บทที่ 5

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear Programming)

<u>การโปรแกรมเชิงเส้นตรงคืออะไร</u>[1]

การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นระบบทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้แสดงให้เห็นถึงปัญหาที่เกี่ยวข้องนั้น คำว่า "เส้นตรง" (Linear) นั้น หมายความว่าความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Functions) ทั้งหลายในปัญหานั้นสามารถเขียนเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง (Linear Functions) ได้ ส่วนคำว่า "การโปรแกรม" (Programming) นั้น ในด้านนี้มิได้หมายถึงโปรแกรมในทางคอมพิวเตอร์ แต่หมายความใกล้เคียงกับคำว่า การวางแผน ดังนั้น การโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะเกี่ยวข้องกับการวางแผนในการประกอบกิจกรรมต่าง ๆ (Activities) เพื่อให้ได้มาซึ่งผลดีที่สุด (Optimal Result) โดยที่มีทางเลือกที่เป็นไปได้หลาย ๆ ทาง (Feasible Alternatives) นั่นคือการโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะสามารถนำมาใช้ได้กับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรซึ่งมีอยู่จำกัดให้แก่กิจกรรมต่าง ๆ ในทางที่เป็นไปได้และให้ผลดีที่สุด (Best possible way)

---

[1]Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman, <u>Operation Research</u>, 2d ed, (San Francisco : Holden. Day Inc., 1974) p.16

คุณสมบัติของโปรแกรมเชิงเส้นตรง[1]

โปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นระบบทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. มีตัวแปร (Variables) ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป ซึ่งค่าตัวแปรนั้นจะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ นั่นคือไม่เป็นค่าติดลบ

2. ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านี้สามารถเขียนเป็นสมการ หรืออสมการได้ (Equations or Inequalities)

3. สมการหรืออสมการนั้นเป็นสมการ หรืออสมการในเชิงเส้นตรง

สมมติ $xy \leq 1$

ทั้ง x และ y ยกกำลัง 1

แต่กำลังของอสมการไม่ใช่ 1

4. มีฟังก์ชั่นเป้าหมาย (Objective Function) ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของค่าตัวแปรที่ได้กล่าวไว้ในข้อ 1 และสมการเป้าหมายนั้นเป็นสมการหรืออสมการในเชิงเส้นตรง (Linear Function)

5. มีจุดประสงค์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชั่นเป้าหมายนั้นมีค่ามากที่สุด Maximize หรือมีค่าน้อยที่สุด (Minimize)

6. มีข้อจำกัด (Constraints) ซึ่งจะกำหนดว่าจะสามารถทำให้บรรลุฟังก์ชั่นเป้าหมายได้มากน้อยเพียงไร และข้อจำกัดนั้นสามารถเขียนเป็นสมการในเชิงเส้นตรงได้ ดังนี้จะขอยกตัวอย่างง่าย ๆ เพื่อให้เห็นชัด

$$\text{Maximize} \quad 3x + 5y = Z \qquad (1)$$

[1] David Anderson, Dennis J. Sweeney and Thomas A. Williams, Linear Programming for Decision Making - An Application Approach (U.S.A: West Publishing Co., 1974) p.11

ภายใต้ข้อจำกัด (Subject to.) $4x + 2y \leq 60$ (2)

$2x + 4y \leq 48$ (3)

$x, y \geq 0$ (4)

ภายใต้ตัวอย่างนี้ แสดงให้เห็นว่าค่าตัวแปร (Variables) นี้มี 2 ตัว คือ x และ y ในสมการที่ 1 และอสมการ 2, 3, และ 4 มีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์เป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง

สมการที่ 1 เป็นฟังก์ชั่นเป้าหมายที่มีจุดประสงค์ในอันที่จะทำให้สมการนี้มีค่ามากที่สุด (Maximize $8x + 6y = Z$) ส่วนอสมการที่ 2 และ 3 นั้น เป็นข้อจำกัด หรือข้อที่จะมาบังคับว่า ค่า x และ y ซึ่งจะทำให้ค่า $Z = 8x + 6y$ มากที่สุดนั้น จะต้องไม่ทำให้ค่า $4x + 2y$ มีค่าเกิน 60 และไม่ทำให้ค่า $2x + 4y$ มีค่าเกิน 48 นอกจากนั้น อสมการที่ 4 ยังได้กำหนดว่า ค่าของ x และ y นั้น จะต้องไม่เป็นค่าติดลบอีกด้วย คือให้มีค่าตั้งแต่ 0 ขึ้นไป นั่นเอง

ปัญหาตัวอย่าง

เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น ใคร่ขอยกตัวอย่างง่าย ๆ เพื่อแสดงให้เห็นว่า การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้มีคุณสมบัติอย่างไร และสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างไร

บริษัท ผลิตภัณฑ์กอล์ฟ จำกัด เป็นบริษัทผู้ผลิตอุปกรณ์ที่ใช้ในการเล่นกอล์ฟซึ่งผู้แทนจำหน่ายมีความเชื่อมั่นว่าบริษัทนี้จะสามารถผลิตถุงกอล์ฟและขายในท้องตลาดได้ในราคาทั่ว ๆ ไปแน่ ๆ นั่นคือ ตัวแทนจำหน่ายยินดีที่จะซื้อทุกสิ่งที่บริษัทจะสามารถผลิตได้ในระยะเวลา 3 เดือนข้างหน้า

หลังจากที่ฝ่ายจัดการได้สำรวจขั้นตอนซึ่งเกี่ยวข้องกับการผลิตถุงกอล์ฟแล้วนั้น จึงสรุปได้ว่าขั้นตอนในการผลิตถุงกอล์ฟนั้นมีดังนี้

1. แผนกตัดและย้อมสีหนัง
2. แผนกเย็บ
3. แผนกตกแต่ง

4. แผนกตรวจตราและหีบห่อ

ในการผลิตถุงกอล์ฟแบบมาตรฐานซึ่งมีราคาปานกลาง (Standard Model) และแบบพิเศษ (Deluxe) นั้น ถุงกอล์ฟแต่ละใบ จะต้องใช้เวลาตามตารางดังต่อไปนี้

<u>ตาราง A</u>

ผลิตภัณฑ์	แผนกตัดและย้อมสี	แผนกเย็บ	แผนกตกแต่ง	แผนกตรวจตราและบรรจุหีบห่อ
Standard	$\frac{7}{10}$ ชม.	$\frac{1}{2}$ ชม.	1 ชม.	$\frac{1}{10}$ ชม.
Deluxe	1 ชม.	$\frac{5}{6}$ ชม.	$\frac{2}{3}$ ชม.	$\frac{1}{4}$ ชม.

นอกจากนั้นฝ่ายผลิตยังได้ประมาณอีกว่า เวลาในอีก 3 เดือนข้างหน้า ที่แต่ละแผนกสามารถจะผลิตได้เต็มที่มีดังนี้

แผนกตัดและย้อมสี ผลิตได้เต็มที่ 630 ชั่วโมง
แผนกเย็บ ผลิตได้เต็มที่ 600 ชั่วโมง
แผนกตกแต่ง ผลิตได้เต็มที่ 708 ชั่วโมง
แผนกตรวจตราและหีบห่อ ผลิตได้เต็มที่ 135 ชั่วโมง

และในการผลิตถุงกอล์ฟ แบบมาตรฐาน จะได้รับกำไรใบละ 10 บาท
และในการผลิตถุงกอล์ฟ แบบพิเศษ จะได้รับกำไรใบละ 9 บาท

ปัญหาของบริษัทนี้ก็คือว่าจะตัดสินใจผลิตถุงกอล์ฟ 2 แบบดังกล่าว แต่ละแบบเป็นจำนวนเท่าไรในระยะ 3 เดือนข้างหน้า โดยที่จะทำให้ได้รับกำไรมากที่สุด (Maximize Profit)

ฟังก์ชั่นเป้าหมาย (Objective Function)

ดังได้กล่าวแล้วว่าวัตถุประสงค์ของบริษัท ผลิตภัณฑ์กอล์ฟ จำกัด ก็คือต้องการให้ได้รับกำไรสูงสุด ซึ่งสามารถเขียนวัตถุประสงค์ของบริษัทให้อยู่ในรูปสมการได้

โดยให้ x_1 = จำนวนถุงกอล์ฟแบบมาตรฐานที่จะผลิต

x_2 = จำนวนถุงกอล์ฟแบบพิเศษที่จะผลิต

กำไรของบริษัทนั้นจะเกิดขึ้นได้จาก 2 ส่วนคือ กำไรจากการผลิตถุงกอล์ฟแบบมาตรฐาน และกำไรจากการผลิตถุงกอล์ฟแบบพิเศษ และเนื่องจากกำไรในการผลิตถุงกอล์ฟแบบมาตรฐานจะได้ใบละ 10 บาท และกำไรในการผลิตถุงกอล์ฟแบบพิเศษจะได้ใบละ 9 บาท ดังนั้นหากให้จำนวนกำไรทั้งสิ้น คือ Z จะได้ สมการเป้าหมายคือสมการกำไร ดังต่อไปนี้

กำไรทั้งสิ้น $Z = 10x_1 + 9x_2$

ดังได้กล่าวแล้วว่าจุดประสงค์ของบริษัทคือ ต้องการหาค่า x_1 และ x_2 คือจำนวนที่จะผลิตถุงกอล์ฟแต่ละชนิด โดยให้ได้รับกำไรมากที่สุด ดังนั้น ในทางการโปแกรมเชิงเส้นตรง จึงเรียก x_1 และ x_2 ว่า ค่าตัวแปรผันที่ต้องการทราบค่า (Decision Variables) และเนื่องจากเป้าหมายที่จะทำให้ได้รับกำไรสูงสุด คือฟังก์ชั่นของตัวแปรผันเหล่านี้ จึงเรียก $10x_1 + 9x_2$ เป็นฟังก์ชั่นเป้าหมาย (Objective Function) และการที่บริษัทต้องการได้รับกำไรมากที่สุด จึงสามารถเขียน ฟังก์ชั่นเป้าหมายใดใหม่เป็นดังนี้

$$\text{maximize} \quad Z = \max \; 10x_1 + 9x_2$$

ข้อจำกัด (Constraints)

จากปัญหาของบริษัท จะเห็นว่าในการผลิตถุงกอล์ฟแต่ละใบจะต้องผ่านขั้นตอนของการผลิต 4 ขั้นตอน เนื่องจากเวลาของการผลิตแต่ละขั้นตอนมีจำกัด จึงเห็นได้ว่าจะมีข้อจำกัดอยู่ 4 ข้อ ที่จะมากำหนดจำนวนถุงกอล์ฟที่จะสามารถผลิตได้ทั้งสิ้น ดังนั้นขั้นต่อไป

ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงคือ จะต้องกำหนดข้อจำกัดซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหานี้ทั้งหมดให้ชัดแจ้ง

ข้อจำกัดของแผนกตัดและย้อมสี

จากตาราง A จะเห็นได้ว่าในการผลิตถุงกอล์ฟแบบมาตรฐานนั้น จะใช้เวลาในแผนกนี้ $\frac{7}{10}$ ชั่วโมง ดังนั้นจำนวนชั่วโมงที่จะใช้ในแผนกนี้ในการผลิตถุงกอล์ฟ แบบมาตรฐานทั้งสิ้น จะเป็น $\frac{7}{10}x_1$ ชั่วโมง ในทำนองเดียวกัน จำนวนชั่วโมงที่จะใช้ในการผลิตถุงกอล์ฟแบบพิเศษ 1 ใบ คือ 1 ชั่วโมง ดังนั้น หากผลิตถุงกอล์ฟชนิดพิเศษจำนวน x_2 ถุง ก็จะใช้เวลาทั้งสิ้น $1x_2$ ชั่วโมง

แต่เนื่องจากฝ่ายผลิตได้ระบุไว้แล้วว่า ในแผนกตัดและย้อมสี จะมีชั่วโมงการผลิตเต็มที่เพียง 630 ชั่วโมง ดังนั้นเพื่อให้เป็นไปตามนั้น การผลิตถุงกอล์ฟทั้ง 2 แบบ จะต้องใช้เวลาไม่เกิน 630 ชั่วโมง จะสามารถเขียนเป็น ฟังก์ชั่น ซึ่งแสดงในรูปอสมการได้ดังนี้

$$\frac{7}{10}x_1 + 1x_2 \leq 630$$

เครื่องหมาย $\leq$ หมายถึง น้อยกว่า หรือเท่ากับ นั่นคือ หมายความว่า การผลิตถุงกอล์ฟทั้งสองแบบจะต้องใช้เวลาน้อยกว่า หรือเท่ากับ จำนวนชั่วโมงการผลิตของแผนกตัดและย้อมสีทั้งหมดที่มีอยู่ นั่นคือ 630 ชั่วโมง

ส่วนข้อจำกัดของแผนกอื่น ๆ ก็สามารถเขียนออกมาในรูปอสมการได้ดังนี้

ข้อจำกัดแผนกเย็บ $\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 \leq 600$

ข้อจำกัดแผนกตกแต่ง $1x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 708$

ข้อจำกัดแผนกตรวจตราและบรรจุหีบห่อ $\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 135$

นอกจากข้อจำกัดที่เกี่ยวข้องในด้านการผลิต 4 ข้อ ที่กล่าวมาแล้วนั้น ยังมีข้อจำกัดอีกอันหนึ่งซึ่งจะลืมเสียมิได้ นั่นคือ จำนวนการผลิตถุงกอล์ฟแต่ละแบบนั้นจะเป็นค่าติดลบมิได้ ดังนั้น จึงต้องเพิ่มข้อจำกัดอีกอย่างคือ ค่าตัวแปรผัน ที่ต้องการทราบค่านั้นจะเป็นค่าที่มากกว่า หรืออย่างต่ำต้องเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ หรือ $x_1, x_2 \geq 0$

<u>รูปแบบในทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)</u>

จากการประมวลข้อมูลต่าง ๆ ของบริษัท ผลิตภัณฑ์ กอล์ฟ ดังได้กล่าวมาแล้วนั้นให้ออกมาอยู่ในรูปของฟังก์ชั่นทางคณิตศาสตร์เสร็จสิ้นแล้วนั่นคือ สามารถเปลี่ยนวัตถุประสงค์และข้อจำกัดต่าง ๆ ของปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในโลกให้มาเป็นกลุ่มของความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียกว่า รูปแบบในทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) สำหรับปัญหาของบริษัท ผลิตภัณฑ์กอล์ฟนั้น จะเขียนรูปแบบในทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

Max $10x_1 + 9x_2$

St. (อักษรย่อสำหรับคำว่า โดยขึ้นอยู่กับ หรือ Subject to.)

$\frac{7}{10} x_1 + 1x_2 \leq 630$

$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6} x_2 \leq 600$

$1x_1 + \frac{2}{3} x_2 \leq 708$

$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 135$

$x_1, x_2 \geq 0$

งานขั้นต่อไปคือ จะต้องหาสัดส่วนของการผลิต (ซึ่งคือจำนวน x_1 และ x_2) ซึ่งเป็นไปตามข้อจำกัด และในขณะเดียวกันก็จะทำให้ค่าของสมการเป้าหมายมากกว่าหรือเท่ากับค่าที่ได้จากคำตอบที่อาจจะเป็นไปได้อันอื่น นั่นคือ จะหาค่าซึ่งจะทำให้**ได้รับคำ**ตอบที่ดีที่สุด สำหรับปัญหา (Obtimal Solution)

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่าลักษณะพิเศษของรูปแบบในทางคณิตศาสตร์ ซึ่ง**ทำให้ต้องเรียกว่า** การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้ ก็คือ ฟังก์ชั่นเป้าหมายเป็นฟังก์ชั่นเส้นตรงของค่าตัวแปรผัน และฟังก์ชั่นข้อจำกัด (ด้านซ้ายมือของอสมการข้อจำกัด) ก็เป็น ฟังก์ชั่นเส้นตรงของค่าตัวแปรผันเช่นกัน

ในทางคณิตศาสตร์แล้ว จะพูดถึง ฟังก์ชั่นซึ่งมีค่าตัวแปรปรากฏอยู่ในแต่ละเทอมมีค่ายกกำลังหนึ่งคือ ฟังก์ชั่นเส้นตรง ตามตัวอย่าง ฟังก์ชั่นเป้าหมาย $(10x_1+9x_2)$ เป็นเชิงเส้นตรง เนื่องจากค่าตัวแปรแต่ละตัวแยกเทอมกันอยู่และมีค่ายกกำลังหนึ่ง ถ้าฟังก์ชั่นเป้าหมายปรากฏเป็นอย่างอื่น เช่น $10x_1^2 + 9x_2$ นั่นก็จะไม่เป็นฟังก์ชั่นเส้นตรง **ดังนั้น** ก็จะไม่มีการแก้ปัญหาโดยการใช้ การโปรแกรม เชิงเส้นตรง ในทำนองเดียวกันกับค่าฟังก์ชั่น ด้านซ้ายมือของ อสมการข้อจำกัด (ฟังก์ชั่นข้อจำกัด) ก็เป็นฟังก์ชั่นเส้นตรงด้วยเช่นกัน ดังนั้น จึงเห็นได้ชัดแล้วว่า ปัญหาซึ่งเขียนออกมาในรูปคณิตศาสตร์แล้ว เป็นปัญหาที่ใช้หลักการโปรแกรมเชิงเส้นตรงอย่างแท้จริง

<u>ข้อสมมติของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Assumptions of Linear Programming)</u>[1]

ข้อสมมติต่าง ๆ ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น ความจริงได้ปรากฏอยู่แล้วในตัวอย่างที่ได้เขียนออกมาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์แล้ว อย่างไรก็ตามเพื่อให้เกิดความ

---

[1] Frederick S, Hillier and Gerald I. Lieberman, <u>Operation Research</u>, 2d ed. (San Francisco : Holden Day Inc., 1974) p.22

กระจ่างแจ้งยิ่งขึ้นและจะได้สามารถตัดสินใจได้ว่า จะสามารถนำเอาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนี้ไปใช้กับปัญหาเช่นไรได้บ้าง จึงจะกล่าวถึงข้อสมมติต่าง ๆ ดังนี้

1. ความเป็นสัดส่วน (Proportionality) หมายความว่า ค่าของแต่ละเทอมใน ฟังก์ชันเป้าหมายและในฟังก์ชันข้อจำกัดนั้น เป็นสัดส่วน กับค่าของตัวแปรผัน (Decision Variables) ซึ่งปรากฏในเทอมนั้น จากตัวอย่าง ถ้าเพิ่มการผลิตถุงกอล์ฟมาตรฐานจาก 100 ถุง เป็น 200 ถุง (คือเพิ่ม 2 เท่า) ค่าของกำไรจากการผลิตถุงกอล์ฟชนิดนี้ก็จะเพิ่มจาก 1,000 บาท เป็น 2,000 บาท ด้วย นอกจากนั้น เวลาที่จะใช้ในการผลิตถุงกอล์ฟแบบนี้ก็จะเพิ่มเป็น 2 เท่าในแต่ละแผนกด้วย ในทำนองเดียวกับการผลิตถุงกอล์ฟแบบพิเศษด้วยเช่นกัน

2. การบวก (Additivity) หมายความว่า ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะต้องเท่ากับผลบวกของเทอม ซึ่งเกิดจากตัวแปรผันแต่ละตัว และก็เช่นเดียวกัน ค่าของฟังก์ชันข้อจำกัดจะต้องเท่ากับผลบวกของเทอมซึ่งเกิดจากตัวแปรผันแต่ละตัว ตามตัวอย่างนั้น ฟังก์ชันเป้าหมาย ($10x_1 + 9x_2$) เป็นผลบวกของกำไรซึ่งเกิดจากการผลิตถุงกอล์ฟแบบมาตรฐานและแบบพิเศษตามลำดับ และเวลาทั้งสิ้นซึ่งใช้ในแต่ละแผนกก็คือเวลาที่ใช้ในการผลิตแบบมาตรฐานและแบบพิเศษรวมกัน

3. ความสามารถแบ่งค่าได้ (Divisibility) ในบางครั้งค่าตัวแปรผันจะใช้ได้จริงต่อเมื่อหาค่าออกมาได้เป็นเลขจำนวนเต็ม แต่อย่างไรก็ตามบางครั้งเมื่อหาค่าออกมาโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงแล้ว มักจะไม่ได้ค่าเป็นตัวเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นก็คือจำนวนหน่วย ของการผลิตแต่ละแบบสามารถจะแบ่งได้เป็นเศษส่วน เพื่อที่ว่าค่าตัวแปรผันซึ่งไม่ใช่เลขตัวเต็มจะได้ใช้ได้ และถ้าหากคำตอบที่ได้มานั้นไม่ใช่ตัวเลขตัวเต็ม ก็จะปัดให้เป็นเลขจำนวนเต็ม ซึ่งจะใช้ได้ในกรณีที่ค่าตัวแปรผันมีค่ามากมาย แต่ก็จะมีข้อเสียบางประการเช่นกัน ซึ่งจำเป็นต้องทำการปรับปรุงในภายหลัง และจะไม่ขอนำมากล่าวในที่นี้

4. การทราบค่าแน่นอน (Deterministic) ข้อสมมติข้อนี้ก็คือค่าพารามิเตอร์ (ในที่นี้คือ 10, $\frac{7}{10}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$) นั้นสามารถทราบค่าแน่นอน แต่ใน

ความเป็นจริงมักจะไม่เป็นเช่นนั้น การโปรแกรมเชิงเส้นตรงซึ่งโดยปกติแล้ว ได้ถูกนำมาใช้เพื่อเลือกการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่งในอนาคต ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ที่จะนำมาใช้นั้นจึงต้องย่อมขึ้นอยู่กับการทำนายสภาพในอนาคต ซึ่งจะก่อให้เกิดความไม่แน่นอนขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ไม่มากก็น้อย

ด้วยเหตุผลดังกล่าวมานำเอาเทคนิคบางอย่างเข้ามาใช้หลังจากที่หาคำตอบออกมาได้แล้วจึงมีความสำคัญเช่น การใช้วิธีวิเคราะห์ Parametic Analysis

<u>วิธีการหาคำเฉลยของปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรง</u>

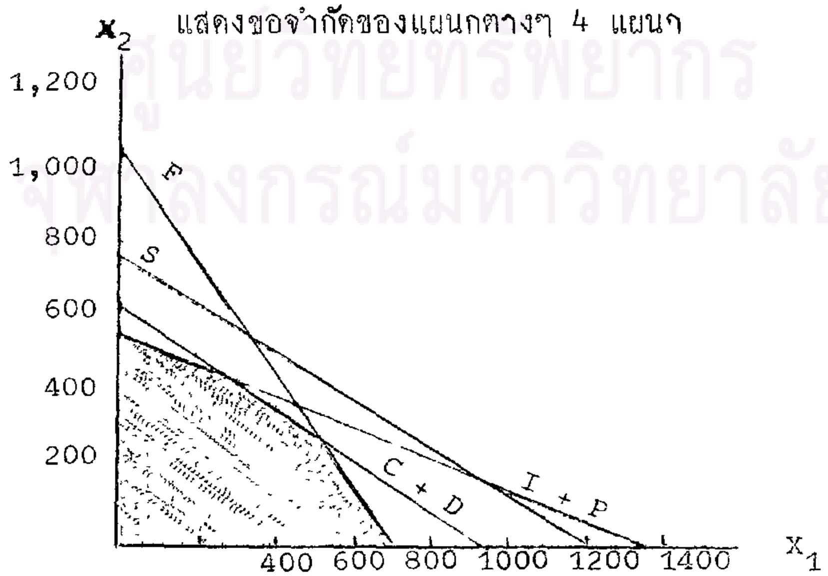
การหาคำเฉลยปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้นสามารถกระทำได้ 3 วิธี คือ

1. การแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ (Graphic Method)

เป็นวิธีการหาคำเฉลยแบบที่ง่ายที่สุด ซึ่งใช้ได้ในกรณีที่มีตัวแปรกันไม่เกิน 2 ตัว เนื่องจาก ไม่สามารถเขียนกราฟได้เกิน 2 มิตินั่นเอง และไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาที่ค่อนข้างใหญ่ จากตัวอย่าง จะสามารถเขียนกราฟเพื่อหาคำเฉลยได้ดังนี้

ผังที่ 28

แสดงข้อจำกัดของแผนกต่างๆ 4 แผนก



จากกราฟซึ่งเขียนโดยใช้ แกนนอน เป็นค่า x_1 และมีค่าเริ่มจากศูนย์เป็นต้นไปทางบวก และแกนตั้ง เป็นค่า x_2 ซึ่งมีค่าเริ่มจากศูนย์ขึ้นไปทางค่าบวก

จะเริ่มโดยการลากเส้นของ อสมการเส้นตรงของฟังก์ชั่น ข้อจำกัดทั้ง 4 อย่าง การหาเส้นจากอสมการเส้นตรงจะหาได้โดยเปลี่ยนให้เป็นสมการ คือเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการ ซึ่งในที่นี้คือ น้อยกว่า หรือเท่ากับ ($\leq$) เป็นเครื่องหมายเท่ากับและแก้สมการได้เส้นข้อจำกัดดังต่อไปนี้

ให้เส้น C & D เป็นเส้นที่แสดงข้อจำกัดของแผนกตัดและย้อมสี (Cutting & Dyeing)
ให้เส้น S เป็นเส้นที่แสดงข้อจำกัดของแผนกเย็บ (Sewing)
ให้เส้น F เป็นเส้นที่แสดงข้อจำกัดของแผนกตกแต่ง (Finishing)
ให้เส้น I+P เป็นเส้นที่แสดงข้อจำกัดของแผนกตรวจตราและบรรจุหีบห่อ (Inspecting & Packaging)

พื้นที่ที่ระบายสีทึบคือพื้นที่ที่เรียกว่า ขอบเขตของความเป็นไปได้ (Feasible Region) คือพื้นที่ที่เกิดจากการตัดกันของเส้นข้อจำกัดต่าง ๆ 4 เส้น ถึงแม้ว่าเส้นข้อจำกัดของแผนกเย็บจะไม่ตัดกับเส้นอื่น ๆ แต่จำนวนการผลิตที่จะเป็นไปได้ย่อมเกิดขึ้นภายใต้เส้น S นี้ คือจะมีค่าเกินเส้นนี้ไม่ได้ ดังนั้น Feasible Region จึงเกิดจากการตัดกันของเส้นข้อจำกัด 3 เส้น

ขั้นต่อไปจะต้องหาจุดที่จะทำให้บริษัทได้รับกำไรจากการผลิต x_1 และ x_2 สูงสุด จากวิธีหาคำตอบโดยวิธีกราฟนี้. จะสร้างสมการกำไร โดยสมมติค่ากำไร ณ จุดใดก็ได้เช่น ให้กำไรคือ $10x_1 + 9x_2 = 1,800$

และแทนค่า $x_1 = 0$ และ $x_2 = 0$ ตามลำดับ

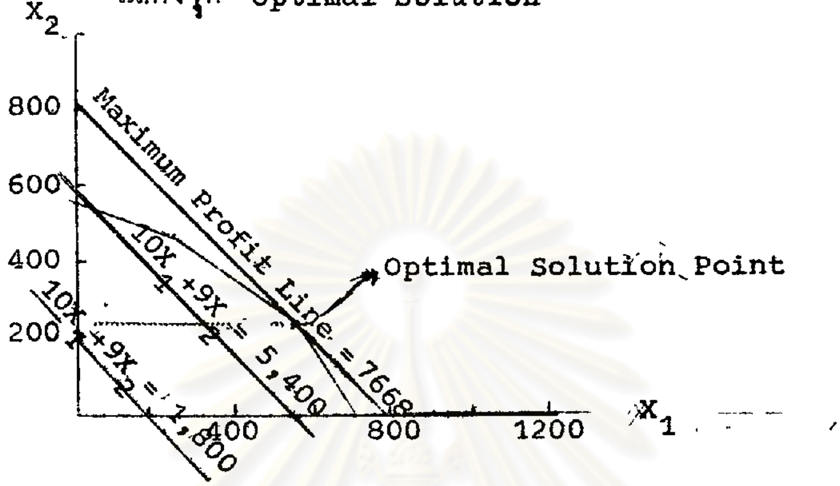
ดังนั้นจะได้ค่า $x_1, x_2 = 180, 0$

และ $x_1, x_2 = 0, 200$

จะได้เส้นสมการกำไรดังนี้

ผังที่ 29

แสดงจุด Optimal Solution



เมื่อเพิ่มค่าของกำไรไปทางขวามือเรื่อย ๆ โดยลากเส้นขนานของเส้นกำไร และเลื่อนไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งเส้นกำไรสัมผัสกับจุดใดจุดหนึ่งซึ่งไปทางขวามือ ออกห่างจากจุด origin และจะให้ค่าบวกสูงสุดของ Feasible Region ณ จุดที่สัมผัสนั้น**เรียกว่า** Optimal Solution Point

เมื่อลากเส้นตั้งฉากกับแกน x_1 และ x_2 จะได้จำนวนที่ควรจะผลิต x_1 และ x_2 ซึ่งในที่นี้ x_1 คือ 540 และ x_2 คือ 252 ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการเป้าหมายก็จะได้ค่ากำไรสูงสุด และเมื่อนำไปแทนค่าในอสมการข้อจำกัด ก็จะเป็นไปตามข้อจำกัดดังกล่าว

2. การแก้ปัญหาโดยวิธีพีชคณิต (Algebraic Method)

เป็นการหาค่าเฉลยซึ่งดีกว่าการแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟเนื่องจากสามารถนำไปใช้ได้ในกรณีที่มีตัวแปรผันมากกว่า 3 ตัว

3. การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพลกซ์ (Simplex Method)

เป็นการแก้ปัญหาโดยวิธีพัฒนาค่าเฉลยขึ้นมาใหม่เรื่อย ๆ โดยจะให้ค่าตอบที่เท่ากันหรือมากกว่าค่าเฉลยที่ได้ก่อนหน้าค่าเฉลยนั้น ซึ่งทำให้เชื่อมั่นได้ว่า**กำลังเคลื่อนเข้า**ไปใกล้ค่าตอบที่ดีที่สุดเสมอ นอกจากนี้ยังจะชี้ให้เห็นว่าจะได้**ค่าเฉลยที่ดี**ที่สุดเมื่อใด **วิธีซิมเพลกซ์**

นี้จะช่วยให้สามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้ และหลักการจากวิธีซิมเพลกซนี้เอง เป็นบันไดขั้นแรกในการคิดค้นสร้างโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ เพื่อหาคำเฉลยของปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรง ซึ่งมีความยุ่งยากและมีจำนวนตัวแปรผันมากมายได้

<u>คำเฉลยของปัญหา (Solution)</u>[1]

ในการหาคำเฉลยของปัญหาซึ่งใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น คำเฉลยที่จะได้รับออกมามีโอกาสที่จะเป็นไปได้ 3 แบบ คือ

1. Infeasibility จะเกิดขึ้นเมื่อไม่มีคำเฉลยซึ่งอยู่ภายใต้ข้อจำกัดทั้งหลายของปัญหาซึ่งรวมทั้งข้อจำกัดที่ว่าค่าของตัวแปรผันจะต้องไม่เป็นค่าติดลบ $x_1, x_2 \ldots x_n \geq 0$ ถ้าตามวิธีกราฟแล้ว **Infeasibility** จะหมายความว่า ขอบเขตของความเป็นไปได้ (Feasible Region) ไม่มี นั่นคือไม่มีจุดใดเลยที่จะเป็นไปได้ตามข้อจำกัด หรือค่าตัวแปรผัน อาจมีค่าติดลบก็ได้

2. Unboundedness คำเฉลยของปัญหาซึ่งใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะมีลักษณะที่ไม่มีขอบเขตจำกัด (Unbounded) ถ้าค่าของคำเฉลยนั้นเป็นค่าที่ใหญ่จนไม่มีที่สิ้นสุด (Infinitely large) แต่ก็ยังอยู่ภายใต้ข้อจำกัดต่าง ๆ ถ้าหากคำเฉลยเช่นนี้เกิดขึ้น จากปัญหาที่ต้องการทำให้ได้รับกำไรสูงสุด ก็อาจจะเป็นไปได้ที่ ผู้จัดการจะต้องการทำกำไรเท่าไรก็ได้ แต่ในปัญหาจริง ๆ ที่ใช้การโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น หากเกิดคำเฉลยเช่นนี้หมายความว่า **การสร้างปัญหาไม่เหมาะสม** ทั้งนี้เนื่องจากว่าเป็นไปได้ที่จะทำกำไรได้อย่างไม่มีข้อจำกัด นั่นคือรูปแบบในทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นไม่ถูกต้องพอที่จะแสดงให้เห็นถึงปัญหาจริง ๆ ที่เกิดขึ้นนั้น

---

[1]David Anderson, Dennis J. Sweeny and Thomas A. Williams, <u>Linear Programming for Decision Making An Application Approach,</u> (U.S.A.: West Publishing Co., 1974), p. 142 - 151

3. Optimal Solution เป็นคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหานั้น เช่นในปัญหาที่ต้องการทำให้ได้รับกำไรสูงสุด ก็จะได้รับคำตอบซึ่งจะทำให้บรรลุวัตถุประสงค์นั้น หรือในปัญหาที่ต้องการทำให้เสียต้นทุนต่ำสุด ก็จะได้รับคำตอบที่จะทำให้บรรลุวัตถุประสงค์นั้นได้ แต่ในบางกรณี อาจจะได้รับคำเฉลยที่มีมากกว่า 1 ชุดขึ้นไป เรียกว่า Alternate Optimal โดยวิธีกราฟแล้วในกรณีนี้เส้นฟังก์ชันเป้าหมายจะขนานกับเส้นฟังก์ชันข้อจำกัดเส้นใดเส้นหนึ่ง ดังนั้น เมื่อเลื่อนเส้นสมการเป้าหมายไปทางขวาแล้ว เส้นสมการเป้าหมายนั้นจะทับกับเส้นสมการข้อจำกัดเส้นนั้นพอดี ซึ่งเส้นสมการข้อจำกัดนั้น เมื่อตัดกับเส้นสมการข้อจำกัดเส้นอื่นก็ย่อมเกิดจุดมากกว่า 1 จุดขึ้นไป เมื่อเส้นของสมการเป้าหมายมาทับเส้นสมการข้อจำกัดนั้นจึงย่อมพลอยเกิดจุด Optimal Solution Point มากกว่า 1 จุดขึ้นไป เช่นกัน

<u>รูปแบบในทางคณิตศาสตร์ของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง</u>

(Mathematical Formulation of Linear Programming Problem)

สมการเป้าหมาย : Maximize $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (Subject to)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}
$$

และ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \cdots\cdots, x_n \geq 0$

โดยที่ a_{ij}, b_i, c_i คือ ค่าคงที่ที่กำหนดให้

x_j คือ ตัวแปรผันที่ต้องการหาค่า (Decision Variables)

m คือ จำนวนข้อจำกัด

n คือ จำนวนตัวแปรผัน

ปัญหาข้างต้นนี้สามารถเขียนใหม่ในรูปทั่ว ๆ ไป ได้ดังนี้

$$\text{Maximize} \quad P = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,2 \ldots\ldots m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2 \ldots\ldots n)$$

ในทำนองเดียวกันหากเป็นปัญหาที่ต้องการทำให้ค่าน้อยที่สุด จะเขียนรูปแบบออกมาได้ดังนี้

ให้หาค่า $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$

สมการเป้าหมาย : Minimize $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n$

ภายใต้ข้อจำกัด (Subject to)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots a_{1n}x_n \geqslant b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots a_{2n}x_n \geqslant b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots a_{mn}x_n \geqslant b_m$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots\ldots x_n \geqslant 0$$

ซึ่งจะเขียนออกมาในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Subject to.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad (i = 1,2 \ldots\ldots m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2 \ldots\ldots n)$$

ข้อแตกต่างระหว่างปัญหาซึ่งต้องการทำให้มากที่สุด (Maximization Problem) หรือปัญหาการทำให้น้อยที่สุด (Minimization Problem)ในโปรแกรมเชิงเส้นที่เห็นได้ง่าย ๆ ก็คือ เครื่องหมายของอสมการข้อจำกัด (Inequalities of Constraints) โดยที่เครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ใช้ในปัญหาที่ต้องการทำให้มากที่สุด (Maximization Problem) ในขณะที่เครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ จะใช้ในปัญหาที่ต้องการทำให้น้อยที่สุด (Minimization Problem)

แต่ในบางกรณีที่ข้อจำกัดบางอันของรูปแบบโปรแกรมเชิงเส้นมีความสัมพันธ์อยู่ในรูปสมการ (Equation) และอสมการ (Inequalities) ผสมกัน ไม่เป็นไปตามรูปแบบข้างต้นก็ได้

ตัวอย่างเช่น

Maximize $\quad F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

Subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

การแก้ปัญหาข้างต้นโดยใช้วิธีซิมเพลกซ์ (Simplex Method) นั้น จะต้องเปลี่ยนรูปแบบให้เป็นรูปแบบมาตรฐาน (Standard Linear Programming Model) คือเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการโดยบวกเพิ่มด้วยตัวแปรผันส่วนขาด (Slack Variable) ในอสมการที่มีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) หรือหักในอสมการที่มีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) นอกจากนี้ตัวแปรผันเทียม (Artificial Variable) ซึ่งมีคุณค่าเฉพาะในฐานะเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งในการคำนวณก็ได้ ถูกนำมาบวกเพิ่มด้วย ตัวแปรผันเทียมนี้ ทำให้สามารถดำเนินการกับข้อจำกัดได้ 2 ชนิด คือ ชนิดที่เป็นสมการเท่ากับ (Equalities) และอสมการชนิดมากกว่าหรือเท่ากับ ("Greater than or equal to "Inequalities)

จากตัวอย่างข้างต้นจะได้รูปแบบมาตรฐานดังนี้

Maximize $\quad F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - x_4 + x_5 = b_1$$
$$a_{31}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_6 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_7 = b_3$$

โดยที่ x_4, x_6 เป็น Slack Variables

x_5, x_7 เป็น Artificial Variables