6

เซมิกรุปที่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

นายสุพิศ ฤทธิ์แก้ว

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2528

ISBN 974-564-931-7

SEMIGROUPS ADMITTING THE STRUCTURE OF ADDITIVELY COMMUTATIVE SEMIRINGS WITH ZERO

Mr. Supit Ritkeao

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1985

Thesis Title Semigroups Admitting the Structure of Additively Commutative Semirings with Zero

By Mr. Supit Ritkeao

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements of the Master's degree.

....Dean of Graduate School

(Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

....Chairman

(Associate Professor Thavee Srisangthong M.A.)

....Member

(Dr. Patanee Udomkavanich Ph.D.)

....Member

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิกรุปที่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

ชื่อนิสิต นายสุพิศ ฤทธิ์แก้ว

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2528

บทคัดย่อ

เรากล่าวว่าเซมิกรุป S ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ ถ้ามีโอเปอเรชัน + บนเซมิกรุป S^0 ที่ทำให้ $(S^0,+,\cdot)$ เป็นเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อ $\cdot$ เป็นโอเปอเรชันบน S^0, $S^0 = S$ ถ้า S มีศูนย์ และในกรณีที่ S ไม่มีศูนย์ ให้ S^0 คือ S ผนวกกับศูนย์

มีจุดประสงค์หลัก 2 ประการในวิทยานิพนธ์นี้ จุดประสงค์หลักประการแรกคือ บอกลักษณะของเซมิกรุปของการแปลงซึ่งรู้จักกันอย่างแพร่หลายที่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ จุดประสงค์หลักอีกประการหนึ่งคือ ให้ลักษณะของเซมิกรุปที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณทั้งหมดที่ให้โครงสร้างดังกล่าว เราได้ผลที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า X เป็นเซตใด ๆ และ S เป็นเซมิกรุปของการแปลงแบบหนึ่งแบบใดดังต่อไปนี้

(i) กรุปสมมาตรบน X

(ii) เซมิกรุปของการแปลงแบบ 1-1 ของ X ทั้งหมด

(iii) เซมิกรุปของการแปลงแบบทั่วถึงของ X ทั้งหมด

แล้ว S ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leq 2$

ทฤษฎีบท 2 เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนของเซต X ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leq 1$

<u>ทฤษฎีบท 3</u> เซมิกรุปของการแปลงเต็มบนเซต X ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

<u>ทฤษฎีบท 4</u> เซมิกรุปผกผันสมมาตรบนเซต X ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

<u>ทฤษฎีบท 5</u> สำหรับเซต X ใด ๆ เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของ X ทั้งหมดให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

<u>ทฤษฎีบท 6</u> สำหรับเซต X ใด ๆ เซมิกรุปของการแปลงที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของ X ทั้งหมดให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

<u>ทฤษฎีบท 7</u> สำหรับเซต X ใด ๆ เซมิกรุปของการแปลงบางส่วนแบบ 1-1 ที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของ X ทั้งหมดให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leqslant 1$

<u>ทฤษฎีบท 8</u> ถ้า S เป็นเซมิกรุปที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณ แล้ว S ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ เมื่อและต่อเมื่อ S เป็นช่วงหนึ่งจากช่วงต่อไปนี้

$\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $(0,\infty)$, $[0,\infty)$

(a,∞) , $[a,\infty)$ โดยที่ $a \geqslant 1$

$(0,b)$, $(0,b]$, $[0,b)$, $[0,b]$ โดยที่ $0 < b \leqslant 1$

ทฤษฎีบท 8 นี้ ได้จากทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 1</u> เซตย่อย S ใด ๆ ของ $\mathbb{R}$ เป็นเซมิกรุปที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ เมื่อและต่อเมื่อ S เป็นช่วงหนึ่งจากช่วงต่อไปนี้

(1) $\mathbb{R}$ (2) $\{0\}$ (3) $\{1\}$ (4) $(0,\infty)$ (5) $[0,\infty)$

(6) (a,∞) โดยที่ $a \geqslant 1$

(7) $[a,\infty)$ โดยที่ $a \geqslant 1$

(8) $(0,b)$ โดยที่ $0 < b \leqslant 1$

(9) $(0,b]$ โดยที่ $0 < b \leqslant 1$

(10) $[0,b)$ โดยที่ $0 < b \leq 1$

(11) $[0,b]$ โดยที่ $0 < b \leq 1$

(12) (a,b) โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

(13) $(a,b]$ โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

(14) $[a,b)$ โดยที่ $-1 < a < 0 < a^2 < b \leq 1$

(15) $[a,b]$ โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 2</u> ทุกเซมิกรุปของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบภายใต้การคูณ ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 3</u> เซมิกรุปใด ๆ ที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณซึ่งอยู่ในรูปแบบ $[a,1]$ โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq 1$ ไม่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 4</u> เซมิกรุปใด ๆ ที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณซึ่งอยู่ในรูปแบบ $[a,b]$ โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$ ไม่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

<u>ทฤษฎีบทประกอบ 5</u> ถ้า S เป็นเซมิกรุปใด ๆ ที่เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ภายใต้การคูณซึ่งมีรูปแบบเป็นแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

(a,b) โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

$(a,b]$ โดยที่ $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$

$[a,b)$ โดยที่ $-1 < a < 0 < a^2 < b \leq 1$

แล้ว S ไม่ให้โครงสร้างของเซมิริงซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมีศูนย์

Thesis Title	Semigroups Admitting the Structure of Additively Commutative Semirings with Zero
Name	Mr. Supit Ritkeao
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.
Department	Mathematics
Academic Year	1985

ABSTRACT

A semigroup S is said to *admit the structure of an additively commutative semiring with zero* or to *admit the structure of an AC semiring with zero* if there exists an operation + on the semigroup S^o such that $(S^o,+,\cdot)$ is an additively commutative semiring with zero where $\cdot$ is the operation on S^o, $S^o = S$ if S has a zero and if S has no zero, let S^o be S with a zero adjoined.

There are two main purposes in this thesis. The first one is to characterize well-known transformation semigroups which admit the structure of an AC semiring with zero. The second one is to characterize all multiplicative interval semigroups in $\mathbb{R}$ which admit such a structure. The main results are as follow :

Theorem 1. Let X be a set and let S be one of the following transformation semigroups :

(i) the symmetric group on X,

(ii) the semigroup of all 1-1 transformations of X,

(iii) the semigroup of all onto transformations of X.

Then S admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 2$.

Theorem 2. The partial transformation semigroup on a set X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 3. The full transformation semigroup on a set X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 4. The symmetric inverse semigroup on a set X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 5. For any set X, the semigroup of all almost identical partial transformations of X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 6. For any set X, the semigroup of all almost identical transformations of X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 7. For any set X, the semigroup of all almost identical 1-1 partial transformations of X admits the structure of an AC semiring with zero if and only if $|X| \leqslant 1$.

Theorem 8. If S is a multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$, then S admits the structure of an AC semiring with zero if and only if S is one of the following types :

$\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $(0,\infty)$, $[0,\infty)$,

(a,∞) , $[a,\infty)$ where $a \geqslant 1$,

$(0,b)$, $(0,b]$, $[0,b)$, $[0,b]$ where $0 < b \leqslant 1$.

Theorem 8 is obtained by the following lemmas :

Lemma 1. A subset S of $\mathbb{R}$ is a multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$ if and only if S is one of the following types :

(1) $\mathbb{R}$, (2) $\{0\}$, (3) $\{1\}$, (4) $(0,\infty)$, (5) $[0,\infty)$,

(6) (a,∞) where $a \geq 1$,

(7) $[a,\infty)$ where $a \geq 1$,

(8) $(0,b)$ where $0 < b \leq 1$,

(9) $(0,b]$ where $0 < b \leq 1$,

(10) $[0,b)$ where $0 < b \leq 1$,

(11) $[0,b]$ where $0 < b \leq 1$,

(12) (a,b) where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$,

(13) $(a,b]$ where $-1 \leq a < 0 < a^2 < b \leq 1$,

(14) $[a,b)$ where $-1 < a < 0 < a^2 < b \leq 1$,

(15) $[a,b]$ where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$.

Lemma 2. Every multiplicative semigroup of nonnegative real numbers admits the structure of an AC semiring with zero.

Lemma 3. A multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$ of the form $[a,1]$, where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq 1$, does not admit the structure of an AC semiring with zero.

Lemma 4. A multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$ of the form $[a,b]$, where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$, does not admit the structure of an AC semiring with zero.

Lemma 5. If S is a multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$ of one of the following forms :

(a,b) where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$,

$(a,b]$ where $-1 \leq a < 0 < a^2 \leq b \leq 1$,

$[a,b)$ where $-1 < a < 0 < a^2 < b \leq 1$, then S does not admit the structure of an AC semiring with zero.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father and mother for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

INTRODUCTION

The theory of rings has long been studied. As the multiplicative structure of rings is actually the structure of semigroups, so mathematicians have been studying semigroups that admit ring structure ([4],[5],[6]).

By the definition, semirings are a generalization of rings and they have multiplicative structure as a semigroup. Nowadays semirings have been widely studied. A semigroup that admits the structure of a semiring is likely to be studied but every semigroup always admits a semiring structure if we define an addition by $x + y = x$ for all x,y or $x + y = y$ for all x,y, so there is nothing to study further.

There are some who study special semirings, for example regular semirings [7] and inversive semirings [2], so there should be some study of semigroups that admit a structure of special semirings.

The subject of this research is to study semigroups admitting the structure of an additively commutative semiring with zero. The property of being additively commutative and having zero is also a property of rings. So such a semiring is a kind of generalization for a ring.

Examples of semirings which are additively commutative semirings with zero but are not rings :

(1) $(\mathbb{N} \cup \{0\},+,\cdot)$ under usual addition and multiplication where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers.

(2) $(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\},+,\cdot)$ under usual addition and multiplication where $\mathbb{Q}^+$ is the set of positive rational numbers.

(3) $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\},+,\cdot)$ under usual addition and multiplication

where $\mathbb{R}^+$ is the set of positive real numbers.

(4) $M_n(S)$, the semiring of n×n matrices over S under usual addition and multiplication of matrices where S is one of the semirings in (1), (2) or (3).

Transformation semigroups are important in the study of semigroups. A multiplicative interval semigroup in $\mathbb{R}$ is a kind of semigroups of real numbers under multiplication. Thus these semigroups have some importance in mathematics. The aim of this research is to find the neccessary and sufficient conditions that give the structure of an additively commutative semiring with zero in these semigroups.

The preliminaries and notation used for this work are given in Chapter I. We give examples and general properties of semigroups admitting the structure of an additively commutative semiring with zero in Chapter II. Chapter III and Chapter IV are the main results of the thesis. In Chapter III, we characterize various transformation semigroups, including well-known ones, which admit the structure of an additively commutative semiring with zero, and in Chapter IV, we characterize all multiplicative interval semigroups in $\mathbb{R}$ which admit such a structure.