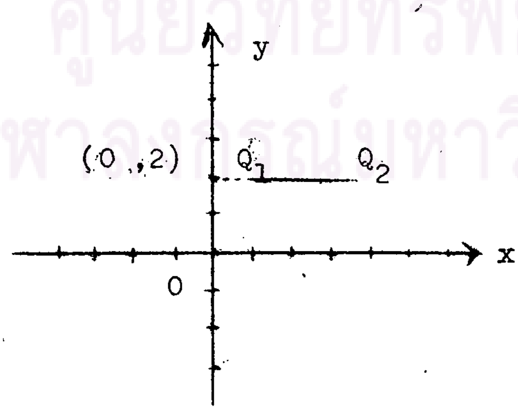
(3)



2.4







2.5

A_1B_1

3. A_2B

3.1 5 , 5

3.2 4 , 4

3.3 –

3.4 5 , 3 , $\frac{2}{5}$, 7 , 7 บวกเสมอ

3.5 (1 , 0) , (4 , 0)

3.6 (0 , 2) , (0 , –1)

4.

4.1 (–4 , 0)

4.2 (2 , 0)

4.3 ขนาน

4.4 ออร์ดิเนต

4.5 6

4.6 $|Q_1Q_2|$

4.7 $|x_2 - x_1| = 6$

4.8 $|x_2 - x_1|$

4.9 P_1 และ P_2

$|x_2 - x_1|$ หรือ $|x_1 - x_2|$

5.

5.1 (0 , 3)

5.2 (0 , –2)

5.3 ขนาน

5.4 แอบซิสสา

5.5 $|5|$

5.6 Q_1Q_2

5.7 $|5| = 5$, 5

5.8 $|y_1 - y_2|$ หรือ $|y_2 - y_1|$

5.9 ขนาน , กับแกน x

5.10 ขนาน , กับแกน y

6.

6.1 $AB^2 = BC^2 + AC^2$

6.2 พิธากอรัส $d^2 = a^2 + b^2$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

6.3 R (7 , 2)

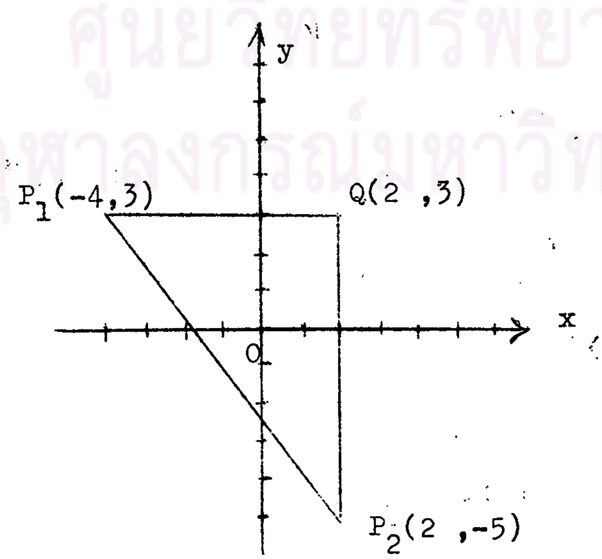
5

4

$d^2 = 5^2 + 4^2$

$d = \sqrt{41}$

7.



7.1 Q (2 , 3)

7.2 ไม่ขนาน

7.3 ไม่ขนาน

7.4 6

8

7.5 มุมฉาก

7.6 มุมฉาก

7.7 $|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |P_2Q|^2$

$$|P_1P_2| = \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = 10$$

8.

8.1 $|P_2Q| = |y_1 - y_2|$ หรือ $|y_2 - y_1|$

8.2 $|P_1P_2| = |P_1Q|^2 + |P_2Q|^2$

$$|P_1P_2| = \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2}$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

หรือ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

8.3

$$|P_1P_2| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ศูนย์ที่ 1

บัตรเฉลยบัตรงาน

1. จุด (1 , 0) เป็นโปรเจคชันของจุด P (1 , 3) บนแกน x

จุด (0 , 3) เป็นโปรเจคชันของจุด P (1 , 3) บนแกน y

จุด (−2, 0) เป็นโปรเจคชันของจุด Q (−2, 2) บนแกน x

จุด (0 , 2) เป็นโปรเจคชันของจุด Q (−2 , 2) บนแกน y

จุด (−3, 0) เป็นโปรเจคชันของจุด R (−3, −2) บนแกน x

จุด (0 , −2) เป็นโปรเจคชันของจุด R (−3, −2) บนแกน y

จุด (2 , 0) เป็นโปรเจคชันของจุด S (2 , −1) บนแกน x

จุด (0 , −1) เป็นโปรเจคชันของจุด S (2 , −1) บนแกน y

2.

2.1 โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x เท่ากับ 4

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y เท่ากับ 3

2.2 โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง CD บนแกน x เท่ากับ 7

โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง CD บนแกน y เท่ากับ 7

2.3 โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง EF บนแกน x เท่ากับ 3

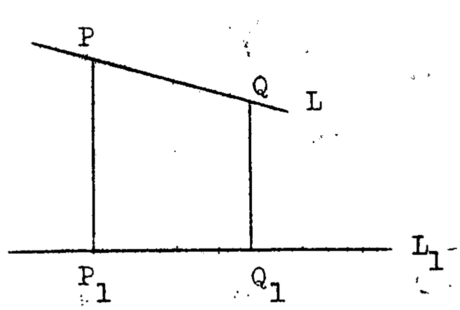
โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง EF บนแกน y เท่ากับ 4

2.4 โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง GH บนแกน x เท่ากับ 4

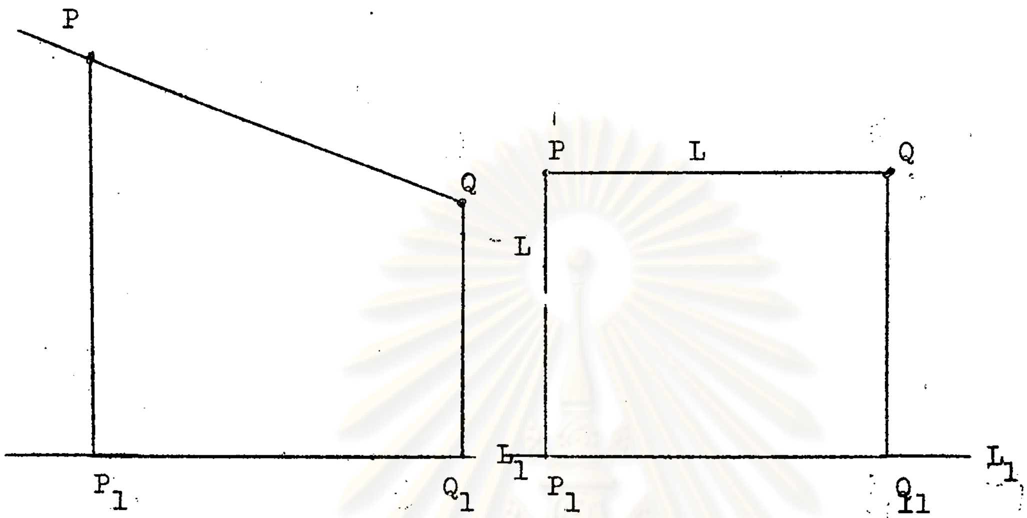
โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง GH บนแกน y เท่ากับ 9

3.

3.1 PQ จะไม่เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1Q_1 บนเส้นตรง L



3.2 ความยาวของ PQ จะไม่เท่ากับความยาวของ P_1Q_1 แต่ถ้า L และ L_1 ขนานกันแล้ว PQ จะยาวเท่ากับ P_1Q_1



4.

$$AB = 5$$

$$AC = 5$$

และ $BC = \sqrt{10}$

สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5. เพราะว่า $|PQ| = \sqrt{18}$

$$|QR| = \sqrt{50}$$

$$|PR| = \sqrt{68}$$

และ $PQ^2 + QR^2 = \sqrt{18}^{\,2} + \sqrt{50}^{\,2} = 68 = PR^2$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีของพิธากอรัส PQR จะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

6. เพราะ $|PC| = 5$

$$|QC| = 5$$

$$|RC| = 5$$

เพราะฉะนั้น จุด P , Q และ R อยู่บนวงกลมซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์ของวงกลมมีรัศมี เท่ากับ PC = QC = RC = 5

7. <u>วิธีทำ</u>

จากจุด A (1 , 2) B (3 , 5) และ C (5 , 5)

จะได้

ความยาวของ AB $= \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13}$

ความยาวของ BC $= \sqrt{(5-3)^2 + (5-5)^2} = 2$

ความยาวของ AC $= \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2} = 5$

เพราะว่า

$$5 \neq 2 + 13$$

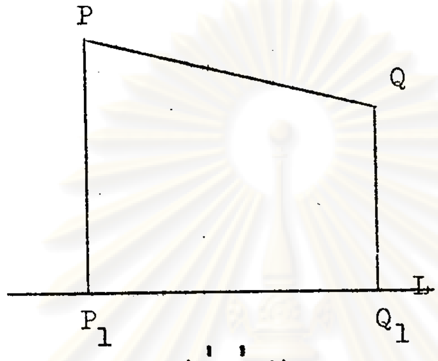
ดังนั้น AC $\neq$ AB + BC

จุดทั้งสามจุดนี้ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

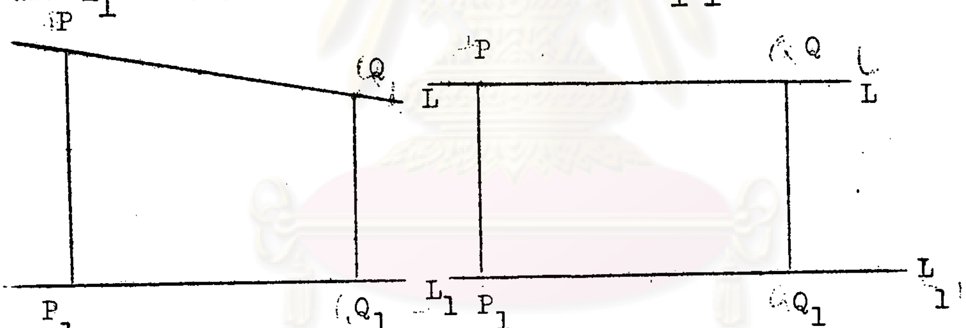
บัตรเฉลยบัตรปัญหา

1.

1.1 PQ จะไม่เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1Q_1 บนเส้นตรง L



1.2 ความยาวของ PQ จะไม่เท่ากับความยาวของ P_1Q_1 แต่ถ้า L และ L_1 ขนานกันแล้ว PQ จะยาวเท่ากับ P_1Q_1



2. <u>วิธีทำ</u> เพราะว่าจุดทั้งสาม คือ P (a , b + c) , N (b , c + a)และ P (c , a + b) แทนค่าในสูตรการหาระยะทางของจุดสองจุด

$$MN = \sqrt{(a-b)^2 + (b+c-c-a)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2}$$

$$= \sqrt{2\ (a-b)^2}$$

$$= (a-b)\sqrt{2}$$

$$NP = \sqrt{(b-c)^2 + (c-b)^2}$$

$$= (b-c)\sqrt{2}$$

$$MP = \sqrt{(a-b)^2 + (c-a)^2}$$
$$= (a-b)\sqrt{2}$$

$$MP = MN + NP$$

<u>วิธีทำ</u>

ให้จุดบนแกน y มีโคออร์ดิเนต (o , y)

เพราะว่า ระยะทางจากจุด (o , y) ไปยังจุด $(-4 , 4)$

$$= \sqrt{(-4-0)^2 + (4-y)^2}$$

ระยะทางจากจุด (o , y) ไปยังจุด $(4 , 10)$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (10-y)^2}$$

ดังนั้น

$$\sqrt{(-4-0)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (10-y)^2}$$

$$16 + 16 - 8y + y^2 = 16 + 100 - 20y + y^2$$

$$12y = 84$$

$$y = 7$$

จุดบนแกน y คือ จุด $(0 , 7)$

ศูนย์ที่ 1

บัตรทดสอบ

1. โปรเจคชันของจุด (−3 , −2) บนแกน x คือข้อใด

ก. (3 , 0) ข. (−3 , 0)

ค. (0 , 3) ง. (0 , −3)

2. ถ้า Q เป็นจุดโปรเจคชันของจุด P (2 , 3) บนแกน x แล้ว โปรเจคชันของจุด P บนแกน y คือจุดใด

ก. (0 , 0) ข. (0 , 2)

ค. (0 , 3) ง. (2 , 0)

3. ถ้าจุด B เป็นโปรเจคชันของจุด A (2 , 5) บนแกน y แล้ว โปรเจคชันของจุด B บนแกน x คือจุดใด

ก. (0 , 0) ข. (0 , 2)

ค. (0 , 5) ง. (0 , 5)

4. ถ้าเส้นตรง L_1 และ L_2 ต่างเป็นโปรเจคชันของกันและกันแล้ว เส้นตรงทั้งสองเส้นควรมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ก. ตั้งฉากกัน ข. ยาวเท่ากัน

ค. ขนานกัน ง. ยาวเท่ากันและขนานกัน

5. โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P (−1 , −3) Q (2 , 4) บนเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A (−4 , 9) B (−4 , −5) ยาวกี่หน่วย

ก. 5 ข. 6

ค. 7 ง. 9

6. ส่วนของเส้นตรงใดในข้อต่อไปนี้มีโปรเจคชันยาวที่สุดบนแกน x

ก. A(−6 , 3) B(−2 , 7)

ข. C(−4 , 0) D(5 , −5)

ค. E(−3 , 0) F(5 , 0)

ง. G(0 , 5) H(0 , −8)

7. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (−3 , 2) และผ่านจุด(7 , 4) จะมีรัศมียาวเท่ากับข้อใด

ก. $\sqrt{26}$ ข. $2\sqrt{26}$

ค. $3\sqrt{26}$ ง. $4\sqrt{26}$

8. วงกลมวงหนึ่งมี A (−2 , −2) เป็นจุดศูนย์กลางและสัมผัสกับเส้นตรงเส้นหนึ่งที่จุด B (3 , 4) วงกลมวงนี้มีรัศมียาวกี่หน่วย

ก. $\sqrt{26}$ ข. $\sqrt{34}$

ค. $\sqrt{61}$ ง. $\sqrt{71}$

9. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดมุมอยู่ที่ (7 , 0) (1,6) และ (−5,6) จะมีเส้นรอบรูปยาวกี่หน่วย

ก. $6 + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{5}$

ข. $6 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

ค. $6 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

ง. $4 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

10. จุด (3,8) , (−11,3) และ (−8,−2) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมในข้อใด

ก. สามเหลี่ยมใด ๆ

ข. สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ค. สามเหลี่ยมมุมฉาก

ง. สามเหลี่ยมด้านเท่า

11. จงหาจุด ๆ หนึ่งบนแกน y ซึ่งจุดนี้ห่างจากจุด (−5 , 1) และ (5,6) เป็นระยะทางเท่ากัน

ก. (0 , −3.5)

ข. (0 , 3.5)

ค. (3.5 , 0)

ง. (−3.5 , 0)

12. กำหนดจุด A (1 , 1) จุด B (−4,2) จุด C (−1,−1) ถ้าลากเส้นตรงต่อจุดทั้งสามจะมีลักษณะเป็นอย่างไร

ก. เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ข. เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ค. เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ง. เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

13. เงื่อนไขข้อใดพอสรุปได้ว่า A B และ C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. $AB = \frac{1}{2} AC$

ข. $AB + BC = AC$

ค. $AB^2 + BC^2 > AC^2$

ง. $AB^2 + BC^2 = AC^2$

14. พื้นที่ของวงกลมข้อใดมากที่สุด ถ้ากำหนดโคออร์ดิเนตของจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลางให้ดังนี้

ก. (0,4) และ (2,0)

ข. (0,3) และ (3,0)

ค. (0,2) และ (4,0)

ง. (0,1) และ (5,0)

15. ถ้า A(0,0) B (6,0) เป็นฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จงหาจุดยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปนี้

ก. (0,5) ข. (3,5)

ค. (5,0) ง. (5,3)

ศูนย์ที่ 1

เฉลยบัตรทดสอบ

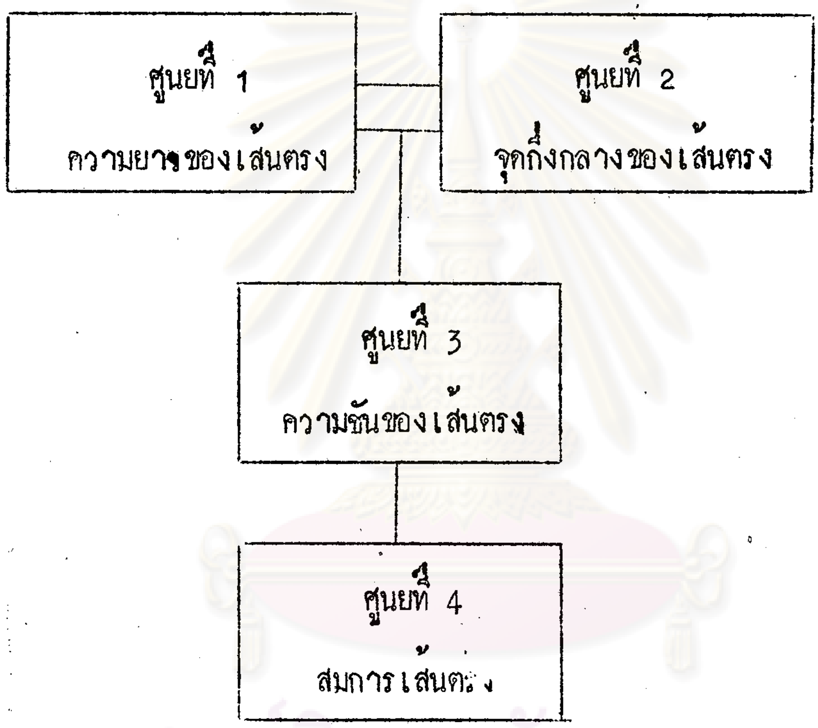
1. ข
2. ค
3. ก
4. ง
5. ค
6. ค
7. ข
8. ค
9. ข
10. ข
11. ข
12. ง
13. ง
14. ง
15. ข

ศูนย์ที่ 2

บัตรคำสั่ง

โปรดอ่านคำสั่งนี้แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. ให้นักเรียนเลือกเรียนที่ศูนย์การเรียนทั้ง 4 ศูนย์ให้ครบ โดยให้เริ่มทำที่ศูนย์ที่ 1 หรือศูนย์ที่ 2 ศูนย์ใดก่อนก็ได้ เมื่อทำศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2 แล้วจึงไปทำศูนย์ที่ 3 และศูนย์ที่ 4 ตามลำดับ



2. ก่อนลงมือเรียนให้ทำแบบทดสอบเพื่อประเมินผลการเรียนเรื่อง "เส้นตรง" โดยทำที่ศูนย์ที่หนึ่ง หรือศูนย์ที่ 2 เพียงศูนย์เดียว

3. ศึกษาจากบัตรกิจกรรม ถ้ายังไม่เข้าใจให้ศึกษาจากบัตรเนื้อหาเพิ่มเติม

4. ทำบัตรงานพร้อมทั้งตรวจบัตรผลงานที่บัตรเฉลย

5. ทำบัตรทดสอบพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

6. เปลี่ยนศูนย์การเรียนสลับกัน ระหว่างศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2 แล้วทำศูนย์ที่ 3

ศูนย์ที่ 2

การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

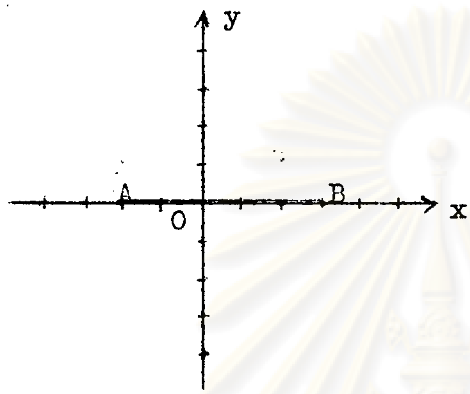
วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้รู้วิธีหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด
    1.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถสรุปสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้
    1.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองโดยใช้สูตรได้
    1.3 สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดได้ ในเมื่อกำหนดอีกจุดหนึ่งและจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้

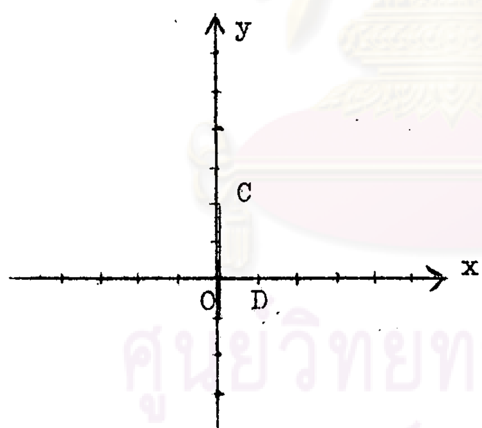
ศูนย์ที่ 2

บัตรกิจกรรม

เรื่องการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด



1.1 จากความรู้เกี่ยวกับเรื่องเส้นจำนวน ระยะทางจาก A ถึง B มีค่า_______ อาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ความยาวของส่วนเส้นตรง AB มีค่า_______หน่วย



1.2 ระยะทางจากจุด C ถึงจุด D มีค่า _______ หน่วย อาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ความยาวของส่วนของเส้นตรง CD มีค่า _______ หน่วย

ถ้า P และ Q เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ในระนาบ ระยะทางระหว่างจุด P ถึงจุด Q หมายถึงความยาวของส่วนของเส้นตรง PQ และแทนด้วยสัญลักษณ์ |PQ|

|PQ| อ่านว่าค่าสมบูรณ์ของ PQ

1.3 จากความรู้เกี่ยวกับค่าสมบูรณ์

$|5|$ ค่าสมบูรณ์ของ 5 มีค่า ______________

$|-3|$ ค่าสมบูรณ์ของ -3 มีค่า ______________

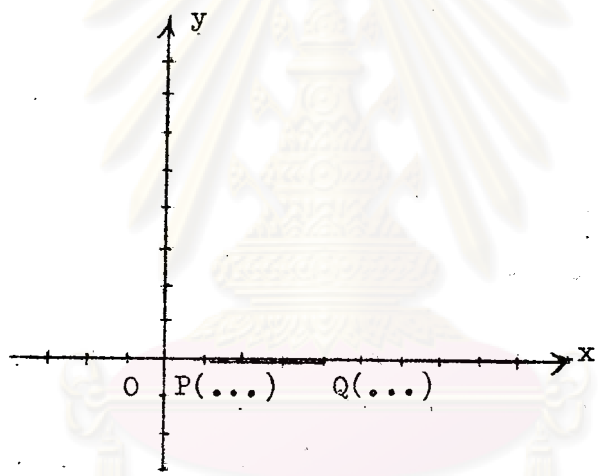
$\left|\frac{2}{5}\right|$ ค่าสมบูรณ์ของ $\frac{2}{5}$ มีค่า ______________

$|-5 \ -2|$ ค่าสมบูรณ์ของ $(-5 \ -2)$ มีค่า ______________

ค่าสมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ มีค่าเป็น ______________ เสมอ

(บวก / ลบ)

2.



2.1 จากรูป

โคออร์ดิเนตของจุด P มีค่า ______________

โคออร์ดิเนตของจุด Q มีค่า ______________

ระยะทางจากจุด P ถึงจุด Q = $|PQ| = 3$

$$3 = |4 - 1| = |1 - 4|$$

4 เป็นค่าแอบซิสสาของจุด Q

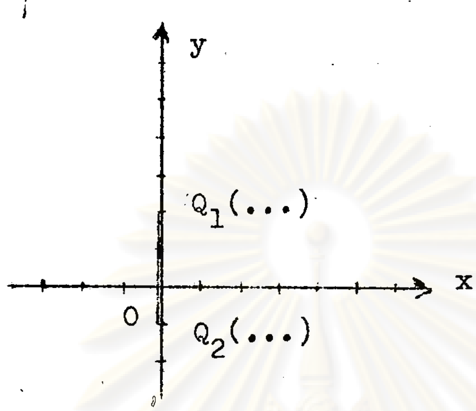
1 เป็นค่าแอบซิสสาของจุด P

2.2 ดังนั้น ถ้าจุด P_1 เป็นจุดอยู่บนแกน x มีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_1, 0)$

จุด P_2 เป็นจุดอยู่บนแกน x มีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_2, 0)$

ระยะทางจากจุด P_1 ถึงจุด P_2 $= |P_1P_2| = |x_1 - x_2|$

หรือ $|x_2 - x_1|$



จากรูป

จุด Q_1 มีโคออร์ดิเนต ______

จุด Q_2 มีโคออร์ดิเนต ______

ระยะทางจากจุด Q_1 ถึงจุด Q_2 $= |Q_1Q_2|$

$|Q_1Q_2| = 3$

$= |2 - (-1)| = |3| = 3$

หรือ $= |-1 - 2| = |-3| = 3$

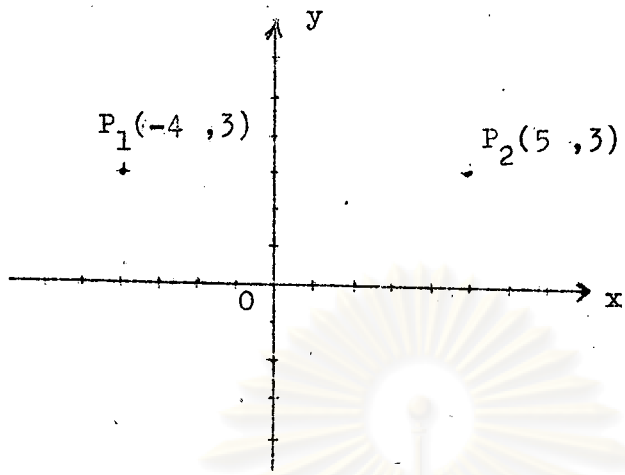
ถ้าจุด Q_1 เป็นจุดอยู่บนแกน y มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, y_1)$

จุด Q_2 เป็นจุดอยู่บนแกน y มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, y_2)$

ระยะทางจากจุด Q_1 ถึง Q_2 $= |Q_1Q_2| = |y_1 - y_2|$

หรือ $|y_2 - y_1|$

3. พิจารณาจุด P_1 $(-4, 3)$ และจุด $P_2(5, 3)$บนแกนพิกัดฉาก



3.1 จากรูปจงแสดงส่วนของเส้นตรง P_1P_2

3.2 จากจุด P_1 ลากเส้นตั้งฉากไปตั้งฉากกับแกน x ที่จุด Q_1
จุด Q_1 จะมีโคออร์ดิเนต ____________

3.3 จากจุด P_2 ลากเส้นตรงตั้งฉากไปตั้งฉากกับแกน x ที่จุด Q_2
จุด Q_2 มีโคออร์ดิเนต ____________

3.4 ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ขนานกับแกน x หรือแกน y ______

3.5 สี่เหลี่ยม $P_1P_2Q_1Q_2$ เป็นสี่เหลี่ยม ____________

3.6 ความยาวของ P_1P_2 เท่ากับความยาวของด้าน ____________
เพราะ ______________________________

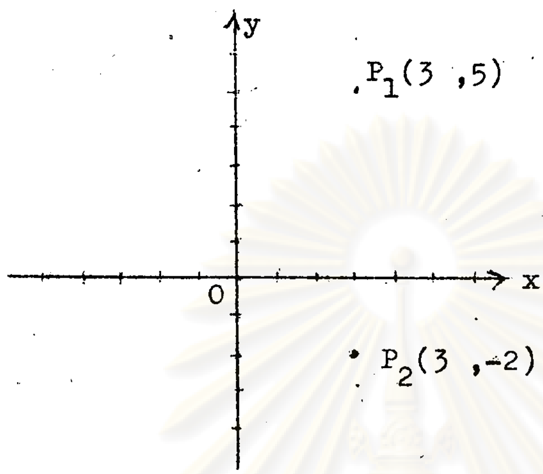
3.7 $|Q_1Q_2| = |x_1 - x_2| =$ ________ $=$ ________

3.8 $|P_1P_2| =$ ______________

ในกรณีทั่วไป ถ้าจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ อยู่บนเส้นตรง ซึ่งขนานกับแกน x จะได้ว่า $y_1 = y_2$ และ $|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$

4. พิจารณาจุด $P_1(3, 5)$ และจุด $P_2(3, -2)$

4. พิจารณาจุด $P_1(3, 5)$ และจุด $P_2(3, -2)$



4.1 จากรูปจงแสดงส่วนของเส้นตรง P_1P_2

4.2 จากจุด P_1 ลากเส้นตั้งฉากไปตั้งฉากกับแกน y ที่จุด Q_1

จุด Q_1 จะมีโคออร์ดิเนต ______________________

4.3 จากจุด P_2 ลากเส้นตั้งฉากไปตั้งฉากกับแกน y ที่จุด Q_2

จุด Q_2 จะมีโคออร์ดิเนต ______________________

4.4 ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ขนานกับแกน x หรือแกน y

4.5 สี่เหลี่ยม $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ เป็นสี่เหลี่ยม ____________

4.6 ความยาวของ $P_1 P_2$ เท่ากับความยาวของด้าน ____________

เพราะ ______________________________________

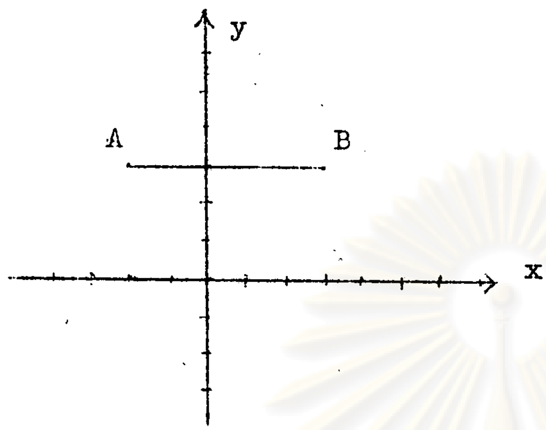
4.7 $|Q_1Q_2| = |x_1 - x_2| =$ ____________ $=$ ____________

4.8 $|P_1P_2| =$ ____________

ในกรณีทั่วไป ถ้าจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน จะได้ $x_1 = x_2$ และ

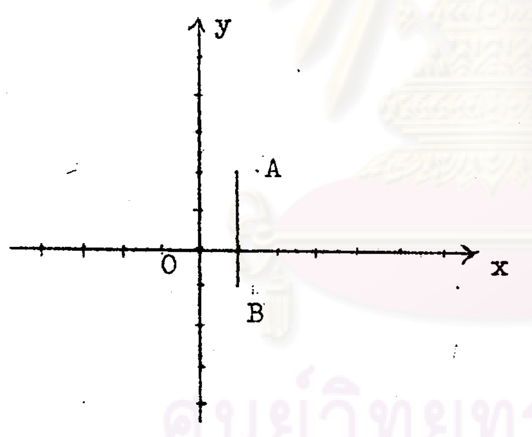
$|P_1P_2| = |y_1 - y_2|$

5.



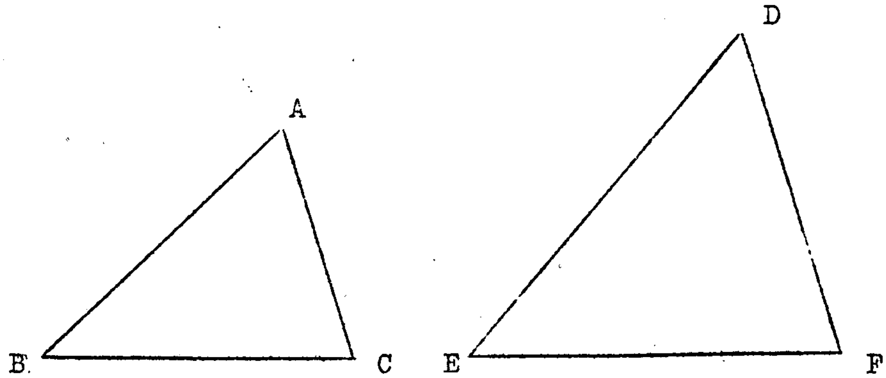
5.1 จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรง AB

____



5.2 ความยาวของ AB = ________

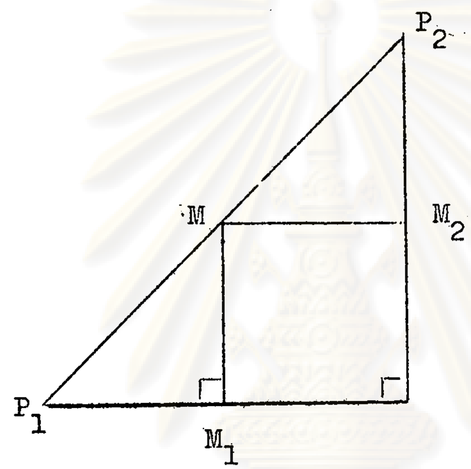
6.



6.1 ถ้าสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF มีมุม A=D , B=F และ C = F แล้วจะได้ว่าสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เป็นสามเหลี่ยม ______________

และ $\frac{AB}{DE}$ = ______________ = ______________

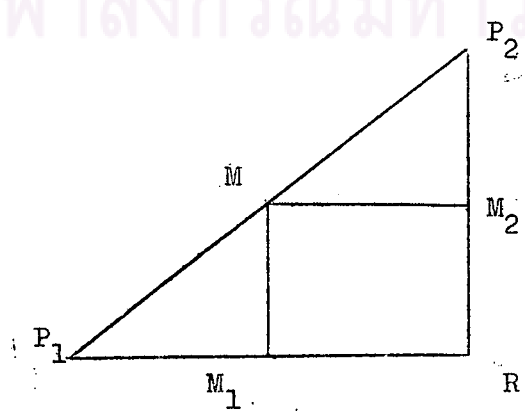
7.



ให้ P_1MM_1 และ MP_2M_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้

$$\frac{P_1M}{P_2M} = \frac{P_1M_1}{----} = \frac{----}{P_2M_2}$$

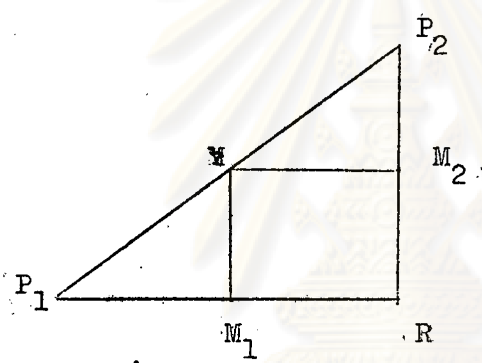


ถ้าให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของ P_1P_2 แล้วจะได้ว่า $P_1M = MP_2$
เมื่อสามเหลี่ยม P_1MM_1 และ MP_2M_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้ายและ
$P_1M = MP_2$ แล้วโดยคุณสมบัติทางเรขาคณิตจะได้ว่า

$$P_1M_1 = MM_2$$

และ MM_1 = ____________

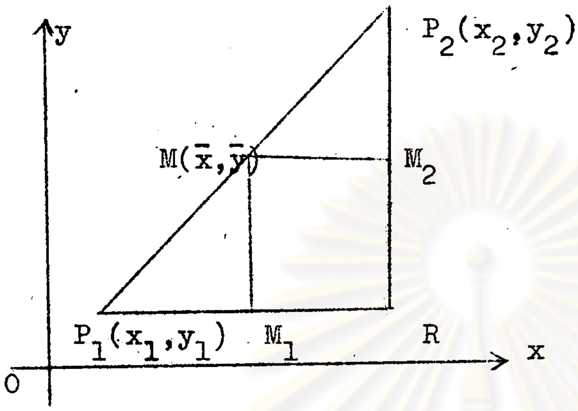
7 9.



ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของ P_1P_2
แล้วจะได้ว่า M_1 เป็นจุดกึ่งกลางของ ____________________
และ M_2 เป็นจุดกึ่งกลางของ ____________________

10. ให้ P_1 (x_1, y_1) และ P_2 $(x_2\ y_2)$ เป็นจุดกึ่งกลางใด ๆ ในระนาบ และ M $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 ถึงจุด P_2 ต้องการหาค่าโคออรดิเนตของจุด M
นั่นคือ จะหาค่าของ $\bar{x}$ ในเทอมของ x_1 และ x_2 และหาค่าของ $\bar{y}$ ในเทอมของ ______________ และ ______________

11



11.1 เนื่องจากสามเหลี่ยม P_1MM_1 และ MP_2M_2 เป็นสามเหลี่ยมคล้าย M เป็นจุดกึ่งกลางของ P_1P_2 ดังนั้น

ด้าน $P_1M = P_2M$

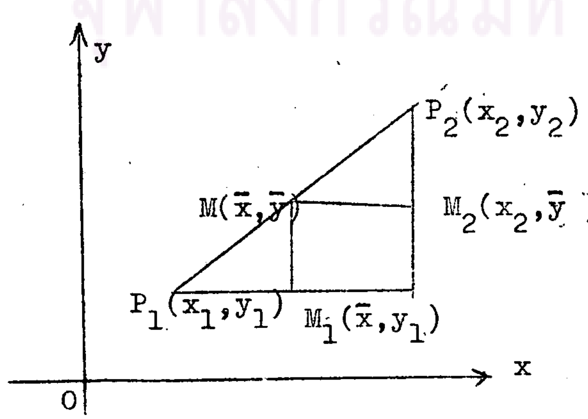
P_1M_1 = ____________

11.2 เมื่อพิจารณาโคออร์ดิเนตของจุด M_1 และ M_2

จุด M_1 มีโคออร์ดิเนต ____________

M_2 มีโคออร์ดิเนต ____________

12. จากรูปในข้อ 11



12.1 ความยาวของด้าน P_2M_1 , P_1P_2 , MM_1 และ MM_2 เขียนในเทอมของ $\bar{x}$, $\bar{y}$, x_1 , y_1 , x_2 และ y_2 ได้ดังนี้

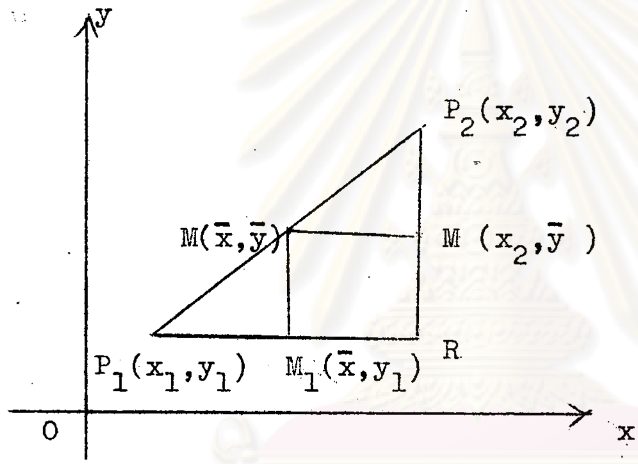
P_1M = ____________________

P_2M = ____________________

MM_1 = ____________________

P_2M_2 = ____________________

13



13.1 พิจารณารูปข้างบนนี้ จะเห็นว่า ค่าของ $\bar{x}$ อยู่ระหว่าง x_1 และ x_2

ดังนั้น $x_1 < x < x_2$ นั่น คือ

$|\bar{x} - x_1|$ มีเครื่องหมาย ____________________

$|x_2 - \bar{x}|$ มีเครื่องหมาย ____________________

13.2 จาก $\bar{x} - x_1 = x_2 - \bar{x}$

แก้สมการจะได้ $\bar{x}$ = ____________________

และ ค่าของ $\bar{y}$ อยู่ระหว่าง y_1 และ y_2

ดังนั้น $y_1 < \bar{y} < y_2$ นั่นคือ

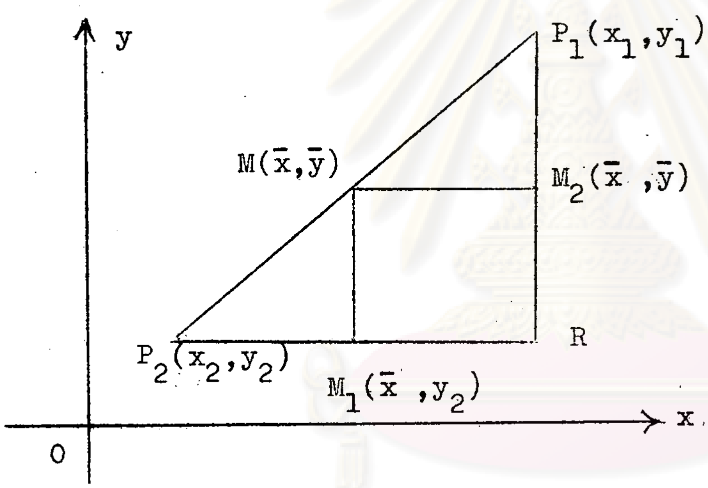
$\bar{y} - y_1$ มีเครื่องหมาย ______________________

$y_2 - \bar{y}$ มีเครื่องหมาย ______________________

จาก $\bar{y} - y_1 = y_2 - \bar{y}$

แก้สมการ $\bar{y} =$ ______________________

~~14.~~ ถ้าจุด $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$ มาก่อนจุด $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ ดังรูป

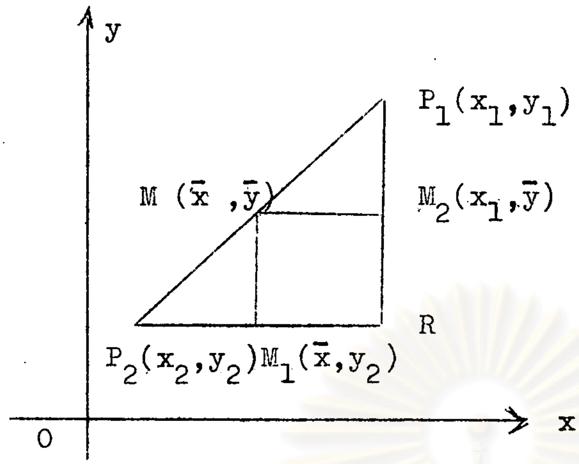


จากรูปข้างบน กำหนดจุด P_2 อยู่ข้างล่าง P_1

M_1 มีโคออร์ดิเนตเป็น ______________________

M_2 มีโคออร์ดิเนตเป็น ______________________

15. ท



ความยาวด้าน P_2M_1 , P_1M_2 , MM_1 และ MM_2

เขียนในเทอมของ $\bar{x}$, $\bar{y}$, x_1 , y_1 , x_2 และ y_2 ได้ดังนี้

P_2M_1 = ______________________

MM_2 = ______________________

MM_1 = ______________________

P_1M_2 = ______________________

ข

16. จากรูปในข้อ 15

16.1 เนื่องจาก $P_2M_1 = MM_2$

$MM_1 = P_1M_2$

ดังนั้น

$\bar{x} - x_2 = x_1 - \bar{x}$

$\bar{y} - y_2 =$ ______________________

16.2 เพราะว่า $\bar{x}$ อยู่ระหว่าง x_2 และ x_1 ดังนั้น $x_2 < \bar{x}$

และ $\bar{x} < x_1$

พิจารณาเครื่องหมายของ $\bar{x} - x_2$ จะมีเครื่องหมายเป็น ________

พิจารณาเครื่องหมายของ $x_1 - x_2$ จะมีเครื่องหมายเป็น ________

16.3 ในทำนองเดียวกัน y อยู่ระหว่าง y_1 และ y_2 ดังนั้น $y < \bar{y} < y_1$

พิจารณาเครื่องหมาย $\bar{y} - y_2$ จะมีเครื่องหมายเป็น ________

พิจารณาเครื่องหมาย $y_1 - \bar{y}$ จะมีเครื่องหมายเป็น ________

13 17. พิจารณาผลจากข้อ ~~16~~ 12

แก้สมการ $\bar{x} - x_2 = x_1 - \bar{x}$

ดังนั้น $\bar{x} =$ ________

$\bar{y} - y_2 = y_1 - \bar{y}$

$\bar{y} =$ ________

14 18. จะเห็นได้ว่าจุดสองจุด คือ $P_1\ (x_1, y_1)$ และ $P_2\ (x_2, y_2)$ ไม่ว่าจุดใดจะมาก่อนผลลัพท์ที่ได้ จะพบว่าเหมือนกัน

15 19. สรุป

โดยทั่วไป ถ้ากำหนดจุด $P_1\ (x_1, y_1)$ และ $P_2\ (x_2, y_2)$ ต้องการหาจุด $P\ (\bar{x}, \bar{y})$ ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 จะได้ว่าโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลาง คือ

$\bar{x} =$ ________

$\bar{y} =$ ________

ซึ่งเป็นสูตรที่จะนำมาใช้ในการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

16 20. ถ้าจุด A (2 , 6) และจุด B (4, 2) แล้ว จุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B จะมีโคออร์ดิเนตเป็นดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$\bar{y} = \text{\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

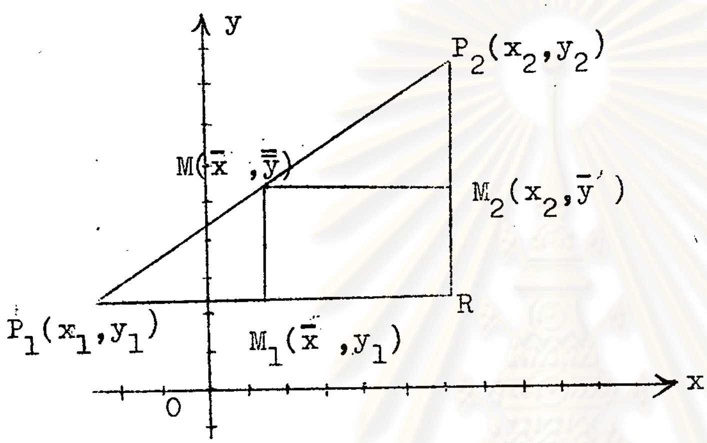
โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางคือ ________

ศูนย์ที่ 2

บัตรเนื้อหา

เรื่อง การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

<u>การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด</u>



ถ้า $M(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้วจะได้ว่า M มีโคออร์ดิเนตเป็น

$$\bar{x} = \frac{x_1 + y_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น เมื่อทราบค่าโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางได้

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด

ก. (2 , 5) กับ (−4 , 3)

ข. (1 , 6) กับ (5 , −2)

ค. (2 , 0) กับ (0 , 3)

ง. (-m , n) กับ (p , -q)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร การหาโคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ก. แทนค่าในสูตร

$$\bar{x} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

$$\bar{y} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

จุดกึ่งกลางระหว่าง (2 , 5) และ (-4 , 3) คือจุด (-1 , 4)

ข. (1 , 6) กับ (5 , -2)

$$\bar{x} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (1 , 6) กับ (5 , 2) คือจุด (3 , 2)

ค. (2 , 0) กับ (0 , 3)

$$\bar{x} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (2 , 0) กับ (0 , 3) คือจุด

$(\frac{1}{2} , \frac{3}{2})$

ง. (-m , n) กับ (p , -q)

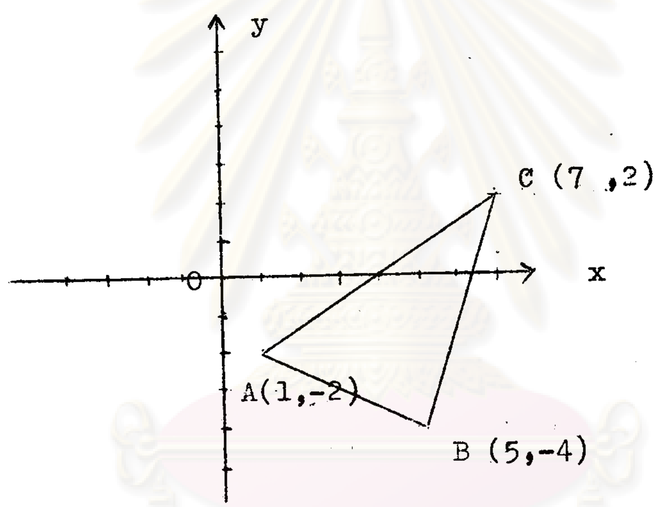
$$\bar{x} = \frac{-m + p}{2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{p - m}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{n - q}{2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{-q + n}{2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(-m , n)$ กับ $(p , -q)$ คือจุด
$\left(\frac{p - m}{2} , \frac{n - q}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ A $(1 , -2)$ B $(5 , -4)$ และ C $(7 , 2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาจุดกึ่งกลางของด้านของสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ ลงจุด A $(1 , -2)$ B $(5 , -4)$ และ C $(7 , 2)$ บนแกนพิกัดฉาก



ให้ P , Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามหาโคออร์ดิเนตของจุดจะได้ว่า

$\bar{x} = \frac{1 + 7}{2} = 4$ และ $\bar{y} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$

โคออร์ดิเนตของ P คือ $(4 , 0)$

โคออร์ดิเนตของจุด Q

$\bar{x} = \frac{1 + 5}{2} = 3$ และ $\bar{y} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$

จุด Q จะมีโคออร์ดิเนต (3 , -3)

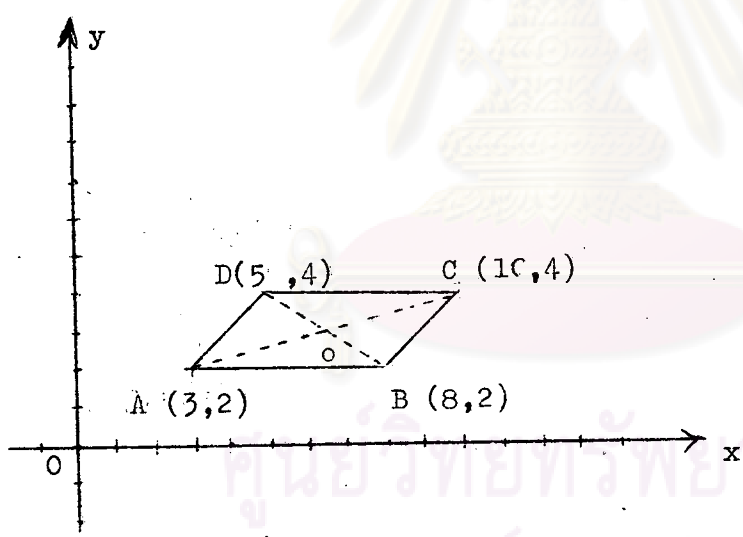
โคออร์ดิเนตของจุด R

$\bar{x} = \frac{5 + 7}{2} = 6$ และ $\bar{y} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$

จุด R มีโคออร์ดิเนต (6 , -1)

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดเป็น A (3 , 2) , B (8 , 2) และ C (10 , 4) และ D (5 , 4) เป็นจุดเดียวกัน

<u>วิธีทำ</u>



ให้จุด O เป็นจุดที่เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยม ABCD ตัดกัน

∴ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม AC และ BD ดังจะแสดงดังนี้

O เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

ศูนย์ที่ 2

บัตรงาน

คำสั่ง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้โดยให้แสดงวิธีทำให้สมบูรณ์ที่สุด

1. A (1 , 3) และ B (7 , 11) เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้

2. B (7 , 2) เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AC ถ้า A มีโคออร์ดิเนต (2 , -4) จงหาโคออร์ดิเนตของจุด C

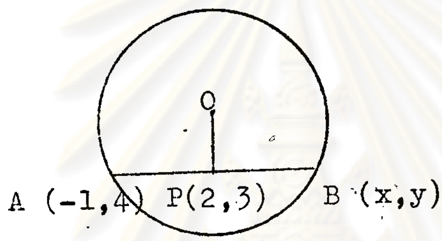
3. ถ้าแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (4 , 0) และ (-8 , 4) ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งทุกจุด

4. กำหนดจุด A (-4 , 1) B (5 , 2) และ C (2 , -3) เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม PQR จงหาโคออร์ดิเนตของจุด P , QR

ศูนย์ที่ 2

บัตรปัญหา

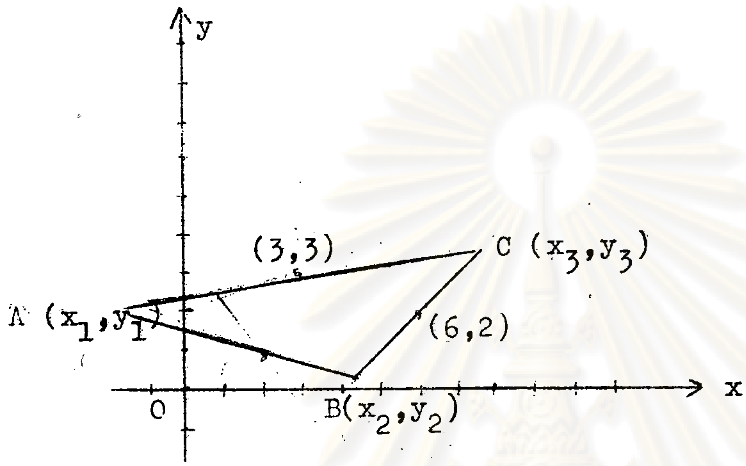
1. วงกลมวงหนึ่งแสดงได้ด้วยรูป



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมี AB เป็นคอร์ด ถ้าจากจุด O ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด P (2 , 3) จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

(แนวคิด เส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดศูนย์กลางมายังคอร์ดย่อมแบ่งครึ่งคอร์ด)

2. ถ้าจุด (2 , 1) , (3 , 3) และ (6 , 2) เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม จงหาจุดยอดทั้งสาม



ศูนย์ที่ 2

เฉลยบัตรกิจกรรม

1.

1.1 5 , 5

1.2 3 , 3

1.3 5 , 3 , $\frac{2}{5}$, 12 , 7 , บวก

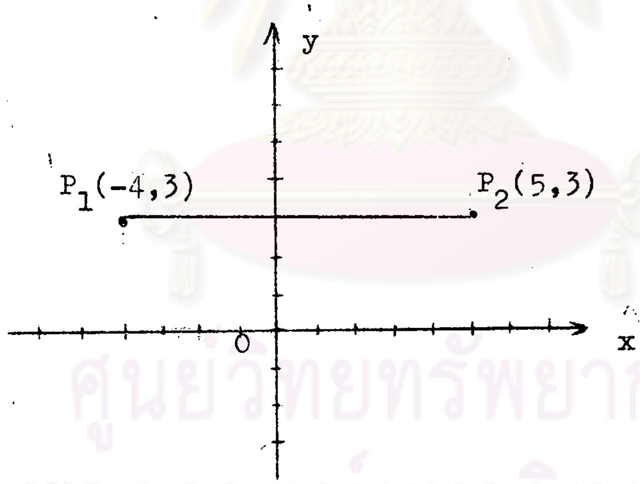
2.

2.1 (1 , 0) , (4 , 0)

3 2.2 (0 , 2) , (0 , −1)

3.

3.1



3.2 (−4 , 0)

3.3 (5 , 0)

3.4 แกน x

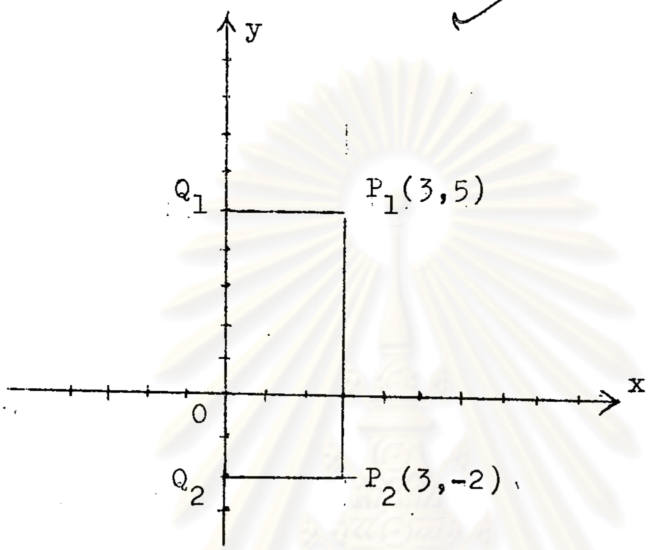
3.5 มุมฉาก

3.6 Q_1Q_2 เป็นด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3.7 $|5 + 4| = 9$

3.8 9

(4) 4.1



4.2 (0 , 5)

4.3 (0 , −2)

4.4 แกน y

4.5 มุมฉาก

4.6 Q_1Q_2 เพราะเป็นด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

4.7 $|5 - 2| = 7$

4.8 7

5.

5.1 5

5.2 3

6.

6.1 คล้าย , $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

๕ 7. $\dfrac{P_1M}{P_2M} = \dfrac{P_1M_1}{M_1M_2} = \dfrac{MM_1}{P_2M_2}$

๖ 8. P_2M_2

๗ 9.

P_1R

P_2R

๘ 10. y_1 และ y_2

๙ 11.

11.1 $P_1M_1 = MM_2$

$MM_1 = P_2M_2$

11.2 $M_1\ (\bar{x}\ ,\ y_1)$

$M_2\ (x_2\ ,\ \bar{y})$

12.

12.1 $\bar{x} - x_1$

$x^2 - \bar{x}$

$\bar{y} - y_1$

$y_2 - \bar{y}$

๑๐ 13.

13.1 บวก

บวก

13.2 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

บวก

บวก

$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

~~14.~~

$M_1 \ (\bar{x}, y_2)$

$M_2 \ (x_1, \bar{y})$

11 15.

$\bar{x} - x_2$

$x_1 - \bar{x}$

$\bar{y} - y_2$

$y_1 - \bar{y}$

12 16.

16.1 $\bar{y} - y_2 = y_1 - \bar{y}$

16.2 บวก

บวก

16.3 บวก

บวก

~~17.~~

13.

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

~~14~~ 18. 15

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

~~15~~

19. 16

$$\frac{2 + 6}{2} = 4 \quad , \ (3 , 4)$$

16 ~~20.~~

ศูนย์ที่ 2

บัตรเฉลยบัตรงาน

1. จุดศูนย์กลางของวงกลม คือจุด (4 , 7)
2. จุด C มีโคออร์ดิเนต (12 , 8)
3. จุดแบ่งครึ่งทั้ง 4 จุด มีโคออร์ดิเนตดังนี้

   (4 , 0) , (1 , 1) , (−2 , 2) (−5 , 3)
4. โคออร์ดิเนตของ P เป็น (−5 , 4) , Q (1 , 6) และ

   R (9 , −12)
5. จุดปลายอีกข้างหนึ่งมีโคออร์ดิเนต (5 , 10)

ศูนย์ที่ 2

บัตรเฉลยปัญหา

1. เพราะว่า P (2 , 3) เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB

ดังนั้น
$$\frac{x-1}{2} = 2$$
$$x = 5$$
$$y + 4 = 3$$
$$y = -1$$

จุดปลายอีกข้างหนึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น (5 , −1)

2. จากรูป จะได้ว่า

$$x_1 + x_2 = 4 \quad , \quad y_1 + y_2 = 2$$
$$x_1 + x_3 = 6 \quad , \quad y_1 + y_3 = 6$$
$$x_2 + x_3 = 12 \quad , \quad y_2 + y_3 = 4$$

จากการแก้สมการจะได้ จุดยอดทั้งสาม คือ

(−1 , 2) , (5 , 0) , (7 , 4)

ศูนย์ที่ 2

บัตรทดสอบ

1. โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด (−7 , 8) และ (5 , 2) คือข้อใด

   ก. (−6 , 4) ข. (6 , −4)

   ค. (1 , −5) ง. (−1 , 5)

2. โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด (5 , 0) และ (1 , −4) คือข้อใด

   ก. 2 , 2) ข.(2 , −2)

   ค. (3 , −2) ง.(−2 , 3)

3. ถ้า A(x , 9) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด P (4 , 9) และ B (−2 , −1) แล้ว x มีค่าเท่าใด

   ก. −3 ข. 1

   ค. 3 ง. 5

4. ถ้า P (x , y) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด (−2 , 6) และ (2 , −4) แล้ว ข้อใดเป็นโคออร์ดิเนตของจุด

   ก. (2 , −5) ข. (−2 , 1)

   ค. (0 , 1) ง. (0 , −1)

5. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น (x , y) และ (2 , 3) และจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้เป็น (5 , 2) จงหา (x , y)

   ก. (3 , 1) ข. (1 , 3)

   ค. (8 , 1) ง. (−12 , 1)

6. วงกลมวงหนึ่งมีจุด (3 , 2) เป็นโปรเจคชันของจุดศูนย์กลางบนคอร์ด ซึ่งมีจุดปลายข้างหนึ่งเป็น (−1 , −6)

   จงหาจุดปลายอีกข้างหนึ่งของคอร์ด

   ก. (5 , 4) ข. (7 , 4) ค. (3 , 2) ง. (7 , 10)

ศูนย์ที่ 2

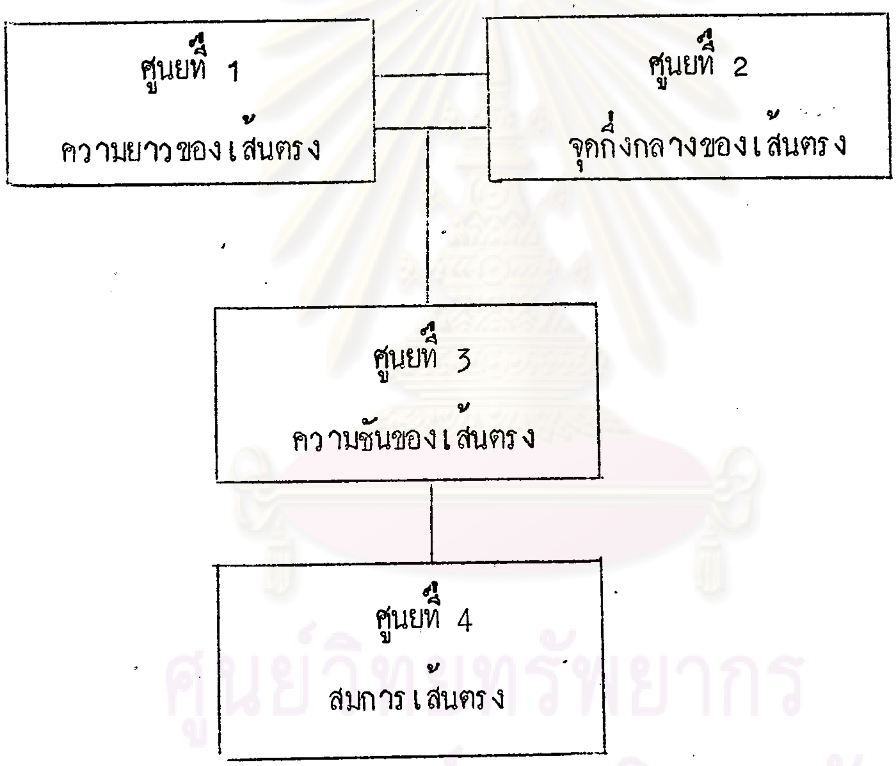
บัตรเฉลยบัตรทดสอบ

1. ง.
2. ค.
3. ข.
4. ค.
5. ค.
6. ง.

ศูนย์ที่ 3

บัตรคำสั่ง

โปรดอ่านคำสั่งนี้ แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้
ให้นักเรียนเลือกเรียนที่ศูนย์การเรียนทั้ง 4 ศูนย์ให้ครบ โดยเลือกศึกษาจากศูนย์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้



1. ศึกษาจากบัตรกิจกรรมก่อนแล้วจึงให้ศึกษาจากบัตรเนื้อหาเพิ่มเติม
2. ทำบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
3. ทำบัตรทดสอบพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. เปลี่ยนศูนย์การเรียนไปทำศูนย์ที่ 4

ศูนย์ที่ 3

เรื่อง ความชันของเส้นตรง

1. เมื่อกำหนดเส้นตรงในระบบแกนมุมฉากให้นักเรียนสามารถบอกความหมายของมุมเอียงของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้
2. บอกความหมายของความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้
3. เมื่อกำหนดความเอียงของเส้นตรงให้นักเรียนสามารถบอกเงื่อนไขของความชันและลักษณะของเส้นตรงบนแกนพิกัดฉากได้ถูกต้อง
4. บอกเงื่อนไขของเส้นตรงที่ไม่สามารถหาความชันได้ถูกต้อง
5. เมื่อกำหนดจุด 2 จุด ให้สามารถหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมโยงระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้
6. สามารถหาความชันของเส้นตรงจากรูปกราฟที่กำหนดให้ได้
7. สามารถนำความรู้ในการหาความชันของเส้นตรงมาพิจารณาว่าจุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันบ้าง
8. บอกเงื่อนไขของความชันของเส้นตรงที่ขนานกันได้
9. บอกเงื่อนไขของความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกันได้
10. บอกได้ว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน
11. บอกได้ว่า เส้นตรงคู่ใดตั้งฉากกัน

บัตรกิจกรรม

ศูนย์ที่ 3

เรื่อง ความชันของเส้นตรง

คำแนะนำในการเรียน

นักเรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้านักเรียนทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. หากระดาษแข็งเท่าไม้โปรแทรกเตอร์ปิดข้อความในกรอบที่ 2
2. เริ่มอ่านกรอบที่ 1 แล้วตอบคำถามหรือเติมข้อความที่ขาดหายไป
3. ตรวจคำตอบของนักเรียนด้วยการเลื่อนกระดาษไปปิดกรอบที่ 3 นักเรียนจะพบคำเฉลยของกรอบที่ 1 อยู่ทางซ้ายมือของกรอบที่ 2
   3.1 ถ้านักเรียนตอบถูกให้นักเรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไปและดำเนินเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ
   3.2 ถ้านักเรียนตอบผิด ให้ย้อนกลับไปอ่านกรอบที่ 1 ให้เข้าใจแล้วคิดใหม่ ขีดฆ่าคำตอบเดิมแล้วเขียนคำตอบที่ถูกต้องใต้คำตอบที่ผิดแล้วอ่านกรอบต่อไป
4. นักเรียนจะต้องทำทุก ๆ กรอบจากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด
5. ขอให้นักเรียนซื่อสัตย์ต่อตนเอง อย่าลอกคำตอบเพราะบทเรียนที่นักเรียนกำลังทำอยู่นี้ไม่ใช่แบบสอบ แต่เป็นบทเรียนเพื่อการเรียนรู้
6. อย่าแข่งขันกันตอบเพียงเพื่อให้เสร็จก่อนเพื่อน เพราะจะทำให้นักเรียนตอบคำถามโดยไม่คิดตาม จะไม่ช่วยให้เกิดความเข้าใจในเรื่องนั้น ๆ ได้เลย

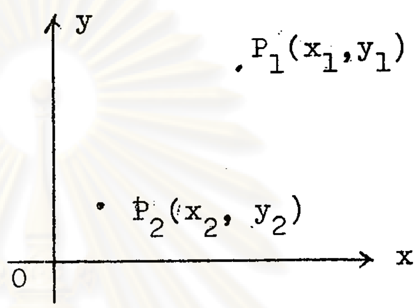
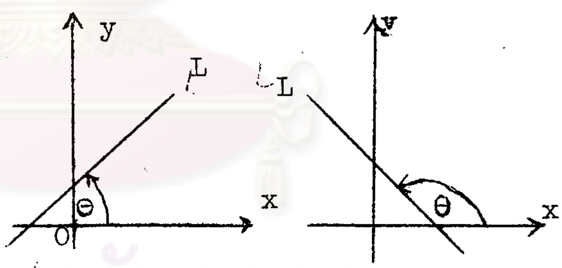
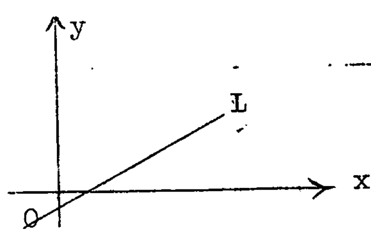
คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

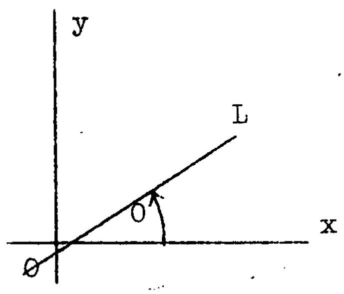
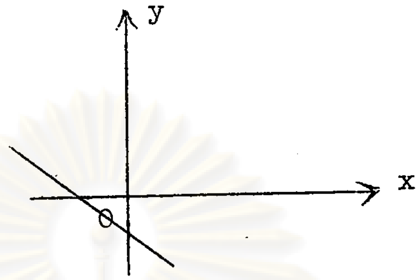
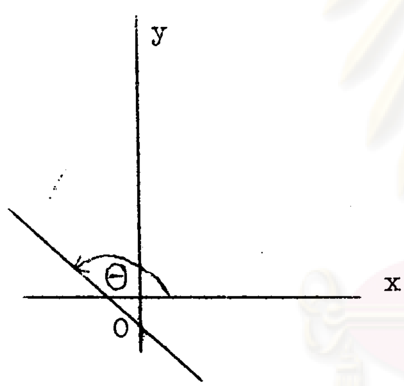
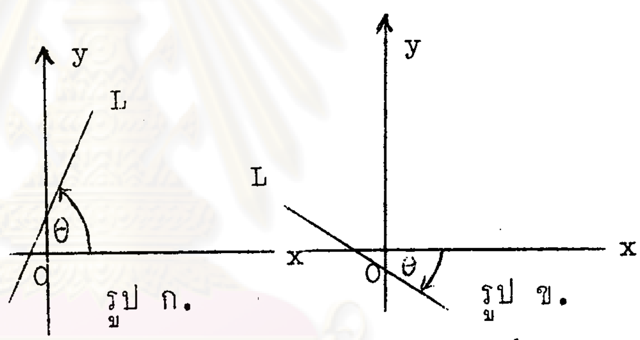
บทเรียนนี้เรียกว่า บทเรียนแบบโปรแกรม เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนเรียนได้ด้วยตนเอง บทเรียนจะทำหน้าที่เสมือนผู้สอนประจำตัวนักเรียน ดังนั้นผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

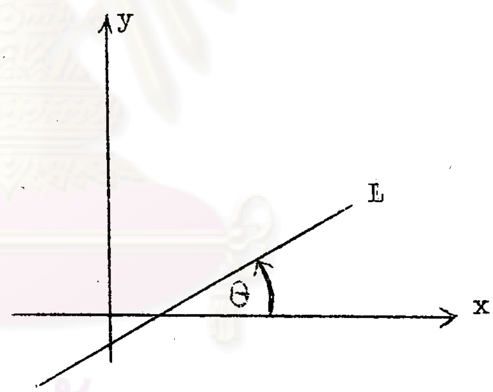
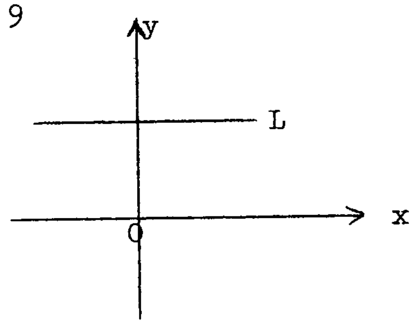
รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนมีดังนี้

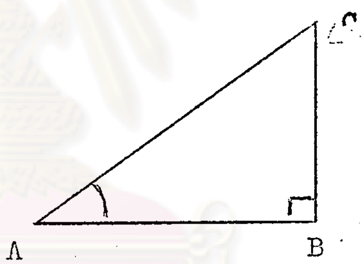
1. บทเรียนแบบโปรแกรมนี้ เขียนขึ้นตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
2. เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นขั้นเล็ก ๆ เรียกว่ากรอบเรียงจากง่ายไปหายากตามลำดับ
3. แต่ละกรอบจะมีเนื้อหาให้นักเรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนคิดและตอบคำถามนั้น ดังนั้นในการอ่านข้อความผู้เรียนควรใช้ความสังเกต แล้วเปรียบเทียบจนสามารถสรุปหลักเกณฑ์แล้วนำไปใช้ได้
4. ผู้เรียนจะทราบทันทีว่า คำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะมีคำตอบเฉลยไว้ด้วย
5. ในแต่ละกรอบแบ่งออกเป็น 2 ช่องดังนี้

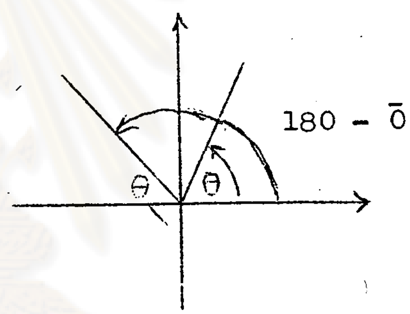
	ก. 1. ในช่องนี้มีข้อความให้ผู้เรียนอ่านและมีคำถามให้ผู้เรียนตอบ หรือให้เติมข้อความที่ขาดหายไป
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยกรอบที่ 1	ก. 2
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยกรอบที่ 2	ก. 3

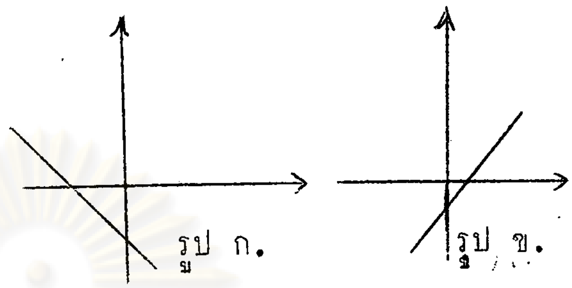
	ก. 1 กำหนดให้ จุด $P_1(x_1 , y_1)$ และจุด $P_2 (x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉาก จะมีเส้นตรงจำนวน ________ เส้นเท่านั้นที่ลากผ่านจุด 2 จุด 
หนึ่งเส้น	ก. 2 จากรูปที่กำหนดความเอียงของเส้นตรง  จากรูปที่กำหนดความเอียงของเส้นตรง L คือมุม θ
	ก. 3 จงแสดงตำแหน่งของความเอียงของเส้นตรง L เขียนแทนด้วยมุม θ ในรูปที่กำหนด 

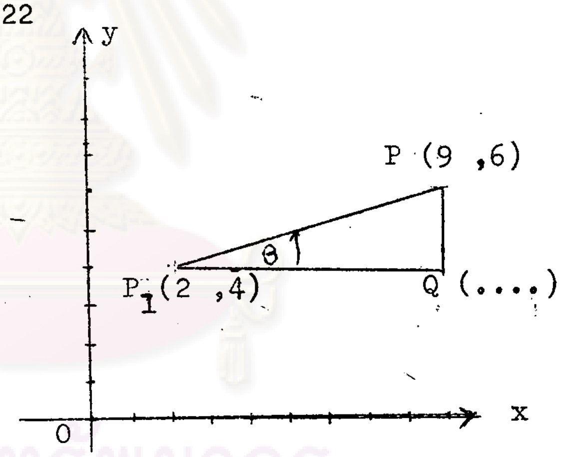
	ก. 4 จงแสดงตำแหน่งของความเอียงของเส้นตรง L เขียนแทนด้วยมุม θ ในรูปที่กำหนดให้ 
	ก. 5  จากรูป ______ เป็นรูปที่แสดง (รูป ก.หรือรูป ข) ตำแหน่งของความเอียงของเส้นตรง L ไม่ถูกต้อง
รูป ข.	ก. 6 จากกรอบที่ 5 รูป ข. เป็นรูปที่แสดงตำแหน่งของความเอียงของเส้นตรง L ไม่ถูกต้องนั้น จะเป็นได้ว่าทิศทางของมุม θ นั้น วัดในทิศทางที่ ____________ เข็มนาฬิกา (ตาม/ทวน)

ตามนาฬิกา	ก. 7 โดยทั่วไปจะเขียนมุม θ แทนความเอียงของเส้นตรง L ใด ๆ เพราะฉะนั้นความเอียงของเส้นตรง L ใด ๆ คือ __________ ที่เส้นตรงทำกับ (มุม/เส้นตรง) __________ โดยวัดในทิศทาง (แกน x /แกน y) __________ เข็มนาฬิกา จาก (ทวน/ตาม) แกน x ไปจนถึงเส้นตรง L
มุม แกน x ทวน	ก. 8  จากรูปที่กำหนดให้ มุม θ คือ __________ ของเส้นตรงL
ความเอียง	ก. 9 

	จากรูป ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน x แล้ว เส้นตรงจะทำมุมศูนย์องศากับแกน x ดังนั้นความเอียงของเส้นตรงมีค่าเท่ากับ ______________
ศูนย์	ก. 10 ความเอียงของเส้นตรงหรือมุม θ จะ มีค่า ______________ 180° (เกิน / ไม่เกิน)
ไม่เกิน	ก. 11 ความเอียงของเส้นตรงมีค่าอยู่ระหว่าง __________ องศาถึง __________ องศา
0° 180°	ก. 12  เพราะว่าสามเหลี่ยม ABC เป็น สามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า tan gent ของมุม A = tan A $= \dfrac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$ เพราะฉะนั้น tan A = __________
$\frac{BC}{AB}$	ก. 13 ถ้าเส้นตรง L มีความเอียงคือ θ แล้วเส้นตรงจะมีความชัน (slope) คือ tan θ ให้ m แทนความชัน m = ______________

tan θ	ก. 14 ถ้า θ = 0° จะได้ว่า tan 0° มีค่าเท่ากับ ________ ถ้า θ = 45° จะได้ว่า tan 45° มีค่าเท่ากับ ________ ดังนั้น ถ้า θ อยู่ระหว่าง 0° ถึง 45° ค่า tan θ มีค่าตั้งแต่ ________ ถึง ________
0 1 0 1	ก. 15  เพราะว่า tan (180° − θ°) มีค่าเท่ากับ − tan θ เพราะว่า tan 135° = tan (180° − 45°) = ________ = ________
tan θ	ก. 16 ถ้า θ เป็นมุมแหลมจะได้ว่า tan θ มีค่าเป็นจำนวน ________ และถ้า θ เป็นมุมป้านจะได้ว่า tan θ มีค่าเป็นจำนวน ________ บวก/ลบ

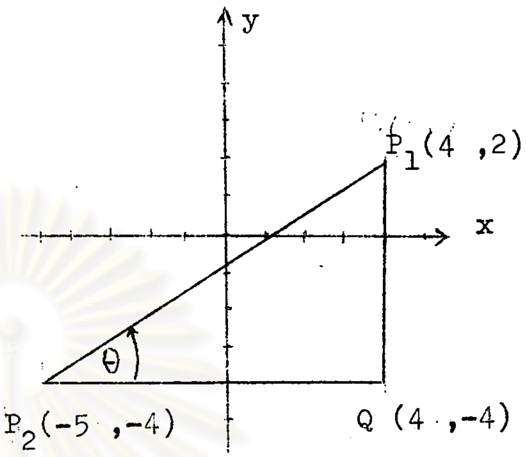
บวก ลบ	ก. 17  รูป ก.ความชันของเส้นตรง L มีค่า เป็น ____________ (บวก / ลบ) รูป ข.ความชันของเส้นตรง L มีค่า เป็น ____________ (บวก / ลบ)
ลบ บวก	ก. 18 จะเห็นว่า ถ้าเส้นตรงมีความเอียงอยู่ระหว่าง 0° ถึง 90° จะมีความชันเป็น ____________ และเส้นตรงที่มีความเอียงระหว่าง 90° ถึง 180° จะมีความชันเป็น ____________
บวก ลบ	ก. 19 ถ้าความชันของเส้นตรง L มีค่าเท่ากับศูนย์แสดงว่าเส้นตรง L ขนานกับ ____________ (แกน x / แกน y)

แกน x	ก. 20 ถ้าเส้นตรงทำมุม 90° กับแกน x แสดงว่าเส้นตรงนั้นจะ __________ กับแกน y ดังนั้นค่าความเอียงของ เส้นตรง L จะมีค่าเท่ากับ ______ ซึ่งหาค่า ____________ (ได้ / ไม่ได้
ขนาน tan 90° ไม่ได้	ก. 21 เนื่องจาก tan 90° ไม่อาจหาได้ เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ก็จะหาค่า __________ ไม่ได้
ความชัน	ก. 22  จงเติมโคออร์ดิเนตของจุด Q $\tan\theta = \frac{P_2Q}{...} =$ ______ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(4 , 2)$ และจุด $P_2(9 , 6)$ = ... = ...

$\frac{P_2Q}{P_1Q} = \frac{6-2}{9-4} = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$

ก. 23



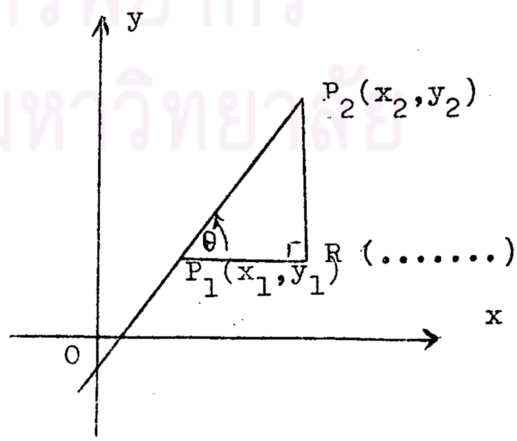
จากรูป

$\tan\theta = \text{\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_} = \frac{6}{9}$

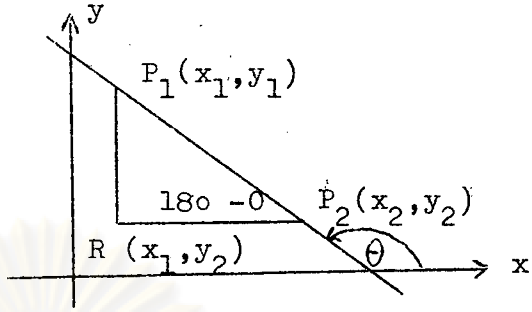
$\frac{PQ}{P_2Q}$

$\frac{2+4}{-5-4}$

ก. 24 ถ้าให้ m คือความชันของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ พิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ จงเติมโคออร์ดิเนตของจุด R และค่า tan θ



$m = \tan\theta = \text{\_\_\_\_\_} = \text{\_\_\_\_\_}$

$(x_2\ ,\ y_1)$ $\dfrac{P_2R}{P_1R} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	ก. 25 พิจารณาจากรูปที่กำหนดให้  $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$ และ $m = \tan\theta = -\tan(180^\circ - \theta)$ $\tan(180^\circ - \theta) = \dfrac{P_1R}{P_2R} =$ ________ (เขียนในเทอมของ $x_1\ ,\ y_1\ ,\ x_2,\ y_2$)
$\dfrac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$	ก. 26 จากกรอบที่ 25 $m = \tan\theta =$ ________ (เขียนในเทอมของ x_1, y_1 $x_2\ ,\ y_2$) นั่นคือ $m =$ ________
$\dfrac{-y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	ก. 27 ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2\ ,\ y_2)$ ไม่ว่าความเอียงของเส้นตรงจะเป็นมุมแหลมหรือมุมป้าน จะได้ว่า $m =$ ________

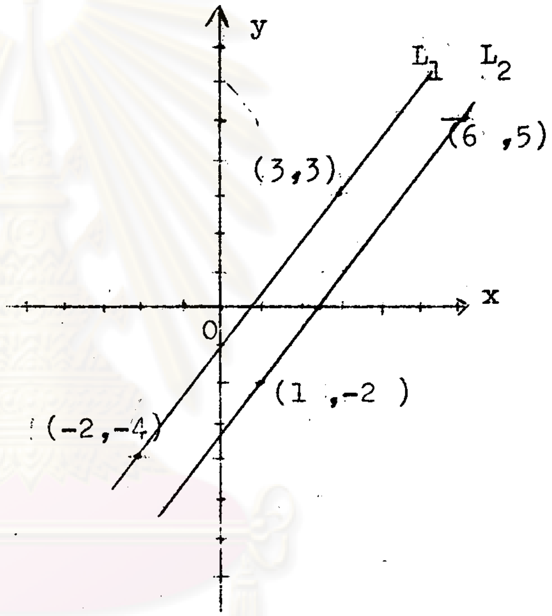
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	ก. 28 ถ้าจุด $P_1(x_1,y_1)$ และจุด P_2 (x_2 , y_2) อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x แล้ว $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ หรือ ________ เพราะว่า y_1 = ________
$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ y_2	ก. 29 ผลจากกรอบ 28 เมื่อ $y_1 = y_2$ เพราะฉะนั้น $\tan\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = ________ ดังนั้น เส้นตรงที่ขนานกับแกน x จึงมีความเอียงเป็นศูนย์
0	ก. 30 ถ้าจุด P_1 และจุด P_2 อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x แล้ว x_1 = ________ ดังนั้น $x_2 - x_1$ = ________ ดังนั้นความชันของเส้นตรงเส้นนี้ คือ m ________ ซึ่งไม่มีความหมาย
x_2 0 $\frac{y_2 - y_1}{0}$	ก. 31 เส้นตรงผ่านจุด (1 , 3) และจุด (4 , 2) ความชันจะมีค่าเท่าใด ถ้าให้ P_1 = (1 , 3) และ P_2 (4 , 2) m = ________ หรือ P_1 (4 , 2) และ P_2 (1, 3) m = ________

$\frac{2-3}{4-1} = -\frac{1}{3}$ $\frac{3-2}{1-4} = -\frac{1}{3}$	ก. 32 ถ้าเส้นตรงผ่านจุดสองจุด จะให้จุดไหนเป็นจุด P_1 หรือจุด P_2 ก็จะได้ค่าของ m มีค่า ________
เท่ากัน	ก. 33 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีความเอียงเป็น θ และมีความชันเท่ากับ m ผ่านจุด P_1 (x_1, y_1) และผ่านจุด P_2 (x_2, y_2) แล้ว m = ______ (ในเทอมของ θ) แล้ว m = ______ (ในเทอมของโค - ออร์ดิเนตของจุด P_1 และจุด P_2)
tan θ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	ก. 34 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (−4 , −3) และจุด (2 , 5) m = ________
$\frac{4}{3}$	ก. 35 ความชันของเส้นที่ผ่านจุด (−4 , 3) และจุด (−1 , 2) คือ ________
$-\frac{1}{3}$	ก. 36 ถ้าเส้นตรงผ่านจุด (1 , 2) จุด (6 , 7) และจุด (3 , 4) จงหาความชันของเส้นตรงเส้นนี้ ให้ P_1 = (1 , 2) P = (6 , 7) จะได้ m = ________ หรือให้ P_1 = (6 , 7) , P_2=(3,4) จะได้ m = ________

<table>
<tr><td>1
1</td><td>ก. 37 ความชันของเส้นตรงเดียวกันย่อมมีค่า

__________________</td></tr>
<tr><td>-

เท่ากัน</td><td>ก. 38 ถ้า L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (-2 , -4) และจุด (3 , 3) ขนานกับเส้นตรง L_2 ซึ่งผ่านจุด (1 , -2) และจุด (6 , 5) ดังรูป

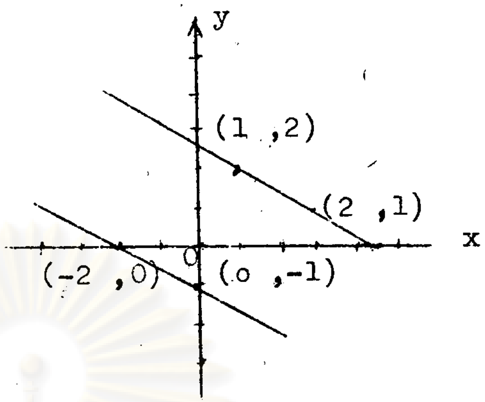


ถ้าให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ

m = __________________

m = __________________

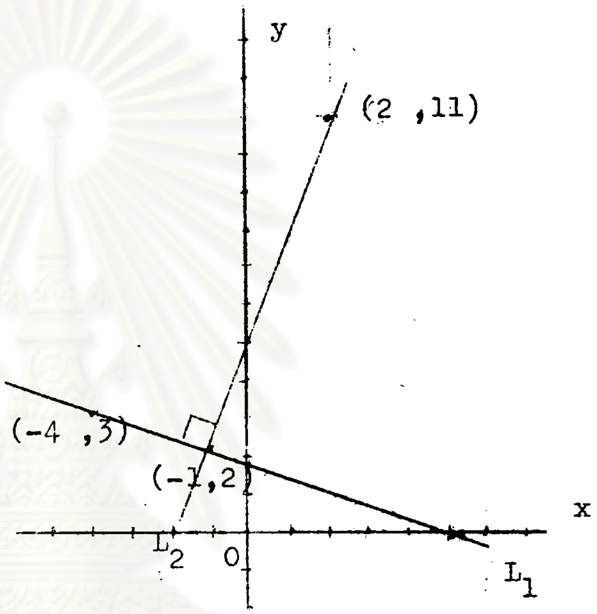
จะเห็นได้ว่า m_1 __________________ m_2
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)</td></tr>
</table>

$\frac{7}{5}$ $\frac{7}{5}$ เท่ากับ	ก. 39  ถ้าให้ L_1 ขนานกับ L_2 ดังรูป m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ เขียนความสัมพันธ์ของ m_1 และ m_2 ได้ดังนี้ m_1 = ______ = ______
m_2 $-\frac{1}{2}$	ก. 40 ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน และ $m_1 = \frac{3}{4}$ จะได้ว่า m_2 = ______
$\frac{3}{4}$	ก. 41 ถ้าเส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2 แล้วจะได้ว่าความชันของเส้นตรง L_1 ______ ความชันของ (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน) เส้นตรง L_2

เท่ากับ	ก. 42 ถ้าเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ต่างก็มีความชันเท่ากับ $-\frac{4}{3}$ แล้ว เส้นตรง L_1 __________ กับเส้นตรง L_2
ขนาน	ก. 43 ถ้า L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A (-7 , -3) และ B (-4 , 5) และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด C (2 , -6) และ D (5 , 6) เส้นตรง L_1 จะขนานกับ L_2 เพราะว่า m_1 และ m_2 __________
เท่ากัน	ก. 44 ให้ m_1 และ m_2 คือความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ L_1 จะขนานกับ L_2 เมื่อ __________
$m_1 = m_2$	ก. 45 ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (-3 , 5) และจุด (2 , -2) และเส้นตรง L_2 ผ่านจุด (4 , 7) และจุด (9 , -2) L_1 และ L_2 __________ (ขนาน / ไม่ขนาน) เพราะเหตุใด

<table>
<tr>
<td>ไม่ขนานกัน

$m_1 \neq m_2$</td>
<td>ก. 46 ถ้าสมการ L_1 ผ่านจุด (−4 , 3) และ (−1 , 2) เส้นตรง L_2 ผ่านจุด (2 , 11) และตั้งฉากกับเส้นตรง L_1 จุด (−1 , 2) ดังรูป



ถ้า m_1 , m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับแล้ว

m_1 = ____________

m_2 = ____________</td>
</tr>
<tr>
<td>$m_1 = -\frac{1}{3}$

$m_2 = 3$</td>
<td>ก. 47 ถ้า L_1 และ L_2 ตั้งฉากกันให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (−4 , 7) และ (1 , −1) เส้นตรง L ผ่านจุด (2 , −3) และ (10 , 2) แล้ว

m_1 = ____________</td>
</tr>
</table>

	m_1 = ________ m_2 = ________ m_1 = ________ (สัมพันธ์กับ m_2)
$-\frac{8}{5}$ $\frac{5}{8}$ $m_1 = \frac{-1}{m_2}$	ก. 48 ถ้าความชันของเส้นตรง L_1 เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับ L_2 แล้วความชันของ L_2 มีค่าเท่ากับ ________
$-\frac{1}{2}$	ก. 49 ถ้าเส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกันแล้วจะได้ว่า m_1 = ________ หรือ m_2 = ________ $m_1 \cdot m_2$ = ________
$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ -1	ก. 50 L_1 เป็นเส้นตรงผ่านจุด (4 , 4) และ (3 , 2) มีความชัน $m_1 = 2$ และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 3) และ (3 , 2) มีความชัน $m_2 = \frac{-1}{2}$ แล้ว เส้นตรง L_1 และ L_2 จะตั้งฉากกันหรือไม่ ________ ________

ตั้งฉากกัน	ก. 51 ถ้า m_1 คือความชันของเส้นตรง L_1 เท่ากับ $\frac{4}{3}$ และ m_2 คือความชันของเส้นตรง L_2 เท่ากับ $-\frac{3}{4}$, ดังนั้น $m_1 \cdot m_2 =$ ——— แสดงว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ———————
-1 ตั้งฉากกัน	ก. 52 ถ้า m_1 และ m_2 คือความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ $m_1 \cdot m_2 = -1$ หรือ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ หรือ $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ แล้วจะได้ว่า ———————————————
เส้นตรง L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน	ก. 53 ถ้าเส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(-3, 7)$ และ $(-3, -2)$ และเส้นตรง L_2 ผ่านจุด $(3, 2)$ และ $(1, -4)$ จะได้ว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ——————— เพราะว่า ———————
ตั้งฉาก $m_1 \cdot m_2 = -1$	ก. 54 ถ้าเส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับแล้ว เส้นตรง L_1 และ L_2 จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ———————————

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ หรือ $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ หรือ -1	ก. 55 ถ้าเส้นตรง L_1 ผ่านจุด (4 , 3) และ (−3 , −5) และเส้นตรง L_2 ผ่านจุด (−2 , −3) และ (−8 , 2) แล้ว เส้นตรง L_1 และ L_2 จะ ______________ ตั้งฉาก / ไม่ตั้งฉาก เพราะว่า ______________
ไม่ตั้งฉาก $m_1 = \frac{8}{7}$, $m_2 = -\frac{5}{6}$ $m_1 \cdot m_2 = -1$	ก.56 เส้นตรง L_1 ผ่านจุด(2, −1) และ (4, 3) เส้นตรง L_2 ผ่านจุด(−2, 3) และ (6, −1) เส้นตรง L_1 และ L_2 จะ ______________ (ขนานกัน/ตั้งฉากกัน)
ตั้งฉากกัน $m_1 = 2$, $m_2 = -\frac{1}{2}$ $m_1 \cdot m_2 = -1$	ก.57 จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงผ่านจุด (x, −4) และ (5, 9) ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด (10, −3) และ (14, −7)
$x = -8$	ก.58 กำหนดจุด P(5, −2), Q (6, 4) และ R (6, 7), S (8, 19) เส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q จะขนานหรือตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด R และ S หรือไม่
ขนานกัน	ก.59 จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2, 4) และ (−1, 5)

$\frac{1}{3}$	ก.60 เส้นตรงที่เชื่อมจุด (K, 3) และ (−1, 2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 2) และ (1, −2) จงหาค่า K
$-\frac{1}{2}$	จบเท่านี้.

ศูนย์ที่ 3

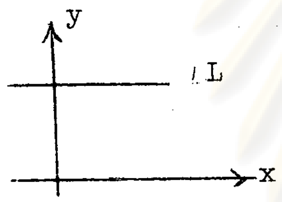
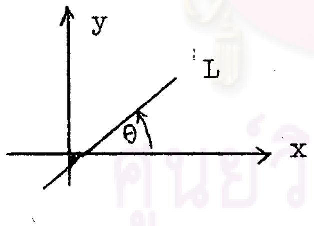
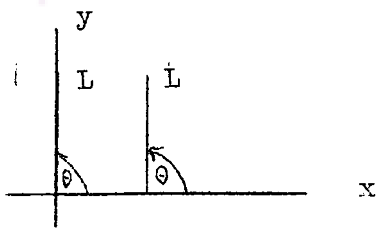
บัตรเนื้อหา

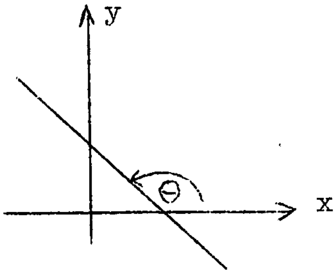
เรื่อง ความชันของเส้นตรง

<u>มุมเอียง (Inclination) ของเส้นตรง</u>

มุมเอียงของเส้นตรงใด ๆ คือมุมที่เล็กที่สุด ที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยังเส้นตรงนั้น

มุมเอียงเขียนแทนด้วย θ

	1. L ขนานหรืออยู่บนแกน x $\theta = 0$
	2. L ทำมุมแหลมกับแกน x $0^\circ < \theta < 90^\circ$
	3. L ขนานหรืออยู่บนแกน y $\theta = 90^\circ$

	4. L ทำมุมป้านกับแกน x

<u>ข้อสังเกต</u> เส้นตรงที่ทำมุม 180° องศากับแกน x ถือว่ามีมุมเอียงเป็น 0 องศา เพราะว่าเส้นตรงขนานกับแกน x ดังนั้นเส้นตรงจะไม่มีมุมเอียงเป็น 180° แต่ค่าของมุมเอียงของเส้นตรงจะมีค่าอยู่ระหว่าง

$$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$$

<u>ความชันของเส้นตรง</u> (Slope of line)

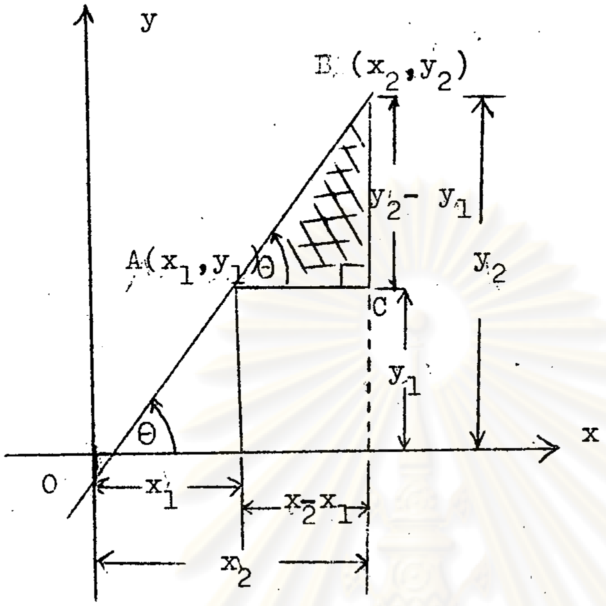
ความชันของเส้นตรงใด ๆ คือลักษณะของเส้นตรงนั้น ๆ ในระนาบแกนมุมฉาก ซึ่งลักษณะเหล่านี้จะบอกให้เราทราบว่า เส้นตรงนั้นวางตัวทำมุมแหลมหรือมุมป้าน หรือขนานกับแกน x หรือขนานกับแกน y

<u>นิยาม</u> ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง $\theta \neq 90^\circ$ ความชัน (Slope) ของเส้นตรง L หมายถึง จำนวนจริงโดยที่ $m = \tan\theta$

<u>ความชันของเส้นตรงผ่านจุด 2 จุด</u>

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ จะได้ว่าความชันของเส้นตรง $L = m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ โดยที่ $\theta \neq 90^\circ$ และ $x_1 \neq x_2$



<u>เส้นตรงที่ขนานกันและตั้งได้ฉากกัน</u>

<u>นิยาม</u> ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง Θ_1 และ Θ_2 ตามลำดับ

(1) ถ้า $\Theta_1 = \Theta_2$ เรากล่าวว่า L_1 ขนานกับ L_2

(2) ถ้า $\Theta_1 = \Theta_2$ และมีจุดร่วมกันหนึ่งจุดเรากล่าวว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

<u>ทฤษฎี 2</u> ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง Θ_1 และ Θ_2 ตามลำดับ โดยที่ $\Theta \neq 90^\circ$ และ $\Theta_2 \neq 90^\circ$ สมมุติให้ m_1 และ m_2 คือความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ

(1) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ว่า L_1 ขนานกับ L_2

(2) ถ้า L_1 ขนานกับ L_2 จะได้ว่า $m_1 = m_2$

<u>ทฤษฎีที่ 3</u> ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง Θ_1 และ Θ_2 และมีความชัน m_1 , m_2 ตามลำดับ

(1) ถ้า $m_1 \cdot m_2 \neq 0$ และ L_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2 จะได้ว่า

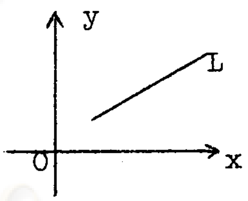
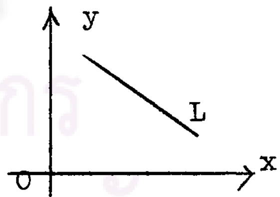
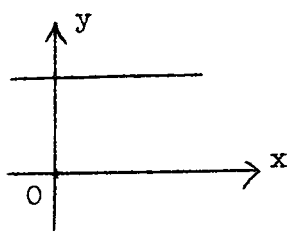
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

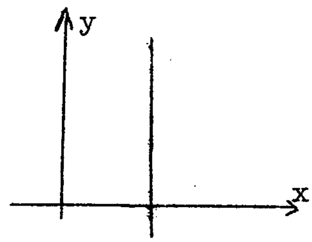
(2) ถ้า $m_1 \cdot m_2 = -1$ จะได้ว่า L_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2

ข้อสังเกต

1. ความชันยิ่งมีค่ามากเท่าใด เส้นตรงยิ่งชันมากเท่านั้น
   (กล่าว คือ ยิ่งขนานกับแกน y)
2. ความชันยิ่งมีค่าน้อยเท่าใด เส้นตรงยิ่งชันน้อยเท่านั้น
   (กล่าว คือ ยิ่งขนานกับแกน x)

เมื่อทราบค่าความชันของเส้นตรง สามารถบอกลักษณะของเส้นตรงได้ดังนี้

ค่าความชันเป็น	ลักษณะของเส้นตรง	รูป
เลขจำนวนจริงบวก $0° < \theta < 90°$	เอียงทำมุมแหลม กับแกน x	
เลขจำนวนจริงลบ $90° < \theta < 180°$	เอียงทำมุมป้าน กับแกน x	
ศูนย์ $\theta = 0°$	ขนานกับแกน x หรือตั้งฉากกับแกน y	

ค่าความชันเป็น	ลักษณะของเส้นตรง	รูป
หาค่าไม่ได้ $\theta = 90^\circ$	ตั้งฉากกับแกน x หรือขนานกับแกน y	

ศูนย์ที่ 3

บัตรงาน

เรื่อง ความชันของเส้นตรง

คำสั่ง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้โดยให้แสดงวิธีทำให้สมบูรณ์ที่สุด

1. จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (4 , 4) และ (4 , 5)

2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 2) และ (x , 5)มีความชันเท่ากับ 2

3. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงผ่านจุด (x, -4) และ (5 , 9) ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด (10 , 3) และ (14 , -7)

4. กำหนดให้ (0 , 0) และ (6 , 0) เป็นจุดยอดสองจุด ของสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาจุดยอดที่สาม

5. สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดเป็น A (1 , 2) B (3 , 1) และ C (−4 , −8) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

ศูนย์ที่ 3

บัตรปัญหา

1. จงแสดงว่า จุด A (2 , 1) , B (4 , 5) , C (5 , 6) และ D (3 , 2) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2. กำหนดจุดยอดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น A (0 , 0) , B (6 , 0) C (x , y) และ D (0 , 4) จงหา (x , y)

3. เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเป็น $\frac{4}{3}$ ถ้าเส้นตรงเส้นนี้ผ่านจุด (3 , 2) จงหาจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้มา 3 จุด (แนวคิด ความชันระหว่างจุดทุกจุดบนเส้นตรงกับจุด (3 , 2) จะมีค่า $\frac{4}{3}$ เสมอ ดังนั้นจึงกำหนดจุดที่จะหานั้นให้อยู่ในรูป (x , y) แล้วหาค่า y ออกมาในรูปของ x แล้วกำหนดค่า x ขึ้นมา 3 ค่า จะได้ค่า y ออกมา 3 ค่าก็จะได้ค่าจุด 3 จุด ตามต้องการ)

ศูนย์ที่ 3

บัตรเฉลยบัตรงาน

1. ต้องการหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่ผ่านจุด (4 , 4) และ (4 , 5)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4 - 5}{4 - 4} = -\frac{1}{0}$$ หาค่าไม่ได้

หาค่าความชันไม่ได้

$$m = \tan \theta$$

$\tan \theta =$ หาค่าความชันไม่ได้

$$\theta = 90^\circ$$

2. เส้นตรงผ่านจุด (1 , 2) และ (x , 5) , ความชัน = 2

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$2 = \frac{2 - 5}{1 - x}$$

$$2(1 - x) = -3$$

$$2 - 2x = -3$$

$$-2x = -5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

3. <u>วิธีทำ</u> เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (x , -4) และ (5 , 9)

ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรง L_1

$$m_1 = \frac{9 + 4}{5 - x} = \frac{13}{5 - x}$$

เส้นตรง L_2 ผ่านจุด (10 , -3) และ (14 , -7)

m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_2

$$m_2 = \frac{-7 + 3}{14 - 10} = \frac{-4}{4} = -1$$

เส้นตรง L_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง L_2

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{13 \times (-1)}{5 - x} = -1$$

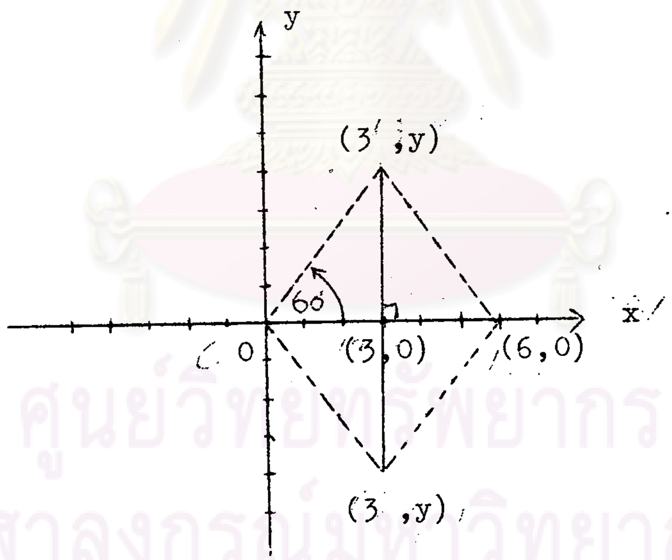
$$13 = 5 - x$$

$$x = 5 - 13 = -8$$

$$x = -8$$

4. <u>วิธีทำ</u>

จะได้จุดยอด 2 จุด เหนือแกน x จุดหนึ่งและใต้แกน x จุดหนึ่ง



จากรูป จะได้จุดยอด 2 จุด และจุดยอดทั้งสองนี้เราทราบค่าโคออร์ดิเนต ตามแกน x ทันที ว่ามีค่า = 3 เพราะว่าเส้นที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่าย่อมแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐานะ และมุมเอียงของเส้นตรงแต่ละเส้น = 60°

$$\tan\ \theta = \frac{y - 0}{3 - 0}$$

$$\tan\ 60^\circ = \frac{y - 0}{3 - 0}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{3}$$

$$y = 3\sqrt{3}$$

จุดยอดที่ต้องการ คือ $(3\ ,\ 3\sqrt{3})$ และ $(3\ ,\ -3\sqrt{3})$

5. สามเหลี่ยม A B C มีจุดยอดเป็น A (1 , 2) , B (3 , 1) และ C (−4 , −8) ต้องการทราบว่า สามเหลี่ยม A B C เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

∴ สามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านตั้งฉากกัน ดังนั้น จะตรวจสอบโดยอาศัยคุณสมบัติของเส้นตรงที่ว่า เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อผลคูณของความชัน มีค่า = −1

ให้ m_1 ของเส้นตรง $= \frac{2 - 1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$

m_2 ของเส้นตรง $= \frac{1 + 8}{3 + 4} = \frac{9}{7}$

m_2 ของเส้นตรง AC $= \frac{2 + 8}{1 + 5} = 2$

แต่

$$m_1 \cdot m_2 = -\tfrac{1}{2}\quad 2 = -1$$

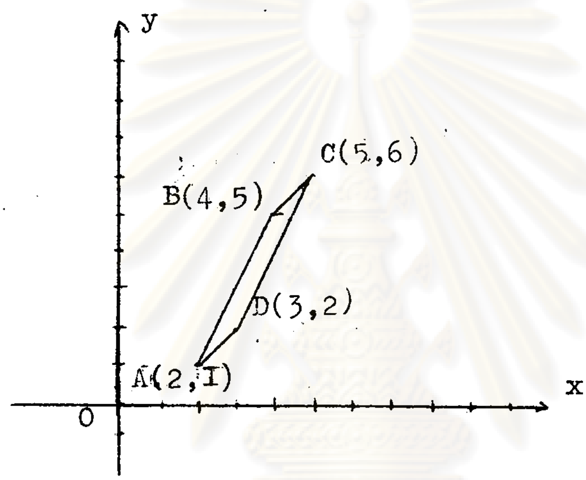
AB ตั้งฉากกับ AC

นั่น คือ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากจริง

ศูนย์ที่ 3

เฉลยบัตรปัญหา

1.



จะแสดงว่าจุดยอด A , B , C , D เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนานจะต้องแสดงว่าสี่เหลี่ยม A B C D เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานนั่นเอง เนื่องจากสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านคู่ขนานขนานกัน

ดังนั้น ต้องแสดงว่า AB // CD

ความชันของเส้นตรง AB $= \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$

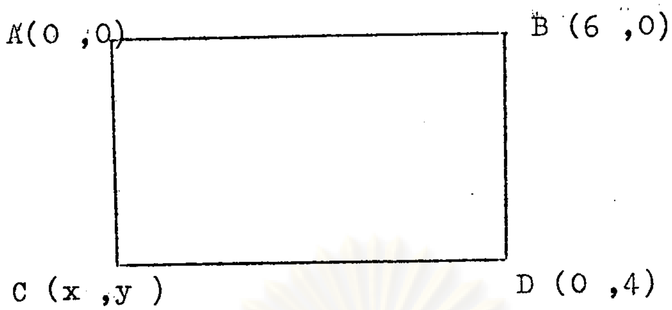
ความชันของเส้นตรง CD $= \frac{6-2}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$

ความชันของเส้นตรง CD = ความชันของเส้นตรง AB

A B C D เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จุด A , B , C และ D เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2.



เพราะว่า AB ขนานกับ CD

ดังนั้น ความชันของ AB ความชันของ CD

$$\frac{0-0}{6-0} = \frac{y-4}{x-0}$$

$$y - 4 = 0$$

$$y = 4$$

$$x = 6$$

3. ความชันระหว่างจุดทุกจุดบนเส้นตรงกับจุด (3 , 2) จะมีค่า $\frac{4}{3}$ เสมอ ดังนั้น จึงกำหนดจุดที่จะหานั้นให้อยู่ในรูป (x , y) แล้วหาค่า y ออกมาในรูปของ x แล้ว กำหนดค่า x ขึ้นมา 3 ค่า y จะได้ค่าออกมา 3 ค่า ก็จะได้จุด 3 จุดตามต้องการ

<u>วิธีทำ</u>

ให้จุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้เป็น (x , y)

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{4}{3}$$

$$y = 4x - 6$$

ให้ $x = 1 \quad y = \frac{(4 \quad 1 - 6}{3} = -2$

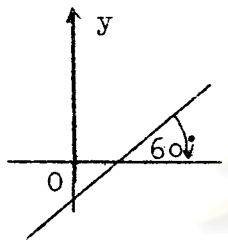
$x = 1 \quad y = \frac{(4 \quad -1) - 6}{3} = -\frac{10}{3}$

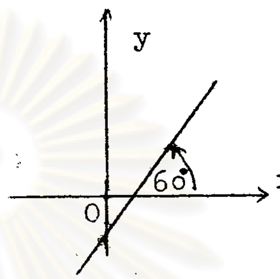
ดังนั้นจุด 3 จุดบนเส้นตรงนี้คือ $(0, -2)$, $(-1, -\frac{10}{3})$, $(2, \frac{2}{3})$

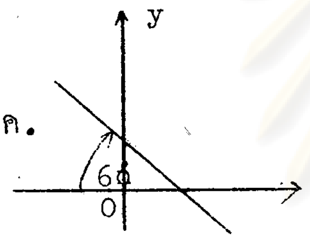
ศูนย์ที่ 3

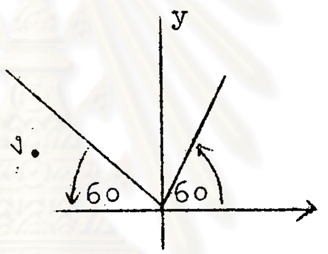
บัตรทดสอบ

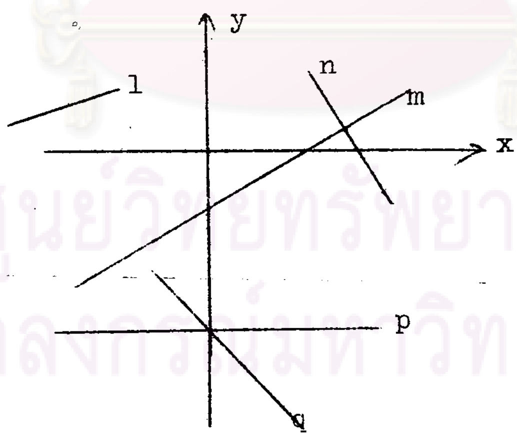
1. มุมเอียงในข้อใดมีค่าเท่ากับ 60°

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

2. 

จากรูป เส้นตรงใดมีความชันเป็นลบ

ก. l , m　　　　ข. m , n

ค. p , q　　　　ง. n , q

3. เมื่อใด หาค่าความชันไม่ได้

ก. $\theta = 0^\circ$ ข. $\theta < 0^\circ$

ค. $\theta = 90^\circ$ ง. $0 < \theta < 180^\circ$

4. จงหามุมเอียง ของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A (3 , 2) และ B (4 , 3)

ก. 45° ข. 60°

ค. 90° ง. 0°

5. จุด A (m , n) และ B (p , q) เป็นจุด 2 จุด ในระนาบเส้นตรงที่ผ่านจุด A , B มีความชันเท่าใด

ก. $\frac{m-n}{p-q}$, $p \neq q$ ข. $\frac{m-p}{n-p}$, $n \neq q$

ค. $\frac{q-n}{p-m}$, $p \neq m$ ง. $\frac{q-p}{m-n}$, $m \neq n$

6. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 4) และจุด (1 , −2) คือข้อใด

ก. 3 ข. −3

ค. $\frac{1}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

7. เส้นตรงที่ผ่านจุด (−2 , 1) และ (x, 5) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ก. 2 ข. 4

ข. 6 ง. 8

8. เส้นตรงที่ผ่านจุด A (−4 , 3) และ B (2 , −1) กับเส้นตรงที่ผ่านจุด C (−5 , −3) และ D (3 , 9) มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ก. ตั้งฉากกัน ข. ขนานกัน

ค. ไม่ขนานและไม่ตั้งฉากกัน ง. เป็นเส้นตรงเดียวกัน

9. กำหนดเส้นตรง A (0 , 4) , B (3 , 1) จะขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดในข้อใด

ก. C $(5 , -4)$ และ D $(1 , -2)$ ข. E $(2 , 1)$ และ F $(4 , 5)$

ค. G $(-1 , -2)$ และ H $(-4 , 1)$ ง. $(2 , 3)$ และ Q $(5 , 4)$

10. จุด 3 จุด ในข้อใดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ก. $(1 , 2)$, $(3 , 10)$, $(-4 , 4)$ ข. $(2 , -1)$, $(6,7)$, $(-4 ,-3)$

ค. $(0 , 4)$, $(3 ,-2)$, $(-2,8)$ ง. $(-4,2)$, $(2 , 6)$, $(1 , 0)$

11. ความชันของเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{1}{5}$ เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง L จะมีความชันเท่าใด

ก. 5 ข. -5

ค. $\frac{1}{5}$ ง. $-\frac{1}{5}$

12. จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด A $(3 , 9)$ และ B $(-1 , 3)$

ก. $\frac{2}{3}$ ข. $\frac{3}{2}$

ค. $-\frac{2}{3}$ ง. $-\frac{3}{2}$

ศูนยที่ 3

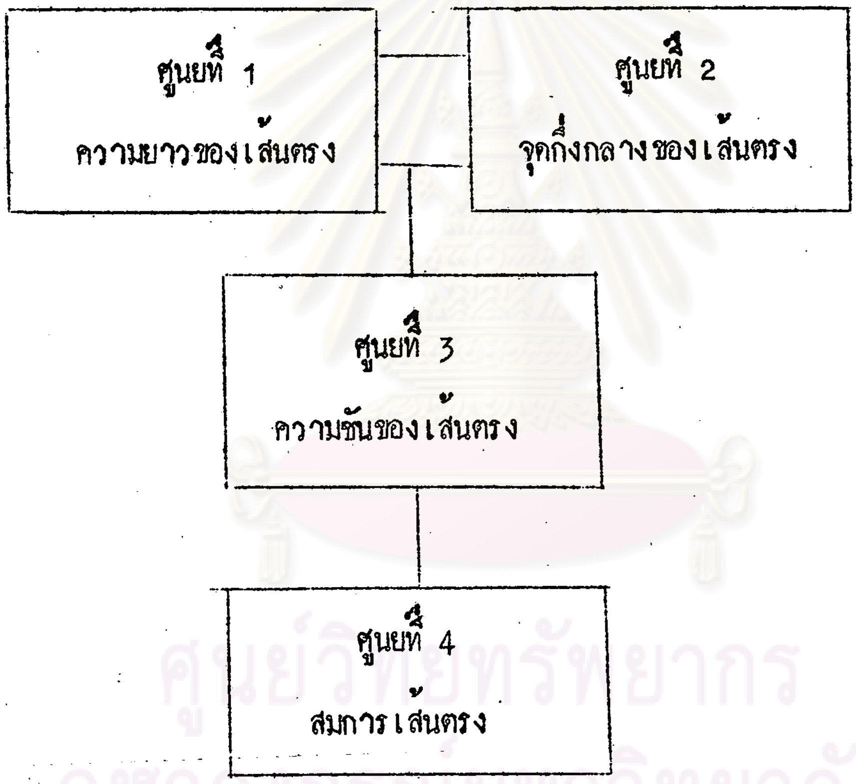
เฉลยบัตรทดสอบ

1. ข
2. ง
3. ค
4. ก
5. ค
6. ก
7. ข
8. ก
9. ค
10. ค
11. ข
12. ค

ศูนย์ที่ 4

โปรดอ่านคำสั่ง แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. ให้นักเรียนเลือกเรียนที่ศูนย์การเรียนทั้ง 4 ศูนย์ให้ครบ โดยเลือกศึกษาที่ศูนย์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้



2. ศึกษาจากบัตรกิจกรรมก่อนแล้วจึงให้ศึกษาจากบัตรเนื้อหาเพิ่มเติม
3. ทำบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
5. ทำแบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียน

ศูนย์ที่ 4

เรื่อง สมการเส้นตรง

<u>วัตถุประสงค์</u>

1. ให้นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับสมการของเส้นตรง

   1.1 นักเรียนสามารถหาสมการเส้นตรงได้เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ให้

   1.2 ชี้บ่งได้ว่าความสัมพันธ์ใดมีกราฟเป็นเส้นตรงตามเงื่อนไขต่าง ๆ ตามที่กำหนดให้

   1.3 เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้สามารถหาความชันของเส้นตรงนั้นได้

   1.4 ชี้บ่งได้ว่าสมการเส้นตรงใดมีความชันเท่ากับความชันเท่ากับความชันของเส้นตรงที่กำหนดสมการให้

   1.5 หาจุดตัดบนแกน x และแกน y ของเส้นตรงที่กำหนดสมการให้

   1.6 ชี้บ่งได้ว่าสมการเส้นตรงใด ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดสมการให้ได้

   1.7 เมื่อกำหนดจุดบนเส้นตรงที่รู้ค่าของความชันให้สามารถชี้บ่งได้ว่าเส้นตรงนั้นจะผ่านจุดใด

   1.8 สามารถหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดความชันให้ได้

   1.9 สามารถหาความชันของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดความชันให้ได้

   1.10 เขียนสมการเส้นตรงในรูปทั่วไปได้

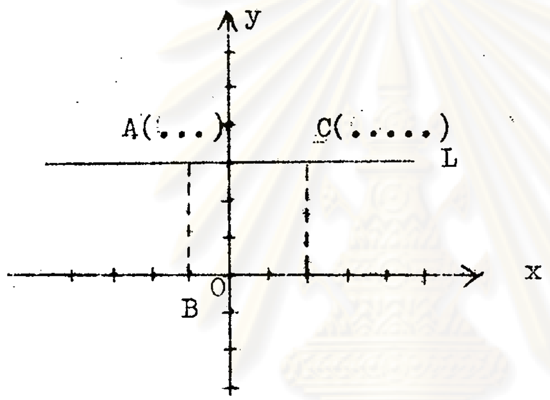
   1.11 สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเส้นตรงและความชันมาแก้โจทย์ปัญหาได้

ศูนย์ที่ 4

บัตรกิจกรรม

เรื่อง สมการเส้นตรง

1. พิจารณาเส้นตรงในรูปที่กำหนดให้



รูปที่1

จากรูปเส้นตรง L ขนานกับแกน x

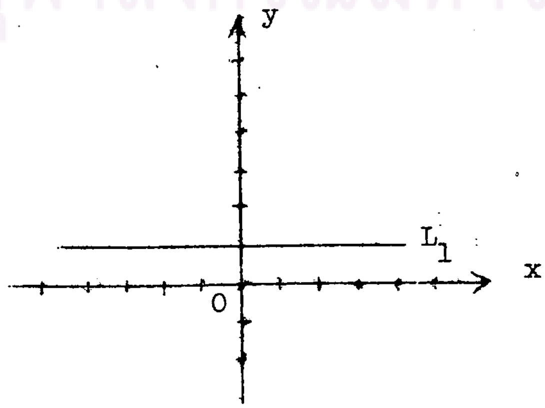
1.1 จุด A , B , C มีโคออร์ดิเนต ____________

1.2 จุด A , B และ C มีค่าโคออร์ดิเนตเท่ากับ ________

1.3 ทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้มีค่าโคออร์ดิเนตเท่ากับ ________

1.4 จากรูป 1. สมการของเส้นตรง L เป็น ________

(x = 3 หรือ y = 3)



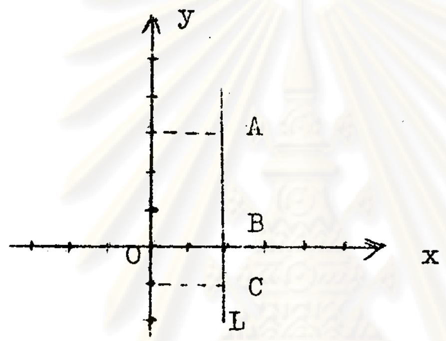
1.5 จากรูปสมการของเส้นตรง L_1 เป็น ____________________

1.6 จากรูปสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (0 , 1) เป็น ____________

1.7 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะเท่ากับ -3 หน่วยจะมีสมการเป็น ____________

1.8 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะเท่ากับ b หน่วย จะมีสมการ เป็น ____________

2.



จากรูปเส้นตรง L ขนานกับแกน y

2.1 A , B และ C อยู่บนเส้นตรง L มีโคออร์ดิเนตเป็น

____

2.2 จุด A , B และ C มีค่าแอบซิสสาเท่ากับ ____________

2.3 ทุกจุดที่อยู่บนเส้นตรง L จะมีค่าแอบซิสสา ____________

(เท่ากัน/ไม่เท่ากัน)

2.4 สมการของเส้นตรง L จะเป็น ____________________

(x = 2 หรือ y = 2)

2.5 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , 3) เป็น ____________________

ถ้าเส้นตรง L_1 ขนานกับแกน y และมีค่าแอบซิสสาเท่ากับ 5

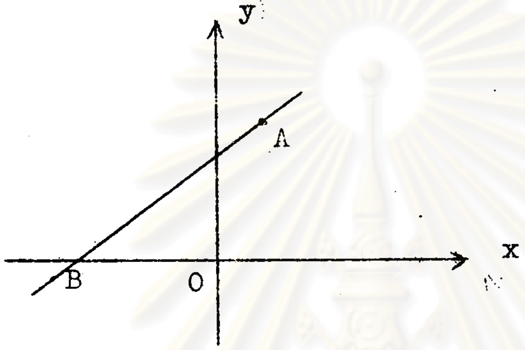
2.6 แล้ว สมการของเส้นตรง L_1 เป็น ____________________

2.7 และทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้จะมีค่า ____________ เท่ากัน

(แอบซิสสา / ออร์ดิเนต)

2.8 ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน y และห่างจากแกน y เป็นระยะทางเท่ากับ a แล้วทุก ๆ จุดบนเส้นตรงนี้จะมีค่าแอบซิสสาเท่ากับ ________________ และสมการเส้นตรงเป็น ________________

3.



จากรูปถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m

3.1 จุด A จะมีความชันเท่ากับ ________________

3.2 จุด B จะมีความชันเท่ากับ ________________

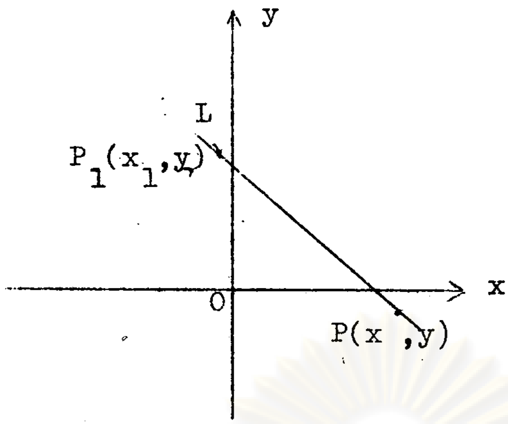
3.3 $\therefore$ ทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้จะมีความชันเท่ากับ ________________

3.4 ดังนั้น จุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะมีความชัน ________________ (เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

3.5 ถ้า m เป็นความชันของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2 (x_2 , y_2)$ แล้วจะได้ว่า

m = ________________

(เขียนในรูปโคออร์ดิเนตของ x_1 , x_2 , y_1 และ y_2)



3.6 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 (y_1, y_1) และมีความชัน m
สมมุติให้ P (x , y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L จะได้ว่า

______________ = m , (เขียนในเทอมของ (x , y , x_1, y_1)

หรือ

$y - y_1$ = ______________

เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$\left\{ (x , y) \in R \times R \ / \ y - y_1 = m(x - x_1) \right\}$

3.7 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (–2 , 3) และมีความชันเป็น 2 คือ

____

3.8 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (0 , –2) และเส้นตรงมีมุมเอียงเท่ากับ 45°
คือ ______________________________

3.9 สรุปได้ว่า ถ้ากำหนดจุดผ่านของเส้นตรง และความชันของเส้นตรงให้ สามารถ
หาสมการของเส้นตรงได้ คือ ______________________

4.

4.1 ให้เส้นตรง L ผ่านจุด A (2 , 5) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$
ถ้า B (x , y) เป็นจุด ๆ หนึ่งที่อยู่บนเส้นตรง L แล้ว ความชัน
ของเส้นตรง AB จะเท่ากับ ______________

4.2 จากข้อ 4.1 ความชันของ AB จะหาในเทอมโคออร์ดิเนตของ A และ B ได้คือ

$$\frac{y - 5}{x - 2} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น สมการที่ผ่านจุด (2 , 5) และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

มีสมการ

คือ $3y - 2x - 11$ หรือ $2x - 3y + 11$

4.3 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , 3) และมีความชันเท่ากับ 4

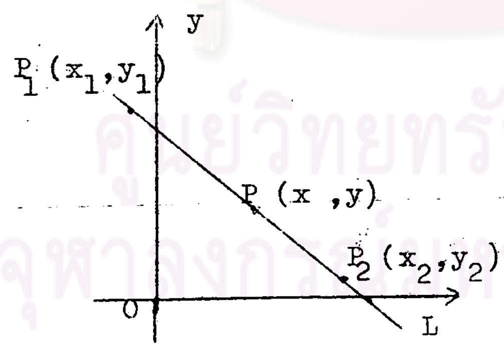
มีสมการ คือ ______________________________

4.4 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (5 , 10) และมีความชันเท่ากับ − 6

มีสมการ คือ ______________________________

4.5 จงพิจารณาว่า ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m และผ่านจุด $P_1 (x_1 , y_1)$ และ $P (x , y)$ ดังนั้น $P (x , y)$ และ $P_1 (x_1 , y_1)$ จะอยู่บนเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรง PP_1 เท่ากับความชันของ ____________________

5.



5.1 พิจารณารูป

ถ้า $P (x , y)$ เป็นจุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด $P_1 (x_1 , y_1)$ จะได้ ความชันของเส้นตรง L $= \frac{y - y_1}{x - x_1}$

ถ้า P_1 (x_1 , y_1) เป็นจุด ๆ ใด อยู่บนเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด P_2 (x_2 , y_2)

ความชันของเส้นตรง L = ______________________

(เขียนในรูปโคออร์ดิเนตของ x_1 , x_2 , y_1 , y_2)

เนื่องจากความชันของเส้นตรงเส้นเดียวกันต้อง ______________

(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

ดังนั้น

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

สรุปได้ว่าสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 (x_1 , y_1) และ $P_2(x_2 , y_2)$

จะมีรูปสมการ คือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

หรือเขียนความสัมพันธ์ของกราฟเส้นตรงที่ผ่าน $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ ได้คือ

$$\left\{ (x , y) \in R \times R \;/\; \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right\}$$

5.2 เส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , 1) และ (3 , 5) จะมีสมการ

เส้นตรง คือ $\frac{y - 1}{x - 2} = \frac{1 - 5}{2 - 3} = \frac{-4}{-1}$

แก้สมการจะได้ว่า $-y + 1 = -x + 8$

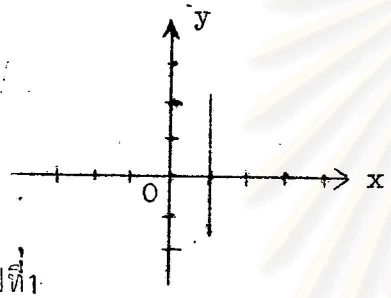
หรือ $y - 4x + 7 = 0$

5.3 เส้นตรงที่ผ่านจุด (−5 , 2) และ (3 , 0) มีสมการ

เส้นตรง คือ ______________________

6. เส้นตรงใด ถ้าไม่ขนานกับแกน x จะตัดแกน x และเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y จะตัดแกน y ระยะตามแนวแกน x ที่เริ่มวัดจากจุดตั้งต้นถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน x เรียกว่าระยะตัดแกน x หรือ x - intercept ระยะตามแนวแกน y ที่เริ่มวัดจากจุดตั้งต้นถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน y เรียกว่าระยะตัดแกน y หรือ y - interept

6.1



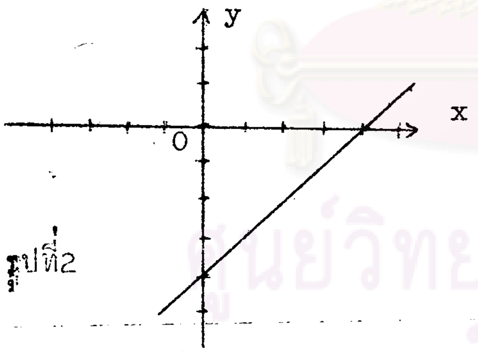
รูปที่1

จากรูป 1 ระยะตัดแกน x เท่ากับ

____

ระยะตัดแกน y เท่ากับ

____



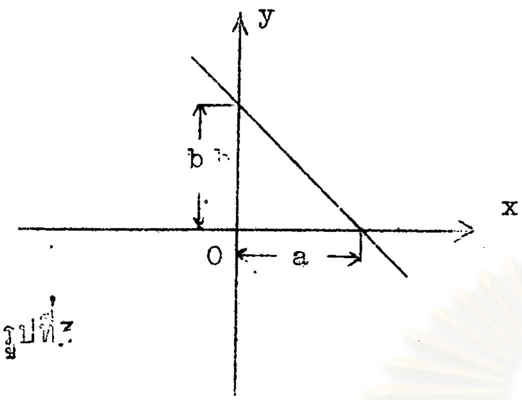
รูปที่2

จากรูป 2 ระยะตัดแกน x เท่ากับ

____

ระยะตัดแกน y เท่ากับ

____



รูปที่ 3

ระยะตัดแกน x เท่ากับ

____

ระยะตัดแกน y เท่ากับ

____

6.2 ถ้าให้ระยะตัดแกน y เท่ากับ b แสดงว่าเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด (o , b) หรือเส้นตรงผ่านจุด ________

6.3 ถ้าจะสร้างสมการที่มีความชันเท่ากับ 2 และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ 5 แสดงว่าเส้นตรงนี้จะผ่านจุด (0 , 5) ________

และมีความชันเท่ากับ ________

6.4 จากข้อ 6.3 ถ้าจะสร้างสมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 5 และผ่านจุด (0 , 5) จะได้สมการ คือ. ________

6.5 ในทำนองเดียวกัน สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ m และผ่านจุด (o , b) จะได้สมการ คือ y = ________

หรือเขียนความสัมพันธ์ของกราฟเส้นตรงเมื่อกำหนดความชันเท่ากับ m และระยะตัดแกน y เท่ากับ b ให้คือ

$$\{(x , y) \in R \times R \ / \ y = mx + b\}$$

6.6 สมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น 3 และมีระยะตัดแกน y = -2 คือ ________

7.

7.1 จากความรู้ในเรื่องระยะตัวแกน x ถ้าระยะตัดแกน x = a แสดงว่าเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด ________

ดังนั้น ถ้าเส้นตรงมีระยะตัดแกนเท่ากับ b และระยะตัดแกน x = a

แสดงว่าเส้นตรงผ่านจุด ________ และจุด ________

7.2 สมการของเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = 4$ และระยะตัดแกน $y = 5$ แสดงว่าเส้นตรงผ่านจุด ________ และจุด ________

7.3 สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = 4$ และระยะตัดแกน $y = 5$ จะสร้างสมการชนิดผ่านจุด 2 จุด จะได้สมการเส้นตรง คือ

$$\frac{y-0}{x-4} = \frac{0-5}{4-0}$$

แก้สมการจะได้ $4y = -5x + 20$

หรือ $4y + 5x - 20 = 0$ เป็นสมการที่ต้องการ

7.4 สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$

คือ $y =$ ________________

7.5 จากสมการ $y = -\frac{b}{a}x + b$

เอา b หารตลอดจะได้

$$\frac{y}{b} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + 1$$

หรือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} =$ ________

สมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จึงเป็นสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$ หรือเขียนความสัมพันธ์ของกราฟเส้นตรงเมื่อทราบระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$

คือ $\left\{ (x, y) \in R \times R \;/\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right\}$

7.6 สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = 5$ และแกน -3 เป็นตามลำดับ คือ ________________

7.7 สมการเส้นตรงที่ตัดแกน x และแกน y ห่างจากจุดกำเนิดเป็น -1 และ -4 ตามลำดับ คือ ________________

หรือ ________________

8.

8.1 จากสมการ $y = mx + b$ บอกได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ x คือ ความชัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ m

เทอมค่าคงที่ b คือระยะตัดแกน y

ดังนั้น สมการเส้นตรง $y = 3x + 5$

ความชันของเส้นตรงนี้ คือ .... และระยะตัดแกน y คือ ....

8.2 จากสมการ $y = -\frac{4}{5}x + 9$

ความชันของเส้นตรง คือ ....

ระยะตัดแกน y คือ ....

8.3 จากสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ จะหาความชันและระยะตัดแกน y ของเส้นตรงได้ โดยจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = mx + b$

ถ้า $y + 3x - 5 = 0$

จัดสมการใหม่ได้เป็น y ....

ความชันของเส้นตรง คือ ....

8.4 เส้นตรง $3y - 5x + 10 = 1$ มีความชันเท่ากับ ....

เส้นตรง $2x + y = 8$ มีความชันเท่ากับ ....

และระยะตัดแกน y เท่ากับ ....

9.

9.1 เส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 4$ มีความชันเท่ากับ ....

และเส้นตรง $3y = 2x - 6$ มีความชันเท่ากับ ....

เส้นตรง $Y = \frac{2x}{3} + 4$ _____________ กับเส้นตรง

(ขนาน / ตั้งฉาก)

$3y = 2x - 6$ เพราะว่าความชัน _____________

(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

9.2 เส้นตรง $2x + y = 8$ มีความชันเท่ากับ

เส้นตรง $2x + y = 8$ ______________ กับเส้นตรง

(ขนาน / ตั้งฉาก)

$y = \frac{x}{2} - 5$ เพราะว่าผลคูณของความชันมีค่า

9.3 ถ้าเส้นตรง L ขนานกับ $3x + 2y + 6 = 0$ แล้วความชัน

ของเส้นตรง L คือ. ______________

9.4 ต้องการหาสมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นตรง $3x - 2y + 12 = 0$ และผ่านจุด (7 , 5)

เพราะว่า เส้นตรงขนานกับเส้นตรง $3x - 2y + 12 = 0$

ซึ่งมีความชัน เท่ากับ $\frac{3}{2}$

ดังนั้น สมการที่มีความชัน $\frac{3}{2}$ และผ่านจุด (7 , 5) คือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - 7)$$

$$2y - 10 = 3x = 21$$

$$2y - 3x + 11 = 0$$

จึงเป็นสมการที่ขนานกับเส้นตรง $3x - 2y + 12 = 0$ และผ่านจุด (7 , 5)

9.5 สมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x + 3y - 5 = 0$ และผ่านจุด (2 , 5) คือ ______________

9.6 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 5) และตั้งฉากกับเส้นตรง

$3x - y + 12 = 0$ คือ

10. จากสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ระยะตัดแกน x มีค่าเท่ากับ a

ระยะตัดแกน y มีค่าเท่ากับ b

10.1 กำหนดสมการเส้นตรง $2x + y = 4$ จะจัดสมการนี้ให้อยู่ในรูป

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จะได้

ระยะตัดแกน x มีค่า ______________________

ระยะตัดแกน y มีค่า ______________________

10.2 จากสมการ $3y - 5x = 10$ จะจัดให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

จะได้

ระยะตัดแกน x มีค่า ______________________

ระยะตัดแกน y มีค่า ______________________

10.3 จากสมการ $6x - 2y - 7 = 0$ จะได้

ระยะตัดแกน x มีค่า ______________________

ระยะตัดแกน y มีค่า ______________________

10.4 ถ้ากำหนดสมการเส้นตรงใด ๆ มาให้ เมื่อต้องการหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y จะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูป ________

____

11.

11.1 พิจารณาสมการที่ผ่านจุด (1 , 3) และ (−2 , 2)

จากรูปสมการที่ผ่านจุด 2 จุด คือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

แทนค่า $y - 3 = \frac{3 - 2}{1 + 2}(x - 1)$

หรือ $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$

ซึ่งอยู่ในรูป $y - y_1 = m(x - x_1)$

11.2 พิจารณาสมการเส้นตรง ซึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$ และมีระยะตัดแกน y

สมการ คือ $y = \frac{2}{3}x + 4$

หรือ $y - 4 = \frac{2}{3}x$

ซึ่งอยู่ในรูป $y - y_1 = m(x - x_1)$

11.3 พิจารณาสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $X = 2$ และระยะตัดแกน $y = 3$

สมการ คือ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

หรือ $y = -\frac{3}{2}x + 3$

ดังนั้น $y - 3 = -\frac{3}{2}x$

หรือ $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 0)$

ซึ่งอยู่ในรูป $y - y_1 = m(x - x_1)$

11.4 ดังนั้น สมการเส้นตรงที่กำหนดเงื่อนไข คือ

1. ผ่านจุด 2 จุด
2. กำหนดความชันและระยะตัดแกน y
3. กำหนดระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

สมการเหล่านี้สามารถเขียนอยู่ในรูป

$y - y_1 =$ ....

ซึ่งมีความชัน ....

สมการจะผ่านจุด ....

12. พิจารณาสมการที่ x และ y มีกำลังเป็นหนึ่ง

$$Ax + By + C = 0$$

โดยที่ A , B และ C เป็นค่าคงที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

12.1 เนื่องจาก A และ B เป็นศูนย์พร้อมกันไม่ได้ จะเกิดเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $B \neq 0$ เมื่อ A ______________

กรณีที่ 2 $B = 0$ เมื่อ A ______________

12.2 ถ้า $B = 0$ แล้ว A ต้องไม่เท่ากับศูนย์

สมการ $Ax + By + C = 0$ แลายเป็น $Ax + C = 0$

จะได้ $x =$ __________ เป็นสมการเส้นตรงที่ __________ กับแกน y

12.3 ถ้า $B \neq 0$ แล้ว A ต้องเท่ากับศูนย์

สมการ $Ax + By + C = 0$ กลายเป็น $By + C = 0$

จะได้ $y =$ __________ เป็นสมการเส้นตรงที่ __________ กับแกน x __________

12.4 ถ้า $B = 0$ และ $A = 0$

สมการ $Ax + By + C = 0$ เอา B หารตลอดจะได้เป็น

$$y = \frac{-Ax}{D} - \frac{C}{B}$$

พิจารณา

$$y = \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

เป็นสมการเส้นตรงที่มีความชัน ______________

และระยะตัดแกน Y เท่ากับ ______________

12.5 ถ้า $C = 0$ สมการ $Ax + By + C = 0$ เป็น

$$Ax + By = 0$$

หรือ $y =$ ______________

จะได้ระยะตัดแกน y เท่ากับ __________ หรือเส้นตรงผ่านจุด ______________

12.6 ดังนั้นสมการในรูป

$Ax + By + C = 0$ ซึ่ง A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

จึงเป็นสมการของ ______________________________

หรือกล่าวได้ว่า

รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ ____________________

เมื่อ A และ B ____________________________

และกำลังของ x และ y จะเป็น ____________ เสมอ

____

ศูนย์ที่ 4

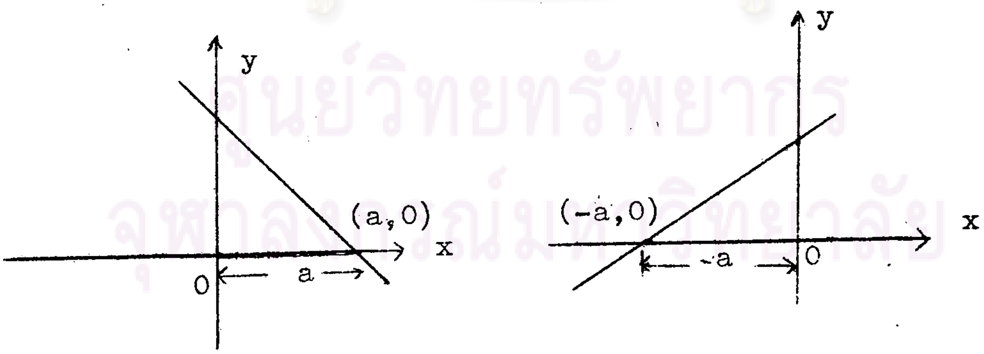
บัตรเนื้อหา

เรื่อง สมการของเส้นตรง

คำว่า "สมการเส้นตรง" หรืออาจจะเรียกชื่อเป็นอย่างอื่นว่า "สมการเชิงเส้น" (Linear equation) สมการดีกรีหนึ่ง (First digree equation) ซึ่งหมายถึง เงื่อนไขที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในโดเมน (Domain) และเรนจ์ของความสัมพันธ์ ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า สมการของเส้นตรง คือ สมการที่ประกอบด้วยตัวแปร x และตัวแปร y ซึ่งตัวแปรต้องมีกำลังเป็นหนึ่งเท่านั้นและจะมีพจน์ xy ประกอบอยู่ด้วยไม่ได้ สำหรับการศึกษาในส่วนนี้ ต้องการที่จะหาสมการของเส้นตรงในแบบต่าง ๆ

<u>ระยะตัดแกน</u> (Intercept) คือระยะตามแนวแกน x แกน y ที่เริ่มวัดจากจุดตั้งต้น (Origin) ถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน x หรือแกน y

<u>ระยะตัดแกน x</u> (X - intercept) คือระยะตามแนวแกน x ที่วัดจากจุดตั้งต้น ถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน x



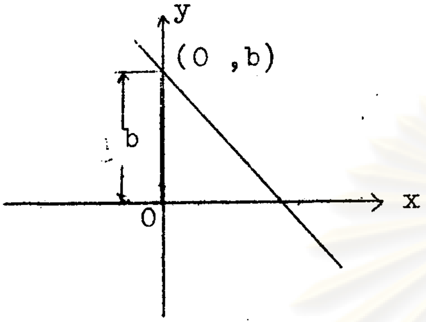
ระยะตัดแกน x = a

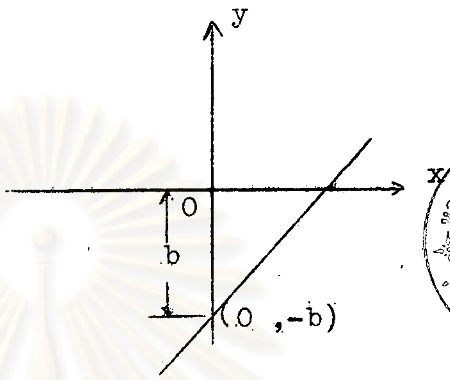
จุดตัดแกน x = (a , o)

ระยะตัดแกน x = -a

จุดตัดแกน x = (-a , 0)

<u>ระยะตัดแกน y</u> (Y - intercept) คือระยะตามแนวแกน y ที่วัดจากจุดตั้งต้น ถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน y





ระยะตัดแกน y = b

จุดตัดแกน y = (o , b)

ระยะตัดแกน y = -b

จุดตัดแกน y = (o , -b)

รูปมาตรฐานของสมการเส้นตรงแบบต่าง ๆ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

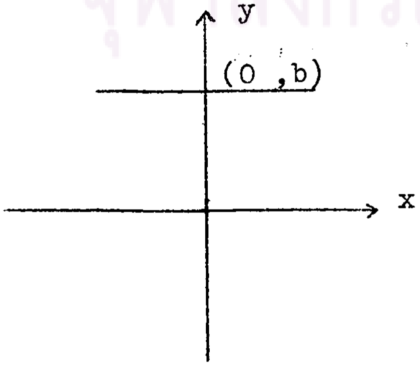
<u>แบบที่ 1 เส้นตรงที่ขนานกับแกน x</u>

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และตัดแกน y ที่จุด (o , b)

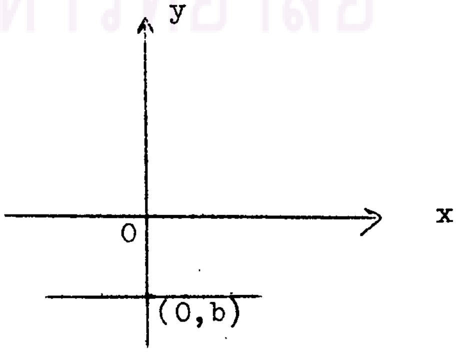
ถ้า $b > o$ เส้นตรง L จะอยู่เหนือแกน x

ถ้า $b = o$ เส้นตรง L คือแกน x

ถ้า $b < o$ เส้นตรง L จะอยู่ใต้แกน x



รูปที่ 1 $b > o$

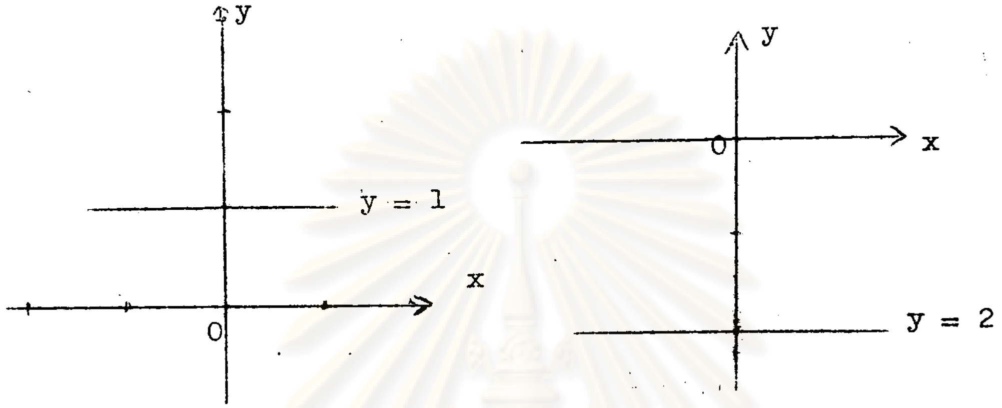


รูปที่ 2 $b < o$

ในกรณีนี้ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, y = b\}$

หรือ กล่าวได้ว่าสมการเส้นตรง L คือ $y = b$

ตัวอย่าง เช่น



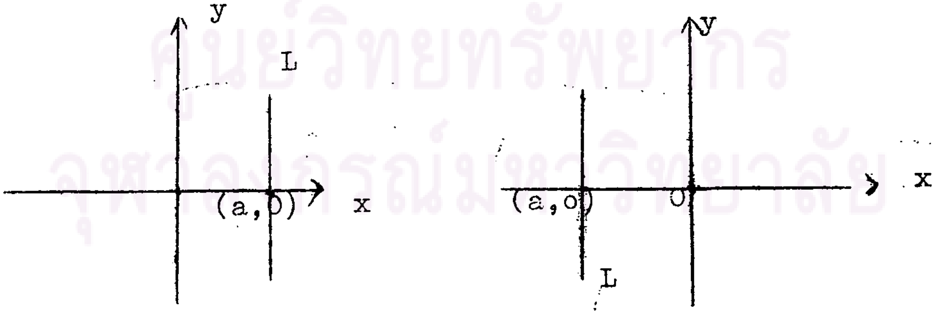
แบบที่ 2 เส้นตรงที่ขนานกับแกน y

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และตัดแกน x ที่จุด (a,o)

ถ้า a > o เส้นตรงจะอยู่ทางขวามือของแกน y

ถ้า a = o เส้นตรง L คือแกน y

ถ้า a < o เส้นตรง L จะอยู่ทางซ้ายมือของแกน y



รูปที่ 1 a > o

รูปที่ 2 a < o

ในกรณีนี้ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\{(x,y) \in R\times R \;/\; x = a\}$$

หรือจะกล่าวได้ว่า สมการเส้น L คือ

$$x = a$$

แบบที่ 3 เส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 (x_1, y_1) และมีความชัน m

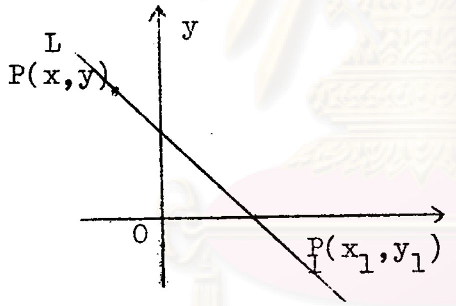
ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 (x_1, y_1) และมีความชัน m
สมมุติให้จุด P (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L จะได้ว่า

$$\text{ความชัน } PP_1 = m$$

นั่น คือ
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

หรือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\{(x, y) \in R \times R \;/\; y - y_1 = m(x - x_1)\}$$

หรือ กล่าวว่า สมการเส้นตรง L คือ

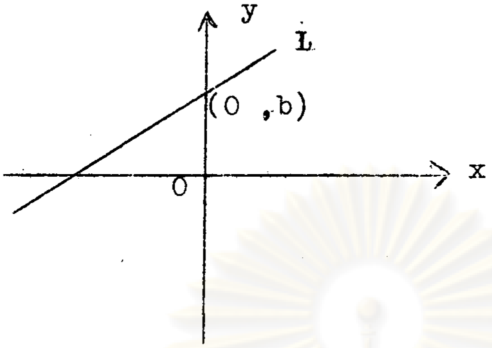
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

แบบที่ 4 เส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน y เท่ากับ b

สมมุติให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน $y = b$
เพราะฉะนั้น เส้นตรงจะต้องผ่านจุด (o, b) ดังนั้นจากผลจากแบบที่ 3 ได้สมการเส้นตรง L ดังนี้

$$y - b = m(x - o)$$

หรือ $y = mx + b$



เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

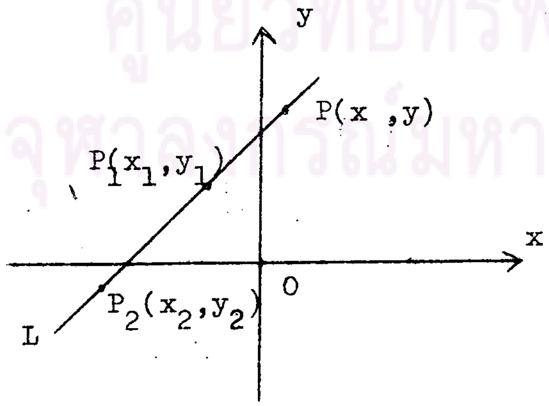
$$\{ (x , y) \in R \times R \ / \ y = mx + b \}$$

หรือ สมการเส้นตรง คือ

$$y = mx + b$$

<u>แบบที่ 5 เส้นตรงผ่านจุด 2 จุด</u>

สมมุติให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 (x_1,y_1) และจุด P_2 (x_2 , y_2) ให้ P (x , y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L



หาความชันของเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด P (x , y) และ P_1 (x_1 , y_1)

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

หาความชันของเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด P_1 (x_1, y_1) และ P_2 (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ความชันของเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อมเท่ากัน

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\left\{ (x, y) \in R \times R \Big/ \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right\}$$

หรือ

สมการเส้นตรง L คือ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

<u>แบบที่ 6 เส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x เท่ากับ a และจุดตัดแกน y เท่ากับ b ซึ่ง a ≠ o และ b ≠ o</u>

สมมุติให้ L เป็นเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x = a และจุดตัดแกน y = b โดยที่ a ≠ o และ b ≠ o เพราะฉะนั้น เส้นตรง L จะผ่านจุด (a , o) และ (o , b)

ความชันของ L $= \dfrac{o - b}{a - o} = \dfrac{-b}{a}$

เพราะฉะนั้น เข้าลักษณะของเส้นตรงที่รู้ความชันและตัดแกน $y = b$

จะได้สมการ $y = (-\frac{b}{a})x + b$

หรือ $ay = -bx + ab$

หรือ $bx + ay = ab$

ดังนั้น

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\left\{ (x, y) \in R \times R \;/\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right\}$$

หรือ กล่าวว่าสมการเส้นตรง คือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง

(1) เส้นตรงทุกเส้นจะต้องมีสมการอยู่ในรูป

$$Ax + By + C = 0$$

โดยที่ A , B และ C เป็นค่าคงที่ และ A , B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในทำนองเดียวกัน

ถ้ากราฟของความสัมพันธ์ที่มีสมการ $Ax + By + C = 0$ โดยที่ A , B , C เป็นค่าคงที่ และ A , B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันจะเป็นเส้นตรงเสมอ

วิธีหา ความชันและจุดที่เส้นตรงตัดแกน y เพื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้

จากสมการของเส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน $y = b$

คือ $y = mx + b$

ดังนั้น เมื่อต้องการหาความชันและจุดตัดแกน y ของเส้นตรง เมื่อกำหนดสมการให้ จึงสามารถทำได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = mx + b$ แล้วจะได้ว่า m คือความชันของเส้นตรง b ต่อจุดตัดแกน y

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความชันของเส้นตรง $5x + 3y = b$ และจุดที่เส้นตรงนี้ตัดแกน y

วิธีทำ ดังนั้น เส้นตรงนี้มีความชันเท่ากับ $-\frac{5}{3}$ และตัดแกน (0 , 2) ที่จุด (0 , 2)

วิธีหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้

จากสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$ คือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ดังนั้น เมื่อต้องการหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ของเส้นตรง เมื่อกำหนดสมการให้ จึงสามารถทำได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ a คือระยะที่เส้นตรงตัดแกน x และ b คือระยะที่เส้นตรงตัดแกน y

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความชันของเส้นตรง $5x + 3y = 2$ และจุดที่เส้นตรงนี้ตัดแกน y

วิธีทำ สามารถเขียนสมการ $5x + 3y = 2$ ในรูป

$$y = -\frac{5}{3}x + 2$$

หรือ $y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 0)$

ดังนั้น เส้นตรงมีความชันเท่ากับ $-\frac{5}{3}$ และตัดแกน y ที่จุด (0 , 2)

<u>ตัวอย่าง</u> จากสูตรสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x_1 - y_1)$ และมีความชัน m

สมการที่ได้ คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

(1) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 4) มีความชัน $-\frac{1}{2}$ คือ

$$y - 4 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

หรือ $x + 2y - 11 = 0$

(2) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1 , -3)$ มีความชัน 3 คือ

$$y + 3 = 3(x + 1)$$

หรือ $x - y = 0$

(3) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1 , 2)$ และ $(-2 , 3)$ คือ

$$y - 2 = \left(\frac{2 - 3}{1 + 2}\right) (x - 1)$$

$$= \frac{-1}{3} (x - 1)$$

หรือ $x + 3y - 7 = 0$

(4) สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2 , 4)$ และ $(0 , 4)$ คือ

$$y - 4 = \frac{4 - 4}{(-2 - 0)} (x + 2)$$

$$= 0 (x + 2)$$

หรือ $y = 4$

ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดสมการเส้นตรงเป็น $2x - 3y - 5 = 0$

จงหา x - intercept และ y - intercept

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y = 0$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

ให้ $x = 0$

$$3y = 5$$

$$y = \frac{-5}{3}$$

นั่น คือ x - intercept คือ $\frac{5}{2}$

y - intercept คือ $-\frac{5}{2}$

ตัวอย่าง จงหาสมการของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด (1 , -1) และ

(a) ขนานกับเส้นตรง L_1 ที่ผ่านจุด (4 , -1) และ (-2 , 2)

(b) ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง L_2 ที่ผ่านจุด (1 , -4) และ (2 , -2)

วิธีทำ

ความชันของเส้นตรง L_1 คือ $= \frac{-1-2}{4+2} = \frac{1}{2}$

ความชันของเส้นตรง L คือ $-\frac{1}{2}$

สมการของเส้นตรง L คือ

$$y + 1 = (-\tfrac{1}{2})(x - 1)$$

หรือ $x + 2y + 1 = 0$

ความชันของเส้นตรง L_2 คือ $= \frac{-4-2}{1-2} = 6$

ความชันของเส้นตรง L คือ $-\frac{1}{6}$

สมการของเส้นตรง L คือ

$$y + 1 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

หรือ $x + 6y + 5 = 0$

ศูนย์ที่ 4

บัตรงาน

1. กำหนดสมการเส้นตรงเป็น $3x + 2y = 6$ จงหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

2. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และเส้นตรงมีมุมเอียงเท่ากับ 45°

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{1}{3}$ และมีระยะตัดแกน $x = 2$

4. สมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น -2 และผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมจุด $(4, -2)$ และ $(2, -6)$ มีสมการเป็นอย่างไร

5. สมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (–3 , –1) และมีระยะตัดแกน y เท่ากับ –2 มีสมการเป็นอย่างไร

6. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x และแกน y เท่ากัน และเครื่องหมายเหมือนกันและผ่านจุด (4 , 2)

7. จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน y ห่างจากจุดตั้งต้นเป็น 3 เท่า ของระยะตัดแกน x และผ่านจุด (2 , 3)

8. จงหาความชันและระยะตัดแกน จากสมการ $2y = 3x + 5$

9. จงหาความชัน ระยะตัดแกน และระยะตัดแกน จากสมการเส้นตรง $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, –3) และขนานกับเส้นตรง $3x - 5y - 15 = 0$

11. จงหาสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x $= -\frac{2}{3}$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $3x - 3y - 2 = 0$

____

____

____

____

____

____

12. สมการเส้นตรงใดผ่านจุด $(2, -3)$

1. $y = 2x + 5$ ______________________
2. $5y = -4x - 7$ ______________________
3. $y = 2x$ ______________________
4. $x - 3 = 0$ ______________________
5. $y + 5 = 0$ ______________________
6. $y + 3 = 0$ ______________________

13. รูปสมการต่อไปนี้ ใช่หรือไม่ใช่สมการเส้นตรง

1. $x = 3$ ______________________
2. $3x + 4y = 5$ ______________________
3. $x^2 - y^2 = 0$ ______________________
4. $x^2 - 5 = 4$ ______________________
5. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ______________________
6. $2x + 5xy + y = 3$ ______________________

ศูนย์ที่ 4

บัตรปัญหา

1. สมการของด้านของสามเหลี่ยมต่อไปนี้ ชุดไหนประกอบกันเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. $5x - 3y + 17 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$, $5x - 3y - 8 = 0$

ข. $x - 7y - 11 = 0$, $7x - 3y + 1 = 0$, $7x + y - 7 = 0$

ค. $x - 2y + 5 = 0$, $3x - y - 9 = 0$, $7x - 14y + 5 = 0$

ง. $x - y - 5 = 0$, $3x - 4 = 0$, $2x + y + 4 = 0$

2. จงหาสมการเส้นตรง L ที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง L_1 ; $2x - 5y + 3$ และ L_2 ; $x - 3y - 7 = 0$ และตั้งได้ฉากกับเส้นตรง L ; $4x + y - 1 = 0$

3. จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งเป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีโคออร์ดิเนตของฐานเป็น $(-3 , 5)$ กับ $(-2 , -7)$ (ส่วนสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมแบ่งครึ่งและตั้งกับฐาน)

ศูนย์ที่ 4

เฉลยบัตรกิจกรรม

1.

1.1 A , B , C มีโคออร์ดิเนตดังนี้ (−1 , 3) , (0 , 3) , (2 , 3)

1.2 A , B , C มีโคออร์ดิเนตเท่ากับ 3

1.3 3

1.4 $y = 3$

1.5 $y = 1$

1.6 $y = 1$

1.7 $y = -3$

1.8 $y = b$

2.

2.1 A , B , C มีโคออร์ดิเนตดังนี้ (2 , 2) , (2 , 0) , (2 , −1)

2.2 A , B , C มีแอบซิสสาเท่ากับ 2

2.3 เท่ากัน

2.4 $x = 2$

2.5 $x = 2$

2.6 $x = 5$

2.7 แอบซิสสา

2.8 a , $x = a$

3.

3.1 m

3.2 m

3.3 m

3.4 เท่ากัน

3.5 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ หรือ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

3.6 $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

3.7 $y - 2x - 7 = 0$ หรือ $2x - y + 7 = 0$

3.8 $y - x + 2 = 0$ หรือ $x - y - 2 = 0$

3.9 $y - y_1 = m(x - x_1)$

4.

4.1 $\frac{2}{3}$

4.2 $y - 4x + 5 = 0$ หรือ $4x - y - 5 = 0$

4.3 $y - 6x - 40 = 0$

4.4 เส้นตรง L

5.

5.1 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, เท่ากัน , $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

5.2 –

5.3 $2x + 8y - 6 = 0$

5.4 $4x - 7y - 34 = 0$

6.

6.1 รูป 1 2 , 0

รูป 2 4 , –4

รูป 3 $x = a$, $y = b$

6.2 (o , b)

6.3 2

6.4 $y - 5x - 5 = 0$ หรือ $y = 5x + 5$

6.5 $y = mx + b$

6.6 $y = 3x - 2$

7.

7.1 (a , o) , (a , o) และ (o , b)

7.2 (4 , 0) , (0 , 5)

7.3 –

7.4 $y = \frac{-bx}{a} + b$

7.5 $\frac{y}{b} = \frac{-x}{a} + 1$

7.6 $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$

7.7 $\frac{-x}{1} - \frac{x}{1} = 1$

$x + y = -1$

8.

8.1 3 , 5

8.2 $-\frac{4}{5}$, 9

8.3 $y = -3x + 5$

-3 , 5

8.4 $\frac{5}{3}$, -2 , 8

9.

9.1 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$

ขนาน , เท่ากัน

9.2 -2 , ตั้งฉาก , ผลคูณของความชันมีค่าเท่ากับ -1

9.3 $-\frac{3}{2}$

9.4 –

9.5 $3y - 2x - 19 = 0$

9.6 $3y + x - 16 = 0$

10.

10.1 2 , 4

10.2 $\frac{10}{3}$, -2

10.3 $\frac{7}{6}$, $\frac{-7}{2}$

10.4 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

11.

11.1 $y - y_1 = m(x - x_1)$, m , (x_1 , y_1)

12.

12.1 0 , $\neq 0$

12.2 $\frac{-C}{A}$, ขนาน

12.3 $y = \frac{-C}{B}$, ขนาน

12.4 $\frac{-A}{B}$, $\frac{-C}{B}$

12.5 $y = \frac{-Ax}{B}$

0 , (0 , 0)

12.6 เส้นตรง

$Ax + By + C = 0$ ไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน , หนึ่ง

ศูนย์ที่ 4

บัตรเฉลยบัตรงาน

เรื่อง สมการของเส้นตรง

1. หา x - intercept

ให้ $y = 0$

$3x + 2(0) = 6$

$3x = 6$

$x = 2$

x - intercept = 2

หา y - intercept

ให้ $x = 0$

$3(0) + 2y = 6$

$2y = 6$

$y = 3$

y - intercept = 3

2.

$\tan \theta = m$

$m = \tan 45^\circ = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = 1(x - 0)$

$x - y - 2 = c$

3.

ระยะตัดแกน $x = -2$

จุดตัดแกน $x = (-2, 0)$

เส้นตรงผ่านจุด $(-2 , 0)$ และมี slope $= -\frac{1}{3}$

$$y - 0 \quad \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$x + 3y + 2 = 0$$

4.

จุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมจุด $(4 , -2)$ และ $(2 , -6)$ คือ $(3 , -4)$

สมการของเส้นตรง คือ

$$y + 4 = -2(x + 3)$$

$$2x + y - 2 = 0$$

5.

ระยะตัดแกน $y = -2$

จุดตัดแกน $y = (0 , -2)$

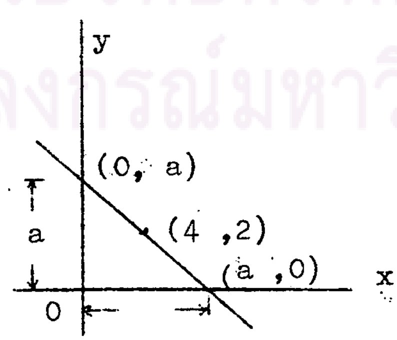
ดังนั้น ความชันของเส้นตรง $m = \frac{-2 + 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

จาก $y = mx + c$

$$y = -\frac{1}{3}x - 2$$

สมการเส้นตรง คือ $x + 3y - 2 = 0$

6.



ระยะตัดแกน x = ระยะตัดแกน y

$$AO = BO$$

= 5

AOB เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี

$$OAB = ABO = 45^\circ$$

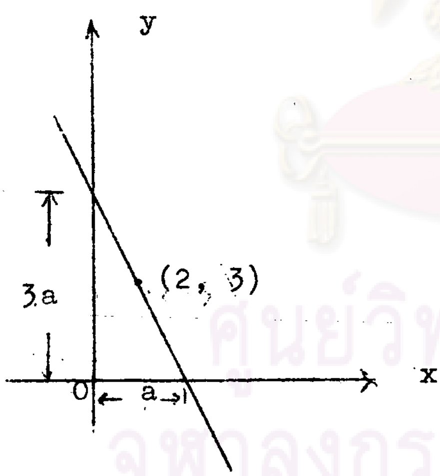
นั่นคือ ABX = มุมเอียง 135°

$$m = \tan\theta$$
$$= \tan 135^\circ$$
$$= -1$$

สมการของเส้นตรง คือ

$$y - 2 = -1(x - 4)$$
$$x + y - 6 = 0$$

7\.



ให้ระยะตัดแกน $x = a$

ระยะตัดแกน $y = 3a$

จาก

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เส้นตรงผ่านจุด (2 , 3)

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{3a} = 1$$

$$a = 3$$

ระยะตัดแกน $x = 3$

ระยะตัดแกน $y = 9$

ดังนั้น สมการ คือ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$$ หรือ

8\. จากสมการ $2y = 3x + 5$

จัดสมการใหม่ $y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$

ได้ว่าความชัน $= \frac{3}{2}$

ระยะตัดแกน $= \frac{5}{2}$

9. จากสมการ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{y}{2} = -\frac{x}{3} + L$$

$$y = -\frac{2x}{3} + 2$$

ความชัน $= -\frac{2}{3}$

ระยะตัดแกน y $= 2$

หาระยะตัดแกน x $\therefore y = 0$

$$0 = -\frac{2x}{3} + 2$$

$$x = 3$$

ระยะตัดแกน x $= 3$

10. จากสมการเส้นตรง $3x - 5y - 15 = 0$

จะได้ $y = \frac{3x}{5} - 3$

เส้นตรงนี้มีความชัน $= \frac{3}{5}$

เส้นตรงที่ต้องการหาขนานกับเส้นตรงเส้นนั้น

ดังนั้น จึงมีความชัน $= \frac{3}{5}$

เนื่องจากเส้นตรงผ่านจุด $(2, -3)$ และมีความชัน

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ต้องการหา คือ

$$y + 3 = \frac{3}{5}(x - 2)$$

$$3x - 5y - 21 = 0$$

11. จากสมการเส้นตรง $3x - 4y - 2 = 0$

ความชันของเส้นตรงนี้ $= m_1 = \frac{3}{4}$

ให้ความชันของเส้นตรงที่ต้องการหา $= \frac{m}{2}$

เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองตั้งฉากกัน

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \frac{-4}{3}$$

ระยะตัดแกน $x = \frac{-2}{3}$

ดังนั้น แสดงว่าเส้นตรงผ่านจุด $(\frac{-2}{3}, 0)$

จะได้ว่าสมการ คือ

$$y - 0 = \frac{-4}{3}(x + \frac{2}{3})$$

$$12x + 9y + 8 = 0$$

12. นำ (2 , −3) แทน (x , y) ในสมการเส้นตรงทุกเส้น สมการใดมีค่าเป็นจริง แสดงว่าสมการเส้นนั้นผ่านจุด (2 , −3) จากการตรวจสอบปรากฏว่า

(1) , (3) , (4) , (5) ไม่ผ่าน

(2) , (6) ผ่าน

13. สมการของเส้นตรงจะอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ก. เป็นเพราะเขียนอยู่ในรูป $A = 1$, $B = 0$, $C = -3$

ข. เป็น เพราะ $A = 3$, $B = 4$, $C = -5$

ค. ไม่เป็น เพราะกำลังของตัวแปรเป็น 2

ง. ไม่เป็น เพราะกำลังของตัวแปร

จ. เป็น เพราะสามารถจัดอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ได้

โดยเท่ากับ $2x + 3y - 1 = 0$

ฉ. ไม่เป็นเพราะมีเทอมของ xy

เฉลยบัตรปัญหา

1. การที่สามเหลี่ยมทั้งสาม ประก กันเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากจะต้องมีเส้นตรงคู่หนึ่งที่มีความชันคูณกันแล้วเท่ากับ −1 จากข้อ ข.

$x - 7y - 11 = 0$ มีความชัน $= \frac{1}{7}$

$7x - 3y + 1 = 0$ มีความชัน $= \frac{7}{3}$

$7x + y - 7 = 0$ มีความชัน $= -7$

มีด้านคู่หนึ่งที่มีความชันคูณกันแล้วเท่ากับ −1
คือด้านที่เป็นสมการ $x - 7y - 11 = 0$ กับ $7x + y - 7 = 0$

สมการทั้งสามประกอบกันเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก
ส่วนข้อ ก , ค , และ ง ไม่เป็น

2. จุดตัดของ L_1 และ L_2 หมายถึงจุดที่อยู่บน L_1 และ L_2 ซึ่งหาได้จากการแก้สมการ

$$2x - 5y + 3 = 0 \quad \text{———(1)}$$

$$x - 3y - 7 = 0 \quad \text{———(2)}$$

จากการแก้สมการ (1) และ (2) จะได้

$$x = -44 \;,\quad y = -17$$

จุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(-44 , -17)$
เพราะว่าสมการของ L_3 คือ $4x + y - 1 = 0$

หรือ $y = -4x + 1$
แสดงว่าความชันของ $L_3 = -4$
ดังนั้น ความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับ $L_3 = \frac{1}{4}$

สมการของเส้นตรงที่ต้องการ คือ

$$y + 17 = \frac{1}{4}(x + 44)$$

หรือ $x - 4x - 24 = 0$

3. เพราะว่าส่วนสูงของสามเหลี่ยมย่อมแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน ดังนั้น

1. หาจุดกึ่งกลางของฐานได้ จุดนั้นคือจุดที่เส้นตรงที่จะหาผ่าน
2. หาความชันของฐานได้ ก็จะหาความชันของเส้นตรงที่จะหาได้

หาจุดกึ่งกลางของฐาน

$$x = \frac{-3-2}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$y = \frac{5-7}{2} = -1$$

จุดกึ่งกลางมีโคออร์ดิเนตเป็น $(\frac{-5}{2}, -1)$

เพราะว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 5)$ กับ $(-2, -2)$

$$m = \frac{-7-5}{-2+3} = -12$$

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-12} = \frac{1}{12}$$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(\frac{-5}{2}, -1)$ และมีความชัน $\frac{1}{2}$

คือ $y + 1 = \frac{1}{12}(x + \frac{5}{2})$

$$2x - 24y - 19 = 0$$

ศูนย์ที่ 4

บัตรทดสอบ

1. ความสัมพันธ์ใดมีกราฟเป็นเส้นตรง ที่ขนานกับแกน โดยอยู่ห่างจากจุด (−6 , 2) ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 3 หน่วย

ก. $\{(x , y) \in R \times R \ / \ x = -1\}$

ข. $\{(x , y) \in R \times R \ / \ x = -9\}$

ค. $\{(x , y) \in R \times R \ / \ x = 9\}$

ง. $\{(x , y) \in R \times R \ / \ x = -3\}$

2. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (−2 , 1) และมีความชันเป็น 3 คือข้อใด

ก. $y = 3x + 1$ ข. $4y = 12x + 1$

ค. $y = 3x + 7$ ง. $3y = 9x + 7$

3. เส้นตรงที่ตัดแกน x ที่จุด (2 , 0) และแกน y ที่จุด (0 , −5) มีสมการตรงกับข้อใด

ก. $y = 5x - 2$ ข. $y = \frac{5}{2}x - 2$

ค. $y = \frac{2x}{5} - 2$ ง. $y = \frac{5x}{2} - 5$

4. จากสมการ $4y = 8x + 33$ จงหาว่าความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นเท่าใด

ก. 2 ข. 3

ค. 4 ง. 8

5. เส้นตรง $5x - y + 10 = 0$ จะตัดแกน x และแกน y ที่จุดใด

ก. (5 , 0) , (0 , 10) ข. (0 , 5) , (0 , −2)

ค. (−2 , 0) , (0 , 10) ง. (10 , 0) , (0 , 5)

6. สมการข้อใดที่มีความชันเท่ากับความชันของสมการเส้นตรง $4x - y + 5 = 0$

ก. $6x + 3y + 9 = 0$ ข. $5x - 2y - 9 = 0$

ค. $6x - 3y - 9 = 0$ ง. $8x + 2y + 9 = 0$

7. เส้นตรง $3(y - 1) = 2(2 - x)$ ตัดแกน x ที่จุดใด

ก. $(\frac{7}{2}, 0)$ ข. $(-\frac{7}{2}, 0)$

ค. $(6, 0)$ ง. $(-6, 0)$

8. จากสมการต่อไปนี้ กราฟของสมการใดมีความชันเป็นศูนย์

ก. $x - y = 0$ ข. $y = 0$

ค. $2y = 3$ ง. $x = 2y$

9. สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-1, -4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 3)$ และ $(-2, -2)$ คือข้อใด

ก. $x + y + 21 = 0$ ข. $x - y + 21 = 0$

ค. $x - 5y + 21 = 0$ ง. $x + 5y + 21 = 0$

10. เส้นตรงในข้อใดที่ขนานกัน

ก. $2x - 3y = 1$, $4x - 6y = 5$ ข. $x - 2y = 1$, $x + 2y = 1$

ค. $x - 3y = 2$, $2x + 3y = 2$ ง. $x + 3y = 2$, $x - 3y = 2$

11. เส้นตรงใดตั้งฉากกับเส้นตรง $y + 5x + 8 = 0$

ก. $x + 5y - 8 = 0$ ข. $x - 5y - 5 = 0$

ค. $2x - 5y - 4 = 0$ ง. $2x - 3y - 5 = 0$

12. จุด $(3, -2)$ อยู่บนเส้นตรง AB ซึ่งมีความชัน $-\frac{3}{2}$, AB ผ่านจุดใดบ้าง

ก. $(0, 0)$ ข. $(-5, 5)$

ค. $(1, 1)$ ง. $(1, -1)$

13. กราฟของสมการใด ที่อยู่ห่างจากเส้นตรง $2y + x = 4$ เป็นระยะเท่ากันเสมอ

ก. $y = -\frac{1}{2}x + 9$ ข. $y = \frac{1}{2}x - 3$

ค. $y = 2x + 9$ ง. $2y = \frac{1}{2}x - 5$

14. ข้อความใดถูกต้องที่สุด

ก. $\{ (x , y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงดังนั้นกราฟของความสัมพันธ์ $(x , y) \in R \times R / x - x_1 = m (y - y_1) \}$ คือ เส้นตรงซึ่งซึ่งมีความชัน m และผ่านจุด (x_1 , y_1)

ข. ถ้าเส้นตรงใดขนานกับแกน y ความชันของเส้นตรงนี้เท่ากับ 1

ค. สมการ $Ax + By + C = 0$ เป็นสมการเส้นตรง

ง. สมการ $Ax + By + C = 0$ ซึ่งมี A , B , C เป็นตัวคงที่ โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน $A \neq 0$, และ $B \neq 0$ ค่า $\frac{-C}{B}$ คือระยะตัดแกน y

15. สมการของด้านต่อไปนี้ ชุดไหนประกอบกันเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. $x - 7y - 11 = 0$, $7x - 3y + 1 = 0$, $7x + y - 7 = 0$

ข. $x - y - 5 = 0$, $2y - 4 = 0$, $2x + y + 4 = 0$

ค. $x - 3y - 5 = 0$, $7x - 3y + 1 = 0$, $5x - 3y - 8 = 0$

ง. $5x - 3y + 17 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$, $5x - 3y - 8 = 0$

ศูนย์ที่ 4

เฉลยบัตรทดสอบ

1. ข.
2. ค.
3. ง.
4. ก.
5. ค.
6. ข.
7. ก.
8. ค.
9. ง.
10. ก.
11. ก.
12. ค.
13. ก.
14. ง.
15. ก.

ศูนย์สำรอง

บัตรคำสั่ง

1. นักเรียนที่จะเรียนที่ศูนย์สำรองนี้ จะต้องผ่านการเรียนในศูนย์ที่ 1 และศูนย์ที่ 2 แล้ว
2. ศึกษาจากบัตรกิจกรรมก่อนแล้วจึงให้ศึกษาจากบัตรเนื้อหาเพิ่มเติม
3. ทำบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบพร้อมพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

ศูนย์สำรอง

เรื่อง การหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้รู้วิธีหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด

   1.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถสรุปสูตรการหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้

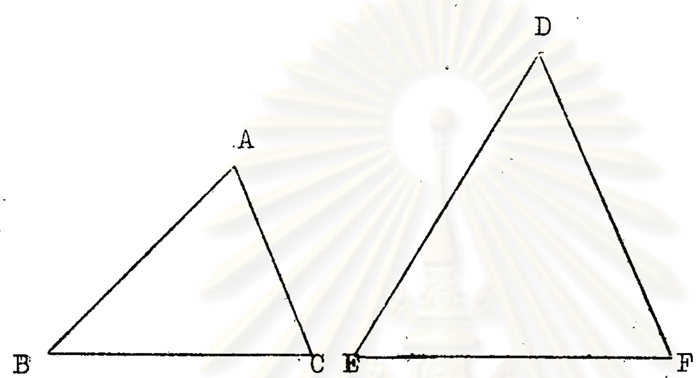
   1.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งภายในระหว่างจุดทั้งสองโดยใช้สูตรได้

ศูนย์สำรอง

บัตรกิจกรรม

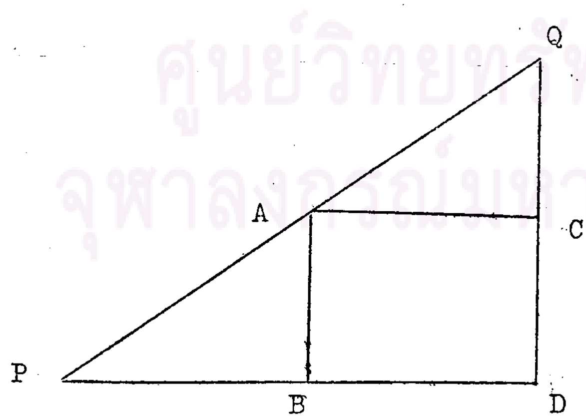
เรื่อง การหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด

1.



ถ้าสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF มีมุม $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{P}$ แล้วจะได้ว่าสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เป็น ______________. และ $\frac{AB}{DE}$ = ____________ = ____________

2.

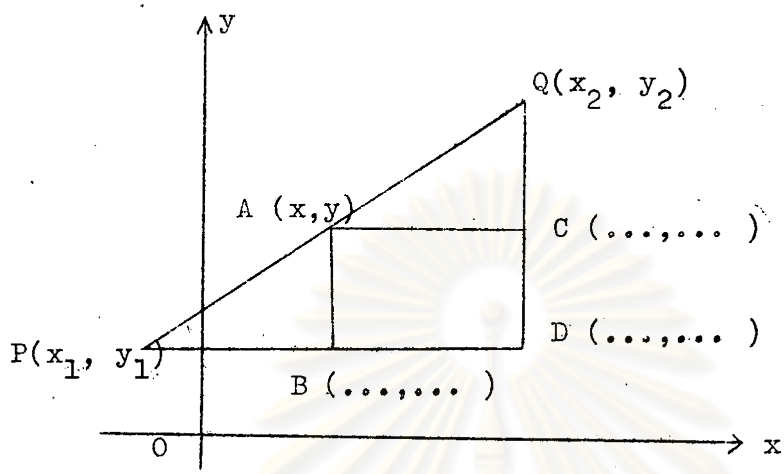


ถ้าสามเหลี่ยม PAB และสามเหลี่ยม ACQ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้

$$\frac{PA}{AQ} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

3.



จากรูป โคออร์ดิเนตของจุด B คือ. .

โคออร์ดิเนตของจุด C คือ. ... ..

โคออร์ดิเนตของจุด D คือ. ....

4. จากรูปในข้อ 3

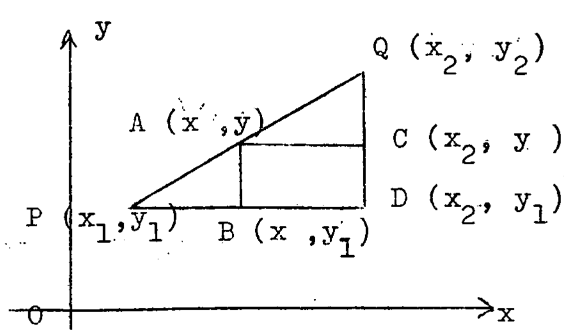
ความยาวของด้าน AP = $|AP|$ = $|x - x_1|$ หรือ $|x_1 - x|$

ความยาวของด้าน AQ = $|AQ|$ = |______| หรือ |______|

ความยาวของด้าน AB = $|AB|$ = $|y - y_1|$ หรือ |______|

ความยาวของด้าน QC = ______ = ______ หรือ ______

5.



สมมุติให้ PQ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่ $P(x_1 , y_1)$ และ $Q(x_2 , y_2)$ ถ้า $A(x , y)$ เป็นจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง PQ โดยแบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วนดังนี้

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{m}{n}$$

จากรูปสามเหลี่ยม APB และ ACQ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|AC|} = \frac{|x - x_1|}{|\_\_\_\_\_\_|} = \frac{m}{n}$$

6. จากข้อ 5. เพราะว่า A เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง P และ Q ดังนั้น

$$x_1 < x < x_2 \quad \text{หรือ} \quad x_2 < x < x_1$$

ถ้า $x_1 < x < x_2$ ดังนั้น $(x - x_1) > 0$ และ.______________.> 0

แสดงว่า $\frac{x - x_1}{x_2 - x}$ __________ 0
($>$, $<$)

ถ้า $x_2 < x < x_1$

แสดงว่า $(- x_1) < 0$ และ ________________. < 0

$\frac{x - x_1}{x_2 - x}$ __________ 0
($<$, $>$)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

7. เนื่องจาก $\frac{PA}{AQ} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{n}$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

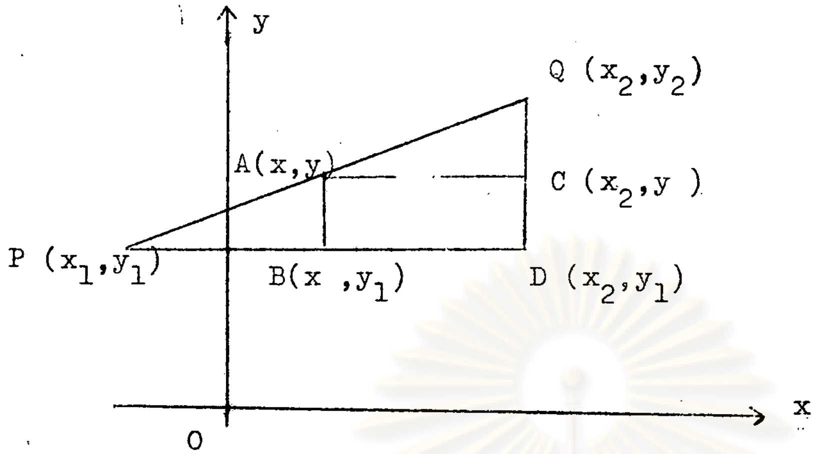
$$n(x - x_1) = m(x_2 - x_1), \quad nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$nx - mx = mx_2 + nx_1$$

$$x(n + m) = mx_2 + mx_1$$

$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

8.



$$\frac{AB}{QC} = \frac{y - y_1}{\text{..........}} = \frac{m}{n}$$

เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง Q และ D

ดังนั้น $y_1 < y < y_2$ หรือ $y_2 < y < y_1$

ถ้า $y_1 < y < y_2$ ดังนั้น $y - y_1 < 0$ และ ....

แสดงว่า $\frac{y - y_1}{y_2 - y}$ 0
(> , <)

ถ้า

$y_2 < y < y_1$ ดังนั้น $y - y_1 <$ และ 0

ดังนั้น $\frac{y - y_1}{y_2 - y}$ 0
(> , <)

$$\left|\frac{y - y_1}{y_2 - y}\right| = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

9. เนื่องจาก $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$

$$n(y - y_1) = m(y_2 - y)$$

$$ny - my_1 = my_2 + ny_1$$

$$ny + my = my_2 + ny_1$$

$$y\ (m + n) = my_2 + ny_1$$

$$y = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

10. ดังนั้น ในการหาจุดแบ่งภายในของเส้นตรงซึ่งแบ่งเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน $m : n$ จะได้ว่าโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งจะเป็น

x = ...

y = ...

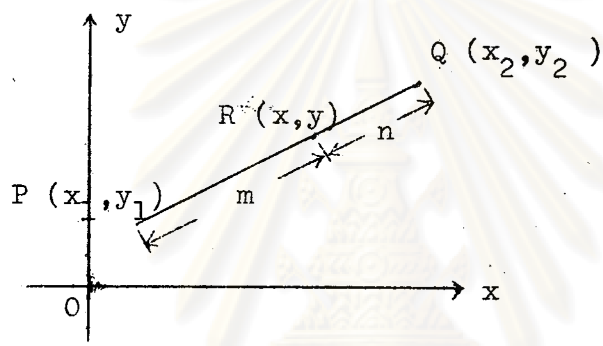
ศูนย์สำรอง

บัตรเนื้อหา

เรื่อง การหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด

<u>การหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด</u>

1. แบ่งแบบภายใน หมายถึง จุดแบ่งอยู่ระหว่าง 2 จุดที่กำหนดให้



ให้ P (x_1 , y_1) และ Q (x_2 , y_2) เป็นจุด 2 จุด

R (x , y) เป็นจุดแบ่งแบบภายในระหว่างจุด P และจุด Q และแบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วน

$$PR : RQ = m : n$$

ดังนั้น จุดแบ่ง R (x , y) มีโคออร์ดิเนต

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งระหว่างจุด (5 , 3) และ (−1 , 2) ซึ่งแบ่งระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เป็นอัตราส่วน 2 : 3

<u>วิธีทำ</u> เป็นการแบ่งภายใน ซึ่งได้อัตราส่วน $m = n = 2 : 3$

จาก $x \quad \dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

$$x = \frac{2(1) + 3(5)}{2 + 3}$$

$$= \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

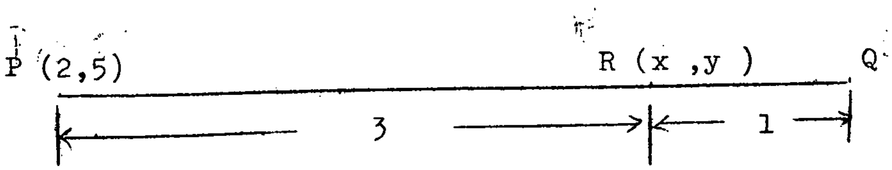
$$y = \frac{2(2) + (3)(3)}{2 + 3}$$

$$= \frac{13}{5}$$

จุดแบ่ง คือ $\left(\dfrac{13}{5} , \dfrac{13}{5}\right)$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ P (2 , 5) Q (−3 , 4) เป็นส่วนของเส้นตรง จงหาโคออร์ดิเนตของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งห่างจาก P อยู่ $\frac{3}{4}$ ของระยะระหว่าง P และ Q

<u>วิธีทำ</u>



ให้ R (x , y) เป็นจุดดังกล่าว

R ห่างจาก P = $\frac{3}{4}$ ของระยะ PQ

นั่น คือ PQ ถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน

R อยู่ห่างจาก P 3 ส่วน

R อยู่ห่างจาก Q 1 ส่วน

และ PR = RQ = 3 : 1

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} = \frac{3(-3) + 1(2)}{3 + 1} = \frac{-7}{4}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} = \frac{3(4) + 1(5)}{3 + 1} = \frac{17}{4}$$

จุดนั้น คือ $(\frac{-7}{4} , \frac{17}{4})$

ศูนย์สำรอง

บัตรงาน

1. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งระหว่างจุด (5 , 3) และ (2 , 6) ซึ่งแบ่งระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เป็นอัตราส่วน 2 : 3

2. กำหนดจุด (−2 , 8) , (5 , 6) และให้ A (x , y) เป็นจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรง PQ โดยมีอัตราส่วนของการแบ่ง ดังนี้

$\frac{PA}{AQ} = \frac{3}{4}$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุด A

บัตรปัญหา

1. แบ่งส่วนของเส้นตรง A (6 , 14) B (2 , −2) ออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน จงหาจุดแบ่งแต่ละจุด

2. กำหนดจุด A (6 , 8) และ B (16 , −12) ถ้า C (x , y) เป็นจุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง AB โดยแบ่งออกเป็นอัตราส่วน $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{10}$ จงหาโคออร์ดิเนตของจุด C

ศูนย์สำรอง

เฉลยบัตรกิจกรรม

1. สามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

2. $\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{AC} = \frac{AC}{QC}$

3. B (x , y_1)

C (x_2 , y)

D (x_2 , y_1)

4. $|x_2 - x|$ หรือ $|x - x_2|$

$|y_1 - y|$

$|y_2 - y|$ หรือ $|y - y_2|$

5. $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$

6. $x_2 - x > 0$

$x_2 - x , >$

7. $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

8.

$\frac{y - y_1}{y_2 - y}$

$y_2 - y > 0 \; , \; >$

$y_2 - y < 0 \; , \; >$

9. $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$

10. $x = \dfrac{mx_2 + ny_1}{m + n}$

$y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$

บัตรเฉลย บัตรงาน

1. เพราะว่าต้องการแบ่งระยะทางออกเป็นอัตราส่วน 2 : 3

หรือ $m : n = 2 : 3$

ดังนั้น จาก
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$
$$= \frac{2\times 2 + 3\times 5}{2 + 3} = \frac{19}{5}$$
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$
$$= \frac{2\times 3 + 3\times 6}{3 + 2} = \frac{24}{5}$$

จุดแบ่งมีโคออร์ดิเนต $(\frac{19}{5} , \frac{24}{5})$

2. วิธีทำ จุด P มีโคออร์ดิเนต (−2 , 8)

จุด Q มีโคออร์ดิเนต (5 , −6)

เป็นจุดอยู่ระหว่าง P และ Q ซึ่งแบ่งเส้นตรง PQ โดยมีอัตราส่วน

$$\frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{3}{4}$$
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{n + n}$$
$$x = \frac{2(5) + 4(-2)}{3 + 4} = \frac{15 - 8}{7} = \frac{7}{7} = 1$$
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$
$$= \frac{3(-6) + 4(8)}{3 + 4} = \frac{-18 + 32}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

จุด A จะมีโคออร์ดิเนต (1 , 2)

เฉลยบัตรปัญหา

1. เพราะว่าต้องการแบ่งส่วนของเส้นตรง A (6 , 14) , B (2 , −2) ออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน

A (6 ,14) D (x_2, y_2) C (x_1, y_1) E (x_3, y_3) B (2 ,−2)

เพราะว่าจุดแบ่งจะมี 3 จุด

ให้ C (x_1 , y_1) เป็นจุดแบ่งที่ 1

จุด D (y_2 , y_2) เป็นจุดแบ่งที่ 2

จุด E (x_3 , y_3) เป็นจุดแบ่งที่ 3

หาโคออร์ดิเนตจุด C (x_1 , y_1)

$$x_1 = \frac{1.(2) + 1(6)}{1 + 1} = \frac{8}{2} = 4$$

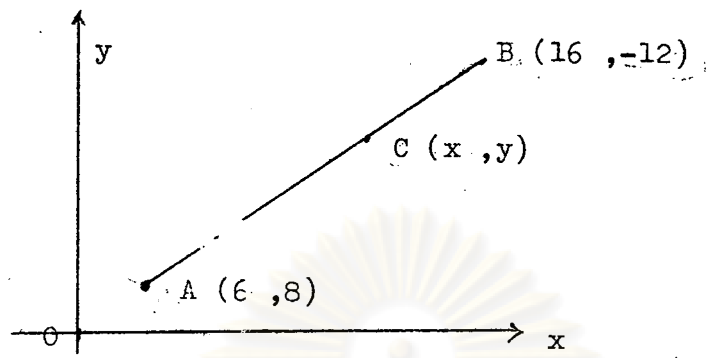
$$y_1 = \frac{1.(-2) + 1(14)}{1 + 1} = \frac{12}{2} = 6$$

จุด C มีโคออร์ดิเนต (4 , 6)

จุด D (x_2,y_2) เป็นจุดแบ่งครึ่งระหว่าง A (6 , 14) และ C (4 , 6)

D จะมีโคออร์ดิเนต (5 , 10)

จุด E จะมีโคออร์ดิเนต (3 , 2)



จากรูป C เป็นจุดแบ่งบนเส้นตรง AB ซึ่งทำให้ $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3}{10}$

แต่จากสูตร
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

อัตราส่วน $\frac{m}{n}$ ต้องเป็นอัตราส่วนของด้าน $\frac{|AC|}{|CB|}$

∴ ในการทำโจทย์ข้อนี้ เราต้องแปลงอัตราส่วนที่กำหนดให้เสียใหม่

ดังนี้ $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{7} = \frac{m}{n}$

แทนค่าในสูตร

$$x = \frac{3(16) + 7(6)}{3 + 7} = \frac{48 + 42}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

$$y = \frac{3(-12) + 7(8)}{3 + 7} = \frac{-36 + 56}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

จุด C มีโคออร์ดิเนต (9 , 2)

แบบทดสอบ

1. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งระหว่าง (3 , 5) และ (1 , 7) ซึ่งแบ่งระยะทางระหว่างจุดทั้ง 2 จุดออกสองส่วนเท่า ๆ กัน

ก. (2 , 6) ข. (6 , 2)

ค. (1 , −1) ง. (2 , 1)

2. จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งระหว่างจุด (5 , 3) และ (−1 , 2) ซึ่งแบ่งระยะทางระหว่างจุด 2 จุด เป็นอัตราส่วน 2 : 3

ก. $\left(\frac{5}{13}, \frac{13}{5}\right)$ ข. $\left(\frac{13}{5}, \frac{5}{13}\right)$

ข. $\left(\frac{3}{15}, \frac{15}{3}\right)$ ง. $\left(\frac{15}{3}, \frac{3}{15}\right)$

3. จงหาจุดที่อยู่ห่างจากจุด (3 , 5) เป็น 2 เท่าของระยะทางจากจุด (2 , 4) และจุดนี้อยู่ระหว่างบนเส้นเชื่อมทั้งสองจุด

ก. $\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}\right)$ ข. $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

ค. $\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$ ง. $\left(\frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$

4. ให้ P (2 , 5) , Q (−3 , 4) เป็นส่วนของเส้นตรง จงหาโคออร์ดิเนตของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งอยู่ห่างจาก P อยู่ของระยะระหว่าง P และ Q

ก. $\left(\frac{7}{4}, \frac{17}{4}\right)$ ข. $\left(\frac{-7}{4}, \frac{17}{4}\right)$

ค. $\left(\frac{-17}{4}, \frac{-7}{4}\right)$ ง. $\left(\frac{17}{4}, \frac{7}{4}\right)$

5. ถ้า A $(1, 3)$ เป็นจุดแบ่งภายในระหว่างจุด B (x, y) และ C $(5, 2)$ ออกเป็นอัตราส่วน $2 : 3$ จงหา (x, y)

ก. $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ ข. $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$

ค. $\left(-\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$ ง. $\left(\frac{5}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

ศูนย์สำรอง

บัตรเฉลยแบบทดสอบ

1. ก
2. ข
3. ค
4. ข
5. ค.

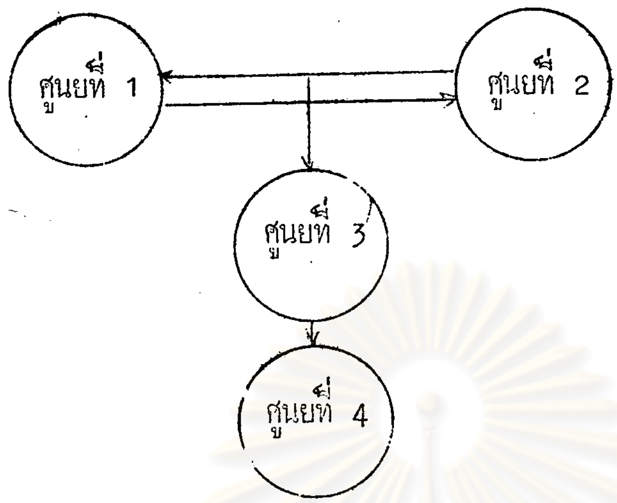
ภาคผนวก ค.

คู่มือครู

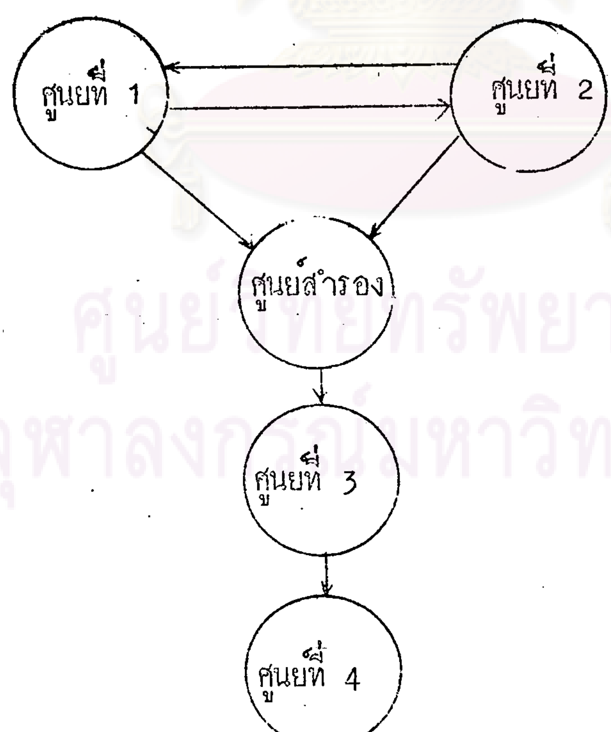
คำชี้แจงทั่วไป

1. ครูต้องจัดชั้นเรียนตามข้อเสนอแนะ
2. ครูต้องศึกษาเนื้อหาที่จะต้องสอดโดยละเอียดและศึกษาชุดการสอนอย่างรอบคอบ
3. ก่อนสอนครูต้องเตรียมชุดกา สอนไว้บนโต๊ะประจำกลุ่มให้เรียบร้อย โดยให้นักเรียนแต่ละคนได้รับ 1 ชุด
4. ก่อนสอนครูต้องให้นักเรียนทำข้อสอบก่อนเรียน (Pretest) โดยให้ใช้ข้อสอบที่จัดเตรียมไว้ให้
5. สอนความรู้พื้นฐาน เรื่อง "ระบบแกนมุมฉากใช้เวลาประมาณ 1 ชั่วโมง"
6. ก่อนสอนถ้าเป็นการเรียนโกยการจัดชั้นเรียนแบบศูนย์การเรียนเป็นครั้งแรก ให้ครูชี้แจงให้นักเรียนรู้เกี่ยวกับบทบาทของนักเรียนในการเรียนวิธีนี้
7. การสอนแบ่งเป็น 3 ลำดับขั้น
   - ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน
   - ขั้นเข้าสู่กิจกรรม
   - ขั้นสรุปบทเรียนและการประเมินผล
8. ในขณะที่นักเรียนประกอบกลุ่มกิจกรรมครูไม่ควรพูดดังจนเกินควร ควรพูดด้วยเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่ม
9. เมื่อนักเรียนประกอบกิจกรรมครูต้องเดินดูการทำงานของนักเรียนแต่ละกลุ่มอย่างใกล้ชิด หากนักเรียนคนใดมีปัญหาครูควรเข้าไปให้ความช่วยเหลือ
10. การเปลี่ยนกลุ่มจะกระทำได้เมื่อนักเรียนทุกกลุ่ม ประกอบกิจกรรมในศูนย์นั้นเรียบร้อยแล้ว

หรือถ้าหากว่ามีกลุ่มที่ทำเสร็จ 2 กลุ่ม ก็สามารถจะเปลี่ยนกันได้เลย โดยการเปลี่ยนศูนย์ต้องเปลี่ยนตามลำดับขั้นดังนี้



ในการทดลอง ถ้าหากว่ากลุ่มใดทำกิจกรรมเสร็จก่อนในขณะที่กลุ่มอื่นยังทำไม่เสร็จก็ให้ไปศึกษายังศูนย์สำรอง โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องผ่านการเรียนในศูนย์ที่ 1 หรือศูนย์ที่ 2 ศูนย์ใดศูนย์หนึ่งมาแล้ว ดังภาพ



11. ก่อนบอกให้เปลี่ยนกลุ่ม ครูต้องเน้นให้นักเรียนเก็บชุดการสอนที่ตนศึกษาไว้ในสภาพที่เรียบร้อย ห้ามถือติดมือไปด้วย ให้เปลี่ยนกลุ่มอย่างเรียบร้อยและมีระเบียบ
12. การสรุปบทเรียนนั้นให้นักเรียนแต่ละคนสรุปด้วยตนเอง ครูจะสรุปให้ฟังอีกครั้งหนึ่ง หลังจากนักเรียนศึกษาและสรุปเองแล้ว
13. หลังจากการสอนเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนทำข้อสอบหลังการเรียน (Post - test) ซึ่งเป็นข้อสอบชุดเดียวกับข้อสอบก่อนการเรียน
14. ในกรณีที่นักเรียนคนใดขาด ให้นักเรียนเรียนเป็นรายบุคคลจากชุดการสอนที่เตรียมไว้ โดยครูแยกชุดการสอนจากศูนย์การเรียนมา 1 ชุด สำหรับนักเรียนคนนั้น

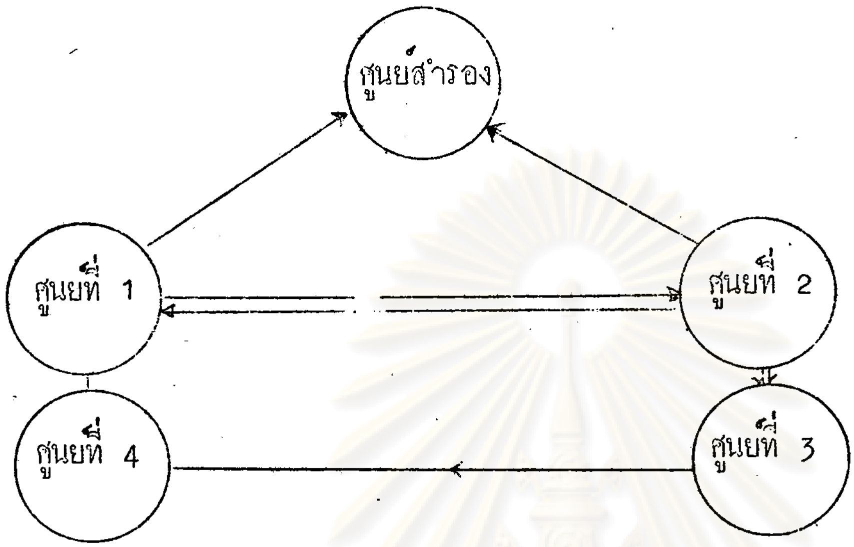
<u>บทบาทของนักเรียน</u>

สิ่งที่ครูควรชี้แจงให้นักเรียนทราบได้แก่

1. อ่านบัตรคำสั่งและทำกิจกรรมให้ครบตามที่ระบุไว้ในบัตรคำสั่ง
2. พยายามทำบัตรกิจกรรม , บัตรงาน และบัตรปัญหาในแต่ละศูนย์อย่างเต็มความสามารถ และไม่ควรเปิดดูบัตรเฉลยก่อนที่จะทำหรือขณะทำ ควรจะเปิดดูเมื่อมีปัญหาหรือทำไม่ได้เท่านั้น
3. เวลาเปลี่ยนกลุ่ม จะต้องเก็บอุปกรณ์เข้าที่ให้เรียบร้อยพร้อมที่กลุ่มอื่นจะมาใช้ได้ทันที
4. เมื่อลุกจากศูนย์กิจกรรมไปยังศูนย์ใหม่จะต้องจัดเก้าอี้ให้เรียบร้อย และเปลี่ยนไปอย่างมีระเบียบ
5. เนื่องจากแต่ละกลุ่มกิจกรรมมีเวลาจำกัด นักเรียนจะต้องตั้งใจประกอบกิจกรรมและปฏิบัติตามคำสั่งอย่างเคร่งครัด

<u>การจัดชั้นเรียน</u>

จัดโต๊ะเรียนเป็น 4 กลุ่ม ซึ่งมีศูนย์กิจกรรม 4 ศูนย์ และมีศูนย์สำรองอีก 1 ศูนย์



<u>ประเมินผล</u>

ประเมินผลจากการทำแบบสอบก่อนและหลังเรียนและจากการทำแบบทดสอบประจำศูนย์

บันทึกการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "เส้นตรง"

คาบที่ 1

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐาน ในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

1.1 อธิบายความหมา . ซงวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ได้อย่างถูกต้อง

2. เพื่อให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง "แกนพิกัดฉาก"

2.1 บอกส่วนประกอบของแกนพิกัดฉากได้อย่างถูกต้อง

2.2 ใส่หน่วยความยาวบนแกน x และแกน y ได้อย่างถูกต้อง

2.3 เรียกชื่อแต่ละส่วนได้อย่ .งถูกต้อง

2.4 บอกความหมายของแอบซิสสาและออร์ดิเนตได้อย่างถูกต้อง

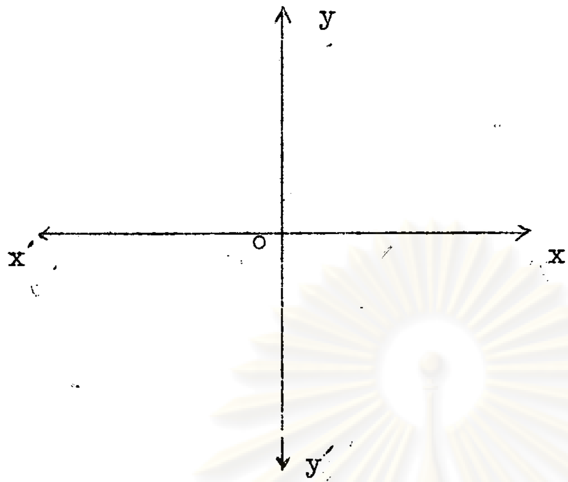
2.5 แทนจุดบนระนาบได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดค่าโคออร์ดิเนตให้

2. รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

วิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เป็นการศึกษาทางเรขาคณิต โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต ซึ่งคุณค่าของวิชานี้ไม่ได้อยู่กับเนื้อหาใหม่ หากขึ้นอยู่กับวิธีการใหม่ จะเห็นว่าวิธีการแก้ปัญหาและการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นจะใช้วิธีการพิเศษแต่ละกรณี ไม่มีวิธีการใด ที่ใช้ได้ในกรณีทั่วไป ส่วนในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เน้นวิธีการทั่วไป ซึ่งทำให้การศึกษาวิชาเรขาคณิตง่ายขึ้นสามารถแก้ปัญหา ซึ่งแก้ได้ยากหรือไม่สามารถแก้โดยวิธีการเดิม เนื้อหาในวิชาเรขาคณิต จะกล่าวถึงจุด , เส้นตรงหรือเส้นโค้งต่าง ๆ

ระบบแกนมุมฉาก (Rectangular Coordinate System)

จุดทุกจุดบนเส้นจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจำนวน เราสร้างเส้นจำนวนโดยการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจำนวนจริงกับจุดบนเส้นตรง แต่ในบทนี้จะกล่าวถึงการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่ลำดับของจำนวนจริงกับจุดในระนาบ ทำให้เราสามารถแทนจุดต่าง ๆ ในระนาบด้วยคู่ลำดับของจำนวนจริงได้ โดยเลือกเส้นตรงในแนวตั้งและแนวนอนคู่หนึ่งดังนี้



ให้ xx′ และ yy′ เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดตั้งฉากกันที่จุด o แล้ว

1. xx′ เรียกว่าแกน x หรือแกน abcissa หรือแกนนอน
2. yy′ เรียกว่าแกน y หรือแกน ordinate หรือแกนตั้ง
3. ทั้งแกน x และแกน y รวมกันเรียกว่าแกนโคออร์ดิเนต (Coordinate axes)
4. o เรียกว่า จุดกำเนิดหรือจุดเริ่มต้น
5. การติดเครื่องหมายบนแกน x และแกน y ให้ติดดังนี้
   - 5.1 ถ้าวัดระยะจากจุด o ไปตามแนว ox หรือทางขวามือของ o จะมีเครื่องหมายเป็นบวก
   - 5.2 ถ้าวัดระยะจากจุด o ไปตามแนว ox′ หรือทางซ้ายมือของ o จะมีเครื่องหมายเป็นลบ
   - 5.3 ถ้าวัดระยะจากจุด o ไปตามแนว oy หรือเหนือแกน x จะมีเครื่องหมายเป็นบวก
   - 5.4 ถ้าวัดระยะจากจุด o ไปตามแนว oy′ หรือใต้แกน x จะมีเครื่องหมายเป็นลบ

<u>การแทนจุดบนระนาบด้วยจำนวน</u>

ถ้าให้จุด P แทนได้ด้วยคู่ลำดับของจำนวนจริง (x , y) จะกล่าวว่า จุด P มีโคออร์ดิเนตเป็น (x , y) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P (x , y) โดยที่ x คือค่าตามแนวแกน x y คือค่าตามแนวแกน y เช่น

คู่ลำดับ (2,4) จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวามือ 2 หน่วยและอยู่เหนือแกน x 4 หน่วย และจุดนั้นจะมีโคออร์ดิเนต (2 , 4)

คู่ลำดับ (-3 , 2) จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย 3 หน่วยและอยู่เหนือแกน x 2 หน่วยและจุดนั้นจะมีโคออร์ดิเนต (-3 , 2)

คู่ลำดับ (-5 , -1) จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย 5 หน่วยและอยู่ใต้แกน x 1 หน่วย และจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (-5 , -1)

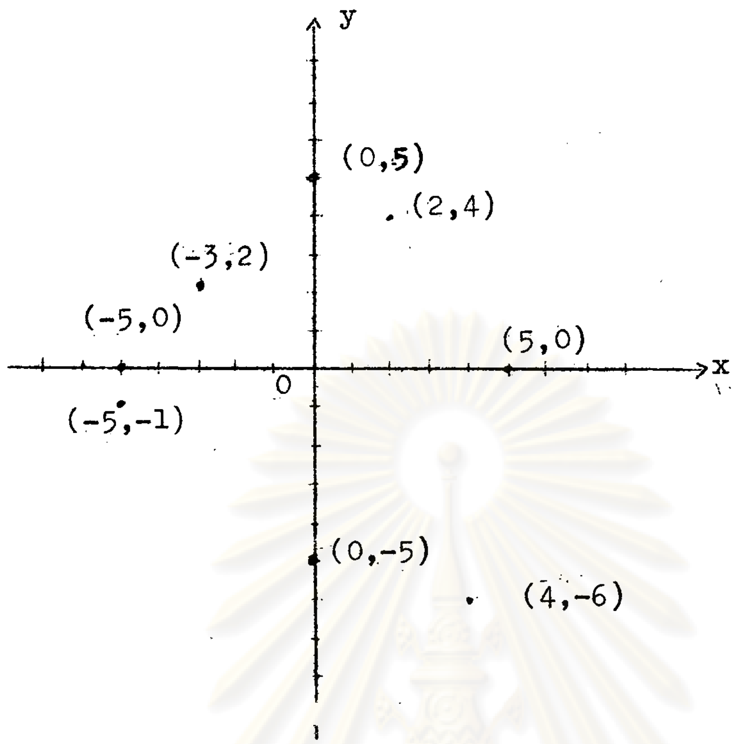
คู่ลำดับ (4 , -6) จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา 6 หน่วยและอยู่ใต้แกน x 6 หน่วย และจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (4 , -6)

คู่ลำดับ (5 , 0) จับคู่กับจุดบนแกน x ซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางขวา 5 หน่วยและจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (5 , 0)

คู่ลำดับ (-5 , 0) จับคู่กับจุดบนแกน x ซึ่งอยู่ห่างจากแกน y ไปทางซ้าย 5 หน่วยและจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (-5 , 0)

คู่ลำดับ (0 , 5) จับคู่กับจุดบนแกน y ซึ่งอยู่เหนือแกน x 5 หน่วยและจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (0 , 5)

คู่ลำดับ (0 ,-5) จับคู่กับจุดบนแกน y ซึ่งอยู่ใต้แกน x 5 หน่วยและจุดนั้นมีโคออร์ดิเนต (0 , -5)



ส่วนต่าง ๆ บนระนาบ

แกน x และแกน y จะแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า ควอดดรันต์ (Quadrant)

เรียกส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน y และเหนือแกน x ว่าควอดดรันต์ที่ 1

เรียกส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน y และเหนือแกน x ว่าควอดดรันต์ที่ 2

เรียกส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน y และอยู่ใต้แกน x ว่าควอดดรันต์ที่ 3

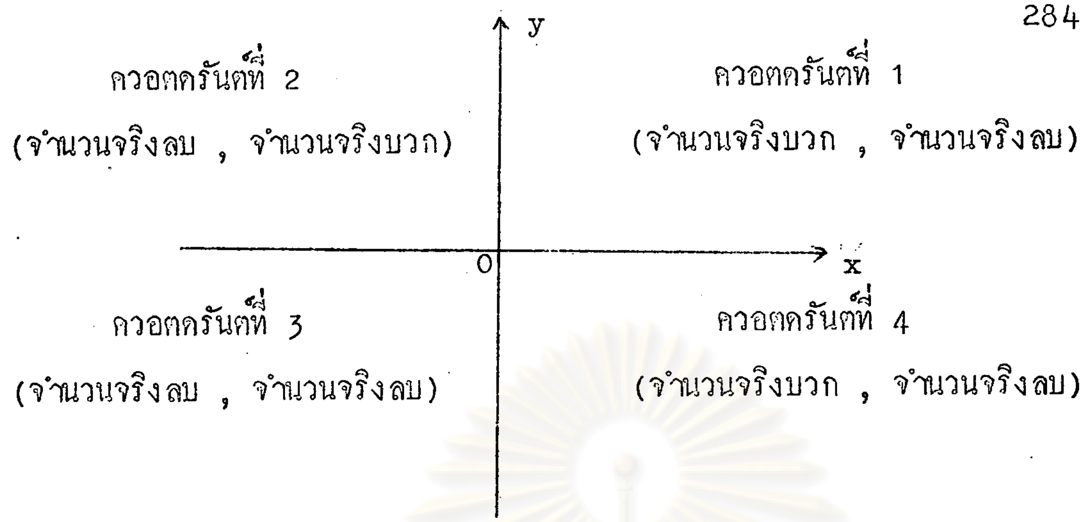
เรียกส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน y และอยู่ใต้แกน x ว่าควอดดรันต์ที่ 4

จุดในควอดดรันต์ที่ 1 จับคู่ 1 – 1 กับคู่ลำดับ ของจำนวนจริงบวก

จุดในควอดดรันต์ที่ 2 จับคู่ 1 – 1 กับคู่ลำดับ ซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นลบและจำนวนจริงตัวหลังเป็นบวก

จุดในควอดดรันต์ที่ 3 จับคู่ 1 – 1 คู่ลำดับของจำนวนจริงลบ

จุดในควอดดรันต์ที่ 4 จับคู่ 1 – 1 กับคู่ลำดับซึ่งมีจำนวนจริงตัวแรกเป็นบวกและจำนวนจริงตัวหลังเป็นลบ



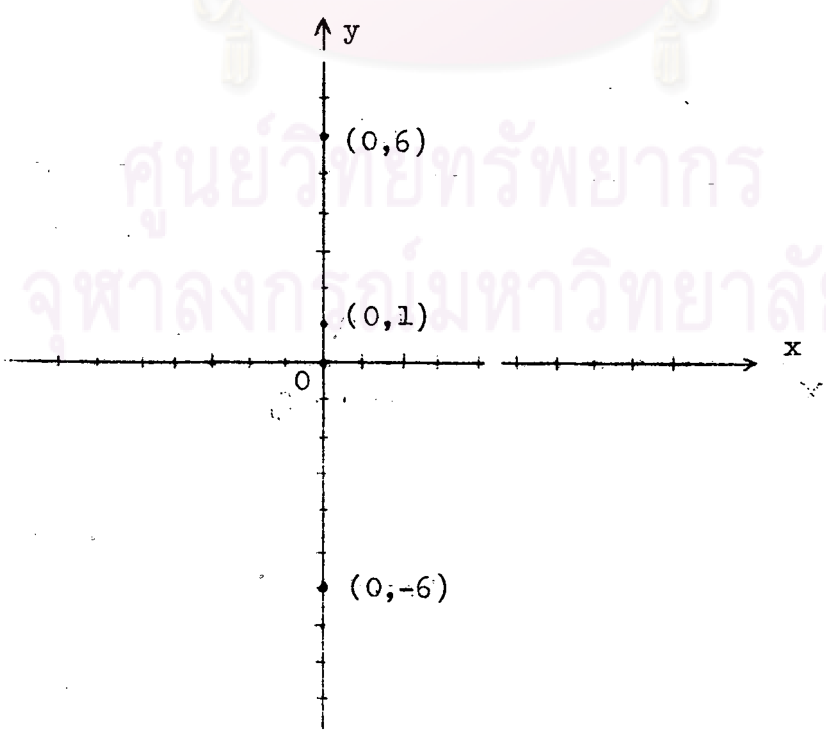
<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนจุดซึ่งมีโคออร์ดิเนตดังต่อไปนี้ในระนาบ

ก. (0 , −6) , (0 , 0) , (0 , 1) , (0 , 6)

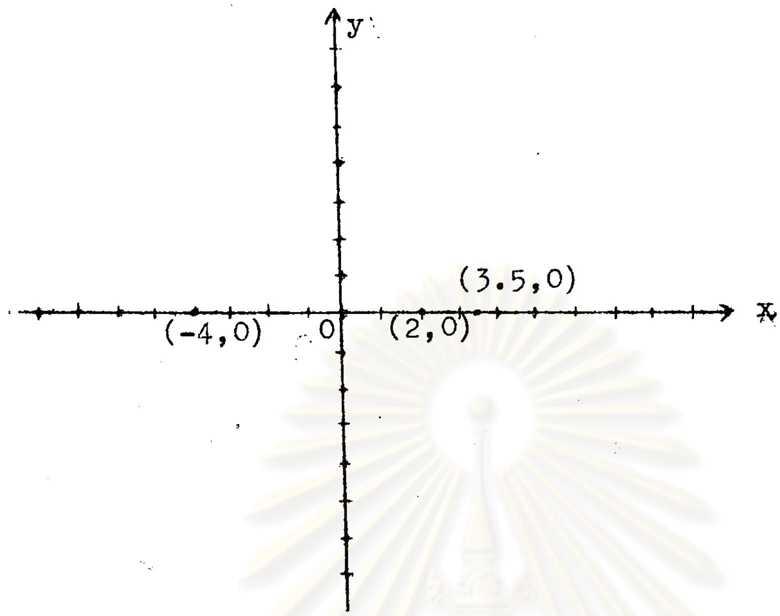
ข. (−4 , 0) , (2 , 0) , (3.5 , 0)

ค. (4 , −2) , (4 , 1) , (4 , 5)

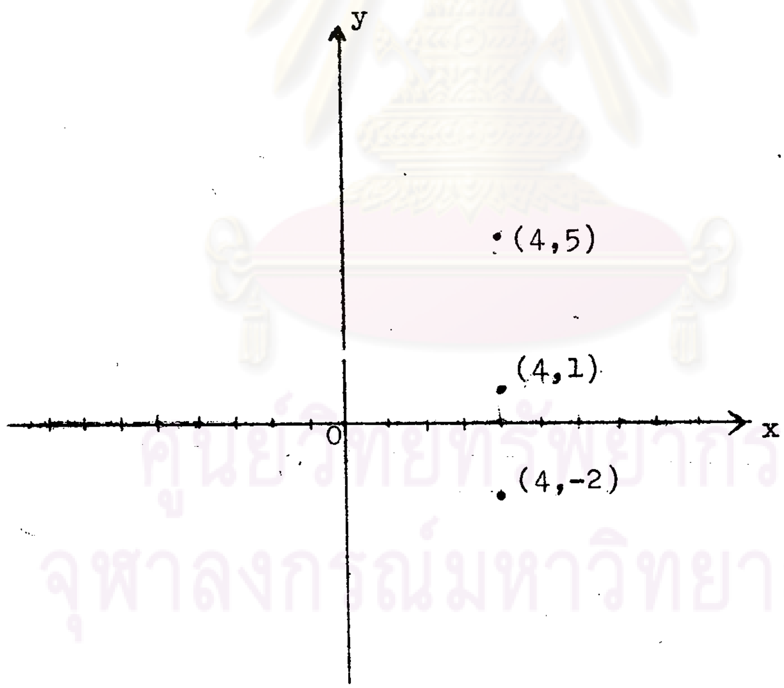
ง. (−1 , −3) , (−3 , −1) , (1 , 1) , (3 , 3)



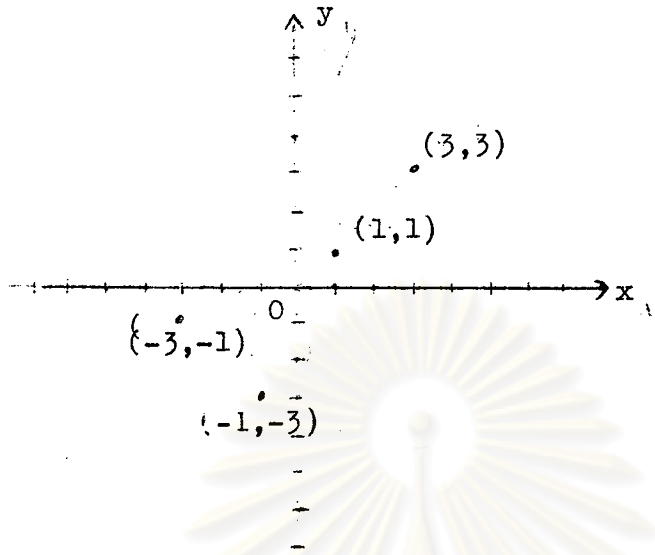
ข.



ค.



ง.



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนเซ็ตของจุดเหล่านี้ลงในระนาบ

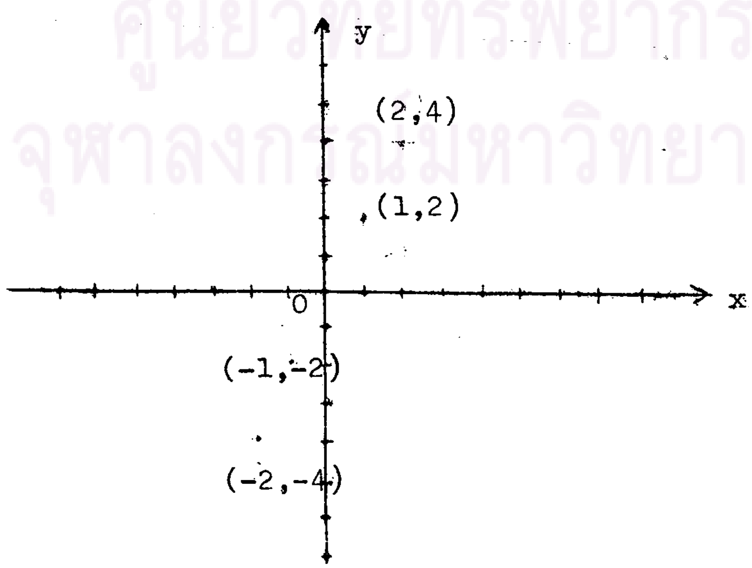
$$\{ (x , y) / x \in A, y \in A \quad \text{และ} \quad y = 2x \}$$

โดย $A = \{ -4 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 4 \}$

<u>วิธีทำ</u> $\{ (x , y) / x \in A, y \in A \quad \text{และ} \quad y = 2x \}$

เซ็ตของจุด คือ

$$\{ (-2 , -4) , (-1 , -2) , (0 , 0) , (1 , 2) , (2 , 4) \}$$



<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้อยู่ในควอดรันต์ที่เท่าไรของระนาบ

$$\{(-1\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ -3)\ ,\ (-3\ ,\ -2)\ ,\ (2\ ,\ 0)\ ,\ (0\ ,\ 8)\ ,\ (-3\ ,\ 0)\}$$

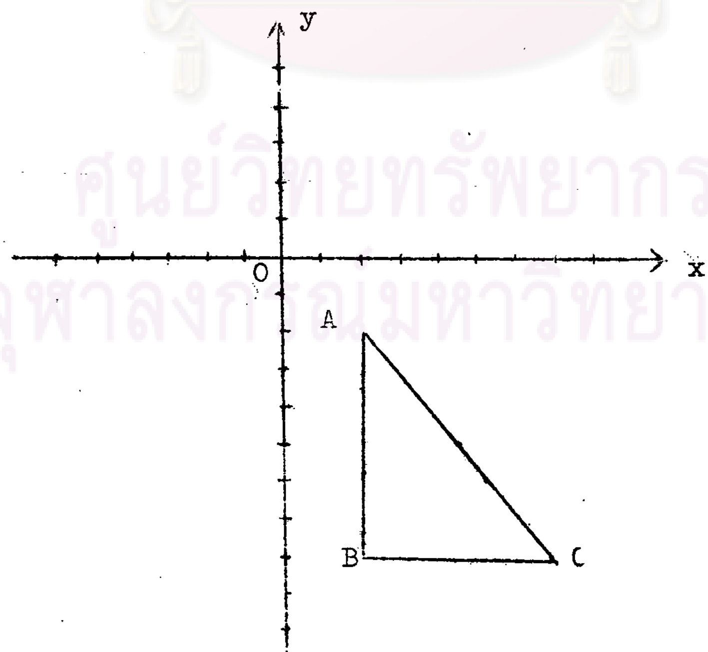
2. กำหนดให้ $A = \{-3\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$ จงเขียนเซ็ทของจุดต่อไปนี้บนระนาบ

   1. $\{(x\ ,\ y)\ /\ y = x\ ,\ x \in A\}$

   2. $\{(x\ ,\ y)\ /\ y = 2x - 1\ ,\ x \in A\}$

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. กำหนดให้ $(6\ ,\ 1)$, $(-4\ ,\ 1)$ และ $(6\ ,\ 7)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จงหาจุดยอดที่สี่
2. จงหาโค - ออร์ดิเนตของจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC



ขั้นสอนและกิจกรรม

1. ครูอธิบายและเล่าให้นักเรียนฟัง เกี่ยวกับประวัติความเป็นมาของวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ ตลอดถึงข้อแตกต่างระหว่างวิชาเรขาคณิตกับวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อไป

2. อธิบายเรื่อง "ระบบแกนมุมฉาก" เรียงลำดับตามที่กล่าวในหัวข้อของเนื้อหา

3. ครูอธิบายและแสดงวิธีทำตัวอย่างที่ 1 บนกระดานดำ

4. ครูอธิบายวิธีทำตัวอย่างที่ 2

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปโดยอภิปรายถึงเรื่องต่อไปนี้

ก. ระบบแกนมุมฉาก ประกอบไปด้วยแกน x และแกน y ที่ตั้งฉากกัน จุดตัดของแกน x และแกน y เรียกว่าจุดกำเนิด

ข. การแทนจุดบนระนาบ กำหนดได้ด้วยคู่ลำดับ (x , y)หรือโคออร์ดิเนต (x , y) โดยที่ x คือค่าตามแนวแกน x และ y คือค่าตามแนวแกน y

ดังนั้นในการเขียนจุดพร้อมโคออร์ดิเนต ซึ่งเป็นคู่ลำดับนั้นค่าตามแนวแกน x ต้องเป็นสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับ ค่าตามแนวแกน y ต้องเป็นสมาชิกตัวที่สองของคู่ลำดับ

ค. ในควอดรันต์ที่ 1 ค่าของ x จะแทนด้วยจำนวนจริงบวกและค่าของ y จะแทนด้วยจำนวนจริงบวก

ในควอดรันต์ที่ 2 ค่าของ x จะแทนด้วยจำนวนจริงลบ และค่าของ y จะแทนด้วยจำนวนจริงบวก

ในควอดรันต์ที่ 3 ค่าของ x จะแทนด้วยจำนวนจริงลบและค่าของ y จะแทนด้วยจำนวนจริงลบ

ในควอดรันต์ที่ 4 ค่าของ x จะแทนด้วยจำนวนจริงบวกและค่าของ y แทนด้วยจำนวนจริงลบ

ง. ทุกจุดที่อยู่บนแกน x จะมีค่าของ y เท่ากับศูนย์และทุกจุดที่อยู่บนแกน y จะมีค่าของ x เป็นศูนย์

<u>การวัดและประเมินผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม
4. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
5. ให้ทำโจทย์การบ้าน

<u>คาบที่ 2</u>

เส้นตรงและโปรเจคชัน

1. <u>จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม</u>

   1. บอกความหมายของ "เส้นตรง" และส่วนของเส้นตรงได้ถูกต้อง
   2. ให้มีความรู้ในเรื่องโปรเจคชัน (Projection)

      2.1 หาโปรเจคชันของจุด P บนแกน x และโปรเจคชันของจุด P บนแกน y ได้

      2.2 หาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ได้

      2.3 หาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ได้

      2.4 หาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และไม่ขนานกับแกน y ได้

      2.5 เมื่อกำหนดโปรเจคชันของเส้นตรงสองเส้นให้สามารถหาความสัมพันธ์ของเส้นตรงทั้งสองนั้นได้

      2.6 สามารถหาความยาวของโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

2. <u>รายละเอียดเนื้อหาวิชา</u>

   <u>เส้นตรงและส่วนของเส้นตรง</u>

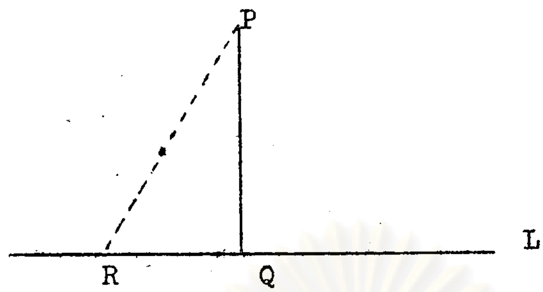
   เส้นตรง หมายถึง เส้นตรง ที่ไม่มีขอบเขตหรือไม่มีจุดสิ้นสุด

   ส่วนของเส้นตรง หมายถึงส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองข้างแน่ชัด

L เส้นตรง L

A B เส้นตรงของเส้นตรง AB

<u>โปรเจคชัน</u> ให้ P เป็นจุดจุดหนึ่งในระนาบ ซึ่งอาจอยู่บนเส้นตรง L หรือนอกเส้นตรง L ก็ได้ ถ้าลากเส้นตรง L_1 จาก P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L เรียกจุดตัดของเส้นตรง L_1 กับ L ว่าโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L



จากรูป จุด Q คือโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L

จุด R ไม่ใช่โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L

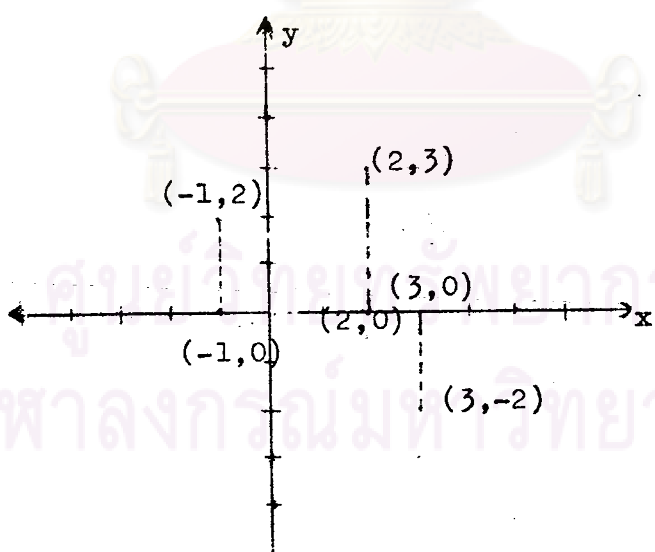
โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือจุด Q เขียนสั้น ๆ ได้ คือ

$$\mathrm{Proj}_L\, P = Q$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาโปรเจคชันของจุดต่อไปนี้บนแกน x

(2 , 3) , (−1 , 2) , (3 , −2)

<u>วิธีทำ</u>



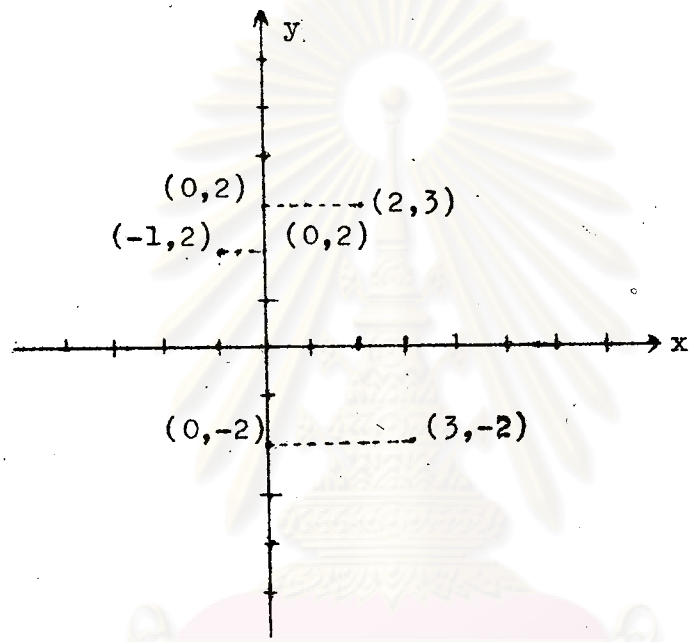
โปรเจคชันของจุด (2 , 3) บนแกน x คือจุด (2 , 0)

โปรเจคชันของจุด (−1 , 2) บนแกน x คือจุด (−1 , 0)

โปรเจคชันของจุด (3 , −2) บนแกน x คือจุด (3 , 0)

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 จงหาโปรเจคชันของจุดต่อไปนี้บนแกน y (2 , 3) , (−1 , 2) , (3 , −2)

<u>วิธีทำ</u>

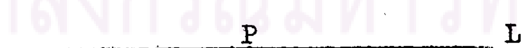


โปรเจคชันของจุด (2 , 3) บนแกน y คือจุด (0 , 3)

โปรเจคชันของจุด (−1 , 2) บนแกน y คือจุด (0 , 2)

โปรเจคชันของจุด (3 , −2) บนแกน y คือจุด (0 , −2)

ถ้า P อยู่บนเส้นตรง L



P อยู่บนเส้นตรง L โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือจุด P

<u>ตัวอย่างที่</u> 3 จงหาโปรเจคชันของจุด (5 , 0) , (−2 , 0) (0 , −3) และ (0 , 5) บนแกน x

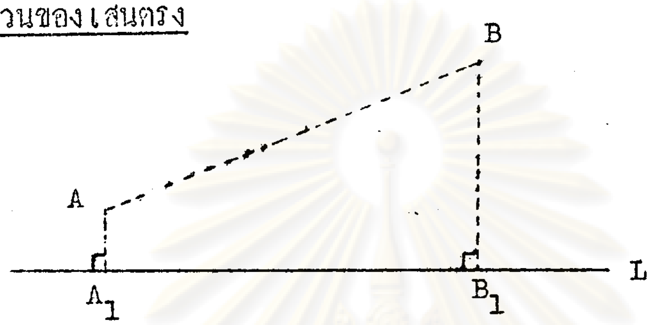
โปรเจคชันของจุด (5, 0) บนแกน x คือจุด (5 , 0)

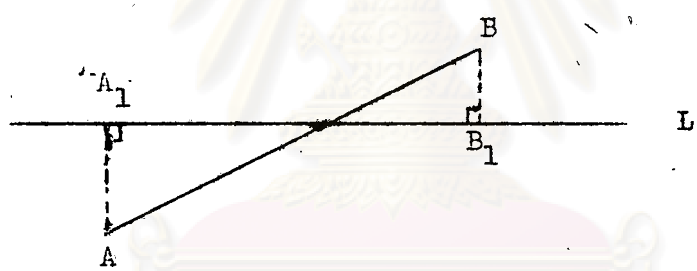
โปรเจคชันของจุด (−2 , 0) บนแกน x คือจุด (−2 , 0)

โปรเจคชันของจุด (0 , 5) บนแกน x คือจุด (0 , 0)

โปรเจคชันของจุด (0 , −3) บนแกน x คือจุด (0 , 0)

<u>โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง</u>



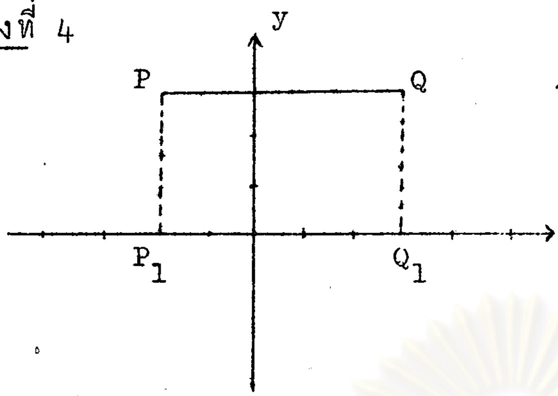


จากรูป A_1B_1 เป็นโปรเจคชันของ AB บนเส้นตรง L ซึ่งเขียนสั้น ๆ ได้

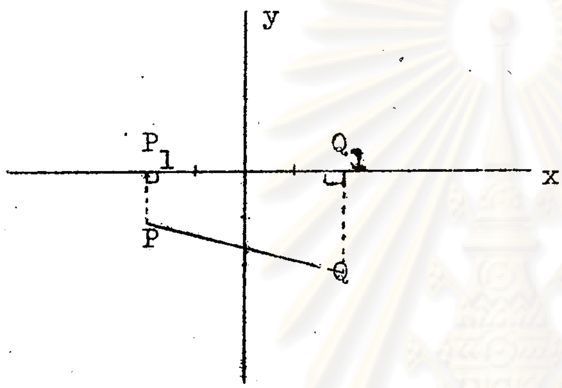
คือ $\text{Proj}_L(AB) = A_1B_1$

อ่านว่า โปรเจคชันของ AB บนเส้นตรง L คือ A_1B_1

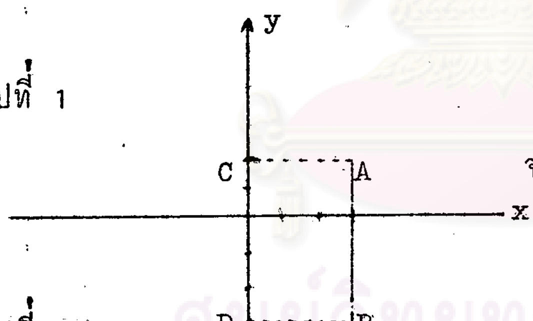
<u>ตัวอย่างที่</u> 4



จากรูปโปรเจกชันของเส้นของเส้นตรง PQ บนแกน x คือ P_1Q_1

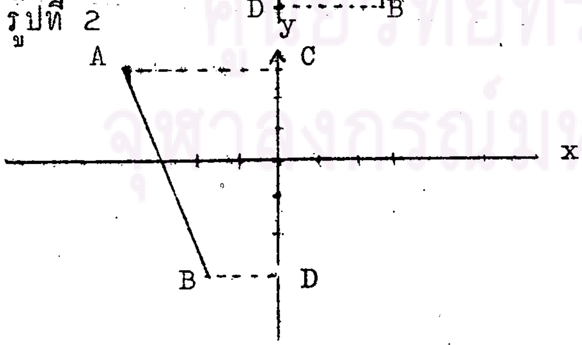


รูปที่ 1

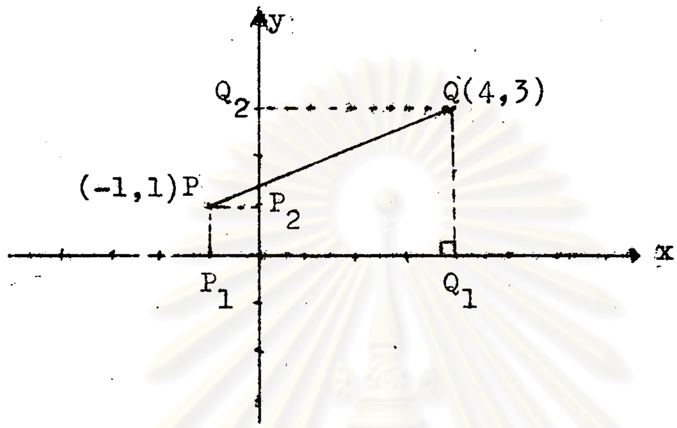


จากรูป (1) และรูป (2) ส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y คือ CD

รูปที่ 2



<u>ตัวอย่าง</u> 5 กำหนดจุด P $(-1, 1)$ และ Q $(4, 3)$ จงหาส่วนของเส้นตรง PQ บนแกน x และแกน y



- ส่วนของเส้นตรง P_1Q_1 เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง PQ บนแกน x
- ส่วนของเส้นตรง $P_2\ Q_2$ เป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง PQ บนแกน y

<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. โปรเจคชันของจุด

P $(1, 3)$ บนแกน x คือ.........บนแกน y คือ.........

Q $(-2, 2)$ บนแกน x คือ.........บนแกน y คือ.........

R $(-3,-2)$ บนแกน x คือ.........บนแกน y คือ.........

2. จงหาโปรเจคชันบนแกน x และแกน y ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดต่อไปนี้

1. A $(3, 2)$, B $(7, 5)$
2. C $(-3, 4)$, D $(4, -$
3. E $(-5, 2)$ และ F $(-2, 6)$

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. โปรเจคชันของ AB บนแกน x เป็น A_1 $(-5, 0)$ และ B_1 $(2, 0)$

และบนแกน y เป็น A_2 (0 , −3) และ B_2 (0 , 7) ตามลำดับ จงหาโคออร์ดิเนต ของ A และ B A = (−5 , −3) B = (2 , 7)

2. ส่วนของเส้นตรงที่มีโคออร์ดิเนตต่างกัน 2 เส้น จะมีโปรเจคชันเป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน บนเส้นตรงเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ได้หรือไม่

3. ให้ P และ Q เป็นจุดบนเส้นตรง L , P_1 และ Q_1 เป็นจุดบนเส้นตรง L_1 ถ้า P_1Q_1 เป็นส่วนของเส้นตรง PQ บนเส้นตรง L_1

   (1) โดยทั่วไป PQ จะเป็นโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรง P_1Q_1 บนเส้นตรง L หรือไม่

   (2) โดยทั่วไปความยาวของ PQ จะเท่ากับความยาวของ P_1Q_1 หรือไม่

3. ขั้นสอนและกิจกรรม

1. ทบทวนเรื่องระบบแกนมุมฉากเกี่ยวกับการหาโคออร์ดิเนตของจุดบนระนาบ โดยใช้การถามตอบ
2. นำเข้าสู่เนื้อหาเรื่อง "โปรเจคชัน" ของจุดบนเส้นตรง โดยใช้การยกตัวอย่างและบอกให้ทราบข้อนิยามของโปรเจคชันของจุด
3. อธิบายตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2
4. ใช้คำถามถามเกี่ยวกับเรื่องเส้นตรงเพื่อนำไปสู่การหาโปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรงที่กำหนดให้ แล้วอธิบายตัวอย่างที่ 3 และที่ 4
5. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปกรณีทั่ว ๆ ไปของการหาโปรเจคชันของจุด และส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรงที่กำหนดให้

4. ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสรุปกรณีทั่วไปของการหาโปรเจคชันของจุดดังนี้

1. P ย่อมเป็นโปรเจคชันของ P บนเส้นตรง L เมื่อ P อยู่บนเส้นตรง L
2. ก. โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน x คือ (a , o) เสมอ
   ข. โปรเจคชันของจุด (a , b) บนแกน y คือ (o , b) เสมอ
3. ก. โปรเจคชันของเส้นตรง P (a , b) Q (c , d) บนแกน x คือเส้นเชื่อมจุด (a , o) และ (c , o)

ข. โปรเจคชันของเส้นตรง P (a , b) Q (c , d) บนแกน y คือ เส้นเชื่อมจุด (o , b) และ (o , d)

4. AB และ A_1B_1 เป็นโปรเจคชันซึ่งกันและกันบนเส้นตรง L_1 และ L_2 ก็ต่อเมื่อ L_1 ขนานกับ L_2

5. ส่วนของเส้นตรงย่อมยาวกว่าหรือเท่ากับโปรเจคชันของมันเสมอ

5. <u>การวัดและประเมินผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
4. ให้ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 3

การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

1 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้รู้จักวิธีหาความยาวของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด
   - 1.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ให้ นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้
   - 1.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ให้นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นตรงนี้ได้
   - 1.3 นักเรียนสามารถสรุปสูตรของการหาระยะทางระหว่างจุดที่ทราบค่าโคออร์-ดิเนตได้
   - 1.4 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y ให้นักเรียนสามารถคำนวณหาความยาวของเส้นตรงที่เชื่อม 2 จุดนี้ได้
   - 1.5 เมื่อกำหนดส่วนของเส้นตรงได้ สามารถหาจุดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงนั้นตามที่โจทย์กำหนดระยะให้ได้
   - 1.6 สามารถนำความรู้ในเรื่องระยะทางของเส้นตรงมาพิจารณาว่า จุดใดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันบ้าง

2 รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

ถ้า P และ Q เป็นจุด 2 จุด ใด ๆ ในระนาบระยะทางระหว่างจุดถึงจุด Q หมายถึงความยาวของส่วนของเส้นตรง PQ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $|PQ|$

$|PQ|$ อ่านว่าค่าสมบูรณ์ของ PQ

วิธีหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

1. ถ้าจุด P_1 และ P_2 ซึ่งอยู่บนแกน x หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x แล้ว

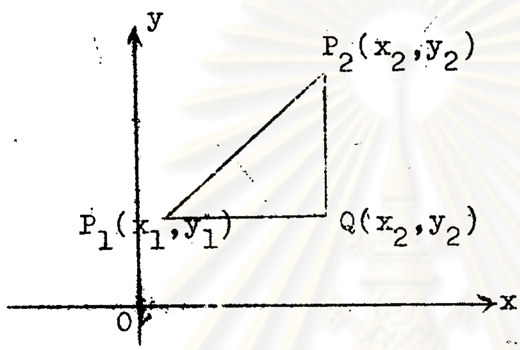
$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$ หรือ $|x_2 - x_1|$

2. ถ้าจุด P_1 และ P_2 ซึ่งอยู่บนแกน y หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y แล้ว $|P_1 P_2| = |y_1 - y_2|$ หรือ $|y_2 - y_1|$

3. ระยะทางระหว่างจุด P (x , y) กับแกน x เท่ากับ $|y|$

4. ระยะทางระหว่างจุด P (x , y) กับแกน y เท่ากับ $|x|$

5. ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใด



ถ้าจุด $P_1 (x_1 , y_1)$ และ $P_2 (x_2 , y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ
ให้ $d = |P_1 P_2|$ = ระยะทางระหว่างจุด P_1 ถึงจุด P_2

ดังนั้น

$$d^2 = |P_1 P_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

หรือ $$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

หรือ $$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

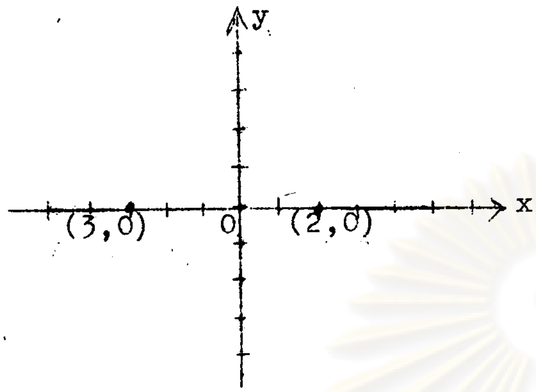
<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาระยะทางระหว่าง

ก. (−3 , 0) และ (2 , 0)

ข. 2 , 4) และ (−2 , 4)

ค. (4 , 3) และ (4 , −1)

<u>วิธีทำ</u>

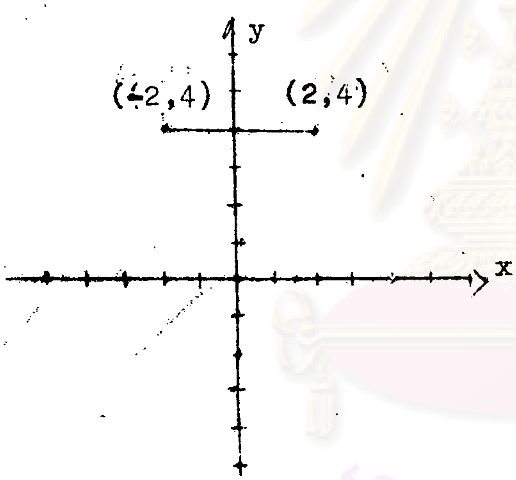


ก. ระยะทางจากจุด (−3 , 0) ถึง (2 , 0)

มีค่า $= |x_1 - x_2|$

$= |-3 - 2|$

$= |-5| = 5$

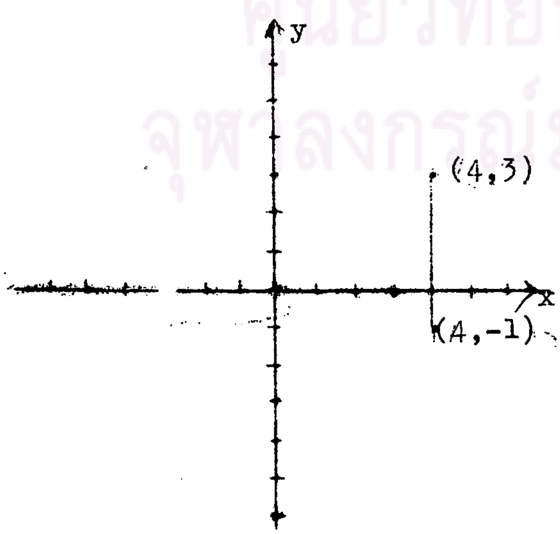


ข. ระยะทางจากจุด (−2 , 4) ถึง (3 , 4)

มีค่า $= |x_1 - x_2|$.

$= |-2 - 2|$

$= |-4| = 4$



ค. ระยะทางจากจุด (4, 3) ถึง (4 , −1)

มีค่า $= |y_1 - y_2|$

$= |3 - (-1)|$

$= |3 + 1| = |4|$

$= 4$

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 จงหาระยะทางระหว่างจุด

ก. (2 , 3) และ (1 , 2)

ข. (−1 , −2) และ (3 , −4)

<u>วิธีทำ</u> ก. สูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

ข. $$d = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 - (-4))^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3 ถ้าระยะทางระหว่างจุด (k , 1) และ (−2 , 1) เป็น 3 จงหาค่า k

<u>วิธีทำ</u> จุด (k , 1) และ (−2 , 1) มีค่าของออร์ดิเนตเท่ากัน ดังนั้น เส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสองขนานกับแกน x

จากสูตร ระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง $= |x_1 - x_2|$

$$3 = |k - (-2)|$$
$$3 = |k + 2|$$

จะได้ $k + 2 = 3$ และ $k + 2 = -3$

ถ้า $k + 2 = 3$

$k = 1$

ถ้า $k + 2 = -3$

$k = -5$

ค่าของ k คือ $1 , -5$

<u>ตัวอย่างที่</u> 4 สามเหลี่ยมที่กำหนดโคออร์ดิเนตของจุดยอดให้ดังต่อไปนี้ เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

$A \ (-5 , -1) , \quad B \ (2 , 3) , \quad C \ (3 , -2)$

<u>วิธีทำ</u>

การตรวจสอบว่าเป็นสามเหลี่ยมชนิดใดนั้นตรวจสอบที่ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ถ้า

ก. ด้านทั้งสามด้านเท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ข. มีด้านสองด้านเท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ค. ด้านสามด้านมีความสัมพันธ์กันเข้าลักษณะตามทฤษฎีของ พีธาคอรัส จะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ง. ถ้าด้านสามด้านไม่เท่ากันจะเป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

จากโจทย์ หาความยาวที่ละด้าน

$$AB = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{65}$$

$$AB = AC = \sqrt{65}$$

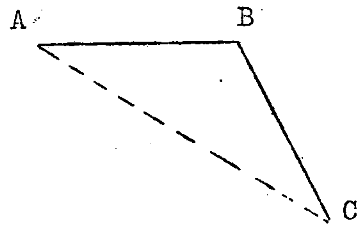
สรุปได้ว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

<u>ตัวอย่างที่</u> 5 จุด $P \ (-2 , -4)$, $Q \ (10 , 2)$ และ $R \ (4 , -1)$ จุดทั้งสามนี้ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> แนวคิดในการแสดงว่าจุดทั้งสามจุดจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ให้ทำดังนี้

ให้ A , B , C เป็นจุด 3 จุด

ก. ถ้า A , B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



จะได้ $AB + BC \neq AC$

ข. ถ้า A , B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จะต้องได้ $AB + BC = AC$ เสมอ

ดังนั้น ในการคิดโจทย์ข้อนี้ จุด P (-2 , -4), Q (10 , 2) และ R (4 , -1) จะได้ว่า

$$PQ = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$QR = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$PR = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$6\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$

$$PQ = OR + PR$$

ดังนั้นจุด 3 จุดนี้ จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก. (3 , 6) และ (5 , -2)

ข. (-4 , -2) และ (6 , 0)

2. จุดสามจุดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

A (1 , 2) B (3 , 5) , C (5 , 5)

โจทย์การบ้าน

1. ถ้าระยะทางระหว่างจุด (2 , 3) และ (k , o) เป็น 5 จงหาค่า

k (6 , −2)

2. สามเหลี่ยมที่กำหนดจุดยอดให้นี้เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

3. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2 , 3) และผ่านจุด (8,−5)

ก. จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้

ข. จุด (−6 , 9) อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมนี้หรือไม่

3. ขั้นสอนและกิจกรรม

1. ทบทวนเรื่องการพาโปรเจคชั่นของส่วนของเส้นตรงโดยใช้การถามตอบนักเรียน , ทบทวนเรื่องค่าสมบูรณ์แล้วนำเข้าสู่การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด โดยเริ่มจากการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด บนแกน x , บนแกน y แล้วจึงไปสู่เส้นตรงที่ขนานกับแกน x และแกน y เพื่อให้ได้ข้อสรุปของการหาระยะทางของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x หรือเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

2. อธิบายแสดงวิธีทำตัวอย่างที่ 1

3. หลังจากที่นักเรียนเข้าใจวิธีการหาระยะทางของเส้นตรงขนานกับแกน x หรือขนานกับแกน y แล้ว ก็ทบทวนความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีของพิธากอรัส ซึ่งเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก เพื่อนำมาสัมพันธ์กับการหาระยะทางของเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y

4. ใช้คำถามและตัวอย่างเพื่อให้ได้ข้อสรุปสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

5. อธิบายตัวอย่างที่ 2 และตัวอย่างที่ 3 , 4 และ 5 โดยในระหว่างที่อธิบายการทำนั้น ก็ให้ใช้คำถามถามนักเรียนเพื่อตรวจสอบความเข้าใจไปด้วย

6. เมื่อจบเนื้อหาแล้วก็ให้เน้นที่การใช้สูตรของการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ซึ่งจะเลือกจุดใดขึ้นก่อนก็ได้

<u>ขั้นสรุป</u>

ให้นักเรียนอภิปรายและสรุปสูตรการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ ซึ่งจะได้ว่า ถ้าจุด $P_1\ (x_1, y_1)$ และจุด $P_2\ (x_2, y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ

ระยะทางระหว่างจุด P_1 ถึง P_2 $= |P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

4. <u>การวัดและประเมินผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ให้นำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
4. ให้ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 4

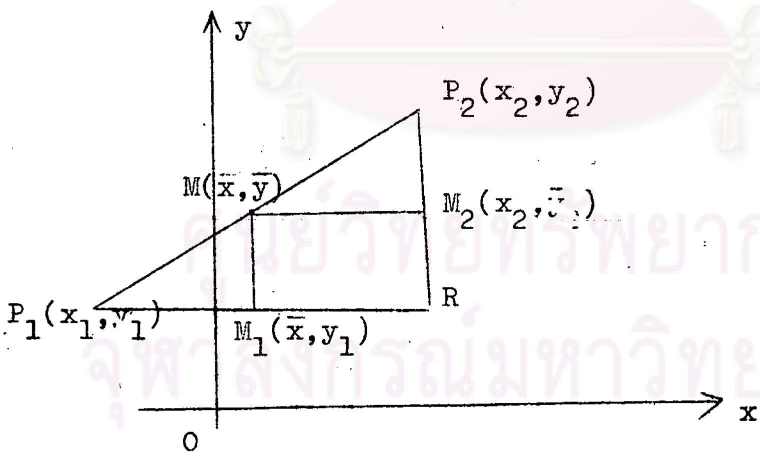
การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้รู้จักวิธีหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด
   - 1.1 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ให้นักเรียนสามารถสรุปสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองนั้นได้
   - 1.2 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุด ใด ๆ ให้นักเรียนสามารถหาโคออร์ดิเนตของ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองโดยใช้สูตรได้
   - 1.3 สามารถหาโคออร์ดิเนตของจุดได้ในเมื่อกำหนดอีกจุดหนึ่งและกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างทั้งสองนั้นได้

2. รายละเอียดเนื้อหาวิชา

การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด



ถ้า $M(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้วได้ว่า M มีโคออร์ดิเนตเป็น

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด

ก. (2 , 5) กับ (−4 , 3)

ข. (1 , 6) กับ (5 , −2)

ค. ($\sqrt{2}$, 0) กับ (0 , $\sqrt{3}$)

ง. (−m , n) กับ (p , −q)

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรการหาโคออดิเนตของจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ก. แทนค่าในสูตร

$$\bar{x} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

$$\bar{y} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

จุดกึ่งกลางระหว่าง (2 , 5) และ (−2 , 3) คือ จุด (−1 , 4)

ข. (1 , 6) กับ (5 , −2)

$$\bar{x} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (1 , 6) กับ (5 , −2) คือจุด (3 , 2)

ค. ($\sqrt{2}$, 0) กับ (0 , $\sqrt{3}$)

$$\bar{x} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด ($\sqrt{2}$,0) กับ (0,$\sqrt{3}$) คือจุด($\frac{1}{2}$,$\frac{3}{2}$)

ง. (–m , n) กับ (p , –q)

$$\bar{x} = \frac{-m + p}{2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{p - m}{2}$$

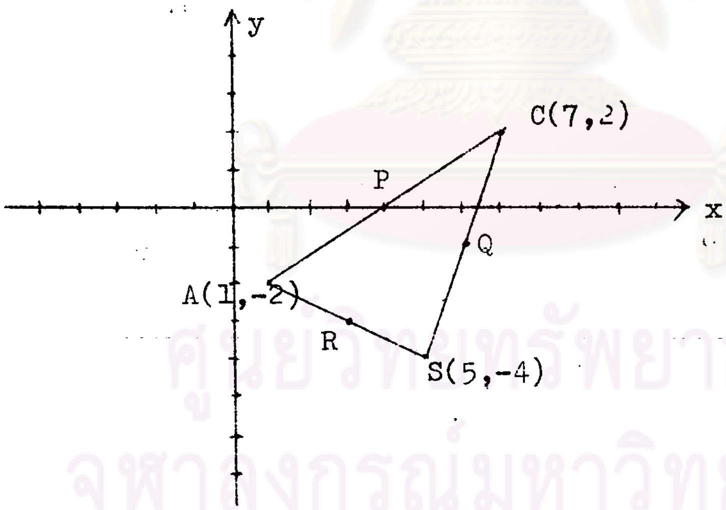
$$\bar{y} = \frac{n - q}{2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{-q + n}{2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (–m , n) กับ (p , –q) คือ $\left(\frac{p - m}{2} , \frac{-q + n}{2}\right)$

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 กำหนดให้ A (1 , –2) , B (5 , –4) และ C (7 , 2)

เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาจุดกึ่งกลางของรูปสามเหลี่ยมนั้น

<u>วิธีทำ</u> ลงจุด A (1 , –2) , B (5 , –4) และ C (7 , 2) บนแกนพิกัดฉาก



ให้ P , Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม หาโคออร์ดิเนตของจุด P จะได้ว่า

$$\bar{x} = \frac{1 + 7}{2} = 4 \quad \text{และ} \quad \bar{y} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

โคออร์ดิเนตของจุด P คือ (4 , 0)

โคออร์ดิเนตของจุด Q จะได้ว่า

$\bar{x} = \frac{1 + 5}{2} = 3$ และ $\bar{y} = -\frac{2 - 4}{2} = -3$

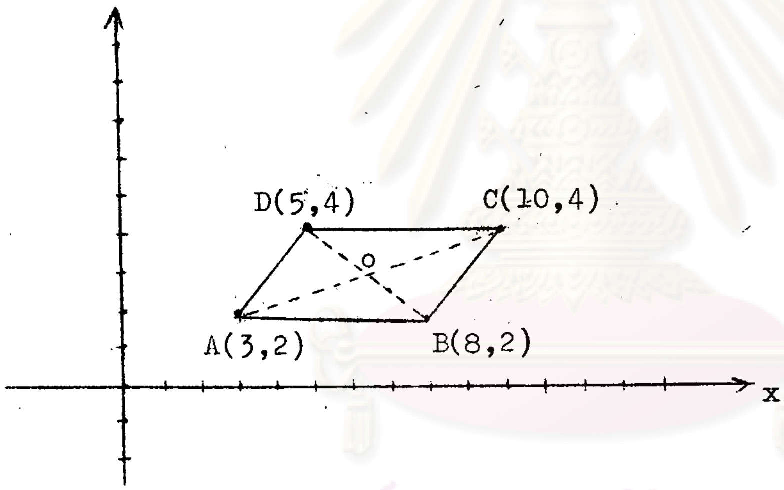
จุด Q จะมีโคออร์ดิเนต $(3, -3)$

โคออร์ดิเนตของจุด R จะได้ว่า

$\bar{x} = \frac{5 + 7}{2} = 6$ และ $\bar{y} = -\frac{4 + 2}{2} = -1$

จุด R จะมีโคออร์ดิเนต $(6, -1)$

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดเป็น A $(3, 2)$ B $(8, 2)$, C $(10, 4)$ และ D $(5, 4)$ เป็นจุดเดียวกัน



ให้จุด O เป็นจุดที่เส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยม ABCD ตัดกัน

∵ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุม AC และ BD ดังจะแสดง

O เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

$\bar{x} = \frac{3 + 10}{2} = \frac{13}{2}$ และ $\bar{y} = \frac{2 + 4}{2} = 3$

โคออร์ดิเนตของจุด O $(\frac{13}{2}, 3)$

O เป็นจุดกึ่งกลางของ BD

$$\bar{x} = \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2} \quad , \quad \bar{y} = \frac{4+2}{2} = 3$$

โคออร์ดิเนตของจุด O $(\frac{13}{2}, 3)$

O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทะแยงมุมทั้งสอง

<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. สมมุติว่า A และ B เป็นจุดสองจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB ถ้า A และ C มีโคออร์ดิเนตเป็น (−4 , 2) และ (3 , −1) ตามลำดับ โคออร์ดิเนตของจุด B คือ ข้อใด

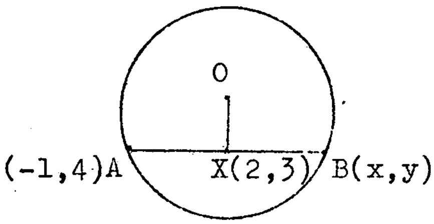
ก. (10 , −4) ข. (−4 , 10) ค. (−5, 3) , ง. (5 ; 2) จ.(3 ; −5)

ข. A (1 , 3) และ B (7 , 11) เป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้เป็นเท่าไร ....

... .

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. B (7 , 2) เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AC ถ้า A มีโคออร์ดิเนต (2 , −4) จงหาโคออร์ดิเนตของจุด C
2. ถ้าแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (4 , 0) และ (−8 , 4) ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน จงหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งทุกจุด
3. กำหนดจุด A (−2 , 1) , B (5 , 2) และ C (2 , −3) เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม PQR จงหาโคออร์ดิเนตของจุด P, QR
4. วงกลมวงหนึ่งแสดงได้ด้วยรูป



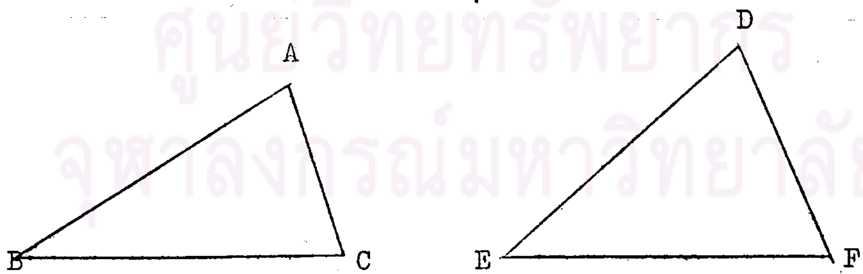
O เป็นรัศมีของวงกลม ซึ่งมี AB เป็นคอร์ด ถ้าจากจุด O ลากเส้นตรงมาตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด (2 , 3) จงหาโคออร์ดิเนตของจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

3. <u>ขั้นสอนและกิจกรรม</u>

1. ทบทวนการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด จากนั้นก็นำเข้าสู่บทเรียน โดยการตั้งคำถามถามนักเรียนว่า ถ้าเราจะหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงเราจะทำอย่างไร ให้นักเรียนตอบคำถามง่าย ๆ เกี่ยวกับการหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่อยู่บนแกน x หรือขนานกับแกน x บนแกน y หรือขนานกับแกน y แต่ยังไม่กล่าวถึงกรณีที่เป็นเส้นตรงทั่ว ๆ ไป ที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y

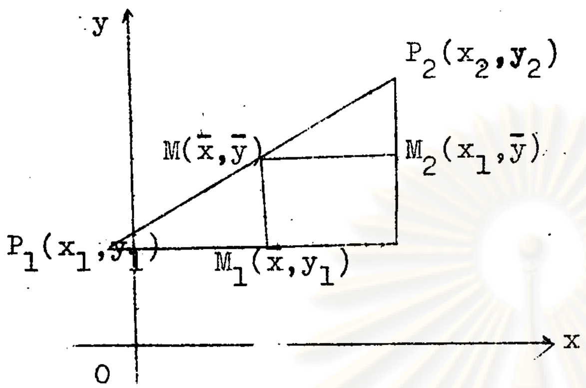
2. ยกตัวอย่างสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งมีคุณสมบัติที่มีมุมเท่ากับทุกมุม ถามนักเรียนว่าเป็นสามเหลี่ยมสองรูปจะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

3. ให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายเช่น



ถ้าสามเหลี่ยม ABC และ DEF เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้วอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันจะเท่ากันหรือไม่ ถ้าเท่ากันอัตราส่วนของด้านที่เท่ากัน คืออัตราส่วนของด้านใดต่อด้านใด

4. สร้างสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนแกนพิกัดฉาก กำหนดโคออร์ดิเนตของจุดยอดทั้งสามแล้วจะหาจุดกึ่งกลางของด้านที่ต้องการ



โดยอาศัยคุณสมบัติและความรู้ในเรื่องของสามเหลี่ยมคล้ายมาใช้ หลังจากที่ยกตัวอย่างที่เป็นกรณีเฉพาะ เมื่อกำหนดจุดโคออร์ดิเนตให้ได้แล้วก็อธิบายในกรณีทั่วไป โดยในการอธิบายจะใช้คำถามนักเรียน เพื่อจะให้ได้ข้อสรุปสูตรของการหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงใด ๆ ที่ทราบค่าโคออร์ดิเนตที่ปลายทั้งสองข้าง

5. ครูอธิบายและสรุปหลักเกณฑ์อีกครั้งหนึ่งจากนั้น จึงอธิบายตัวอย่างที่ 1 ตามที่กล่าวในรายละเอียดของเนื้อหา

6. สำหรับตัวอย่างที่ 2 และตัวอย่างที่ 3 นั้นให้นักเรียนร่วมกันทำบนกระดาน โดยครูจะเป็นผู้เพียงคอยแนะนำแนวทางเท่านั้น ครูจะไม่แสดงหรือเป็นผู้คิดเอง แต่จะให้นักเรียนช่วยครูคิดหรือพยายามทำด้วยตนเองให้มากที่สุด หลังจากนั้นจึงอธิบายและสรุปวิธีทำอีกครั้งหนึ่ง

<u>ข้อสรุป</u>

ให้นักเรียนสรุปสูตรการหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงใด ๆ

ซึ่งจะได้ว่า $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

เมื่อ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงใด

4. การวัดและประเมินผล

การวัดผล

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม
4. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
5. ให้ทำโจทย์การบ้าน

....

คาบที่ 5

เรื่องความชันของเส้นตรง

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในเรื่อง ความเอียงและความชันของเส้นตรง

1.1 เมื่อกำหนดเส้นในระบบแกนมุมฉากให้นักเรียนสามารถ

1.1.1 บอกความหมายของความเอียงของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

1.1.2 บอกความหมายของความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

1.2 เมื่อกำหนดความเอียงของเส้นตรงให้นักเรียนสามารถ

1.2.1 บอกได้ว่าความชันเป็นจำนวนบวกถ้าเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน x

1.2.2 บอกได้ว่าความชันเป็นจำนวนลบถ้าเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน x

1.3 เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรงเท่ากับศูนย์ให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เส้นตรงนี้ขนานกับแกน x

1.4 เมื่อกำหนดเส้นตรงที่ขนานกับแกน y หรือตั้งฉากเป็นแกน x ให้นักเรียนสามารถที่จะบอกได้ว่า ไม่สามารถหาความชันของเส้นตรงนี้ได้พร้อมกับอธิบายเหตุผลให้ถูกต้อง

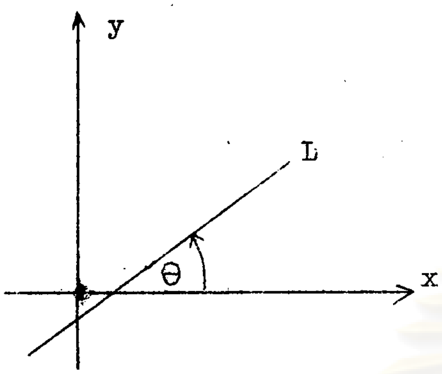
1.5 เมื่อกำหนดโคออร์ดิเนตของจุด 2 จุดให้นักเรียนสามารถ คำนวณหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดนี้ได้

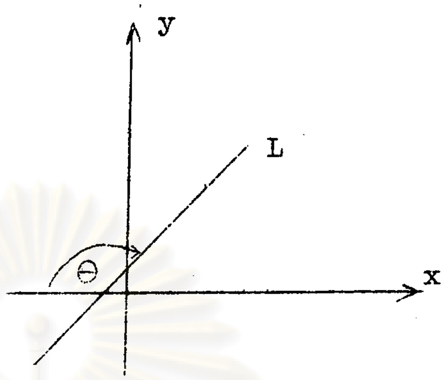
2. รายละเอียดเนื้อหาวิชา

มุมเอียง (Inclination) ของเส้นตรง

มุมเอียงของเส้นตรงใด ๆ คือมุมที่เล็กที่สุด ที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ทางด้านบวกไปยังเส้นตรงนั้น

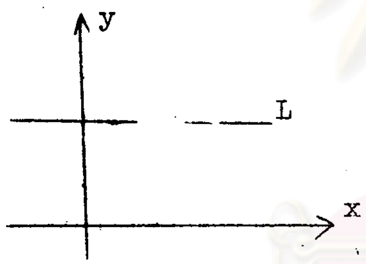
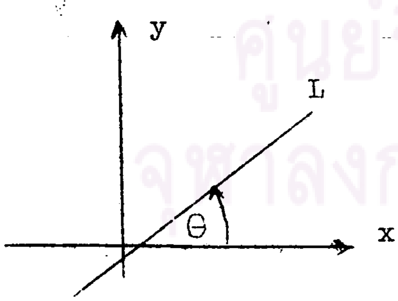
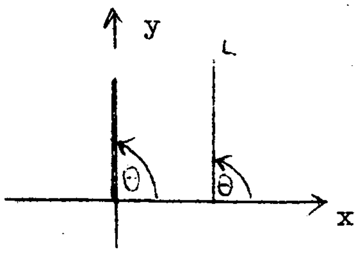
มุมเอียงเขียนแทนด้วย θ

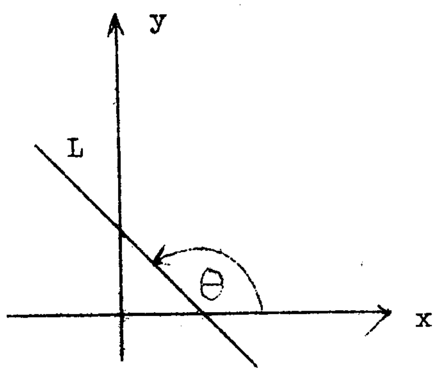




รูปที่ 1 มีมุมเอียง = θ

รูป 2 θ ไม่เรียกว่ามุมเอียง

	1. เส้นตรง L ขนานหรืออยู่บนแกน x
	2. เส้นตรง L ทำมุมแหลมกับแกน x $0^\circ < \theta < 90^\circ$
	3. เส้นตรง L ขนานหรืออยู่บนแกน y $\theta = 90^\circ$



4. เส้นตรง L ทำมุมป้านกับแกน x

เส้นตรงที่ทำมุม 180° กับแกน x ถือว่ามีมุมเอียงเป็น 0° องศา เพราะว่าเส้นตรงขนานกับแกน x ดังนั้นเส้นตรงจะไม่มีมุมเอียงเป็น 180° แต่ค่าของมุมเอียงของเส้นตรงจะมีค่าอยู่ระหว่าง

$$0 \leq \theta \leq 130^\circ$$

<u>ความชันของเส้นตรง</u> (Slope of a line)

ความชันของเส้นตรงใด ๆ คือลักษณะของเส้นตรงนั้น ๆ ในระนาบแกนมุมฉาก ซึ่งลักษณะเหล่านี้ จะบอกให้เราทราบว่าเส้นตรงนั้น วางตัวทำมุมแหลมหรือมุมป้านกับแกน x หรือขนานกับแกน x หรือขนานกับแกน y

<u>นิยาม</u>

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง $\theta = 90^\circ$ ความชันของเส้นตรง L หมายถึงจำนวนจริงหาโดยที่ $m = \tan \theta$

เช่น ถ้าเส้นตรงทำมุมเอียง 45° กับแกน x จะได้ว่าความชันของเส้นตรงนี้

$$= m = \tan 45^\circ = 1$$

ถ้าเส้นตรงทำมุมเอียง 60° กับแกน x จะได้ว่าความชันของเส้นตรงนี้

$$= m = \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ถ้าเส้นตรงเอียงทำมุม 90° กับแกน x จะได้ว่าความชันของเส้นตรงเส้นนี้ $= m = \tan 90^\circ$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้น สาเหตุที่ต้องกำหนดว่า $\theta \neq 90^\circ$ ก็เพราะว่า $\tan 90^\circ$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นเส้นตรงทุกเส้นจะมีความชันเสมอยกเว้นเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับแกน x

ในกรณีที่เราไม่ทราบมุมเอียงของเส้นตรง L แต่ทราบว่าเส้นตรงผ่านจุด 2 จุด เราก็สามารถคำนวณหาความชันได้ดังนี้

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 = x_2$ จะได้ว่าความชันของเส้นตรง $L = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้

a) $(-8, -4)$ และ $(5, 9)$

b) $(-11, 4)$ และ $(-11, 10)$

c) $(10, -3)$ และ $(14, -7)$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) $m = \dfrac{9 + 4}{5 + 8} = \dfrac{13}{13} = 1$

เพราะฉะนั้น $\tan \theta = 1$

$\theta = \tan \quad = 45^\circ$

b) เส้นตรงนี้มีค่าแอบซิสสาเท่ากัน ดังนั้นเส้นตรงนี้ตั้งฉากกับแกน x มุมเอียง $\theta = 90^\circ$ และเส้นตรงเส้นนี้ไม่มีค่าความชัน

c) $m = \dfrac{-7 + 3}{14 - 10} = -\dfrac{4}{4} = -1$

เพราะฉะนั้น $\tan \theta = -1$

$\theta = \tan(-1) = 135^\circ$

<u>ตัวอย่าง</u> 2 กำหนด $A(x, 3)$ และ $B(4, -1)$ และ AB มีความชัน

$\frac{2}{3}$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ ให้ m แทนความชันของเส้นตรง AB

$$m = \frac{3+1}{x-4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x-4}$$

$$2(x-4) = 12$$

$$x - 4 = 6$$

$$x = 10$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโคออร์ดิเนตของ P เมื่อความชันของ OP = 2 เมื่อ O คือจุดเริ่มต้น และความชันของ AP = 1 เมื่อ A มีโคออร์ดิเนตเป็น (−1 , 0)

วิธีทำ ให้ P มีโคออร์ดิเนตเป็น (x , y)

ให้ m_1 แทนความชันของ OP $= \frac{y-0}{x-0}$

$$2 = \frac{y-0}{x-0}$$

$$y = 2x \quad ....(1)$$

ให้ m_2 แทนความชันของ AP

$$m_2 = 1 = \frac{y-0}{x+1}$$

$$y = x + 1 \quad ....(2)$$

$$(1) = (2) \quad 2x = x + 1$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

โคออร์ดิเนตของ P คือ(1 , 2)

โจทย์แบบฝึกหัดท้ายชั่วโมง

1. จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2 , 3) และ (−1 , 3)

2. จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (4 , 4) และ (4 , 5)

3. ถ้าความชันมีค่าเป็นบวก แสดงว่าเส้นตรงเอียงทำมุม__________กับแกน x

ถ้าความชันมีค่าเป็นลบ แสดงว่าเส้นตรงเอียงทำมุม__________กับแกน x

ถ้าความชันมีค่าเป็นศูนย์แสดงว่าเส้นตรง_________กับแกน x

โจทย์การบ้าน

1. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงผ่านจุด (1 , 2) และ (x , 5) มีความชันเท่ากับ 2

2. เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเป็น $\frac{4}{3}$ ถ้าเส้นตรงเส้นนี้ผ่านจุด (3 , 2) จงหาจุดที่อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้มา 3 จุด

3. ขั้นสอนและกิจกรรม

1. ให้นักเรียนเข้าใจความความหมายของมุมเอียง โดยการยกตัวอย่างมุม ทั้งที่เป็นมุมเอียงและไม่เป็นมุมเอียง ให้ดูหลาย ๆ ลักษณะ แล้วให้นักเรียนสรุปความหมายของมุมเอียง โดยให้ช่วยกันสรุปก็ได้ ถ้านักเรียนยังสรุปไม่ได้ ครูจะแนะแนวทางโดยการใช้คำถามจนกว่านักเรียนจะสรุปได้

2. อธิบายลักษณะของมุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน x คือในลักษณะที่เป็นมุมแหลม มุมป้าน , และมุมศูนย์องศาหรือขนานกับแกน x นั่นเอง

3. บอกความหมายของความชันของเส้นตรงให้นักเรียนทราบว่ามีความหมายอย่างไร และข้อตกลงในเรื่องความชัน ซึ่งความชันของเส้นตรงใด ๆ มีค่าเท่ากับ tan θ เมื่อ θ คือมุมเอียงที่เส้นตรงทำกับแกน x

4. ฝึกให้นักเรียนคำนวณค่าความชัน เมื่อกำหนดค่ามุมเอียงให้

5. ตั้งปัญหาให้นักเรียนช่วยกันคิดว่า ถ้าเส้นตรงทำมุมเอียง 90° กับแกน x จะมีความชันหรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้านักเรียนตอบไม่ได้ ครูก็แนะแนวทางในการตอบให้จนกว่าจะตอบได้

6. อธิบายการคำนวณหาค่าความชัน เมื่อไม่ทราบมุมเอียง แต่กำหนดให้เส้นตรงผ่านจุด 2 จุด ว่าสามารถคำนวณค่าความชันได้จากค่าของ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ แล้วแสดงการพิสูจน์ให้นักเรียนดู

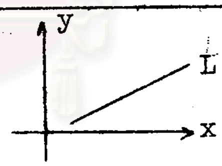
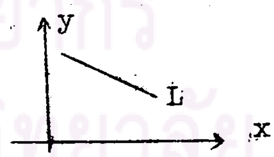
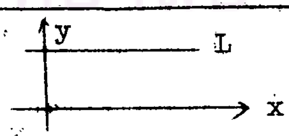
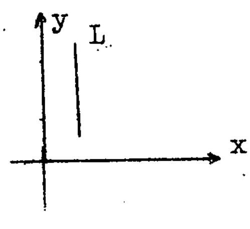
7. อธิบายตัวอย่าง 1 , ตัวอย่าง 2 และตัวอย่าง 3 ให้นักเรียนฟังแล้วให้ช่วยกันทำพร้อมกันบนกระดานดำ

8. ใช้คำถาม ถามนักเรียนเกี่ยวกับค่าของความชัน ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก , ลบ และจำนวนจริงศูนย์ว่าลักษณะของเส้นตรงจะเป็นอย่างไร เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สำคัญในเรื่องความชัน

4. <u>ขั้นสรุป</u>

1. นักเรียนสรุปให้ได้ว่าเมื่อทราบค่าความชันของเส้นตรงสามารถบอกลักษณะของเส้นตรงได้ดังนี้

เมื่อทราบค่าความชันของเส้นตรงสามารถบอกลักษณะของเส้นตรงได้ดังนี้

ค่าความชันเป็น	ลักษณะของเส้นตรง	รูป
เลขจำนวนจริงบวก $0° < \theta < 90°$	เอียงทำมุมแหลมกับแกน x	
เลขจำนวนจริงลบ $90° < \theta < 180°$	เอียงทำมุมป้านกับแกนกับแกน x	
ศูนย์ $\theta = 0$	ขนานกับแกน x หรือ ตั้งฉากกับแกน y	
หาค่าไม่ได้ $\theta = 90°$	ตั้งฉากกับแกน x หรือขนานกับแกน y	

4. <u>การวัดผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถามและการร่วมกิจกรรม
3. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
4. ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 6

เรื่องความชันของเส้นตรง

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องความเอียงและความชันของเส้นตรง

1.1 เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรงให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าความชันของเส้นตรงเดียวกันย่อมเท่ากัน

1.2 บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันจะมีความชันเท่ากัน

1.3 บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นมีความชัน ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

เส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงเท่ากับ -1

2. รายละเอียดเนื้อหาวิชา

เส้นตรงที่ขนานกันและตั้งได้ฉากกัน

นิยาม ถ้าให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ

(1) ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ เรากล่าวว่า L_1 ขนานกับ L_2

(2) ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ และมีจุดร่วมกัน 1 จุด เรากล่าวว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎี ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ โดยที่ $\theta_1 \neq 90°$ และ $\theta_2 \neq 90°$ สมมุติให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับแล้ว

(1) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ว่า L_1 ขนานกับ L_2

(2) ถ้า L_1 ขนานกับ L_2 จะได้ว่า $m_1 = m_2$

พิสูจน์ (1) สมมุติให้ $m_1 = m_2$

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

เพราะเหตุว่า $0° < \theta_1 < 180°$ และ $0 < \theta_2 < 180°$ ดังนั้น $\theta_1 = \theta_2$

แสดงว่า L_1 ขนานกับ L_2

(2) สมมุติให้ L_1 ขนานกับ L_2 จะได้ว่า $\theta_1 = \theta_2$

เพราะว่า $\theta_1 \neq 90°$ และ $\theta_2 \neq 90°$ ดังนั้น

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

นั่นคือ $m_1 = m_2$

<u>ทฤษฎี</u> ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 และมีความชัน m_1 , m_2 ตามลำดับ

(1) ถ้า $m_1 \cdot m_2 \neq 0$ และ L_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2 จะได้ว่า $m_1 \cdot m_2 = -1$

(2) ถ้า $m_1 \cdot m_2 = -1$ จะได้ว่า L_1 ตั้งได้ฉากกับ L_2

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 จงหาว่าเส้นตรงที่เชื่อมจุดดังต่อไปนี้ขนานกันหรือตั้งฉากกัน

a) A $(4 , 3)$, B $(5 , -2)$ กับ C $(-1 , -3)$, D $(-2 , 2)$

b) A $(3 , -2)$ และ B $(5 , 1)$ กับ C $(13 , -2)$ และ D $(10, 0)$

<u>วิธีทำ</u>

a) ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A $(4 , 3)$ และ B $(5, -2)$

$$m_1 = \frac{-2-3}{5-4} = -5$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด C $(-1 , -3)$ และ D $(-2, 2)$

$$m_2 = \frac{2+3}{-2+1} = -5$$

$$m_1 = m_2$$

ดังนั้น เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

b) $$m_1 = \frac{-2-1}{3-5} = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \frac{-2-0}{13-10} = -\frac{2}{3}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{2} \times -\frac{2}{3} = -1.$$

ดังนั้น เส้นตรงสองเส้นนี้ตั้งได้ฉากกัน

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดเป็น A (1 , 2) B (3 , 1) และ C (−4 , −8) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

สามเหลี่ยมมุมฉากเป็นสามเหลี่ยมที่มีด้าน 2 ด้าน ตั้งฉากกัน ดังนั้นจะตรวจสอบโดยอาศัยความชันของเส้นตรงที่ว่า เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันต่อเมื่อผลคูณของความชันมีค่า = − 1

m_{AB} คือความชันของเส้นตรง AB = $\frac{2 - 1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$

m_{BC} คือความชันของเส้นตรง BC = $\frac{1 + 8}{3 + 4} = \frac{9}{7}$

m_{AC} คือความชันของเส้นตรง AC = $\frac{2 + 8}{1 + 4} = 2$

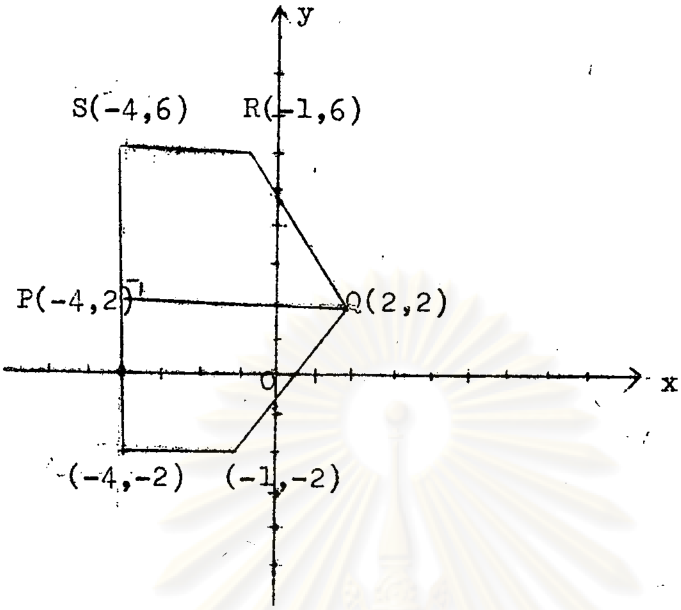
แต่ $m_{AB} \cdot m_{AC} = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$

AB ตั้งฉากกับ AC

นั่น คือ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากจริง

<u>ตัวอย่างที่</u> 3 ให้ P (−4 , 2) , Q (2 , 2) R และ S เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้าน PQ เป็นฐาน และยาวเป็นสองเท่าของด้านคู่ขนาน RS กำหนดให้ P เป็นมุมฉาก และมีพื้นที่เท่ากับ 18 ตารางหน่วย จงหาความชันของ QR

วิธีทำ



พื้นที่ $\boxed{ค}$ = $\frac{1}{2}$ × (ผลบวกด้านคู่ขนาน) × สูง

$18 = \frac{1}{2} (PQ + RS) \times PS$

$18 = \frac{1}{2} (6 + 3) \times PS$

$18 = \frac{9}{2} \times PS$

$PS = 4$

โคออร์ดิเนตของ S คือ (−4 , 6) และ (−4 , −2)

แต่ความยาวของ SR = 3 หน่วย

ดังนั้น โคออร์ดิเนตของ R คือ

(−1 , 6) และ (−1 , −2)

หาความชัน QR

$$m_{QR} = \frac{6 - 2}{-1 - 2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{QR} = \frac{-2 - 2}{-1 - 2} = \frac{4}{3}$$

ความชันของ QR มีค่า $-\frac{4}{3}$ และ $\frac{4}{3}$

<u>โจทย์ปัญหาท้ายชั่วโมง</u>

1. เส้นตรงที่เชื่อมจุด A (−3 , 2) B (4 , 1) กับ C (−1 , 0) และ D (2 , −1) ขนานหรือตั้งได้ฉากกัน______________
2. เส้นตรงที่เชื่อมจุด (k , 3) และ (−1 , 2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 2) และ (1 , −2) จงหาค่า k ______________
3. จงหาว่าจุด A (10 , 0) , B (5 , 5) , C (5 , − 5) และ D (−5 , 5) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมอะไร______________

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. จงแสดงว่าจุด A (2 , 1) C (5 , 6) B (4 , 5) และ D (3,2) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงผ่านจุด (x , −4) และ (5 , 9) ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด (10 , −3) และ (14 , −7)
3. ถ้ากำหนดให้ (0 , 0) และ (6 , 0) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาจุดยอดที่สาม
4. สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดเป็น A (1 , 2) B (3 , 1) และ C (−4 , −8) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
5. เส้นตรงเส้นหนึ่งมีความชันเป็น $\frac{4}{3}$ ถ้าเส้นตรงเส้นนี้ผ่านจุด (3 , 2) จงหาจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้มา 3 จุด

<u>ขั้นสอนและกิจกรรม</u>

1. ทบทวนเกี่ยวกับมุมเอียงและการหาค่าความชันเมื่อเส้นตรงผ่านจุด 2 จุด เพื่อจะนำเข้าสู่บทเรียนต่อไป
2. ให้นักเรียนช่วยแก้ปัญหา โดยแสดงว่าความเห็นว่า ถ้ามีเส้นตรงอยู่เส้นหนึ่ง ซึ่งกำหนดค่าความชันให้แล้วทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้ จะมีความชันเท่ากันหรือไม่ และในทำนองเดียวกัน ถ้ามีเส้นตรงสองเส้น ซึ่งมีความชันเท่ากันแล้ว เส้นตรงสองเส้นจะขนานกันหรือไม่

3. อธิบายนิยามและทฤษฎีของเส้นตรงที่ขนานกันพร้อมแสดงวิธีการพิสูจน์ โดยในการพิสูจน์ก็ให้ใช้คำถาม ถามนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้ในเรื่องของมุมเอียงและลักษณะของเส้นตรง เมื่อมีมุมเอียงเป็นมุมแหลมและมุมป้าน
4. อธิบายและพิสูจน์ทฤษฎีของเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน
5. ให้นักเรียนทำตัวอย่างที่ 1 , 2 ด้วยตนเอง โดยครูคอยช่วยเหลือนักเรียน ถ้านักเรียนสงสัยหรือไม่เข้าใจวิธีทำ และตัวอย่างที่ 2 ก็ทำเช่นเดียวกัน โดยนักเรียนช่วยกันทำพร้อมกันบนกระดาน โดยให้ครูใช้คำถามเพื่อเป็นแนวทางในการทำทั้งนี้ เพื่อเป็นการตรวจสอบดูความสนใจของนักเรียนด้วย
6. อธิบายตัวอย่างที่ 3 และแสดงวิธีทำให้ดู
7. ให้นักเร.ฯ สรุปหลักเกณฑ์ที่สำคัญในเรื่องของความชันของเส้นตรง

4. <u>ขั้นสรุป</u>

ให้นักเรียนสรุปหลักเกณฑ์ที่สำคัญเกี่ยวกับเรื่องความชันของเส้นตรง เพื่อให้ได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

1. เส้นตรงที่ทำมุม 90° กับแกน x จะไม่มีค่าความชันหรือกล่าวว่าไม่สามารถหาค่าได้
2. ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$ หรือ $\theta_1 = \theta_2$
3. ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ โดยที่ $m_1 \neq 0$ และ $m_2 \neq 0$ แล้ว L_1 จะขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

5. <u>การวัดผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถามและร่วมกิจกรรม
3. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
4. ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 7

เรื่อง สมการเส้นตรง

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักเรียนรู้วิธีสร้างสมการเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ให้

1.1.1 กำหนดเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

1.1.2 กำหนดเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

1.1.3 กำหนดจุดผ่าน 1 จุด และความชันให้

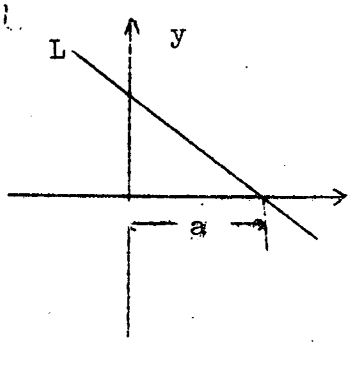
1.1.4 กำหนดจุดผ่านให้ 2 จุด

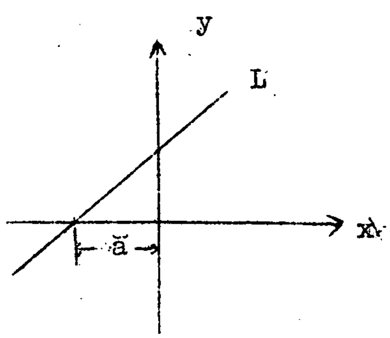
2. รายละเอียดเนื้อหาวิชา

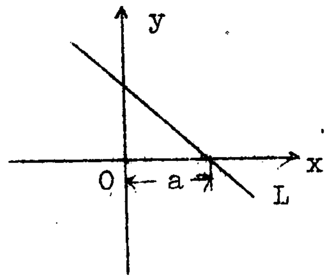
คำว่า "สมการเส้นตรง" หรืออาจจะเรียกชื่อเป็นอย่างอื่นว่า "สมการเชิงเส้น" (Linear equation) สมการดีกรีหนึ่ง (First degree equation) ซึ่งหมายถึงเงื่อนไขที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า สมการเส้นตรง คือสมการที่ประกอบด้วยตัวแปร x และตัวแปร y ซึ่งตัวแปรจะต้องมีกำลังเป็นหนึ่งเท่านั้น และจะมีพจน์ xy ประกอบอยู่ไม่ได้ สำหรับการศึกษาในส่วนนี้ ต้องการที่จะหาสมการของเส้นตรงในแบบต่าง ๆ

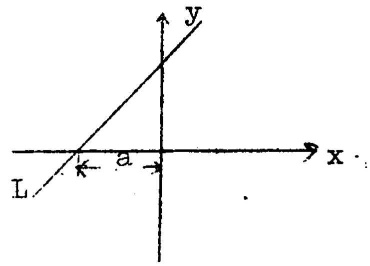
ระยะตัดแกน (Intercept) คือระยะตามแนวแกน x แกน y ที่เริ่มวัดจากจุดตั้งต้น (Origin) ถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน x หรือแกน y

ระยะตัดแกน x (X - Intercept) คือระยะตามแนวแกน x ที่วัดจากจุดตั้งต้น ถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน x





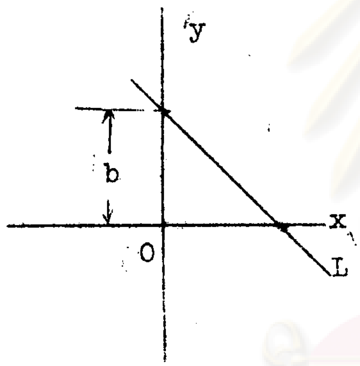


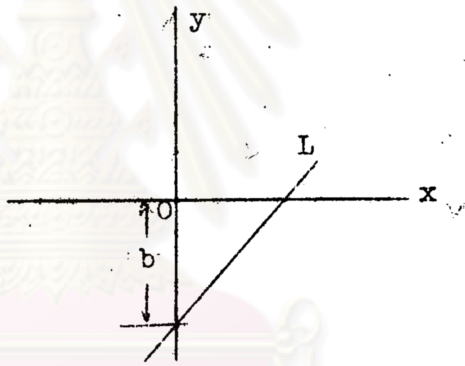


ระยะตัดแกน x = a   ระยะตัดแกน x = $-a$

จุดตัดแกน x = (a , o)   จุดตัดแกน x = ($-a$, o)

<u>ระยะตัดแกน</u> y (y - Intercept) คือระยะตามแนวแกน y ที่วัดจากจุดตั้งต้นถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน y





ระยะตัดแกน y = b   ระยะตัดแกน y = $-$ b

จุดตัดแกน y = (o , b)   จุดตัดแกน y = (o , $-$b)

<u>รูปมาตรฐานของสมการเส้นตรงแบบต่าง ๆ ตามเงื่อนไขที่กำหนด</u>

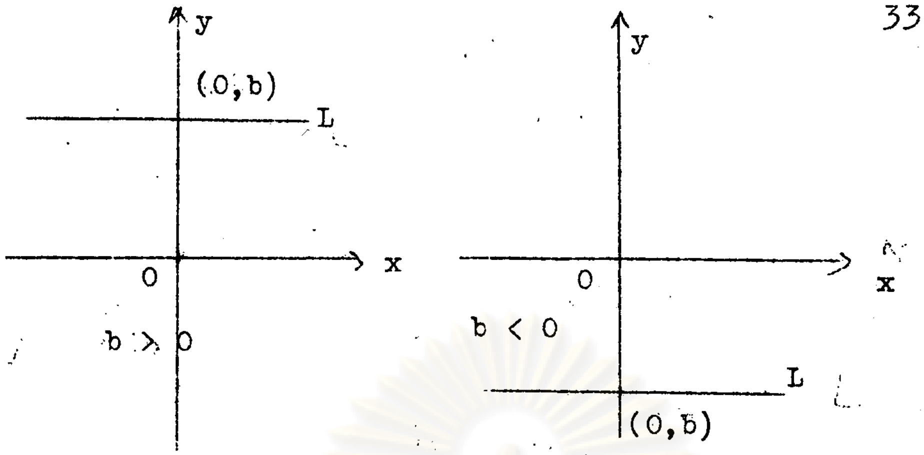
<u>แบบที่ 1 เส้นตรงที่ขนานกับแกน x</u>

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และตัดแกน y ที่จุด (o , b)

ถ้า $b > o$ เส้นตรงอยู่เหนือแกน x

ถ้า $b = o$ เส้นตรง L คือแกน x

ถ้า $b < o$ เส้นตรง L จะอยู่ใต้แกน x



ในกรณีนี้ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

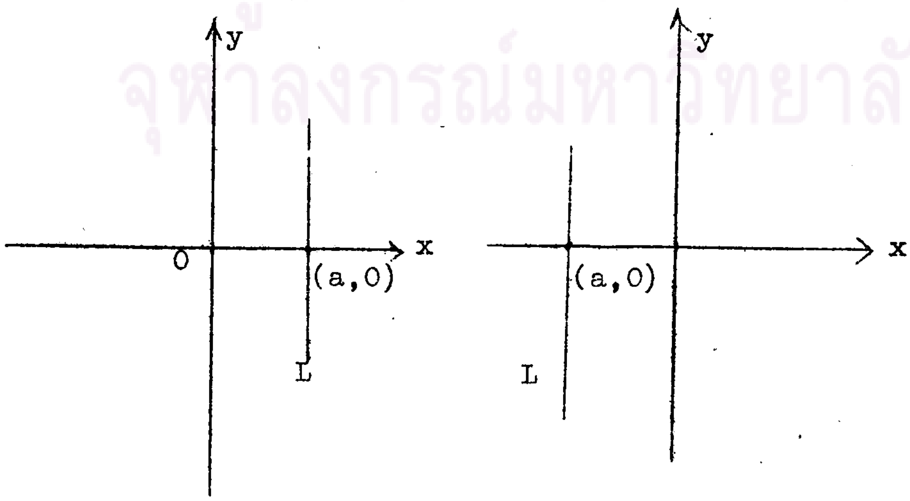
$$\{ (x , y) \in R \times R \mid y = b \}$$

หรือเขียนสั้น ๆ ได้ว่า สมการเส้นตรง L คือ

$$y = b$$

<u>แบบที่ 2 เส้นตรงที่ขนานกับแกน y</u>

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และตัดแกน x ที่จุด (a ,o)
ถ้า $a > o$ เส้นตรงจะอยู่ทางขวามือของแกน y
ถ้า $a = o$ เส้นตรง L คือแกน y
ถ้า $a < o$ เส้นตรง L จะอยู่ทางซ้ายมือของแกน y



ในกรณีนี้ ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\{ (x, y) \in R \times R \,/\, x = a \}$$

หรือกล่าวสั้น ๆ ได้ว่า สมการของเส้นตรง L คือ

$$x = a$$

แบบที่ 3 เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน m

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน m สมมุติให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L จะได้ว่า

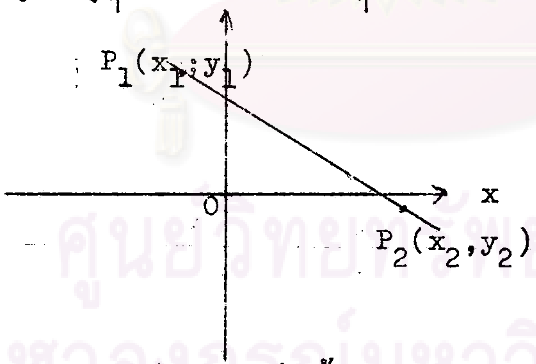
ความชันของส่วนของเส้นตรง $PP_1 = m$

นั่นคือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

หรือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\{ (x, y) \in R \times R \,/\, y - y_1 = m(x - x_1) \}$$

หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า สมการเส้นตรง L คือ

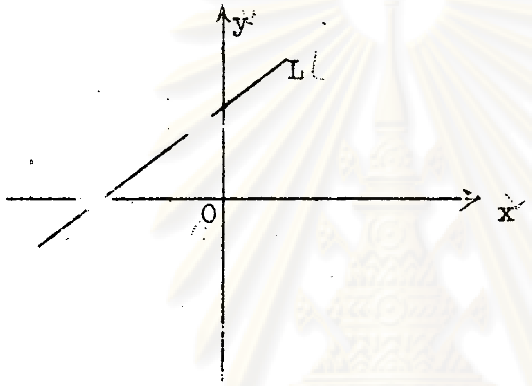
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

แบบที่ 4 เส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน y เท่ากับ b

ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน y = b เพราะฉะนั้น เส้นตรงจะต้องผ่านจุด (o , b) ดังนั้นจะได้สมการเส้นตรง L ดังนี้

$$y - b = m(x - o)$$

หรือ $y = mx + b$



เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\{(x , y) \in R \times R \,/\, y = mx + b\}$$

หรือ สมการเส้นตรง L คือ

$$y = mx + b$$

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. เส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 4) มีความชัน $-\frac{1}{2}$

ข. เส้นตรงที่ผ่านจุด (−1 , −3) มีความชัน 3

ค. เส้นตรงมีความชัน 2 และตัดแกน y ที่จุด (0 , 5)

วิธีทำ

ก. จากสูตรสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1 , y_1) และมีความชัน m สมการที่ได้ คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

เพราะฉะนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 4) มีความชัน $-\frac{1}{2}$ คือ

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$2y - 8 = -x + 3$$

หรือ $x + 2y - 11 = 0$

ข. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1 , -3)$ มีความชัน 3 คือ

$$y + 3 = 3(x + 1)$$

$$y - 3x = 0$$

ค. สมการเส้นตรงที่มีความชัน 2 และมีระยะตัดแกน $x = 5$ คือ

$$y = 2x + 5$$

<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. สมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และตัดแกน y ที่จุด $(0 , -3)$ คือ

    ____

2. สมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และตัดแกน x ที่จุด $(0 , 7)$ คือ

    ____

3. สมการเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{2}{3}$ และผ่านจุด $(2 , -4)$ คือ

    ____

4. สมการเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{1}{2}$ และตัดแกน y ที่จุด $(0 , -2)$ คือ

    ____

5. สมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{1}{3}$ และมีระยะตัดแกนเท่ากับ -2 คือ

    ____

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0 , -2)$ และเส้นตรงมีมุมเอียงเท่ากับ 45°
2. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น -2 และผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมจุด $(4 , -2)$ และ $(2 , -6)$
3. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3 , -1)$ และมีระยะตัดแกน $y = -2$ มีสมการเป็น

อย่างไร

3. <u>ขั้นสอนและกิจกรรม</u>

1. ยกตัวอย่างสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ขึ้นมา 1 ตัวอย่าง เช่น $y = 5$ แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของสมการนี้ ครูใช้คำถามถามนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของกราฟว่า ขนานกับแกนใด , ตัดแกน y ที่จุดใดต่อไปก็ยกตัวอย่างอีก 2 ตัวอย่าง ใช้คำถาม ถามในลักษณะที่คล้ายคลึง เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการหารูปของสมการทั่วไปที่ขนานกับแกนx หลังจากนั้นครูเขียนความสัมพันธ์ของสมการแบบที่ 1 ให้นักเรียนดู

2. ยกตัวอย่างสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ขึ้นมา 1 ตัวอย่าง เช่น $x = 3$ แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของสมการนี้ หลังจากนั้นครูใช้คำถาม ถามนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของกราฟว่าขนานกับแกนใด ตัดแกน x ที่จุดใด หลังจากนั้นยกตัวอย่างอีก 2 ตัวอย่าง ใช้คำถามถามเพื่อจะนำไปสู่ข้อสรุปในการหารูปของสมการทั่วไปที่ขนานกับแกน y แล้วให้นักเรียนเขียนในรูปของความสัมพันธ์ด้วย

3. ฝึกนักเรียนเพื่อให้เกิดความคล่องเกี่ยวกับสมการใน 2 แบบนั้น โดยยกตัวอย่างสมการขึ้นมา เช่น $y = \frac{1}{3}$, $x = 0$, ถามนักเรียนว่า สมการที่มีลักษณะขนานกับแกนใด สมการจะผ่านจุดใดเป็นต้น

4. ทบทวนเรื่องความชันของเส้นตรงและวิธีหาความชันของเส้นตรง เพื่อนำไปสู่สมการเส้นตรงแบบที่ 3

5. กำหนดเส้นตรงขึ้นมาเส้นหนึ่งที่มีความชันเท่ากับ 2 และผ่านจุด (1 , 3) ถ้าจุด A (x , y) เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ ถามนักเรียนว่าความชันซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 ได้มาอย่างไร

6. จากข้อ 5 จะได้ $2 = \frac{y - 3}{x - 1}$ หรือสมการเส้นตรงที่ได้คือ $2x - y + 1 = 0$ จะเป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 3) และมีความชันเท่ากับ 2

7. กำหนดเส้นตรงขึ้นมาให้มีความชันเท่ากับ m และผ่านจุด $P_1(x_1 , y_1)$ ถ้าจุด P (x , y) เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ ให้นักเรียนหาสมการเส้นตรงเส้นนี้ ถ้านักเรียนทำไม่ได้ ให้ครูใช้คำถามชักนำนักเรียนให้เห็นแนวทางเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป การหาสมการเส้นตรง

ที่ผ่านจุดหนึ่งและกำหนดความชันของเส้นตรงให้

8. สมการแบบที่ 4 ก็ทำเช่นเดียวกัน

9. ให้นักเรียนช่วยกันทำตัวอย่างบนกระดานดำ

10. นักเรียนช่วยกันสรุปรูปของสมการทั้ง 4 แบบอีกครั้งหนึ่ง

<u>ข้อสรุป</u>

1. สมการ $x = a$ คือสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และมีระยะตัดแกน $x = a$

2. สมการ $y = b$ คือสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และมีระยะตัดแกน $y = b$

3. สมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$ คือสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และเส้นตรงมีความชันเท่ากับ m

4. สมการ $y = mx + b$ คือสมการของเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $y = b$ และเส้นตรงมีความชันเท่ากับ m

4. <u>การวัดและการประเมินผล</u>

1. สังเกตจากความสนใจ

2. สังเกตจากการตอบคำถาม

3. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง

4. ให้ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 8

สมการเส้นตรง

1 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักเรียนรู้วิธีสร้างสมการเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ให้

1.1 นักเรียนสามารถสร้างสมการเส้นตรงได้เมื่อ

1.1.1 กำหนดจุดผ่านให้ 2 จุด

1.1.2 กำหนดระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ให้

1.2 เมื่อกำหนดสมการของเส้นตรงให้นักเรียนสามารถ

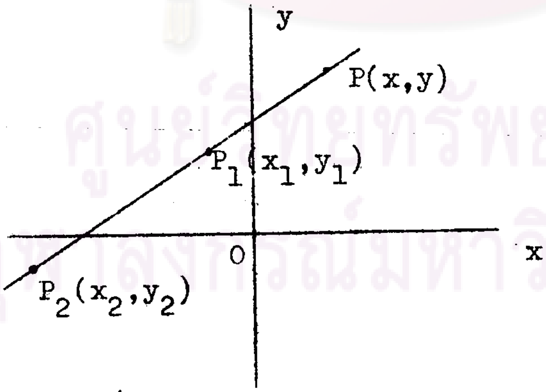
1.2.1 หาความชันและระยตัดแกน y ได้

1.2.2 หาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ได้

2. รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

แบบที่ 5 เส้นตรงผ่านจุด 2 จุด

สมมุติให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L



เพราะว่า ความชันของเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด $P(x, y)$ และ $P_1(x_1, y_1)$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

เพราะว่า ความชันของเส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

แต่ความชันของเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อมเท่ากัน

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\left\{ (x, y) \in R \times R = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right\}$$

หรือสมการของเส้นตรง L คือ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

<u>แบบที่ 6 เส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x เท่ากับ a และมีจุดตัดแกน y = b</u>

<u>ซึ่ง $a \neq o$ และ $b \neq 0$</u>

สมมุติให้ L เป็นเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x = a และจุดตัดแกน y = b โดยที่ $a = o$ และ $b = o$ เพราะฉะนั้นเส้นตรง L จะผ่านจุด (a, o) และ (o, b)

$$\text{ความชันของ } L = \frac{o - b}{a - o} = -\frac{b}{a}$$

เพราะฉะนั้น ถ้าลักษณะของเส้นตรงที่รู้ความชันและระยะตัดแกน $y = b$

จะได้สมการ $$y = -\frac{b}{a}x + b$$

หรือ $$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

ดังนั้น $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง L คือ

$$\left\{ (x, y) \in R \times R \,/\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \right\}$$

หรือกล่าวว่า สมการของเส้นตรง L คือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1 จงหาสมการของเส้นตรงที่

ก. ผ่านจุด (−2 , 4) และ (0 , 4)

ข. ตัดแกน x และ แกน y ห่างจากจุดกำเนิดเป็น − 1 และ − 4 ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u>

ก. เพราะว่าสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดมีรูปสมการ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

แทนค่า

$$\frac{y - 4}{x + 2} = \frac{4 - 4}{-2 - 0}$$

$$-2(y - 4) = 0(x + 2)$$

$$-2y + 8 = 0$$

หรือ $2y - 8 = 0$

ข. เพราะว่าสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $y = b$ และระยะตัดแกน

คือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ในที่นี้ $x = -1$, $y = -4$

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$4x + y + 4 = 0$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน y ห่างจากจุดตั้งต้นเป็น 3 เท่าของระยะตัดแกน x และผ่านจุด $(2, 3)$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ระยะตัดแกน $x = a$

ระยะตัดแกน $y = 3a$

จาก $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{3a} = 1$$

$$a = 3$$

ระยะตัดแกน $x = 3$

ระยะตัดแกน $y = 9$

สมการเส้นตรง คือ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$$

หรือ $3x + y - 9 = 0$

<u>วิธีหาความชันและจุดที่เส้นตรงตัดแกน y เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้</u>

จากสมการของเส้นตรงที่มีความชัน m และมีจุดตัดแกน $y = b$

คือ $y = mx + b$

ดังนั้น เมื่อต้องการหาความชันและจุดตัดแกน y ของเส้นตรง

เมื่อกำหนดสมการให้ จึงสามารถทำได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป

$y = mx + b$ แล้วจะได้ว่า m คือความชันของเส้นตรง

b คือจุดตัดแกน y

ตัวอย่าง 3 จงหาความชันของเส้นตรง $5x + 3y = 6$ และจุดที่เส้นตรงนี้ตัดแกน y

วิธีทำ สามารถเขียนสมการ $5x + 3y = 6$ ในรูป

$$y = \frac{-5x}{3} + 2$$

หรือ $y - 2 = \frac{-5}{3}(x - 0)$

ดังนั้น เส้นตรงนี้มีความชันเท่ากับ $-\frac{5}{3}$ และตัดแกน y ที่จุด $(0 , 2)$

โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง

1. สมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-3 , -1)$ และมีระยะตัดแกน $y + -2$ มีสมการเป็นอย่างไร________________
2. สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เท่ากัน และเครื่องหมายเหมือนกันผ่านจุด $(4 , 2)$ คือสมการเป็นอย่างไร ______
3. จงหาความชันและระยะตัดแกน y จากสมการ $2y = 3x + 5$

โจทย์การบ้าน

1. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2 , 1)$ และ $(0 , 0)$ มีสมการเป็นอย่างไร
2. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2 , 1)$ และมีระยะตัดแกน x เป็น 5 มีสมการเป็นอย่างไร
3. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3 , -1)$ และมีระยะตัดแกน $y = -2$ มีสมการเป็นอย่างไร
4. จงหาสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x และแกน y เท่ากัน และเครื่องหมายเหมือนกัน และผ่านจุด $(4 , 2)$

5. จงหาความชันและ y - intercept จากสมการเส้นตรง

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

6. จงหาความชันและระยะตัดแกน y ของสมการ

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 2$$

3. ขั้นสอนและกิจกรรม

1. ทบทวนการหาสมการเส้นตรงที่กำหนดความชันและจุดผ่านให้ 1 จุด โดยการให้ทำโจทย์ง่าย ๆ ไม่ซับซ้อน เช่นถามว่าสมการเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{1}{2}$ และผ่านจุด (2 , 0) มีสมการเป็นอย่างไร

2. กำหนดจุดผ่านให้ 2 จุด ให้นักเรียนหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดนี้ เพื่อจะนำเข้าสู่เรื่องการหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด

3. อธิบายการหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด ตามเนื้อหาที่กล่าวข้างต้น โดยนำมาสัมพันธ์กับความรู้ที่ว่าความชันของเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อมเท่ากัน แล้วจะได้นำไปสู่ข้อสรุปของสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด

4. อธิบายการหาสมการเส้นตรงที่ทราบระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ตามเนื้อหาที่กล่าวข้างต้น โดยนำไปสัมพันธ์กับสมการที่รู้ความชัน และระยะตัดแกน เพื่อจะให้ได้ข้อสรุปสูตรการหาสมการที่ทราบระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

5. อธิบายตัวอย่างโดยการให้นักเรียนช่วยกันทำ

6. อธิบายตัวอย่างที่ 2 แล้วให้นักเรียนทำด้วยตนเอง

7. ยกตัวอย่างสมการเส้นตรง $y = mx + b$ แล้วตั้งคำถามถามนักเรียนว่าสมการนี้มีความชันเป็นเท่าไรและระยะตัดแกน y เป็นเท่าไร หลังจากนั้นยกตัวอย่างสมการเส้นตรงมา 1 ตัวอย่าง เช่น $2y + 3x - 2 = 0$ แล้วถามนักเรียนว่าจากสมการนี้ถ้าต้องการจะหาความชันของเส้นตรงและระยะตัดแกน y แล้วควรจะจัดสมการอย่างไร

8. อธิบายเพิ่มเติมให้นักเรียนเห็นว่า ถ้ามีสมการเส้นตรงมาให้แล้วต้องการหาความชันและระยะตัดแกน y ก็ให้ทำได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = mx + b$

9. อธิบายตัวอย่างและให้ช่วยกันสรุปหลักเกณฑ์ที่สำคัญดังนี้

ข้อสรุป

1. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2(x_2 , y_2)$ คือสมการ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2. สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$

คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

3. เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงมาให้ ถ้าต้องการทราบระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ให้จัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

4. การวัดผล

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง
4. ให้ทำโจทย์การบ้าน

คาบที่ 9

1. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เมื่อกำหนดสมการของเส้นตรงให้นักเรียนสามารถหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ได้

2. เมื่อกำหนดสมการซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยที่กำลังของตัวแปรทั้งสองเป็นหนึ่งสามารถบอกได้ว่าเป็นสมการของเส้นตรง

3. สามารถเขียนสมการในรูปทั่วไปได้

2. รายละเอียดเนื้อหาวิชา

วิธีหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้

จากสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$ คือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ดังนั้น เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้และต้องการหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y จึงสามารถทำได้ โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ แล้วจะได้ว่าระยะตัดแกน x เท่ากับ a และระยะตัดแกน y มีค่าเท่ากับ b

อีกวิธีหนึ่ง ที่ทำได้ เมื่อกำหนดสมการเส้นตรงให้ทำได้โดยอาศัยหลักที่ว่า ทุกจุดบนแกน x จะมีค่า $y = 0$ ดังนั้น ถ้าต้องการทราบจุดตัดบนแกน x ก็ให้แทนค่า $y = 0$ ในสมการแล้วหาค่า x ในทำนองเดียวกัน ทุก ๆ จุดบนแกน y จะมีค่า $x = 0$ ดังนั้น ถ้าต้องการทราบจุดตัดบนแกน y ก็ให้แทนค่า $y = 0$ ในสมการแล้วหาค่า ก็จะได้ตามต้องการ

ตัวอย่าง กำหนดสมการเส้นตรงเป็น $2x - 3y - 5 = 0$ จงหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

วิธีทำ เพราะว่า สมการ คือ $2x - 3y - 5 = 0$

หรือ $2x - 3y = 5$

$$\frac{2x}{5} - \frac{3y}{5} = 1$$

หรือ $\frac{2x}{5} + (\frac{-3}{5})y = 1$

ดังนั้น ระยะตัดแกน $x = \frac{2}{5}$ และระยะตัดแกน $y = \frac{-3}{5}$

<u>วิธีทำที่</u> 2 ให้ $y = 0$

$$\therefore \quad 2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

ให้ $x = 0$

$$-3y = 5$$

$$y = \frac{-3}{5}$$

ระยะตัดแกน x คือ $\frac{5}{2}$

ระยะตัดแกน y คือ $-\frac{5}{3}$

<u>รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง</u>

เส้นตรงทุกเส้นจะต้องมีสมการอยู่ในรูป

$$Ax + By + C = 0$$

โดยที่ A , B , C เป็นค่าคงที่ และ A , B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ในทำนองเดียวกัน

ถ้ากราฟของความสัมพันธ์ที่มีสมการ $Ax + By + C = 0$

โดยที่ A , B , C เป็นค่าคงที่ และ A , B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเป็นเส้นตรงเสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด (1,−1) และ

ก. ขนานกับเส้นตรง L_1 ที่ผ่านจุด (4 , −1) และ (−2 , 2)

ข. ตั้งได้ฉากกับเส้นตรง L_2 ที่ผ่านจุด (1 , −4) และ (2 , −2)

<u>วิธีทำ</u>

(ก) เพราะว่า ความชันของเส้นตรง L_1 คือ $-\frac{1-2}{4+2} = -\frac{1}{2}$

เนื่องจากเส้นตรงที่ขนานกันจะมีความชันเท่ากัน

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง L คือ $-\frac{1}{2}$

สมการของเส้นตรง L ซึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$ และผ่านจุด (1 , −1) คือ

$$y + 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

หรือ $x + 2y + 1 = 0$

(ข) เพราะว่าความชันของเส้นตรง L_2 คือ $-\frac{4-2}{1-2} = 6$

เส้นตรง L ตั้งฉากกับเส้นตรง L_2 ดังนั้นความชันของ L คือ $-\frac{1}{6}$

สมการเส้นตรง L ซึ่งมีความชัน $\frac{-1}{6}$ และผ่านจุด (1 , −1) คือ

$$y + 1 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

หรือ $x + 6y + 5 = 0$

<u>โจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง</u>

1. กำหนดสมการเส้นตรงเป็น $3x + 2y = 6$ จงหาระยะตัวแกน x และระยะตัดแกน y

2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , −3) และขนานกับเส้นตรง $3x - 5y - 15 = 0$

3. รูปสมการต่อไปนี้ข้อใดไม่ใช่สมการเส้นตรง

ก. $x = 5$

ข. $3x + 4xy + 2y = 0$

ค. $x^2 + 5xy + y^2 = 0$

ง. $x^2 - 5 = 4$

จ. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 6$

ฉ. $5xy = 10$

ข. $3x + 5y - 10 = 14$

<u>โจทย์การบ้าน</u>

1. จงหาสมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน $= -\frac{2}{3}$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $3x - 3y - 2 = 0$

2. จงหาสมการของเส้นตรง L ที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $L_1 = 2x - 5y + 3$ และ $L_2 = x - 3y - 7 = 0$ และตั้งได้ฉากกับเส้นตรง $L_3 = 4x + y - 120$

3. สมการเส้นตรงใดผ่านจุด $(2, -3)$

1. $y = 2x + 5$
2. $5y = -4x - 7$
3. $y = 2x$
4. $x - 3 = 0$
5. $y + 5 = 0$
6. $y + 3 = 0$

4. สมการของด้านของสามเหลี่ยมต่อไปนี้ ชุดไหนประกอบกันเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. $5x - 3y + 17 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$, $5x - 3y - 8 = 0$

ข. $x - 7y - 11 = 0$, $7x - 3y + 1 = 0$, $7x + y - 7 = 0$

ค. $x - 2y + 5 = 0$, $3x - 6y - 9 = 0$, $7x - 14y + 5 = 0$

ง. $x - y - 5 = 0$, $3x - 4 = 0$, $2x + y + 4 = 0$

5. รูปสมการต่อไปนี้ ข้อใดไม่ใช่สมการของเส้นตรง

ก. $\because = 3$

ข. $3x + 4y = 5$

ค. $x^2 - y^2 = 0$

ง. $x^2 - 5y + 3x = 1$

จ. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

ฉ. $2x + 5xy + y = 3$

3. <u>ขั้นสอนและกิจกรรม</u>

1. ยกตัวอย่างสมการเส้นตรงซึ่งอยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ แล้วถามนักเรียนว่าสมการนี้มีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เป็นเท่าไร

2. เริ่มเข้าสู่บทเรียนโดยตั้งปัญหาให้นักเรียนช่วยกันคิดว่า ถ้ามีสมการเส้นตรงอยู่สมการหนึ่ง แล้วต้องการที่จะทราบว่าเส้นตรงเส้นนี้จะมีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เป็นเท่าไร ควรจะทำอย่างไร ซึ่งถ้านักเรียนตอบไม่ได้ ก็ให้ครูวกกลับไปที่สมการซึ่งอยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ นั้นใหม่ เน้นให้เห็นส่วนที่แสดงถึงระยะตัดแกน y และระยะตัดแกน x ของสมการ

3. อธิบายเพื่อให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้นว่า ในการหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ของสมการเส้นตรงนั้น ทำได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ แล้วจะสามารถสรุปได้ว่าระยะตัดแกน x มีค่าเท่ากับ a ระยะตัดแกน y มีค่าเท่ากับ b

4. แสดงและอธิบาย วิธีคิดอีกวิธีหนึ่งให้นักเรียนดู เน้นให้เห็นว่าผลที่ได้นั้นจะเป็นอย่างเดียวกัน แต่จะเลือกทำวิธีใดนั้นก็ขึ้นอยู่กับความสะดวก

5. ให้นักเรียนช่วยกันทำตัวอย่างพร้อมกัน หลังจากนั้นครูอธิบายสรุปอีกครั้งหนึ่ง

6. ยกตัวอย่างสมการหลาย ๆ สมการ ทั้งที่เป็นสมการเส้นตรงและไม่เป็นสมการเส้นตรง แล้วถามความคิดเห็นของนักเรียนว่าเป็นสมการเส้นตรงหรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้านักเรียนตอบไม่ได้ ครูก็จะใช้วิธีแยกสมการออกเป็นสมการ 2 พวก พวกหนึ่งเป็นสมการเส้นตรง อีกพวกหนึ่งไม่เป็น แล้วให้นักเรียนพยายามหาข้อแตกต่างจนกว่าจะสรุปรูปทั่วไปของสมการเส้นตรงได้

7. ถ้านักเรียนสรุปไม่ได้ ให้ครูใช้คำถามนำ โดยถามเน้นให้สิ่งที่เป็นลักษณะที่สำคัญของสมการเส้นตรงแล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุป

8. อธิบายตัวอย่างการหาสมการเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขมาให้ ใช้คำถาม ๆ นักเรียนให้สรุปรูปทั่วไปของสมการเส้นตรง แล้วให้ทำโจทย์วัดผลท้ายชั่วโมง

ข้อสรุป

1. ในการหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ของสมการเส้นตรง ให้จัดสมการให้อยู่ในรูป $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ โดยที่จะได้ว่า

a คือระยะตัดแกน x และ b คือระยะตัดแกน y

2. รูปทั่วไปของสมการเส้นตรงจะอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$
เมื่อ A , B , C เป็นตัวคงที่ และ A , B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

การวัดผล

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ให้ทำโจทย์วัดผล
4. ให้ทำโจทย์การบ้าน

ภาคผนวก ง.

แบบสอบความคิดเห็นของนักศึกษาที่มีต่อการเรียนโดยใช้ศูนย์การเรียน

คำแนะนำในการทำแบบสอบ

แบบสอบชุดนี้ต้องการทราบความคิดเห็นของนักศึกษาที่มีต่อวิธีสอนโดยใช้ศูนย์การเรียน ซึ่งผู้วิจัยได้ทดลองสอนไปแล้ว ขอให้นักศึกษาตอบคำถามต่อไปนี้ตามความเป็นจริงเพื่อประโยชน์ในการวิจัย

คำสั่ง จงทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของนักศึกษา

การเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้ศูนย์การเรียน	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ
1. เข้าใจบทเรียนดีขึ้น			
2. เกิดความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น			
3. ได้ทำแบบฝึกหัดพอเพียงที่ต้องการ			
4. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์			
5. ฝึกให้รู้จักศึกษาด้วยตนเอง			
6. สามารถสรุปบทเรียนได้ด้วยตนเอง			
7. มีความรับผิดชอบมากขึ้น			
8. มีความสนุกสนานในการเรียน			
9. บรรยากาศในการเรียนดีขึ้น			
10. ประหยัดเวลาในการเรียนมากกว่าเรียนในชั้นปกติ			
11. อยากเรียนด้วยวิธีนี้บ่อย ๆ			
12. ฝึกความซื่อสัตย์ต่อตนเอง			
13. สนองความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคล			

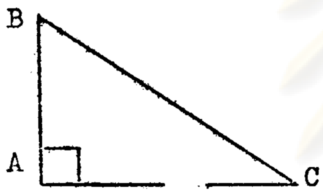
แบบทดสอบ

<u>คำสั่ง</u> ให้ทำในกระดาษคำตอบ จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ใต้ตัวอักษร ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ตรงข้อความที่ท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ในควอดตรันต์ที่ 3 หน่วยความยาวบนแกน x และแกน y จะเป็นจำนวนอะไร

ก. จำนวนบวกทั้งคู่ ข. จำนวนลบทั้งคู่

ค. จำนวนลบและจำนวนบวก ง. จำนวนบวกและจำนวนลบ

2. 

ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุม BAC เป็นมุมฉาก(ดังรูป) ให้ S เป็นเซ็ตของจุดภายในอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย ABC จะกำหนด x และแกน y ได้อย่างไร

ก. กำหนดแกน x ให้ทับด้าน AB และกำหนดแกน y ให้ทับด้าน AC

ข. อาจกำหนดแกน x และแกน y ให้อยู่ในลักษณะที่ทำให้สามารถแทนเซ็ตได้ด้วยเซ็ท $\left\{ (x , y)/0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b \right\}$
เมื่อ a เป็นความยาวของด้าน AB
b เป็นความยาวของด้าน BC

ค. อาจกำหนดแกน x และแกน y ให้อยู่ในลักษณะซึ่งถ้า (x , y)เป็นคู่ลำดับที่แทนสมาชิกของ S จะได้ว่า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

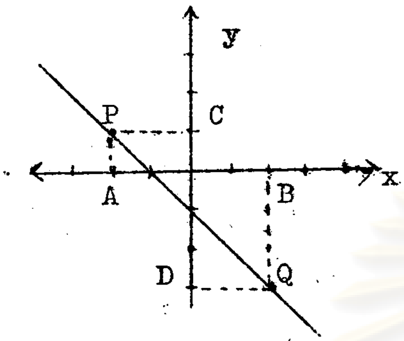
ง. กำหนดให้ จุดกำเนิดอยู่ที่จุด A แกน x และ y ทาบไปตามด้าน AB และ AC เสมอ

3. โคออร์ดิเนตของโปรเจคชันของจุด (x . y) บนแกน x และแกน y คืออะไร

ก. (o , y) (: , x) ข. (x , o) (y , o)

ค. (x , o) (o , y) ง. (y , o) (o , x)

4. โปรเจคชันของ PQ บนแกน x คือส่วนของเส้นตรงซึ่งมีโคออร์ดิเนตของจุดปลายทั้งสองข้างตรงกับข้อใด



ก. A (2 , 0) B (0 , 2)
ข. A (2 , 0) B (-2, 0)
ค. A (-2 , 0) B (2 , 0)
ง. A (0 , 1) B (0 , -3)

5. จากรูปในข้อ 4 โปรเจคชันของ PQ บนแกน y คือส่วนของเส้นตรง ซึ่งมีโคออร์ดิเนตของจุดปลายทั้งสองข้างตรงกับข้อใด

ก. C (1 , 0) และ D (3 , 0) ข. C (0 , 1) และ D (0 , -3)
ค. C (0 -3) และ D (0 , 1) ง. C (0 , 2) และ D (0 , -3)

6. กำหนดจุด A (-1 , -2) และ B (3 , -1) แล้วโปรเจคชันของ AB บนแกน x มีความยาวเป็นเท่าใด

ก. 1 ข. 2
ค. 4 ง. 12

7. กำหนดจุด C (-3 , 8) และ D (5 , -4) แล้วโปรเจคชันของ CD บนแกน y มีความยาวเท่าใด

ก. 2 ข. 3
ค. 4 ง. 12

8. ข้อความใด<u>ไม่ถูกต้อง</u>

ก. โปรเจคชันของจุด P (a , b) บนแกน x คือจุด (a , o) เสมอ
ข. โปรเจคชันของจุด P (a , b) บนแกน y คือจุด (o , b) เสมอ
ค. ส่วนของเส้นตรงย่อมสั้นหรือเท่ากับโปรเจคชันของมันเสมอ
ง. ถ้า CD เป็นโปรเจคชันของเส้นตรง AB แล้ว AB ย่อมขนาน CD

9. ระยะทางระหว่างจุด P (9 , 6) และ Q (9 , −5) มีค่าเท่าใด

ก. 1   ข. 9

ค. 10   ง. 11

10. ถ้าระยะทางระหว่างจุด A (2 , 3) และ B (k , o) เป็น 5 ค่า k เท่ากับเท่าไร

ก. −6   ข. −2

ค. 1   ง. 2

11. จุดบนแกน x ที่อยู่ห่างจากจุด P (−4 , 3) และ Q (3 , −4) เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน มีโคออร์ดิเนตเท่ากับเท่าใด

ก. (0 , 0)   ข. (9 , 0)

ค. (16 , 0)   ง. (−3 , 0)

12. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A (2 , 3) และผ่านจุด B (8 , −5) ความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลางมีค่าเท่าไร

ก. 5   ข. 10

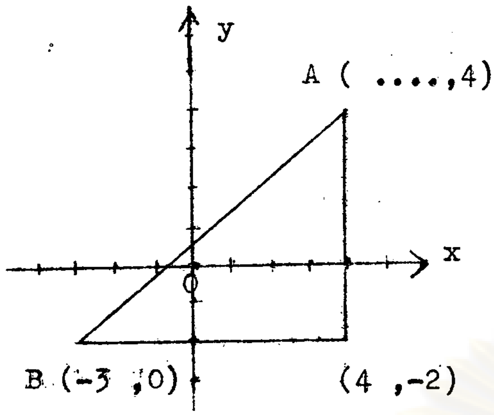
ค. 15   ง. 20

13. กำหนดจุด A (6 , 5) , B (1 , 3) และ C (5 , −7) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมใด ๆ สามเหลี่ยมนี้คือ สามเหลี่ยมชนิดใด

ก. สามเหลี่ยมด้านเท่า   ข. สามเหลี่ยมมุมฉาก

ค. สามเหลี่ยมหน้าจั่ว   ง. สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

14. ABC เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ ดังในรูป โดยมี BC ขนานกับแกน x พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับเท่าไร



ก. 1 ตารางหน่วย　　　　ค. 12 ตารางหน่วย

ข. 10 ตารางหน่วย　　　　ง. 21 ตารางหน่วย

15. กำหนดจุดสามจุด คือ P (-2 , -4) , Q (10 , 2) และ R (4 , -1) ความสัมพันธ์ของจุดทั้งสาม คืออะไร

ก. จุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน　　　　ข. จุดทั้งสามไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ค. จุดทั้งสามเป็นจุดยอดของ △ หน้าจั่ว　　　　ง. จุดทั้งสามเป็นจุดยอดของ △ ด้านไม่เท่า

16. โคออร์ดิเนตของจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด A (-7 , 8) และ B (5 , 2) คือข้อใด

ก. (-6 , 4)　　　　ข. (6 , -4)

ค. (1 , -5)　　　　ง. (-1 , 5)

17. ถ้า M (x , 4) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด A (4 , 9) และ B (-2 , -1) แล้ว x มีค่าเท่าไร

ก. -3　　　　ข. 1

ค. 3　　　　ง. 5

18. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม วงหนึ่งเป็น A (x , y) และ B (1 , 3) จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้เป็น C (4 , 2) โคออร์ดิเนตของ A (x , y) เป็นเท่าใด

ก. (8 , 1) ข. (7 , 1)

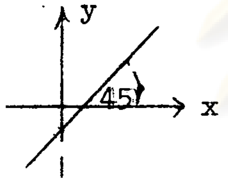
ค. (1 , 7) ง. (8 , 7)

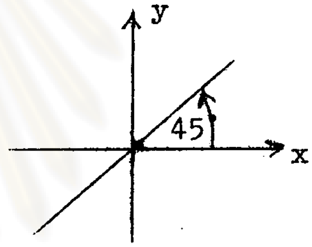
19. วงกลมวงหนึ่งมีจุด P (2 , 3) เป็นโปรเจคชันของจุดศูนย์กลางบนคอร์ด ซึ่งมีจุดปลายข้างหนึ่งเป็น Q (−1 , −4) โคออร์ดิเนตของจุดปลายอีกข้างหนึ่งของคอร์ดเป็นเท่าใด

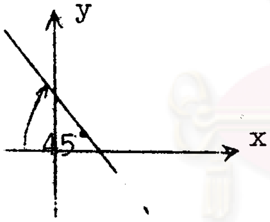
ก. (1 , −4) ข. (4 , 10)

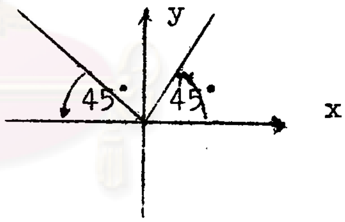
ค. (5 , 10) ง. (10 , 5)

20. มุมเอียงในข้อใด มีค่าเท่ากับ 45°

ก. 

ข. 

ค. 

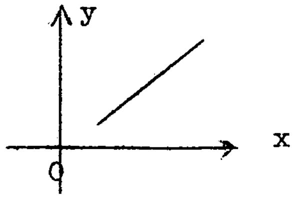
ง. 

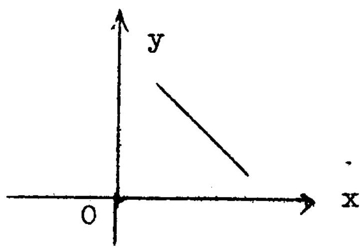
21. เมื่อใดความชันของเส้นตรงจึงจะเป็นลบ

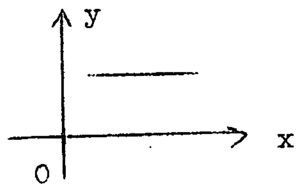
ก. เส้นตรงอยู่ใต้แกน x ข. ความเอียงเป็นมุมป้าน

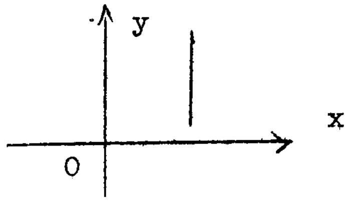
ค. ความเอียงเป็นมุมแหลม ง. ความเอียงอยู่ระหว่าง 0° ถึง 180°

22. จากรูปข้างล่างนี้ ข้อใดหาค่าความชันไม่ได้

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

23. มุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A (4 , 0) และ B (5 , $\sqrt{3}$) เป็นกี่องศา

ก. 45°　　　　ข. 60°

ค. 90°　　　　ง. 0°

24. ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด P (2 , 3) และ Q (−1 , 3) เป็นเท่าใด

ก. 0　　　　ข. 1

ค. 3　　　　ง. หาไม่ได้

25. เส้นตรงที่ผ่านจุด P (−5 , 3) และ Q (−2 , y) มีความชันเท่ากับ $-\frac{4}{3}$, y มีค่าเท่าไร

ก. 1　　　　ข. −1

ค. $\frac{4}{9}$　　　　ง. 6

26. ถ้าจุด A (a , b), B (−1 , 4) C (−4 , 2) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันแล้ว a จะมีค่าเท่าใด

ก. −4　　　　ข. −5

ค. −2　　　　ง. 2

27. เส้นตรงที่เชื่อมจุด A (−2 , 2) B (1 , 3) ขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดในข้อใด

ก. (1 , 2) และ (2 , −1)　　　　ข. (3 , 0) และ (0 , −1)

ค. (2 , 0) และ (−1, −1)　　　　ง. (4 , 2) และ (2 , 1)

28. เส้นตรงที่เชื่อมจุด P (k , 3) และ Q (−1 , 2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด R (3 , 2) และ S (1 , −2) ค่า k เท่ากับเท่าไร

ก. $-\frac{1}{4}$　　　　ข. $-\frac{1}{2}$

ค. $\frac{1}{2}$　　　　ง. 1

29. ความชันของเส้นตรง L = $\frac{3}{4}$ เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง L จะมีความชันเท่าไร

ก. $\frac{3}{4}$　　　　ข. $\frac{4}{5}$

ค. $-\frac{3}{4}$　　　　ง. $-\frac{4}{3}$

30. ความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งได้ฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด A (2 , −4) และ B (−1 , 5) เป็นเท่าใด

ก. 3　　　　ข. $\frac{1}{3}$

ค. $-\frac{1}{3}$　　　　ง. −3

31. เส้นตรงที่ผ่านจุด A (−3 , 2) และ B (4 , 1) กับเส้นตรงที่ผ่านจุด C (−1 , 0) และ D (2 , −1) จะสัมพันธ์กันอย่างไร

ก. ขนานกัน　　　　ข. ตั้งฉากกัน

ค. ไม่ขนานและไม่ตั้งฉาก　　　　ง. ยังสรุปไม่ได้

32. เส้นตรง L_1 ขนานกับแกน y ห่างจากแกน y เป็นระยะเท่ากับ −5 และเส้นตรง L_2 ขนานกับแกน x ห่างจากแกน x เป็นระยะเท่ากับ 3 L_1 และ L_2 มีรูปสมการอย่างใด

ก. x = 5 ; y = 3　　　　ข. x = −5 ; y = −3

ค. x = −5 ; y = 3　　　　ง. x = 3 ; y = 5

33. เส้นตรงที่ผ่านจุด P $(11, 15)$ และมีความชันเท่ากับ 2 มีรูปสมการอย่างไร

ก. $2x - y - 19 = 0$ ข. $y - 2x + 7 = 0$

ค. $y - 2x - 37 = 0$ ง. $2x - y + 5 = 0$

34. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด P $(0, -2)$ และเส้นตรงมีความเอียงเท่ากับ 45° คือสมการใด

ก. $x + y - 2 = 0$ ข. $x - y - 2 = 0$

ค. $y - x - 2 = 0$ ง. $x - x + 2 = 0$

35. สมการเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{1}{3}$ และมีระยะตัดแกน x เท่ากับ -2 คือสมการใด

ก. $3x + y + 2 = 0$ ข. $3x - y + 2 = 0$

ค. $x + 3y + 2 = 0$ ง. $x - 3y + 2 = 0$

36. เส้นตรงที่ผ่านจุด P $(1, 1)$ และ Q $(2, -2)$ มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $3x + y - 4 = 0$ ข. $3x - y - 4 = 0$

ค. $x + 3y - 4 = 0$ ง. $x - 3y + 4 = 0$

37. สมการเส้นตรงผ่านจุด P $(2, 1)$ และมีระยะตัดแกน x เป็น 5 มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $3x + y - 5 = 0$ ข. $3x - y + 5 = 0$

ค. $x + 3y + 5 = 0$ ง. $x + 3y - 5 = 0$

38. กราฟของสมการใดที่อยู่ห่างจากกราฟของสมการ

$2y + x = 4$ ด้วยระยะที่คงที่เสมอ

ก. $y = \frac{1}{2}x + 9$ ข. $2x + y = 9$

ค. $2y = x + 5$ ง. $y = -\frac{1}{2}x - 3$

39. จากสมการในข้อต่อไปนี้ กราฟของสมการใดมีความชันเป็นศูนย์

ก. $x - y = 0$ ข. $x = 0$

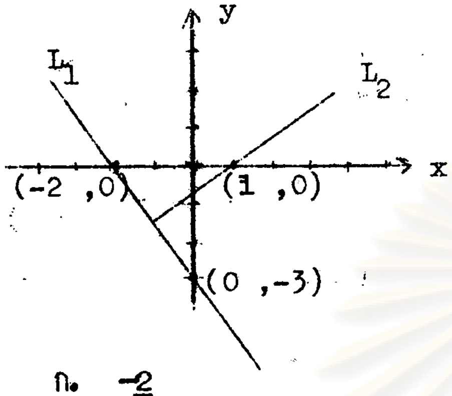
ค. $2y = 3$ ง. $x = 5$

40. โคออร์ดิเนตในข้อใดเป็นจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรง $2y = 5$

ก. (2.5 , 3)　　　　ข. (3 , 2.5)

ค. (5 , 2)　　　　ง. (2 , 5)

41. จากรูป L_1 และ L_2 เป็นส่วนของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกัน



ถ้า $y = mx + c$ เป็นสมการของเส้นตรง L_2 แล้ว c จะมีค่าเท่าไร

ก. $-\frac{2}{3}$　　　　ข. $\frac{3}{2}$

ค. $-\frac{3}{2}$　　　　ง. $\frac{2}{3}$

42. เส้นตรงซึ่งมีระยะตัดแกน x เท่ากับ -8 และระยะตัดแกน y เท่ากับ -9 มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $8x + 9y - 72 = 0$　　　　ข. $9x + 8y - 72 = 0$

ค. $9x + 8y + 72 = 0$　　　　ง. $8x + 9y + 72 = 0$

43. เส้นตรง $4y + 3x - 7 = 0$ มีความชันเท่าไร

ก. $-\frac{4}{3}$　　　　ข. $-\frac{3}{4}$

ค. $\frac{3}{4}$　　　　ง. $\frac{4}{3}$

44. เส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 1) และขนานกับเส้นตรง $3x + 2y - 6 = 0$ มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $3x + 2y - 1 = 0$　　　　ข. $2x - 3y + 1 = 0$

ค. $2x + 3y + 1 = 0$　　　　ง. $3x + 2y - 5 = 0$

45. เส้นตรงที่ผ่านจุด P (5 , 1) และตั้งฉากกับเส้นตรง $x - 4y + 7 = 0$ มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $x + 4y - 9 = 0$　　　　ข. $x - 4y - 1 = 0$

ค. $4x + y - 21 = 0$　　　　ง. $4x - y - 19 = 0$

46. สมการของเส้นตรงใดที่ผ่านจุด (2 , −3)

ก. $y = 2x + 5$ ข. $5y = -4x - 7$

ค. $x - 3 = 0$ ง. $y + 5 = 0$

47. เส้นตรง $2x + 3y = 4$ จะมีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เท่ากับเท่าไร

ก. $2, \frac{3}{4}$ ข. $2 , \frac{4}{3}$

ค. $\frac{1}{2} , \frac{3}{4}$ ง. $2 , 3$

48. เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x + 5y = 7$ และผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด A (2 , 7) และ B (−4 , 1) มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $2x + 5y - 21 = 0$ ข. $2x + 5y - 18 = 0$

ค. $2x - 5y - 22 = 0$ ง. $2x - 5y + 9 = 0$

49. เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 2y = 0$ และผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมระหว่างจุด A (5 , −3) และ B (1 , 1) มีรูปสมการเป็นอย่างไร

ก. $3x - 2y - 11 = 0$ ข. $3x + 2y - 7 = 0$

ค. $2x - 3y - 9 = 0$ ง. $2x + 3y - 3 = 0$

50. ข้อความข้อใดถูกต้องที่สุด

ก. (x , y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงดังนั้นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x , y) \in RXR / x - x_1 \; m(y - y_1)$ คือเส้นตรงซึ่งมีความชัน M และผ่านจุด (x_1 , y_1)

ข. ถ้าเส้นตรงใดขนานกับแกน y ความชันของเส้นตรงนั้นเท่ากับ 1

ค. สมการ $Ax + By + C = 0$ เป็นสมการของเส้นตรง

ง. สมการ $Ax + By + c = 0$ ซึ่งมี A , B,C เป็นตัวคงที่ โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ถ้า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ ค่า $-\frac{C}{B}$ คือระยะตัดแกน y

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุนันท์ ปัทมาคม
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พร้อมพรรณ อุดมสิน
3. อาจารย์ ดร.สุวัฒนา อุทัยรัตน์

ประวัติผู้เขียน

นายประเสริฐ ภู่เงิน จบปริญญาการศึกษาบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน เมื่อปีการศึกษา 2519 เข้าศึกษาต่อในสาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2522 ปัจจุบันเป็นอาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูบุรีรัมย์