บทที่ 4

เทคนิค Computational Fluid Dynamics

เนื่องจากงานวิจัยฉบับนี้เป็นการจำลองปรากฏการณ์การไหลและการกระจายตัวของความเร็วลมภายในห้อง ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงสมการต่างที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ข้างต้น ซึ่งส่วนใหญ่เป็นสมการอนุพันธ์ ดังนั้น การแก้สมการอนุพันธ์สามารถทำได้หลายวิธี สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม PHOENICS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ใช้วิธีการแก้สมการอนุพันธ์ที่เรียกว่า Computational Fluid Dynamics เพื่อหาคำตอบ ซึ่งรายละเอียดได้อธิบายไว้ในบทนี้

4.1 ความหมายของเทคนิค Computational Fluid Dynamics

เทคนิค Computational Fluid Dynamics หรือเรียกแบบย่อว่า เทคนิค CFDเป็นเทคนิคที่ถูกนำมาใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์การไหลของของไหลในระบบที่ต้องการศึกษา โดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical) เพื่อแก้ชุดสมการที่เป็นตัวแทนของระบบที่ทำการศึกษา เช่น สมการความต่อเนื่อง สมการอนุรักษ์โมเมนตัม สมการอนุรักษ์พลังงาน ฯลฯ ในการคำนวณจะต้องมีการกำหนดสภาวะเงื่อนไข (Condition) อย่างถูกต้องและเหมาะสม ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจะสามารถแสดงให้เห็นถึงรายละเอียดของการกระจายตัวของความดัน การกระจายตัวของความเร็ว และการกระจายตัวของอุณหภูมิ เป็นต้น ของระบบที่ทำการศึกษานั้นๆ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม PHOENICS

4.2 ลำดับขั้นตอนของเทคนิค CFD

ในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของไฟไนต์โวลุ่ม (Finite Volume) ในการแก้สมการ ซึ่งลำดับขั้นตอนของวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค CFD สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.1 โดยสรุปได้เป็นลำดับดังนี้

1 กำหนดกริด (Grid) ลงในระบบที่ต้องการทำการศึกษา

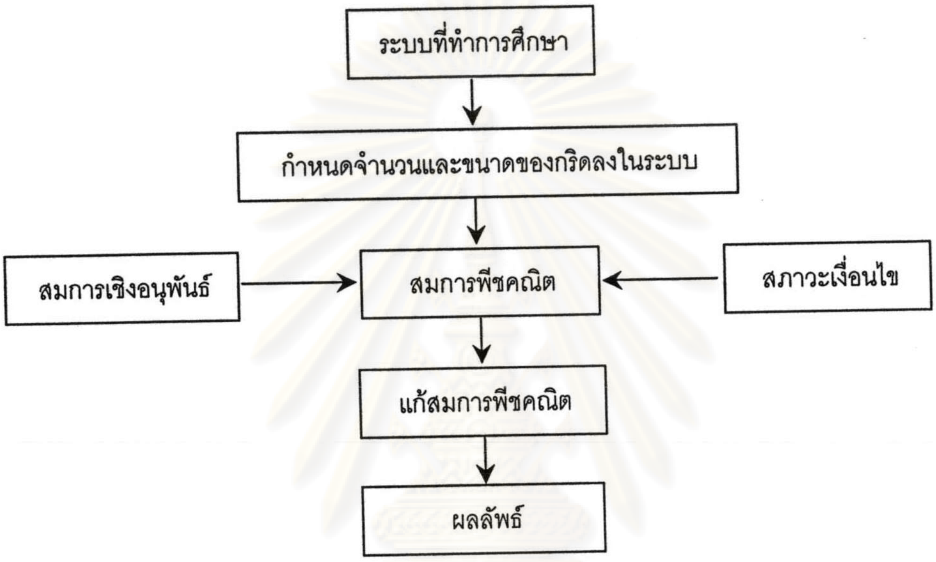
2 ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต (Algebraic Equation) เมื่อมีการกำหนดสภาวะเงื่อนไขที่เหมาะสม

3 แก้สมการพีชคณิต

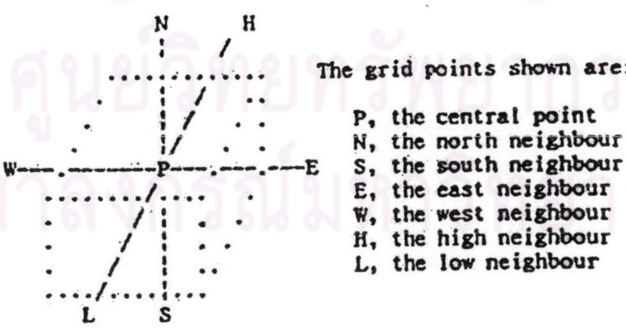
4 ผลลัพธ์

4.2.1 กริด (Grid)

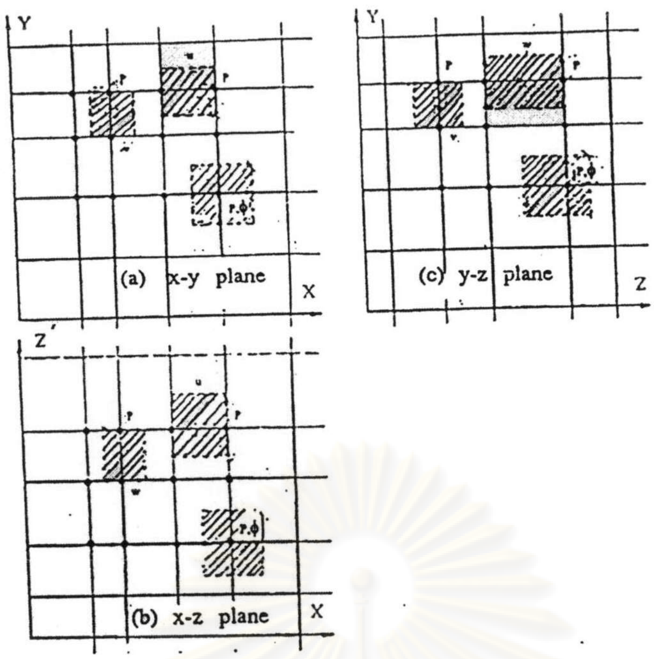
ขั้นตอนแรกของเทคนิค CFD คือ การแบ่งโดเมน (domain) ออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งสามารถดำเนินการได้โดยการกำหนดจำนวนและระยะระหว่างเส้นกริดลงในระบบที่เราต้องการศึกษาตำแหน่งที่ตัดกันของเส้นกริดจะเรียกว่า โนด (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เก็บค่าที่ได้จากการคำนวณของตัวแปรที่เราต้องการศึกษาของปริมาตรควบคุม (Control Volume) ที่กำหนดขึ้น ดังรูปที่ 4.2 แสดงถึงปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณ โดยเส้นประจะแสดงถึงขอบเขตของปริมาตรควบคุมที่กำหนดขึ้น



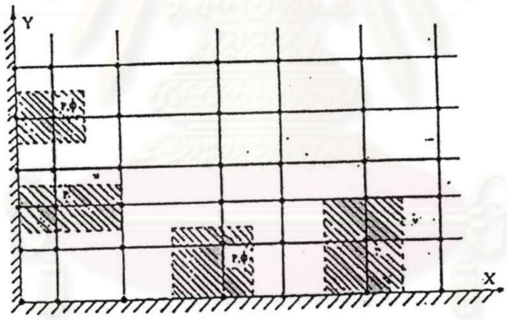
รูปที่ 4.1 ลำดับขั้นตอนของวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค CFD



รูปที่ 4.2 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณ



รูปที่ 4.3 ลักษณะการแบ่งกริดและลักษณะของปริมาตรควบคุมที่แสดงในแบบ 2 มิติ



รูปที่ 4.4 ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่บริเวณสภาวะขอบเขต

อักษร P แทนตำแหน่งของโนดที่ใช้ในการเก็บค่าตัวแปรหรือคือตัวแทนของปริมาตรควบคุมนี้ โดยอักษร N,S,E,W,H.L จะแทนตำแหน่งของโนดที่อยู่ในบริเวณรอบข้างของโนด P สำหรับรูปที่ 4.3 จะแสดงลักษณะของการแบ่งกริด ซึ่งจะทำให้เกิดเป็นโนดขึ้นรวมทั้งแสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมที่แสดงในแบบ 2 มิติและปริมาตรควบคุมที่บริเวณสภาวะขอบเขตซึ่งโนด ณ บริเวณสภาวะขอบเขตจะทราบค่าที่แน่นอนและไม่เปลี่ยนแปลงในแต่ละการคำนวณ

4.2.2 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต

โดยทั่วไปสมการอนุรักษ์ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์จะประกอบด้วยพจน์ 4 พจน์ คือ พจน์ที่เปลี่ยนไปตามเวลา (Transient term) พจน์การพา (Convection term) พจน์การแพร่ (Diffusion term) และพจน์แหล่งกำเนิด (Source term) ตามลำดับ ดังแสดงได้ดังสมการที่ 4.1

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i\phi)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right]+S \qquad (4.1)$$

เมื่อ ϕ แทนตัวแปรที่ต้องการศึกษา เช่น ความเร็ว อุณหภูมิ

Γ แทนค่าสัมประสิทธิการแพร่ของ ϕ

u_i แทนความเร็วในทิศทางต่างๆ

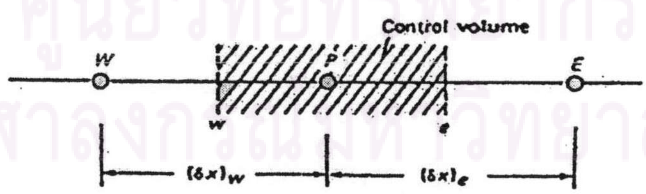
x_i แทนทิศทางในแนวแกนต่างๆ

S แทนแหล่งกำเนิด

เพื่อให้ง่ายในการนำเสนอถึงวิธีการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตซึ่งจะยังคงความหมายเช่นเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์เดิม จะทำการพิจารณาจากสมการในรูปแบบ1 มิติ (แกน x) ที่ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาและพิจารณาเฉพาะพจน์การพาและการนำเท่านั้น ดังนี้

$$\frac{d(\rho u\phi)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right] \qquad (4.2)$$

ลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการจะแสดงได้ในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ลักษณะของกริดที่ใช้ในสมการ 4.2

กำหนดให้จุด e อยู่กึ่งกลางระหว่าง P และ E และจุด w อยู่กึ่งกลางระหว่าง P และ W

ทำการอินทิเกรตสมการ 4.2 รอบปริมาตรควบคุมที่แสดงในรูปที่ 5 จะได้

$$(\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w = \left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]_e - \left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]_w \tag{4.3}$$

จากสมการจะพบว่าในพจน์ของการแพร่จะมีพจน์ $\left[\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right]$ ที่ยังไม่ทราบค่า เช่นเดียวกันกับ $(\rho u\phi)$ ในพจน์ของการพา การประมาณค่าของพจน์ทั้งสองทำได้โดยสมมุติให้โพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดมีลักษณะเป็นเส้นตรง ดังแสดงในรูปที่ 4.6

รูปที่ 4.6 ลักษณะโพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดที่เป็นเส้นตรง

จากรูปที่ 4.6 จะได้

$$\frac{d\phi_e}{dx} = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \quad ; \quad \frac{d\phi_w}{dx} = \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} \tag{4.4}$$

และ

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \quad ; \quad \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{4.5}$$

แทนสมการ 4.4-4.5 ลงในสมการ 4.3 จะได้สมการออกมาในรูป

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \qquad (4.6)$$

เพื่อให้สมการ 4.6 อยู่ในรูปแบบที่กะทัดรัดขึ้น จึงได้นิยามตัวแปรขึ้นมาสองตัวคือ F และ D

โดยที่

$$F = \rho u \quad ; \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \qquad (4.7)$$

ซึ่ง D จะมีค่าเป็นบวกเสมอ ในขณะที่ F จะมีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ขึ้นอยู่กับทิศทางการไหลของของไหล ดังนั้นสมการ 4.6 สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_w\phi_w \qquad (4.8)$$

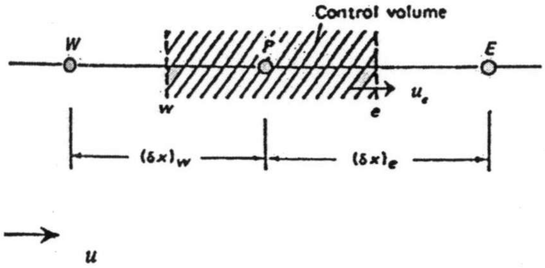
โดยที่

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \qquad (4.9a)$$

$$a_w = D_w + \frac{F_w}{2} \qquad (4.9b)$$

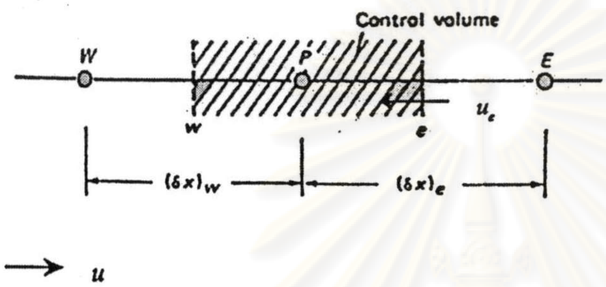
$$a_P = a_E + a_w + (F_e - F_w) \qquad (4.9c)$$

สมการ 4.8 เป็นสมการพีชคณิตที่ทำการแปลงมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ 4.2 ซึ่งได้มาจากการตั้งสมมติฐานว่า โพรไฟล์ของ ϕ ระหว่างโนดมีลักษณะเป็นเส้นตรง หรือที่รู้จักกันในชื่อของเซ็นทรัลดิฟเฟอเรนด์ (central-difference scheme) ซึ่งพบว่าวิธีนี้มีข้อจำกัดอยู่เฉพาะในกรณีของระบบที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำๆเท่านั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อใดที่ระบบมีค่า $|F|$ มากกว่า 2D จะทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการมีค่าเป็นลบซึ่งจะทำให้การแก้สมการไม่สามารถทำได้ ด้วยเหตุนี้เพื่อป้องกันไม่ให้ปัญหาเช่นนี้เกิดขึ้น จึงมีการคิดวิธีขึ้นมาใหม่เรียกว่าอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ (upwind-difference scheme) ซึ่งจะทำการเปลี่ยนวิธีการประมาณค่าของ ϕ_e จากเดิมที่มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ ϕ_E และ ϕ_P ในวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ มาเป็นการกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่า ϕ ของโนดที่อยู่ด้านหลังตามทิศทางการไหล ดังรูปที่ 4.7a และ4.7b ซึ่งในกรณีที่ F_e มีค่าเป็นบวก ϕ_e จะมีค่าเท่ากับ ϕ_P และในกรณีที่ F_e มีค่าเป็นลบ ϕ_e จะมีค่าเท่ากับ ϕ_E ตามลำดับ



เมื่อ $F_e > 0$ จะได้ $\phi_e = \phi_P$

รูปที่ 4.7a การกำหนดค่า ϕ_e เมื่อ F_e มีค่าเป็นบวก ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์



เมื่อ $F_e < 0$ จะได้ $\phi_e = \phi_E$

รูปที่ 4.7b การกำหนดค่า ϕ_e เมื่อ F_e มีค่าเป็นลบ ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์

ค่า ϕ_w ก็สามารถหาได้จากหลักการเดียวกันข้างต้น

สำหรับพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ ก็ยังคงใช้วิธีการคำนวณเหมือนกับวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ (สมการ4.4) ซึ่งตรงจุดนี้ก็จะทำให้เกิดปัญหาขึ้นในการใช้วิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ เนื่องจากในกรณีของระบบที่มีเลขเรย์โนลดส์สูงๆ ตามปกติแล้วพจน์ของการแพร่จะมีค่าน้อยหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ จะมีค่าประมาณศูนย์ แต่ด้วยวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์จะยังคงมีการคำนวณพจน์ $\frac{d\phi}{dx}$ ด้วยสมมติฐานของวิธีการเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ ทำให้ผลลัพธ์ของพจน์การแพร่มีสูงไปจากความเป็นจริง(overestimates) ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการรวมคุณสมบัติของวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ และอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์เข้าด้วยกัน โดยมีชื่อเรียกว่าไฮบริดดิฟเฟอร์เรนท์ (hybrid-difference scheme)(ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้) เกิดเป็นเงื่อนไขใหม่ดังนี้

เมื่อ $F_e < -2D_e$ จะได้ $\phi_e = \phi_E$ (4.10a)

$$-2D_e \le F_e \le 2D_e \quad \text{จะได้} \quad \phi_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \qquad (4.10b)$$

$$F_e > 2D_e \quad \text{จะได้} \quad \phi_e = \phi_P \qquad (4.10c)$$

หรืออีกนัยหนึ่งคือในการคำนวณจะใช้เงื่อนไขของวิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ เมื่อ $|F_e| \le 2D_e$ และเมื่อค่า F_e ไม่อยู่ในช่วงดังกล่าวจะเปลี่ยนไปใช้เงื่อนไขของวิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ โดยกำหนดให้พจน์แพร่มีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้นในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ 4.2 จึงสามารถกระทำได้ 3 วิธีคือ วิธีเซ็นทรัลดิฟเฟอร์เรนท์ วิธีอัพวินดิฟเฟอร์เรนท์ และวิธีไฮบริดดิฟเฟอร์เรนท์ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา สำหรับในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์ 2 มิติ และ 3 มิติ ก็ใช้หลักการเดียวกับที่กล่าวมาข้างต้นในการแปลงเป็นสมการพีชคณิต

4.3 การคำนวณความเร็วของระบบ

จากที่กล่าวมาในหัวข้อ 4.2.2 ถึงวิธีการเปลี่ยนสมการอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต พบว่ามีความจำเป็นที่จะต้องทราบถึงขนาดและทิศทางของความเร็วในตำแหน่งต่างๆ ซึ่งขนาดและทิศทางของความเร็วนั้นสามารถคำนวณได้จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมดังที่กล่างถึงต่อไป

4.3.1 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นสมการที่แสดงผลรวมของโมเมนตัมที่ผ่านเข้าออกในทุกทิศทางของปริมาตรควบคุม ซึ่งสมการ 4.1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมได้ เมื่อ $\phi = u$ หรือ $\overline{u}$, $\Gamma = \mu$ หรือ $\overline{\mu}$

ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตปริมาตรควบคุมที่ใช้จะมีรูปแบบที่แตกต่างจากกรณีของสมการทั่วๆไปดังนี้

- ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง จะอยู่บริเวณเส้นกริดที่เชื่อมกันระหว่างโนดสองโนด ดังรูปที่ 4.8 ซึ่งแสดงได้ด้วยลูกศรเล็กๆ

- ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง จะอยู่คนละตำแหน่งกับตำแหน่งที่เก็บค่าความดัน

ดังนั้นรูปแบบของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการจึงมีลักษณะดังรูปที่ 4.9 ซึ่งเป็นลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัมของ x-component จากรูปจะเห็นว่าลักษณะของปริมาตรควบคุมจะมีความแตกต่างจากปริมาตรควบคุมที่ใช้ในหัวข้อ 4.2.2 คือผิวหน้าของปริมาตรควบคุมแนวแกน x จะอยู่ที่บริเวณโนดทั้งสองข้างพอดี ซึ่งจะเป็นเช่นนี้เฉพาะในแนวแกน x เท่านั้น เช่นเดียวกันลักษณะของกริดที่ใช้ในการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัมของ y-component ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.10 ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมในแนวแกน y ก็จะอยู่ที่บริเวณโนดทั้งสองข้างพอดีและจะเป็นเฉพาะในแนวแกน y เท่านั้น

ด้วยรูปแบบของปริมาตรควบคุมที่กล่าวมาข้างต้น Patankar ได้ทำการแปลงสมการอนุรักษ์โมเมนตัม x,y.z ให้อยู่ในรูปแบบสมการพีชคณิต ได้สมการ 4.11a-4.11c ตามลำดับ

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_P - P_E)A_e \qquad (4.11a)$$

$$a_n u_n = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_P - P_N)A_n \qquad (4.11b)$$

$$a_l u_l = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_P - P_L)A_l \qquad (4.11c)$$

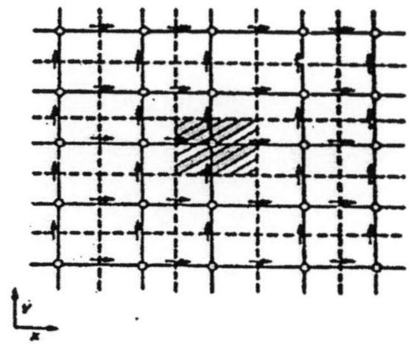
เมื่อ nb แทนค่า ณ ตำแหน่งข้างเคียง (neighbor)

A แทนพื้นที่ที่ตั้งฉากกับแรงดันที่กระทำ

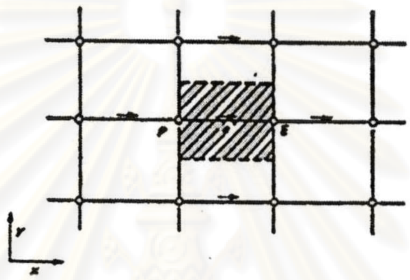
P แทนค่าความดันที่เก็บไว้ในโนดต่างๆ

a แทนค่าสัมประสิทธิ์

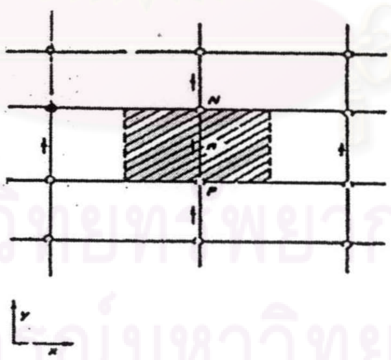
b แทนพจน์ที่ไม่สามารถจัดกลุ่มได้



รูปที่ 4.8 ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็ว



รูปที่ 4.9 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการโมเมนตัม x-component



รูปที่ 4.10 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการโมเมนตัม y-component

4.3.2 วิธี SIMPLE

ในการแก้สมการโมเมนตัม เพื่อที่จะหาคำตอบขององค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทางจะทำได้ก็ต่อเมื่อทราบค่าการกระจายตัวของความดัน ในขณะเดียวกันค่าของความเร็วที่ได้จากการคำนวณก็จะต้องทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริงด้วย ซึ่งถ้าไม่ทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริง ก็แสดงว่าค่าความดันที่ใช้นั้นไม่ถูกต้องต้องทำการหาค่ามาใหม่หรือทำการปรับปรุงค่านั้นให้ถูกต้องยิ่งขึ้น ด้วยเหตุผลนี้ Patankar และ Spalding จึงได้คิดค้นลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาขึ้นมาโดยมีชื่อว่า SIMPLE (Semi-Implict Pressure Linked Algorithm)) ลักษณะของขั้นตอนการแก้ปัญหาจะเริ่มจากการเดาค่าความดันเริ่มต้น ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ P* แทนลงในสมการโมเมนตัม (4.11a) - (4.11c) เพื่อทำการหาค่าความเร็ว u*,v*,w* ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_E^*\right) A_e \qquad (4.12a)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_N^*\right) A_n \qquad (4.12b)$$

$$a_l w_l^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + \left(P_P^* - P_L^*\right) A_l \qquad (4.12c)$$

ขั้นตอนต่อไปคือทำการปรับปรุงค่าความดัน P^* ที่สมมติขึ้น เพื่อให้ได้ค่าความดันที่ใกล้เคียงกับค่าจริงยิ่งขึ้น ด้วยค่าปรับปรุงความดัน P' ดังสมการ

$$P = P^* + P' \qquad (4.13)$$

เช่นเดียวกันกับค่าความเร็ว u^*, v^*, w^* ที่ทำการปรับปรุงดังสมการ

$$u = u^* + u' \qquad (4.14)$$

$$v = v^* + v' \qquad (4.15)$$

$$w = w^* + w' \qquad (4.16)$$

เมื่อนำสมการ 4.11a ลบด้วยสมการ 4.12a จะได้

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (P'_P - P'_E) A_e \tag{4.17}$$

จากสมการ 4.17 จะกำหนดให้เทอม $\sum a_{nb} u'_{nb}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะได้

$$a_e u'_e = (P'_P - P'_E) A_e \tag{4.18}$$

หรือ

$$u_e = d_e (P'_P - P'_E) \tag{4.19}$$

เมื่อ

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \tag{4.19a}$$

จากสมการ 4.19 ทำให้สามารถเขียนสมการที่แสดงความเร็ว ณ ตำแหน่ง e ได้ดังนี้

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \tag{4.20}$$

ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า กับค่าปรับปรุงความดัน P'
เช่นเดียวกันกับความเร็วในตำแหน่งอื่นๆ

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \tag{4.21}$$

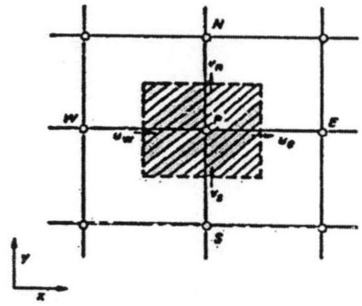
$$w_l = w_l^* + d_l (P'_P - P'_L) \tag{4.22}$$

พิจารณาสมการความต่อเนื่องที่ไม่ขึ้นกับเวลาในรูปแบบเดียวกับสมการ 3.13

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.13}$$

เมื่อทำการแปลงสมการ 3.13 ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตด้วยวิธีที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 4.2.2 โดยอาศัยปริมาตรควบคุมในรูป 4.11 (แสดงไว้ในลักษณะ 2 มิติ เพื่อความสะดวก) จะได้สมการความต่อเนื่องในรูปแบบสมการพีชคณิตดังนี้

$$\left[u_e - u_w\right]\Delta y\Delta z + \left[v_n - v_s\right]\Delta x\Delta z + \left[w_h - w_l\right]\Delta x\Delta y = 0 \tag{4.23}$$



รูปที่ 4.11 ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในสมการความต่อเนื่อง

จากนั้นแทนค่าความเร็วต่างๆด้วยสมการที่อยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ 4.20-4.22 แล้ว ทำการจัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการพีชคณิตของ P' ดังนี้

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_w P_w' + a_N P_N' + a_s P_s' + a_H P_H' + a_L P_L' + b \tag{4.24}$$

เมื่อ $a_E = d_e \Delta y\Delta z$ (4.25a)

$a_w = d_w \Delta y\Delta z$ (4.25b)

$a_N = d_n \Delta x\Delta z$ (4.25c)

$a_s = d_s \Delta x\Delta z$ (4.25d)

$a_H = d_h \Delta x\Delta y$ (4.25e)

$a_L = d_l \Delta x\Delta y$ (4.25f)

$a_P = a_E + a_w + a_N + a_s + a_H + a_L$ (4.25g)

$b = \left[u_w^* - u_e^*\right]\Delta y\Delta z + \left[v_s^* - v_n^*\right]\Delta x\Delta z + \left[w_h^* - w_l^*\right]\Delta x\Delta y$ (4.25h)

จากสมการข้างต้นพบว่า สมการ 4.25h มีรูปแบบเหมือนกับสมการ 4.23 ซึ่งเป็นสมการพีชคณิตของสมการความต่อเนื่อง เพียงแต่เปลี่ยนจากความเร็ว u, v, w เป็น u^*, v^*, w^* ตามลำดับดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า เมื่อใดที่สมการ 4.25h มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าความดัน P^* ที่ใช้ เป็นค่าความดันที่เมื่อใช้ในการคำนวณค่าความเร็วจากสมการโมเมนตัมแล้วความเร็วที่คำนวณได้จะทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริง

จากสมการที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นลำดับขั้นตอนในการคำนวณหาคำตอบของวิธี SIMPLE ซึ่งเป็นลำดับขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณของงานวิจัยนี้ ได้ดังนี้

1 เดาค่าความดันเริ่มต้น P^*

2แก้สมการโมเมนตัม 4.12a-4.12c เพื่อให้ได้ค่าความเร็ว u^*, v^*, w^*

3 แก้สมการ 4.24เพื่อหาค่า P^*

4 คำนวณ P จากสมการ 4.13

5 คำนวณค่าความเร็ว u, v, w จากค่า u^*, v^*, w^* ที่ได้จากข้อ 2 ด้วยสมการ 4.20 – 4.22 ตามลำดับ

6 นำค่าความเร็ว u, v, w ที่ได้ไปทำการคำนวณสมการพีชคณิตอื่นๆ เช่น สมการการไหลแบบปั่นป่วน

7 นำค่า P ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ไปเป็นค่าความดันเริ่มต้น P^* ในขั้นตอนที่ 1 จากนั้นทำการคำนวณตามขั้นตอนที 2 อีกครั้ง

8 ทำตามขั้นตอนเหล่านี้ไปเรื่อยๆจนกระทั่งค่าที่คำนวณได้จากการคำนวณในรอบการคำนวณถัดกันมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อย

4.4 วิธีการแก้สมการพีชคณิต

สมการอนุรักษ์ต่างๆเมื่อทำการแปลงให้เป็นสมการพีชคณิตแล้วจะมีรูปแบบทั่วๆไปดังต่อไปนี้

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \tag{4.26}$$

เมื่อ

P คือ โนดที่ทำการคำนวณ

nb คือ โนดข้างเคียงกับโนด P

ด้วยเหตุนี้จึงสามารถใช้วิธีเดียวกันในการแก้สมการเหล่านี้ได้ ซึ่งโดยทั่วไปในการแก้สมการพีชคณิตที่มีความซับซ้อนและอยู่ในรูปแบบหลายมิติ การแก้สมการจะนิยมใช้วิธีการคำนวณซ้ำ (Iterative method) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆโนดของระบบ แล้วทำการคำนวณเพื่อปรับปรุงค่า ϕ ที่ได้จากการคำนวณในรอบการคำนวณถัดกันมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อย แสดงว่าค่า ϕ ที่ได้จากการคำนวณในรอบนั้นคือคำตอบของสมการพีชคณิต

วิธีการคำนวณซ้ำที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ วิธีการเกาส์-ไซเดล แบบทีละจุด (Gauss-Seidel point-by-point method) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆโนดของระบบ จากนั้นจึงเริ่มทำการคำนวณจากโนดโดโนดหนึ่ง โดยที่อาศัยความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกับสมการ 4.26 ทำให้สามารถคำนวณค่า ϕ ณ โนดนั้นๆได้จาก

$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb}\phi_{nb}^{*} + b}{a_P} \tag{4.27}$$

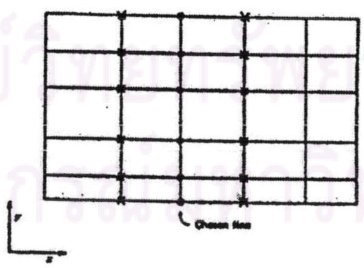
เมื่อ ϕ_P แทนค่า ϕ ของโนดที่ทำการคำนวณ

ϕ_{nb}^{*} แทนค่าที่มีอยู่ในปัจจุบันของโนดใกล้เคียงกับโนด P

เมื่อทุกๆโนดในระบบได้รับการคำนวณตามสมการข้างต้น จะถือเสร็จสิ้นรอบของการคำนวณหนึ่งรอบ

เนื่องจากในการคำนวณด้วยวิธีทีละจุดนี้ พบว่าใช้เวลาในการหาคำตอบของสมการมาก โดยเฉพาะในกรณีของระบบที่มีจำนวนกริดมากๆ ดังนั้นจึงได้มีการคิดค้นวิธีการเกาส์-ไซเดลแบบทีละแถว(Gauss-Seidel line-by-line method) วิธีนี้เป็นการผสมกันระหว่างวิธีทีละจุดที่กล่าวมาข้างต้นกับวิธี TDMA (TriDiagonal-Matrix Algorithm) ซึ่งเป็นวิธีการแก้สมการพีชคณิตวิธีหนึ่ง

การคำนวณด้วยวิธีทีละแถว จะเริ่มต้นจากการเดาค่าเริ่มต้นของ ϕ บนทุกๆโนดของระบบเช่นเดียวกันกับวิธีทีละจุด แต่เปลี่ยนจากการคำนวณทีละจุดไปเป็นการคำนวณทีละแถว ดังแสดงได้จากรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 ลักษณะการแก้สมการด้วยวิธีทีละแถว

จากรูป ถ้าทำการเลือกแถวขึ้นมาหนึ่งแถวตามแนวแกน y (แถวที่มีเครื่องหมายจุดสีดำ) โดยสมมุติว่าทราบค่า ϕ ของโนดที่อยู่บริเวณแถวข้างเคียง (แถวที่มีเครื่องหมายกากบาท) เมื่อทำการพิจารณาสมการพีชคณิตของโนดตามแนวของแถวที่เลือก (โนดที่มีเครื่องหมายจุดสีดำ) จะพบว่าสมการจะประกอบขึ้นจากความสัมพันธ์ของค่า ϕ ในโนดของแถวข้างเคียงซึ่งทราบค่าในปัจจุบัน(โนดที่มีเครื่องหมายกากบาท) ทำให้เมื่อได้สมการพีชคณิตของโนดตามแนวแกนของแถวที่เลือกครบทุกโนด จะกลายเป็นกลุ่มของสมการที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเฉพาะค่า ϕ ในตำแหน่งของโนดตามแนวของแถวเท่านั้น ทำให้สามารถแก้กลุ่มของสมการดังกล่าวได้ด้วยวิธี TDMA

เมื่อทำการคำนวณครบทุกแถวในระบบด้วยวิธีการข้างต้น จะถือว่าเสร็จสิ้นรอบของการคำนวณหนึ่งรอบ ซึ่งจะพบว่าด้วยวิธีทีละแถวนี้ จะใช้เวลาในการหาคำตอบน้อยกว่าวิธีทีละจุด และไม่จำเป็นต้องกังวลกับจำนวนกริดที่มาก

4.5 รีแล็คเซชัน (Relaxation)

ในการแก้สมการพีชคณิตด้วยวิธีการคำนวณซ้ำ ในบางครั้งมีความจำเป็นที่จะต้องทำการเพิ่มหรือลดการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรในการคำนวณระหว่างรอบของการคำนวณที่อยู่ถัดกัน ซึ่งจะเรียกวิธีการดังกล่าวว่า โอเวอร์รีแล็คเซชัน (overrelaxation) สำหรับในกรณีที่ต้องการเพิ่ม และอันเดอร์รีแล็คเซชัน (underrelaxation) ในกรณีที่ต้องการลดการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรที่คำนวณระหว่างรอบของการคำนวณที่อยู่ถัดกัน ดังมีวิธีการดังนี้

พิจารณาสมการ 4.26 จะสามารถจัดรูปสมการได้ใหม่คือ

$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} \tag{4.28}$$

ทำการบวกและลบทางด้านขวามือของสมการ 4.28 ด้วย ϕ_P^* จะได้

$$\phi_P = \phi_P^* + \left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^*\right) \tag{4.29}$$

เมื่อ ϕ_P^* แทนค่า ϕ_P จะได้จากการคำนวณในรอบที่แล้ว

จากสมการ 4.29 จะพบว่าค่าที่อยู่ภายในวงเล็บก็คือค่าที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงระหว่างค่าที่คำนวณได้ในรอบที่อยู่ถัดกัน โดยสามารถทำการปรับปรุงค่าดังกล่าวได้จากค่า รีแล็คเซขันแฟกเตอร์ (Relaxation factor) α ดังสมการ

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha\left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^*\right) \tag{4.30}$$

นั่นคือถ้าค่าของ α อยู่ในช่วง 0-1 เรียกว่าอันเดอรรีแล็คเซขัน และถ้า α มีค่ามากกว่า 1 เรียกว่าโอเวอรรีแล็คเซขัน

สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการอันเดอรรีแล็คเซชั่น ร่วมกันกับวิธีการเกาส์-ไซเดลแบบทีละแถว ในการแก้สมการพีชคณิตทั้งสองกรณี