บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎี

ในทางสถิติแนวความคิดของการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ความถดถอยสำหรับการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ สามารถทดสอบสมมติฐานที่โดยวิธีการที่เราใช้กันอยู่ทั่ว ๆ ไป นั่นคือการทดสอบที่อิงหลักการของฟังก์ชันความควรจะเป็น โดยใช้ตัวสถิติทดสอบคืออัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ (Regular likelihood ratio test) และในการศึกษาครั้งนี้เราจะทำการศึกษาเปรียบเทียบกับการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo likelihood ratio test) โดยนำค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ ของตัวสถิติทดสอบทั้งสองวิธีเปรียบเทียบกัน ในขั้นต้นเราจะกล่าวถึงการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ การทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ และขั้นตอนการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล ได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

2.1 การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ (Multiple Regression Analysis)

การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุเป็นส่วนขยายของการวิเคราะห์ความถดถอยอย่างง่าย (Simple Regression Analysis) นั่นคือการพิจารณาปัจจัยที่เกี่ยวข้องตั้งแต่ 2 ปัจจัยเป็นต้นไป ซึ่งการวิเคราะห์ดังกล่าวข้างต้นแสดงว่าเป็นการวิเคราะห์เกี่ยวกับตัวแปรตัวตาม เมื่อทราบค่าของตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป ดังนั้นเพื่อให้ตัวแบบความถดถอยมีประสิทธิภาพสูงที่สุดต้องอาศัยข้อตกลงเบื้องต้นที่เหมาะสม นั่นคือ

2.1.1 **ตัวแปรอิสระและตัวแปรตามมีความสัมพันธ์กันเชิงเส้น สมการถดถอยเชิงเส้นที่มีตัวแปรอิสระ p ตัวจะอยู่ในรูป**

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \underset{\sim}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1n-1} & X_{2n-1} & \cdots & X_{pn-1} \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}_{(n\times(p+1))}$$

$\underset{\sim}{y}$ แทนเวกเตอร์ของค่าสังเกตหรือตัวแปรที่ได้ตามตัวแปรอิสระ (X_i's) ที่มีขนาด nx1

$\underset{\sim}{\beta}$ แทนเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ความถดถอยของตัวแบบความถดถอยขนาด (p+1)x1

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ แทนเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนสุ่มที่มีขนาด nx1

n แทนขนาดตัวอย่าง

p แทนจำนวนตัวแปรอิสระ

X แทนเมทริกซ์ตัวแปรอิสระที่มีขนาด nx(p+1)

2.1.2 ตัวแปรตามเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ในขณะที่ตัวแปรอิสระเป็นตัวแปรควบคุมและเป็นเซตของค่าที่ไม่ใช่ค่าสุ่ม ดังนั้นค่าของ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ในรูปแบบเชิงเส้นจึงเป็นความคลาดเคลื่อนของตัวแปรตามอันเกิดจากการสุ่มตัวอย่าง การวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุสามารถนำมาใช้ได้แม้ว่าตัวแปรอิสระจะเป็นตัวแปรสุ่มเช่นเดียวกัน

2.1.3 ความแปรปรวนของตัวแปรตามเมื่อกำหนดค่าต่าง ๆ กันของตัวแปรอิสระจะมีค่าเท่ากัน ซึ่งข้อตกลงนี้เรียกว่า มีคุณสมบัติของ homoscedasticity

2.1.4 ค่าของตัวแปรสุ่มที่อยู่ติดกันไม่สัมพันธ์กัน ถ้าค่าของตัวแปรสุ่มไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อนี้ เรียกว่า ข้อมูลมี autocorrelation กัน ซึ่งจะมีผลต่อความแม่นยำ (precision) ของการทดสอบสมมติฐานและการประมาณค่าแบบช่วง แต่จะไม่มีผลต่อความแม่นยำสำหรับการประมาณค่าแบบจุด

2.1.5 ตัวแปรอิสระแต่ละตัวจะต้องไม่สัมพันธ์กัน

2.1.6 การแจกแจงของตัวแปรตาม $\underset{\sim}{y}$ สำหรับค่าตัวแปรอิสระต่าง ๆ ที่ได้กำหนดเป็นแบบปกติ นั่นคือการแจกแจงของ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ในความถดถอยเชิงพหุจะเป็นแบบปกติด้วย ซึ่งข้อตกลงนี้จำเป็นเมื่อจะมีการทดสอบสมมติฐานและการประมาณค่าแบบช่วง

2.2 การทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ (The Regular Likelihood Ratio test :RL)

ในที่นี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติสำหรับการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ มีรายละเอียดดังนี้

สมมติให้ $\underset{\sim}{y} \sim N_n(X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 I_n)$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ และให้ $L(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นของตัวอย่างสุ่มซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันความควรจะเป็นดังนี้

$$L(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) \qquad = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\}$$

พารามิเตอร์ในที่นี้คือ β_p (p=0,1,2,…,5) และ σ^2

เมื่อพิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว จะเห็นว่าสามารถประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดของ $\hat{\beta}_p$ และ $\hat{\sigma}^2$ ภายใต้ข้อกำหนดของ Ω และภายใต้ข้อกำหนดของ ω โดยที่

$$\Omega = \{(\beta_p, \sigma^2) \mid -\infty < \beta_p < \infty, p = 0,1,2,\ldots,5; \sigma^2 > 0\}$$

และ

$$\omega = \{(\beta_p, \sigma^2) \mid -\infty < \beta_p < \infty, \beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_5 = \beta; \sigma^2 > 0\}$$

หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้าให้

$L(\Omega)$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นบนปริภูมิพารามิเตอร์

$L(\omega)$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นภายใต้ข้อกำหนด H_0

$L(\hat{\Omega})$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นเมื่อแทนค่า $\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2$ ด้วยตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ และ $\hat{\sigma}^2$ เมื่อ $-\infty < \beta_p < \infty$ และ $\sigma^2 > 0$

$L(\hat{\omega})$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็นเมื่อแทนค่า $\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2$ ด้วย $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*$ และ $\hat{\sigma}^{*2}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดภายใต้ข้อกำหนด H_0

การทดสอบด้วยอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ จะใช้ตัวสถิติ

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

ซึ่งจากการที่ $L(\hat{\omega})$ และ $L(\hat{\Omega})$ เป็นฟังก์ชันความควรจะเป็น และ ω เป็นเซตย่อยของ Ω จะแสดงได้ว่า $0 \le \Lambda \le 1$ การทดสอบนี้จะมีเขตการปฏิเสธสมมติฐานที่กำหนดด้วย $\Lambda \le c$

<u>ขั้นตอนการหาตัวสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ</u>

วิธีการหาตัวสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ (Regular likelihood ratio test) ของ $L(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ สามารถทำได้ดังนี้

1. หาตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ $L(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ ภายใต้ข้อกำหนดของ Ω นั่นคือ $-\infty < \beta_p < \infty \ \forall p$ และ $\sigma^2 > 0$ แทนด้วย $L(\hat{\Omega})$

2. หาตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ $L(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2)$ ภายใต้ข้อกำหนดของสมมติฐานว่าง H_0 $L(\hat{\omega})$

3. หาตัวสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

4. หาจุดวิกฤตหรือเกณฑ์การตัดสินใจ

การทดสอบนี้จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง H_0 ก็ต่อเมื่อ $\Lambda \le c$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ $0 \le c < 1$

<u>สมมติฐานในการทดสอบ</u>

$H_0: A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$

$H_1: A\underset{\sim}{\beta} \neq \underset{\sim}{c}$

โดยที่

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(p+1)\times(p+1)}, \quad \underset{\sim}{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}$$

ตัวแบบเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ คือ $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$

ในการหาตัวสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นด้วยขั้นตอนดังกล่าวข้างต้น จะได้ดังนี้

1. หาตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ^2 ของ $L(\hat{\Omega})$ คือ

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T \left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}{n}$$

พิสูจน์

ฟังก์ชันความควรจะเป็นจะได้ว่า

$$L(\underset{\sim}{y} : X \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\}$$

$$\ln L(\underset{\sim}{y} : X \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})$$

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \ln L(\underset{\sim}{y} : X \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})(-X)^T = \frac{1}{\sigma^2}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})(X)^T$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\underset{\sim}{y} : X \mid \underset{\sim}{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})$$

ให้ $\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \ln L = 0$, $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0$ และแทน $\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2$ ด้วย $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ตามลำดับ จะได้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \underset{\sim}{y}$$

และ $$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T \left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}{n}$$

2. หาตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดสำหรับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ^2 ของ $L(\hat{\omega})$

คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} = \left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\underset{\sim}{y} - \left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}A\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) + \left(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A(X^{T}X)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)}{n}$$

พิสูจน์ (ธีระพร วีระถาวร , 2541:210-211)

ฟังก์ชันความควรจะเป็นจะได้ว่า

$$L(\underset{\sim}{y};X\,|\,\underset{\sim}{\beta},\sigma^{2}) = (2\pi\sigma^{2})^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\}$$

การหาค่าประมาณของ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ^2 ภายใต้เงื่อนไข $A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$ จะใช้เซตของตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multiplier) $\underset{\sim}{\lambda}$ มาช่วยในการหาค่าประมาณของ $\underset{\sim}{\beta}$ และ σ^2 โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $\underset{\sim}{\beta}$, σ^2 และ $\underset{\sim}{\lambda}$ ของ $L = L(\underset{\sim}{y};X\,|\,\underset{\sim}{\beta},\sigma^{2}) - \underset{\sim}{\lambda}^{T}(A\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{c})$ และสามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$L = (2\pi\sigma^{2})^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\} - \underset{\sim}{\lambda}^{T}(A\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{c})$$

$$\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\beta}}L = (2\pi\sigma^{2})^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(2X^{T}X\underset{\sim}{\beta} - 2X^{T}\underset{\sim}{y}\right)\right\} - A^{T}\underset{\sim}{\lambda}$$

$$= \left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(2X^{T}X\underset{\sim}{\beta} - 2X^{T}\underset{\sim}{y}\right)\right\}L\left(\underset{\sim}{y};X\,|\,\underset{\sim}{\beta},\sigma^{2}\right) - A^{T}\underset{\sim}{\lambda}$$

$$= \frac{\left(2X^{T}X\underset{\sim}{\beta} - 2X^{T}\underset{\sim}{y} + 2\sigma^{2}A^{T}\underset{\sim}{\lambda}\right)}{L\left(\underset{\sim}{y};X\,|\,\underset{\sim}{\beta},\sigma^{2}\right)} \quad \text{.......(2.1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^{2}}L = -\frac{n}{2}(\sigma^{2})^{-1}(2\pi\sigma^{2})^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2\sigma^4}\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}L\left(\underset{\sim}{y};X\mid\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right)+\left\{\frac{1}{2\sigma^4}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\right\}L\left(\underset{\sim}{y};X\mid\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right) \quad ...(2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\lambda}}L=-\left(A\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{c}\right) \quad ....(2.3)$$

ให้ (2.1),(2.3) เท่ากับ 0 และ $\underset{\sim}{\beta}$, σ^2 และ $\underset{\sim}{\lambda}$ แทนด้วย $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*$, $\hat{\sigma}^{*2}$ และ $\underset{\sim}{\hat{\lambda}}$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้ (โดยให้ $\underset{\sim}{\lambda}^*=\sigma^{*2}\underset{\sim}{\hat{\lambda}}/L(\underset{\sim}{y};X\mid\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)$ และ $L(\underset{\sim}{y};X\mid\underset{\sim}{\beta},\sigma^2)>\underset{\sim}{0}$)

จาก (2.1) จะได้ว่า

$$2X^TX\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* - 2X^T\underset{\sim}{y} + 2A^T\underset{\sim}{\lambda}^* = \underset{\sim}{0}$$

$$X^TX\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* + A^T\underset{\sim}{\lambda}^* = X^T\underset{\sim}{y}$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (X^TX)^{-1}(X^T\underset{\sim}{y} - A^T\underset{\sim}{\lambda}^*)$$

$$= \underset{\sim}{\hat{\beta}} - (X^TX)^{-1}A^T\underset{\sim}{\lambda}^* \quad ....(2.4)$$

จาก (2.3) จะได้ว่า

$$A\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = \underset{\sim}{c} \quad ....(2.5)$$

แทนค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*$ ใน (2.5) จะได้ว่า

$$A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - A(X^TX)^{-1}A^T\underset{\sim}{\lambda}^* = \underset{\sim}{c}$$

ดังนั้น $$\underset{\sim}{\lambda}^* = (A(X^TX)^{-1}A^T)^{-1}(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c})$$

แทนค่า $\underset{\sim}{\lambda}^*$ ใน (2.4) จะได้ว่า

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = \underset{\sim}{\hat{\beta}} - (X^TX)^{-1}A^T(A(X^TX)^{-1}A^T)^{-1}(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}) \quad .....(2.6)$$

ให้ (2.2) เท่ากับ 0 และ $\underset{\sim}{\beta}$, σ^2 แทนด้วย $\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}$, $\hat{\sigma}^{*2}$ ตามลำดับ สามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$-\frac{n}{2\sigma^2}L\left(\underset{\sim}{y};X|\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right)+\left\{\frac{1}{2\sigma^4}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\right\}L\left(\underset{\sim}{y};X|\underset{\sim}{\beta},\sigma^2\right)=0$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^{*2} &= \frac{1}{n}\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left\{\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}+X\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)\right\}^T\left\{\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}+X\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{n}\left\{\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)+\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)^T X^TX\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{n}\left\{\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)+\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)^T\left(A\left(X^TX\right)^{-1}A^T\right)^{-1}\right.\\
&\qquad \left. A\left(X^TX\right)^{-1}\left(X^TX\right)\left(X^TX\right)^{-1}A^T\left(A\left(X^TX\right)^{-1}A^T\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)\right\}
\end{aligned}$$

; โดยการแทนค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ - $\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}$ ซึ่งได้จาก (2.6)

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)+\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)^T\left(A(X^TX)^{-1}A^T\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)\right\}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}^*}=\left(X^TX\right)^{-1}X^T\underset{\sim}{y}-\left(X^TX\right)^{-1}A^T\left(A\left(X^TX\right)^{-1}A^T\right)^{-1}A\left(X^TX\right)^{-1}X^T\underset{\sim}{y}$$

$$\hat{\sigma}^{*2}=\frac{\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)+\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)^T\left(A(X^TX)^{-1}A^T\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)}{n}$$

3. แทนที่พารามิเตอร์ในฟังก์ชันความควรจะเป็นด้วยตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดภายใต้ Ω จะได้ดังนี้

$$L\left(\hat{\Omega}\right)=L\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\right)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}})^T(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}})\}$$

$$= \frac{e^{-n/2}(n)^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left[\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)\right]^{n/2}}$$

และแทนที่พารามิเตอร์ในฟังก์ชันความควรจะเป็นด้วยตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดภายใต้ ω จะได้ดังนี้

$$L(\hat{\omega}) = L\left(\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}, \hat{\sigma}^{*2}\right) = (2\pi\sigma^{*2})^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}})\}$$

$$= \frac{e^{-n/2}(n)^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left[\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}\right)\right]^{n/2}}$$

ดังนั้น ตัวสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ (Seber,1977:96) คือ

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\left[\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)\right]^{-n/2}}{\left[\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}\right)\right]^{-n/2}} \leq k$$

$$= \left[\frac{(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})}{(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) + \left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)}\right]^{n/2^{*}}$$

$$= \left[\frac{1}{1 + \dfrac{\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)}{\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}}\right]^{n/2}$$

---

* $(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}^{*}}) - (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})^{T}(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{c}\right)$

$$= \left[\frac{1}{1+\frac{\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)}{SSE}} \right]^{n/2}$$

พิจารณา $\dfrac{\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)}{SSE}$

$$\frac{\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)\Big/p}{\sigma^{2}} \sim \chi^{2}(p) \text{ โดยประมาณ}$$

และ $$\frac{SSE\Big/n-p-1}{\sigma^{2}} \sim \chi^{2}(n-p-1) \text{ โดยประมาณ}$$

$$\frac{\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\hat{\beta}-\underset{\sim}{c}\right)\Big/p}{SSE\Big/n-p-1} \sim F(p,n-p-1) \text{ โดยประมาณ}$$

$$\Lambda = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{p}{n-p-1}\right)F} \right]^{n/2} \leq k$$

$$\Lambda^{2/n} \xrightarrow{D}{}^{*} \frac{1}{1+\left(\frac{p}{n-p-1}\right)F} \leq k^{2/n}$$

$$\xrightarrow{D} 1+\left(\frac{p}{n-p-1}\right)F \geq k^{-2/n}$$

$$\xrightarrow{D} \left(\frac{p}{n-p-1}\right)F \geq k^{-2/n}-1$$

---

* $\xrightarrow{D}$ คือการลู่เข้าในการแจกแจง (Converge in distribution)

$$\xrightarrow{D} F \qquad \geq \left(\frac{n-p-1}{p}\right)\left(k^{-2/n}-1\right)=c_0$$

เนื่องจาก $c_0 \sim F_{(p,n-p-1)}$ ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (probability density function) ของ c_0 คือ

$$f(c_0)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{p}{n-p-1}\right)^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)}\frac{c_0^{(p/2)-1}}{\left(1+\frac{p}{n-p-1}c_0\right)^{(n-1)/2}} \quad , \begin{cases} c_0 \geq 0 \\ n-1 \geq 0 \\ n-p-1 \geq 0 \end{cases}$$

ขั้นตอนต่อมาเราจะหา p-value (มานพ วราภักดิ์ ,2547: 350) สำหรับการทดสอบสมมติฐานว่างคือ

$$\begin{aligned} \text{p-value} &= P\left(F \geq \left(\frac{n-p-1}{p}\right)\left(k^{-2/n}-1\right)\right) \\ &= P(F \geq c_0) \\ &= \int_{c_0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{p}{n-p-1}\right)^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)}\frac{c_0^{(p/2)-1}}{\left(1+\frac{p}{n-p-1}c_0\right)^{(n-1)/2}} dc_0 \end{aligned}$$

เมื่อ $c_0 \geq 0; p = 2,...,5; n = 10 \ \ 25 \ \ 50$ และ 100

เนื่องจากการหาค่า p – value จำเป็นต้องใช้ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูงหรือวิธีการวิเคราะห์ตัวเลข (Numerical Analysis) เพื่อความสะดวกในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงใช้โปรแกรม S – PLUS 2000 ซึ่งโปรแกรมมีรูปแบบการคำนวณดังนี้

การใช้โปรแกรม S – PLUS 2000 สำหรับการคำนวณค่า p-value

คำนวณค่า p-value จากคำสั่ง $\boxed{1-\mathrm{pf}(f_{cal},\mathrm{df1},\mathrm{df2})}$

เมื่อ $$F_{cal} = \frac{\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)^T\left(A(X^TX)^{-1}A^T\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)\Big/p}{SSE\big/n-p-1} = c_0$$

df1 คือ ระดับขั้นความเป็นเสรีตัวเศษ (numerator degree of freedom) = **p**

และ df2 คือ ระดับขั้นความเป็นเสรีตัวส่วน (denominator degree of freedom) =**n–p–1**

เมื่อได้ p – value (RLp-value) ในแต่ละรอบที่ทำการทดลองแล้วขั้นต่อมาคือพิจารณาค่า p-value ที่ได้เทียบกับระดับนัยสำคัญ (α) ที่ศึกษา (เมื่อทำซ้ำจนครบ 1,500 รอบ)

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{จำนวนครั้ง}\left(\text{p - value}_{RL} \le \alpha\right)}{\text{จำนวนรอบภายนอกที่ทำการทดลอง}} \;^{*}$$

$$\left(1-\hat{\beta}\right) = \frac{\text{จำนวนครั้ง}\left(\text{p - value}_{RL} \le \alpha\right)}{\text{จำนวนรอบภายนอกที่ทำการทดลอง}} \;^{**}$$

2.3 การทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Likelihood Ratio test : MCL)

การทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล เป็นการสร้างข้อมูลตัวอย่างสุ่มจากตัวแบบตามค่าพารามิเตอร์ และคำนวณค่าสถิติทดสอบด้วยอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ โดยอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างที่สุ่มได้ จะกระทำซ้ำจนกระทั่งครบจำนวน N ครั้ง และในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาการทดสอบมอนติคาร์โลภายใต้พื้นฐานตัวสถิติทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็น ซึ่งรายละเอียดการทดสอบดังกล่าว จะอธิบายข้างล่าง ดังต่อไปนี้

การทดสอบมอนติคาร์โลโดยใช้ตัวสถิติการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติ มีขั้นตอนดังนี้

2.3.1 นำข้อมูลตัวแปรอิสระ (X) สัมประสิทธิ์ความถดถอยที่กำหนดขึ้น $(\underset{\sim}{\beta})$ และความคลาดเคลื่อนสุ่ม $(\underset{\sim}{\varepsilon})$ มาคำนวณค่าข้อมูลตัวแปรตาม $(\underset{\sim}{y})$ และสัมประสิทธิ์ความถดถอย $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ พร้อมทั้งคำนวณค่าสถิติการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็น (Λ) จากข้อมูลของตัวอย่างแต่ละรอบภายนอกโดยการคำนวณดังนี้

$$\Lambda = \left[\frac{1}{1+\dfrac{\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)^{T}\left(A\left(X^{T}X\right)^{-1}A^{T}\right)^{-1}\left(A\underset{\sim}{\hat{\beta}}-\underset{\sim}{c}\right)}{SSE}}\right]^{n/2}$$

2.3.2 คำนวณค่าสถิติ F และคำนวณค่า p-value โดยคำนวณจากโปรแกรม S-PLUS 2000

---

* เมื่อกำหนดชุดข้อมูลให้สอดคล้องกับสมมติฐานว่าง

** เมื่อกำหนดชุดข้อมูลให้สอดคล้องกับสมมติฐานแย้ง

2.3.3 สร้างชุดข้อมูล $\underset{\sim}{\varepsilon}^*$ จากการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามที่กำหนดและทำการคำนวณค่า $\underset{\sim}{y}^*$ จากค่าสัมประสิทธิ์ความถดถอยที่กำหนดและเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระ และใช้เทคนิคมอนติคาร์โลกระทำซ้ำ 100 รอบ และในแต่ละรอบคำนวณอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล ได้ดังตาราง

จำนวนรอบ	ค่าสถิติของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล
1	Λ_1
2	Λ_2
$\vdots$	$\vdots$
i	Λ_i
$\vdots$	$\vdots$
100	Λ_{100}

2.3.4 คำนวณค่า p-value (Manly และ Bryan,1997:69-72) ของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล ได้ดังนี้

$$\text{p-value}_{MCL} = \frac{\text{จำนวนครั้ง}\left(\Lambda_i \le \Lambda\right)}{N}$$

โดยที่ Λ_i หมายถึง ค่าสถิติทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โลดังตารางใน 2.3.3 เมื่อ i = 1,2,…,100

Λ หมายถึง ค่าสถิติทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบปกติที่ได้จากการคำนวณของข้อมูลตัวอย่างสุ่มชุดเริ่มต้น ดัง 2.3.1

N หมายถึง จำนวนรอบในการทำซ้ำของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โลคือ 100 รอบ

2.3.5 พิจารณาค่า p-value ที่ได้เทียบกับระดับนัยสำคัญ (α) ที่ศึกษา

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{จำนวนครั้ง}\left(\text{p - value}_{MCL} \le \alpha\right)}{\text{จำนวนรอบภายนอกที่ทำการทดลอง}} \; ^{*}$$

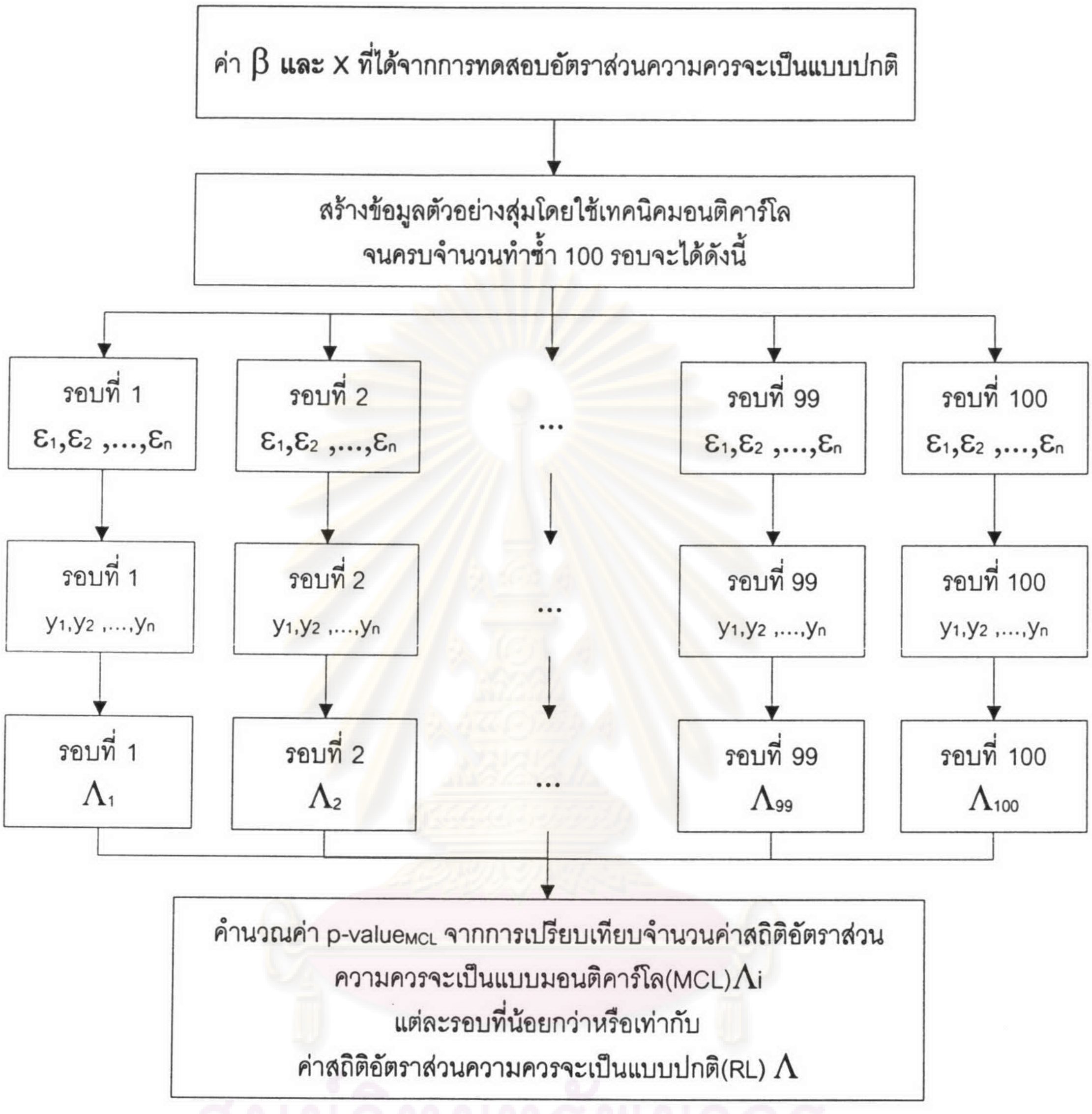
$$\left(1-\hat{\beta}\right) = \frac{\text{จำนวนครั้ง}\left(\text{p - value}_{MCL} \le \alpha\right)}{\text{จำนวนรอบภายนอกที่ทำการทดลอง}} \; ^{**}$$

---

* เมื่อกำหนดชุดข้อมูลให้สอดคล้องกับสมมติฐานว่าง

** เมื่อกำหนดชุดข้อมูลให้สอดคล้องกับสมมติฐานแย้ง

รูปที่ 2.1 แผนผังขั้นตอนของการทดสอบอัตราส่วนความควรจะเป็นแบบมอนติคาร์โล (MCL) Λ_i



2.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

การเปรียบเทียบตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน สำหรับการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงพหุ จะพิจารณาโดยการเปรียบเทียบจากค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 โดยนับจำนวนชุดที่ปฏิเสธสมมติฐานว่างต่อชุดข้อมูลทั้งหมด และจากค่าอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบทั้ง 2 วิธี

ดังนั้น ถ้าตัวสถิติทดสอบของวิธีใดให้ค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 น้อยกว่าและให้ค่าอำนาจการทดสอบที่สูง ก็จะเป็นตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ความถดถอยที่เหมาะสม