บทที่ 2
การคำนวณศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์

การคำนวณหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเบานด์ดารีเอลิเมนต์เป็นวิธีหนึ่งในวิธีเชิงตัวเลข. ความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายอย่าง เช่น การจำลองขอบเขต การประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้า เทคนิกการอินทิเกรต การหาผลเฉลยของระบบสมการ เป็นต้น. รายละเอียดของวิธีและเทคนิกการคำนวณแสดงดังต่อไปนี้.

2.1 สมการเบานด์ดารีเอลิเมนต์

บริเวณเอกพันธุ์(Homogeneous Region) Ω ในรูปที่ 2.1 ที่มีขอบเขตโดยรอบ Γ และปราศจากประจุค้าง(Space Charge) จะมีค่าศักย์ไฟฟ้า ϕ ในบริเวณเป็นไปตามสมการของลาปลาซ

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{2.1}$$

เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีน(Green's Theorem) และเงื่อนไขขอบเขต(Boundary Condition) กับบริเวณดังกล่าว จะได้สมการเบานด์ดารีเอลิเมนต์[5] ดังนี้

$$c_i\phi_i + \int_{\Gamma}\phi\, q_i\, d\Gamma = \int_{\Gamma} E_n\, w_i\, d\Gamma \tag{2.2}$$

โดยที่ i คือตำแหน่งใดๆ ที่อยู่ภายในหรือบนขอบเขต,

c_i คือค่าคงที่,

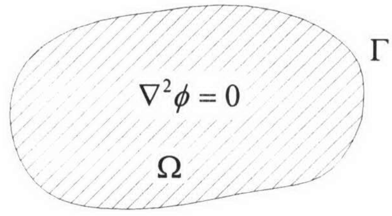
ϕ_i คือศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง i,

E_n คือสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวของขอบเขต Γ,

w_i คือผลเฉลยพื้นฐาน(Fundamental Solution)ที่ตำแหน่ง i และ

q_i คืออนุพันธ์ของ w_i ในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิว($q_i = \partial w_i / \partial n$).

c_i มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อตำแหน่ง i ไม่ได้อยู่บนขอบเขต และมีค่าอยู่ในช่วง (0,1) เมื่อตำแหน่ง i อยู่บนขอบเขต โดยขึ้นอยู่กับมุมตันที่ตำแหน่ง i.



รูปที่ 2.1 บริเวณเอกพันธุ์

2.2 การจำลองรูปร่างของขอบเขต

ในการจำลองรูปร่างของขอบเขต ฟังก์ชันรูปร่างทำหน้าที่จับคู่จากพิกัดจริงไปยังพิกัดเฉพาะที่(Local Coordinate) [6] ดังรูปที่ 2.2 และมีสมการเป็น

$$\mathbf{P} = N_1\mathbf{b}_1 + N_2\mathbf{b}_2 + N_3\mathbf{b}_3 + \ldots + N_m\mathbf{b}_m = \sum_{\alpha=1}^{m} N_\alpha\,\mathbf{b}_\alpha \tag{2.3}$$

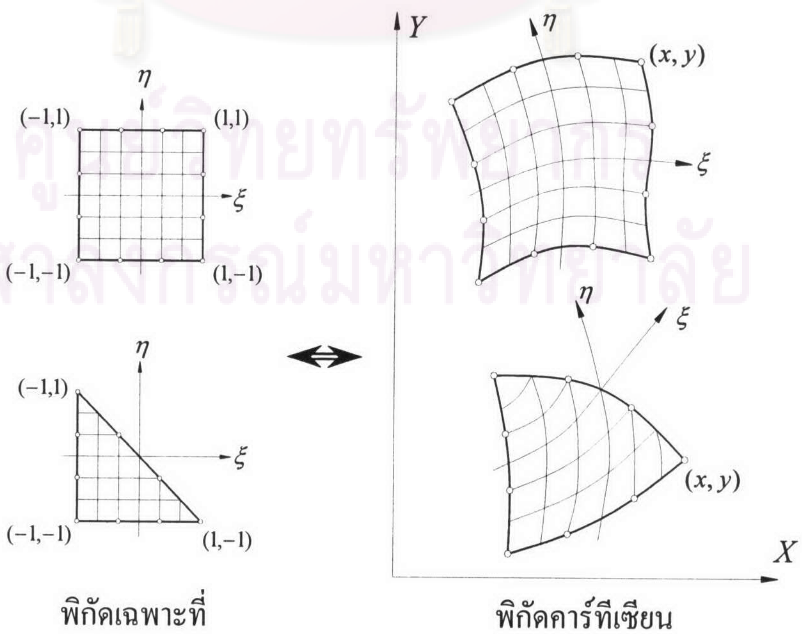
โดยที่ $\mathbf{P}$ คือเวกเตอร์พิกัดของพื้นผิวซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัดเฉพาะที่,

N_α คือฟังก์ชันรูปร่างของข้อมูลลำดับที่ α,

m คือจำนวนข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการสร้างขอบเขต และ

$\mathbf{b}_\alpha$ คือข้อมูลลำดับที่ α ที่ใช้ในการสร้างขอบเขต.

$\mathbf{b}_\alpha$ สามารถเป็นได้ทั้งเวกเตอร์พิกัด, เวกเตอร์สัมผัส และอื่นๆ ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้. บทที่ 3 จะกล่าวถึงฟังก์ชันรูปร่างชนิดต่างๆ และข้อมูลที่ใช้ในการสร้างขอบเขตด้วยฟังก์ชันรูปร่างชนิดนั้นๆ.



รูปที่ 2.2 การจับคู่ระหว่างพิกัดเฉพาะที่กับพิกัดคาร์ทีเซียน

2.3 การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนเอลิเมนต์

ในทำนองเดียวกันกับการคำนวณหาค่าพิกัด เราสามารถประยุกต์ใช้ฟังก์ชันรูปร่างกับตัวแปรศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนเอลิเมนต์ใดๆ ได้เป็น

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{N}_{\alpha}^{(U)} \phi_{\alpha} \tag{2.4}$$

$$E_n = \sum_{\alpha=1}^{m} \mathrm{N}_{\alpha}^{(E)} \left(E_n\right)_{\alpha} \tag{2.5}$$

โดยที่ ϕ_{α} และ $\left(E_n\right)_{\alpha}$ คือค่าศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากลำดับที่ α บนเอลิเมนต์ ตามลำดับ และ

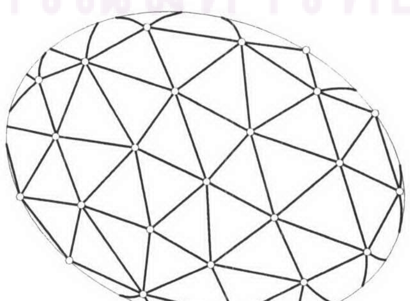
$N_{\alpha}^{(U)}$ และ $N_{\alpha}^{(E)}$ คือฟังก์ชันการประมาณของศักย์และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากของข้อมูลลำดับที่ α ตามลำดับ.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเชิงเส้นและกำลังสองในการประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก. (รายละเอียดในการคำนวณของฟังก์ชันรูปร่างแสดงในบทที่ 4.)

2.4 การสร้างระบบสมการเบานด์ดารีเอลิเมนต์ในระบบสามมิติ

จากสมการเบานด์ดารีเอลิเมนต์และการประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าของขอบเขต ในที่นี้จะยกตัวอย่างการสร้างระบบสมการเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาในบริเวณสามมิติดังนี้.

เริ่มจากการแบ่งขอบเขตทั้งหมดออกเป็นขอบเขตย่อยหรือเอลิเมนต์ย่อยทั้งหมด N เอลิเมนต์ และได้ปมทั้งหมด M ปม ดังรูปที่ 2.3 โดยจำนวนปมขึ้นอยู่กับลักษณะเอลิเมนต์ที่แบ่ง. ที่ปม i ใดๆ สามารถเขียนสมการที่ (2.2) โดยใช้การประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนเอลิเมนต์ดังสมการที่ (2.4) และ (2.5) ได้เป็น



รูปที่ 2.3 การแบ่งขอบเขตทั้งหมดออกเป็นเอลิเมนต์

$$c_i\phi_i + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} \left(\sum_{j=1}^{m_R} \left(N_j^{(U)} \phi_{Rj} \right) q_i \right) d\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} \left(\sum_{j=1}^{m_R} \left(N_j^{(E)} (E_n)_{Rj} \right) w_i \right) d\Gamma \tag{2.6}$$

โดยที่ ϕ_{Rj} และ $(E_n)_{Rj}$ คือศักย์และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากลำดับที่ j บนเอลิเมนต์ที่ k ตามลำดับ และ

m_R คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนเอลิเมนต์ที่ k โดยขึ้นอยู่กับชนิดของฟังก์ชันการประมาณของศักย์และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก.

เมื่อจัดตัวแปรในสมการที่ (2.6) จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\sum_{j=1}^{M} H_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{M} G_{ij} (E_n)_j \tag{2.7}$$

โดยที่ H_{ij} และ G_{ij} คือสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการอินทิเกรตบนเอลิเมนต์ย่อยทั้งหมดที่มีข้อมูลที่ j อยู่ (ϕ_j หรือ $(E_n)_j$).

จากการประยุกต์ใช้สมการที่ (2.7) กับทุกๆ ปม เราสามารถเขียนสมการที่ (2.7) ได้ทั้งหมด M สมการ และจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}\mathbf{E}_n . \tag{2.8}$$

ค่า c_i ในสมการที่ (2.6) สามารถหาได้โดยวิธีอ้อมจาก[7]

$$c_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} H_{ij} . \tag{2.9}$$

w_i ซึ่งเป็นผลเฉลยพื้นฐานและอนุพันธ์ q_i ที่จุดใดๆ บนขอบเขตสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$w_i = \frac{1}{4\pi r} \tag{2.10}$$

$$q_i = -\frac{1}{4\pi r^2} \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_n \tag{2.11}$$

โดยที่ r คือระยะทางจากจุด i ไปถึงจุดที่คำนวณ,

$\boldsymbol{a}_r$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางจากจุด i ไปถึงจุดที่คำนวณ และ

$\boldsymbol{a}_n$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต(ในทิศทางพุ่งออกจากขอบเขต) ณ จุดที่คำนวณ.

เมื่อคำนวณค่าของตัวแปรต่างๆ และกำหนดค่าของขอบเขตให้กับสมการที่ (2.8) แล้ว จะหาผลเฉลยของระบบสมการ โดยใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์(Gauss Elimination Method).

2.5 เทคนิกการอินทิเกรตเชิงเลข

ค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์ **H** และ **G** ในสมการที่ (2.8) หาได้จากผลรวมของสมการอินทิกรัล

$$h_{ij} = \int_{\Gamma_k} N_j^{(U)} q_i d\Gamma \tag{2.12}$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_k} N_j^{(E)} w_i d\Gamma \tag{2.13}$$

โดยที่ h_{ij} และ g_{ij} คือผลที่ได้จากการอินทิเกรตผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ย่อย โดยจุดแหล่งกำเนิด(Source Point) อยู่ที่ปม i.

ลักษณะของสมการอินทิกรัลที่ (2.12) และ (2.13) แบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ อินทิกรัลไม่เอกฐาน(Nonsingular Integral) และอินทิกรัลเอกฐาน(Singular Integral). เมื่อจุดแหล่งกำเนิดอยู่บนเอลิเมนต์ที่ถูกอินทิเกรต สมการอินทิกรัลที่ได้จะเป็นอินทิกรัลเอกฐาน, แต่เมื่อจุดแหล่งกำเนิดไม่อยู่บนเอลิเมนต์ที่ถูกอินทิเกรต สมการอินทิกรัลที่ได้จะเป็นอินทิกรัลไม่เอกฐาน.

2.5.1 เทคนิกการอินทิเกรตไม่เอกฐาน

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับคำนวณสมการอินทิกรัลไม่เอกฐานจะประยุกต์ใช้วิธีการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์. วิ ธีนี้มีความถูกต้องสูงและสามารถเพิ่มความถูกต้องของคำตอบได้โดยไม่ต้องเปลี่ยนแปลงสมการหลัก เพียงแต่เพิ่มจำนวนจุดเกาส์(Gauss Point) ในการคำนวณ ทำให้ง่ายต่อการนำไปประยุกต์ใช้.

สมการการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์เขียนได้ดังนี้ [8]

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k f(\xi_k) + \kappa \tag{2.14}$$

โดยที่ $f(\xi)$ คือฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ต้องการอินทิเกรต,

W_k คือตัวประกอบน้ำหนัก(Weighting Factor),

ξ_k คือจุดเกาส์,

n คือจำนวนจุดเกาส์ และ

κ คือความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า.

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งประยุกต์สมการจากฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะใช้สมการ

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \sum_{kj=1}^{nj}\sum_{ki=1}^{ni} W_{ki}W_{kj} f(\xi_{ki},\eta_{kj}) + \kappa \tag{2.15}$$

โดยที่ $f(\xi,\eta)$ คือฟังก์ชันสองตัวแปรที่ต้องการอินทิเกรต,

ξ_{ki} , η_{kj} คือจุดเกาส์,

W_{ki} , W_{kj} คือตัวประกอบน้ำหนัก และ

ni, nj คือจำนวนจุดเกาส์ของตัวแปร ξ และ η ตามลำดับ.

<u>อินทิกรัลบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม</u>

ก่อนที่จะประยุกต์ใช้วิธีการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์ จำเป็นต้องเปลี่ยนขอบเขตของอินทิกรัลให้อยู่ในช่วง [-1,1] ซึ่งจะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเข้าช่วยดังนี้

$$\int_{\Gamma_k} f(x,y,z)\, d\Gamma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) J d\xi d\eta \tag{2.16}$$

โดยที่ J คือจาโคเบียนของเอลิเมนต์ มีค่าเท่ากับ

$$J = \left|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi} \times \frac{d\boldsymbol{x}}{d\eta}\right| \tag{2.17}$$

และ $\boldsymbol{x}$ คือเวกเตอร์พิกัดมีค่าเท่ากับ $[x \quad y \quad z]^T$.

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรสมการที่ (2.12) และ (2.13) ด้วยวิธีขั้นต้นจะได้สมการเป็น

$$h_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_j^{(U)} q_i J d\xi d\eta \tag{2.18}$$

$$g_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_j^{(E)} w_i J d\xi d\eta . \tag{2.19}$$

หลังจากนั้น ทำการประยุกต์ใช้วิธีการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร.

<u>อินทิกรัลบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม</u>

สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ค่าของตัวแปร ξ และ η แตกต่างกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมโดยช่วงของ ξ ในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะเปลี่ยนแปลงอยู่ระหว่าง [-1,-η] ดังรูปที่ 2.2. ดังนั้นหลังจากการเปลี่ยนตัวแปรสมการที่ (2.12) และ (2.13) จะได้สมการต่อไปนี้

$$h_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\eta} N_j^{(U)} q_i J d\xi\, d\eta \tag{2.20}$$

$$g_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\eta} N_j^{(E)} w_i J d\xi\, d\eta \tag{2.21}$$

และสามารถใช้วิธีการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์ ได้ดังนี้

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\eta} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{kj=1}^{nj}\left[\left(\frac{-\eta_{kj}+1}{2}\right)\sum_{ki=1}^{ni} W_{ki} W_{kj} f\left(\frac{-\eta_{kj}-1}{2} + \frac{-\eta_{kj}+1}{2}\xi_{ki}, \eta_{kj}\right)\right]. \tag{2.22}$$

2.5.2 เทคนิคการอินทิเกรตเอกฐาน

เมื่อจุดแหล่งกำเนิด (จุด i ในสมการที่ (2.12) และ (2.13)) อยู่บนเอลิเมนต์ที่ถูกอินทิเกรต ส่วนกลาง(Kernel)ของสมการอินทิกรัลจะเป็นเอกฐานบนเอลิเมนต์นั้น และทำให้ไม่สามารถคำนวณอินทิกรัลได้อย่างแม่นยำ จึงต้องมีวิธีการพิเศษเพื่อลดระดับความเป็นเอกฐานลง. การคำนวณสมการอินทิกรัลเอกฐานในระบบสามมิติมีพื้นฐานมาจากสมการอินทิกรัลเอกฐานในระบบสองมิติ. ดังนั้นจะเริ่มอธิบายขั้นตอนการคำนวณจากระบบสองมิติก่อนกล่าวดังนี้.

ในระบบสองมิติซึ่งส่วนกลาง $g(x)$ มีพจน์ $1/x$ ประกอบอยู่ จะใช้วิธีการประมาณพื้นที่แบบไฟไนต์พาร์ต(Finite Part Quadrature) ลดระดับความเป็นเอกฐาน.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{N} W_k f(x_k) + \kappa\end{aligned} \tag{2.23}$$

โดยที่ $f(x)$ คือฟังก์ชันซึ่งได้จากการลดระดับความเป็นเอกฐานของ $g(x)$ มีค่าเท่ากับ $g(x)\cdot x$,

x_k คือจุดที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการประมาณพื้นที่แบบไฟไนต์พาร์ต,

N คือจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการประมาณพื้นที่แบบไฟไนต์พาร์ต,

W_k คือตัวประกอบน้ำหนัก และ

κ คือความคลาดเคลื่อน.

ในระบบสามมิติจะใช้วิธีการแปลงพิกัดเชิงขั้ว(Polar Transformation)[9] เข้าช่วยในการลดระดับความเป็นเอกฐาน โดย

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int_{0}^{\theta_0}\int_{0}^{\rho_0(\theta)} f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta \tag{2.24}$$

เมื่อพิกัดเฉพาะที่ ξ และ η มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดเชิงขั้วดังนี้

$$\xi = \rho\cos\theta + \bar{\xi} \tag{2.25}$$

$$\eta = \rho\sin\theta + \bar{\eta} \tag{2.26}$$

โดยที่ $f(\xi,\eta)$ คือฟังก์ชันสองตัวแปรที่ต้องการอินทิเกรต,

$\theta_0, \rho_0(\theta)$ คือขอบเขตที่ได้จากการแปลงพิกัดเชิงขั้ว,

$(\bar{\xi},\bar{\eta})$ คือจุดเอกฐานบนเอลิเมนต์ในระบบพิกัดเฉพาะที่ และ

ρ, θ คือระบบพิกัดเชิงขั้วที่มีจุดเอกฐานเป็นจุดกำเนิด.

การหาค่าอินทิกรัลเอกฐานในสมการที่ (2.24) ทำโดยใช้วิธีการประมาณพื้นที่แบบไฟไนต์พาร์ตประมาณค่าอินทิกรัลชั้นใน และใช้วิธีการประมาณพื้นที่ของเกาส์-เลอช็องดร์ประมาณค่าอินทิกรัลชั้นนอก.