บทที่ ๓

ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิจัยจากการศึกษาวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML วิธี MINQUE วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML ซึ่งได้กล่าวถึงแต่ละวิธีโดยละเอียดในบทที่ ๒ สำหรับแบบจำลองผสมและแบบจำลองเชิงสุ่ม โดยเปรียบเทียบผลที่ได้จากแต่ละวิธีในแต่ละตัวอย่าง พร้อมทั้งเปรียบเทียบคุณสมบัติของแต่ละวิธีในการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ทั้งนี้เพื่อหาข้อสรุปสมมติฐานที่ตั้งไว้ว่าการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งกำหนดให้ค่าประมาณมีค่าเป็นบวกเสมอ จะให้ค่าประมาณที่มีคุณสมบัติที่ดีกว่าการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีอื่น ๆ

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในแต่ละวิธีในที่นี้ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก

๓.๑ ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ สำหรับแบบจำลองผสม

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในกรณีข้อมูลไม่สมดุลย์สำหรับแบบจำลองผสมในแต่ละวิธีโดยเรียงลำดับดังนี้ วิธี ML วิธี MINQUE วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML แสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ อนึ่ง ในการวิจัยนี้ต้องการศึกษาผลที่ได้จากการประมาณค่าโดยวิธีต่าง ๆ ดังกล่าวมาแล้วไม่ได้มีจุดมุ่งหมายศึกษาจากการทดลองใด ๆ เพื่อความสะดวกจึงให้ค่าสังเกตในแต่ละตัวอย่างมาจากตารางเลขสุ่ม

ตัวอย่างที่ ๑ ให้ปัจจัย A เป็นผลกระทบคงที่มี ๓ ระดับ ปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๒ ระดับ การกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากันโดย $n_{11} = 3$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 3$, $n_{22} = 3$, $n_{31} = 2$, $n_{32} = 3$ ค่าสังเกตแสดงในตารางที่ ๓

ตารางที่ ๓ ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทางสำหรับแบบจำลองผสม

ปัจจัย A / ปัจจัย B	a_1	a_2	a_3
b_1	237 254 246	208 178 187	186 183
b_2	178 179	146 145 141	142 125 136

ในตัวอย่างนี้กำหนดให้ค่าสมมติเบื้องต้นให้เท่ากับ (1, 1, 1) เพื่อหาค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในแต่ละวิธี

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML จากแวเรียนซ์-โคแวเรียนซ์เมทริกส์ ของ Y แทน $\hat{V} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ ในสมการ (2.1) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้วแทนในสมการ (2.2) เพื่อหา $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2]$ แล้วนำไปแทนค่าในรอบถัดไปในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๔ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๕ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้นจึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๕ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๔

ตารางที่ ๔ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
1	56.6991	0.0000	1015.5569
2	697.5876	0.0000	87.4441
3	723.5608	0.0000	77.5318
4	723.6533	0.0000	77.5309
5	723.6531	0.0000	77.5311

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE แทนค่าสมมติเบื้องต้นในแวเรียนซ์ - โคแวเรียนซ์ เมทริกส์

ได้ $$\hat{V} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_i^2 V_i$$

ซึ่ง $V_i = u_i u_i'$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

แทนค่า $\hat{V}$ ในสมการ (2.4) หาค่าประมาณ $\hat{\sigma}_i^2$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ซึ่งมีค่าดังนี้

$\hat{\sigma}_1^2 = 1473.5952$

$\hat{\sigma}_2^2 = 23.3530$

$\hat{\sigma}_3^2 = 79.2668$

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE นำค่าประมาณที่ได้จากวิธี MINQUE เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป ในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลห่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๗ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๘ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้นจึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๘ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๕

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ ๕ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
1	1473.5952	23.3530	79.2668
2	1463.2637	26.8879	78.8663
3	1464.4255	26.9543	78.8437
4	1464.3303	26.9567	78.8429
5	1464.4980	26.9577	78.8426
6	1464.3926	26.9563	78.8428
7	1464.4624	26.9580	78.8428
8	1464.4624	26.9580	78.8428

จากตารางที่ ๕ จะสังเกตได้ว่าค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในแต่ละรอบมีค่าเป็นบวกทุก ๆ ค่า ดังนั้น ค่าประมาณที่ได้จะมีค่าเท่ากับค่าประมาณโดยวิธี REML

ตัวอย่างที่ ๒ จากตัวอย่างที่ ๑ กำหนดค่าสมมติเบื้องต้นซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sigma^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2]$ เท่ากับ (1, 2, 3) ในการหาค่าประมาณแวเรียนซ์คอมโปเนนท์ ในแต่ละวิธีได้ผลดังนี้

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML แทนค่าสมมติเบื้องต้นใน $\hat{V} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ แล้วนำค่า $\hat{V}$ แทนในสมการ (2.1) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้วแทนในสมการ (2.2) เพื่อหาค่า $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2]$ แล้วทำต่อไป นำค่าประมาณกลับไปแทนค่าเริ่มต้นรอบใหม่ ทำเช่นนี้จนถึงรอบที่ ๗ พบว่าค่าประมาณแตกต่างจากค่าประมาณที่ได้ในรอบที่ ๖ น้อยมากคือไม่เกิน ๐.๐๕ จึงหยุด

ดังนั้น ค่าประมาณรอบที่ ๗ เป็นค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๖

ตารางที่ ๖ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
1	283.4207	204.0866	83.2493
2	0.0000	0.1084	7426.9375
3	685.3782	0.0000	97.9688
4	723.2236	0.0000	77.5331
5	723.4951	0.0000	77.5316
6	723.3652	0.0000	77.5313
7	723.4048	0.0000	77.5309

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE แทนค่าสมมติเบื้องต้นในแวเรียนซ์ - โคแวเรียนซ์ เมทริกส์ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ นำค่า $\hat{V}$ ที่ได้แทนในสมการ (2.4) หาค่าประมาณ $\hat{\sigma}_i^2$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ได้ดังนี้

$$\hat{\sigma}_1^2 = 1472.4675$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = 17.9209$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 80.4011$$

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งเป็นการทำต่อจากวิธี MINQUE โดยนำค่าประมาณที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป พบว่าถึงรอบที่ ๑๒ ค่าประมาณมีค่าแตกต่างจากค่าประมาณที่ได้ในรอบที่ ๑๑ น้อยมาก คือ

ไม่เกิน ๐.๐๔ จึงหยุดที่รอบที่ ๑๒ ค่าประมาณที่ได้เป็นค่าประมาณในรอบที่ ๑๒ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๗

ตารางที่ ๗ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
1	1472.4675	17.9209	80.4011
2	1461.2375	26.7545	78.9138
3	1464.0344	26.9526	78.8440
4	1464.3008	26.9570	78.8422
5	1464.1460	26.9575	78.8428
6	1464.3069	26.9579	78.8426
7	1464.1987	26.9573	78.8424
8	1464.4341	26.9568	78.8426
9	1464.3088	26.9573	78.8425
10	1464.4116	26.9577	78.8428
11	1464.2964	26.9568	78.8425
12	1464.2964	26.9568	78.8425

จากตารางที่ ๗ จะเห็นได้ว่าค่าประมาณมีค่าเป็นบวกหมด ดังนั้น ค่าประมาณจะเท่ากับค่าประมาณที่ได้โดยวิธี REML

จากตัวอย่างที่ ๑ และตัวอย่างที่ ๒ ซึ่งใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน แต่ให้ค่าสมมติเบื้องต้นต่างกัน ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ มีค่าไม่แตกต่างกัน แต่การให้ค่าสมมติเบื้องต้นเท่ากับ (1, 2, 3) นั้น จำนวนรอบที่คำนวณมากกว่าจำนวนรอบที่คำนวณโดยให้ค่าสมมติเบื้องต้นเป็น (1, 1, 1)

๓.๒ ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ สำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในกรณีข้อมูลไม่สมดุลย์ จากตัวอย่างที่ ๑ และตัวอย่างที่ ๒ แสดงว่าการให้ค่าสมมติเบื้องต้นต่างกันจะได้ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ แตกต่างกันน้อยมาก ดังนั้น ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงผลการหาค่าประมาณ-แวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ สำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม ให้ค่าสมมติเบื้องต้นของค่า $\hat{\sigma}^2 = [\ \hat{\sigma}_1^2\ ,\ \hat{\sigma}_2^2\ ,\ \hat{\sigma}_3^2\ ,\ \hat{\sigma}_4^2\ ]$ เป็น (1, 1, 1, 1) สำหรับการประมาณโดยวิธี ML วิธี MINQUE วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ ๓ ให้ปัจจัย A เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๒ ระดับ ปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๓ ระดับ การกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากัน โดย $n_{11} = 2$, $n_{12} = 1$, $n_{13} = 3$, $n_{21} = 2$, $n_{22} = 2$, $n_{23} = 1$ ค่าสังเกตแสดงดังในตารางที่ ๘

ตารางที่ ๘ ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทางสำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม

ปัจจัย B \ ปัจจัย A	a_1	a_2
b_1	24 8	12 10
b_2	29	33 17
b_3	11 48 16	13

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML แทนค่าสมมติเบื้องต้นซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sigma^2 = [\ \sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2\ ,\ \sigma_3^2\ ,\ \sigma_4^2\ ]$ ในสมการ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2\ V_i$

ลงในสมการ (2.2) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้วแทนในสมการ (2.2) เพื่อหา $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2, \hat{\sigma}_4^2]$ แล้วนำกลับไปแทนค่าในรอบถัดไปในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๓ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๔ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๔ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๙

ตารางที่ ๙ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	4.1763	34.8361	0.0000	211.1670
2	0.0000	0.0000	0.0000	159.7638
3	0.0000	0.0000	0.0000	193.5743
4	0.0000	0.0000	0.0000	193.5743

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE แทนค่าสมมติเบื้องต้นในแวเรียนซ์-โคแวเรียนซ์ เมทริกส์ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ แทนค่า $\hat{V}$ ในสมการ (2.4) หาค่าประมาณ $\hat{\sigma}_i^2$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ มีค่าดังนี้

$$\hat{\sigma}_1^2 = 264.1128$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = -470.7217$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 0.6297$$

$$\hat{\sigma}_4^2 = 240.6594$$

ผลที่ได้จากการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งเป็นการทำต่อจากวิธี MINQUE โดยการนำค่าประมาณที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัด ๆ ไปในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๖ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๗ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๗ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๐

ตารางที่ ๑๐ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบได้

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	264.1128	-470.7217	0.6297	240.6594
2	59.1549	- 77.2886	0.1305	32.7643
3	59.9098	- 77.3428	0.8093	34.1898
4	62.1054	- 82.0517	0.6732	36.2074
5	61.5101	- 80.8325	0.6786	35.6293
6	61.5668	- 80.9400	0.6830	35.6887
7	61.5668	- 80.9400	0.6830	35.6887

จากตารางที่ ๑๐ เห็นได้ว่าค่าประมาณบางค่ามีค่าเป็นลบ เพื่อหลีกเลี่ยงค่าประมาณที่เป็นค่าลบ จะคำนวณรอบใหม่โดยตัดผลกระทบที่ค่าประมาณเป็นค่าลบออก ซึ่งได้ผลการคำนวณเหมือนกับวิธี REML ดังนี้

ตารางที่ ๑๑ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ องค์ประกอบโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	19.7358	43.3383	0.0000	211.5453
2	0.0000	0.5972	0.0000	157.2131
3	0.0000	0.1835	0.0000	151.1576
4	0.0000	0.1835	0.0000	151.1576

ตัวอย่างที่ ๔ ให้ปัจจัย A เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๒ ระดับ และปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๓ ระดับ การกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากัน โดย $n_{11} = 2$, $n_{12} = 1$, $n_{13} = 3$, $n_{21} = 2$, $n_{22} = 2$, $n_{23} = 1$ ค่าสังเกตแสดงในตารางที่ ๑๒

ตารางที่ ๑๒ ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทางสำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม

ปัจจัย A / ปัจจัย B	a_1	a_2
b_1	13 15	8 6
b_2	9	10 12
b_3	11 14 7	12

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีML แทนค่าสมมติเบื้องต้น ซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sigma^2 = [\ \sigma_1^2\ ,\ \sigma_2^2\ ,\ \sigma_3^2\ ,\ \sigma_4^3\ ]$ ในสมการ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ และใช้ $\hat{V}$ แทน V ในสมการ (2.1) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้ว แทนในสมการ (2.2) เพื่อหา $\hat{\sigma}^2 = [\ \hat{\sigma}_1^2\ ,\ \hat{\sigma}_2^2\ ,\ \hat{\sigma}_3^2\ ,\ \hat{\sigma}_4^2\ ]$ แล้วนำไปแทนค่าในรอบถัดไปในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๓ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๔ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้นจึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๔ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๓

ตารางที่ ๑๓ แสดงค่าประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	-2.3089	-5.9865	9.5439	6.0055
2	0.0000	0.0000	1.5366	6.0077
3	0.0000	0.0000	1.8994	5.8113
4	0.0000	0.0000	1.9031	5.8083

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE เมื่อแทนค่าสมมติเบื้องต้นของ $\hat{\sigma}^2 = [\ \hat{\sigma}_1^2\ ,\ \hat{\sigma}_2^2\ ,\ \hat{\sigma}_3^2\ ,\ \hat{\sigma}_4^2\ ]$ เท่ากับ (1, 1, 1, 1) ในแวเรียนซ์-โคแวเรียนซ์ เมทริกส์ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ แทนค่า $\hat{V}$ ในสมการ (2.4) หาค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ซึ่งหาค่าเพียงรอบเดียวได้ผลดังนี้

$$\hat{\sigma}_1^2 = 4.5700$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = -5.9952$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = -0.0886$$

$$\hat{\sigma}_4^2 = 2.9197$$

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งทำต่อจากวิธี MINQUE โดยการนำค่าประมาณที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป ในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๖ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๗ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๗ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๔

ตารางที่ ๑๔ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบได้

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	4.5700	-5.9952	-0.0886	2.9197
2	4.8118	-4.8430	0.1759	2.8368
3	4.9968	-5.2894	0.0899	3.2520
4	4.8225	-5.1891	0.0732	2.9975
5	4.8899	-5.1157	0.1024	3.0590
6	4.8893	-5.1781	0.0873	3.0795
7	4.8893	-5.1781	0.0873	3.0795

จากการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ค่าประมาณบางค่ามีค่าเป็นลบเพื่อหลีกเลี่ยงค่าประมาณที่เป็นค่าลบ จะคำนวณรอบใหม่ โดยตัดผลกระทบที่ค่าประมาณเป็นค่าลบออกพบว่า ในรอบที่ ๔ การคำนวณผลที่ได้ของ

ค่าประมาณไม่แตกต่างจากผลที่ได้ในรอบที่ ๓ จึงหยุดที่รอบที่ ๔ ค่าประมาณที่เหมาะสม คือค่าประมาณในรอบที่ ๔ ซึ่งมีค่าเท่ากับการประมาณโดยวิธี REML ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๕

ตารางที่ ๑๕ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	0.0000	0.0000	9.7335	6.0024
2	0.0000	0.0000	2.5104	6.0250
3	0.0000	0.0000	2.9631	5.8088
4	0.0000	0.0000	2.9631	5.8088

จากตัวอย่างที่ ๓ และตัวอย่างที่ ๔ กำหนดให้ปัจจัย A มี ๒ ระดับ ปัจจัย B มี ๓ ระดับ ในทำนองกลับกัน ให้ปัจจัย A มี ๓ ระดับ ปัจจัย B มี ๒ ระดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ ๕ ให้ปัจจัย A เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๓ ระดับ ปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๒ ระดับ การกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากันโดย $n_{11} = 2$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 1$, $n_{22} = 2$, $n_{31} = 3$, $n_{32} = 1$ ค่าสังเกตแสดงในตารางที่ ๑๖

ตารางที่ ๑๖ ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทางสำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม

ปัจจัย A / ปัจจัย B	a_1	a_2	a_3
b_1	24 8	12	10 29 33
b_2	17 11	48 16	13

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML แทนค่าสมมติเบื้องต้น ซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sigma^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2]$ ด้วย (1, 1, 1, 1) ในสมการ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ และแทน $\hat{V}$ ในสมการ (2.1) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้วแทนในสมการ (2.2) เพื่อหา $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2, \hat{\sigma}_4^4]$ แล้วนำค่าประมาณที่ได้ไปแทนค่าในรอบถัดไป พบว่าค่าประมาณในรอบที่ ๔ มีค่าไม่แตกต่างจากรอบที่ ๓ ดังนั้น ค่าประมาณในรอบที่ ๔ จึงเป็นค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่เหมาะสม ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๗

ตารางที่ ๑๗ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	0.0000	0.0000	1.0576	191.0880
2	0.0000	0.0000	0.0000	177.3406
3	0.0000	0.0000	0.0000	177.2863
4	0.0000	0.0000	0.0000	177.2863

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE โดยแทนค่าสมมติเบื้องต้นในแวเรียนซ์-โคแวเรียนซ์ เมทริกส์ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ และแทนค่า $\hat{V}$ ในสมการ (2.4) ผลการคำนวณ

$$\hat{\sigma}_1^2 = 258.4273$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = -672.5461$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 25.0079$$

$$\hat{\sigma}_4^2 = 237.1707$$

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งเป็นการทำต่อจากวิธี MINQUE โดยการนำค่าประมาณที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อยในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๘ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๙ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๙ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๘

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ ๑๘ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบได้

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	258.4273	-672.5461	25.0079	237.1707
2	79.5987	-173.1348	2.0874	53.4151
3	72.7076	-152.4003	5.1307	46.0344
4	79.6844	-176.9572	4.0748	54.4305
5	76.0652	-164.0120	4.3511	50.0459
6	77.2149	-168.2647	4.3115	51.4795
7	76.9121	-167.1199	4.3062	51.0963
8	76.9596	-167.3135	4.3134	51.1600
9	76.9596	-167.3135	4.3134	51.1600

จากตารางที่ ๑๘ เห็นได้ว่าค่าประมาณบางค่ามีค่าเป็นลบ เพื่อหลีกเลี่ยงค่าประมาณที่เป็นค่าลบจะคำนวณรอบใหม่โดยตัดผลกระทบที่ค่าประมาณเป็นค่าลบออก พบว่าในรอบที่ ๔ ผลที่ได้ของค่าประมาณไม่แตกต่างจากผลที่ได้ในรอบที่ ๓ ค่าประมาณที่เหมาะสมคือค่าประมาณในรอบที่ ๔ ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าประมาณโดยวิธี REML ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๑๙

ตารางที่ ๑๙ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	0.0000	0.0000	1.4816	191.3182
2	0.0000	0.0000	0.0000	179.7443
3	0.0000	0.0000	0.0000	179.6546
4	0.0000	0.0000	0.0000	179.6546

ตัวอย่างที่ ๖ ให้ปัจจัย A เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๓ ระดับ ปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิงสุ่มมี ๒ ระดับ การกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากัน โดย $n_{11} = 2$, $n_{12} = 2$, $n_{21} = 1$, $n_{22} = 2$, $n_{31} = 3$, $n_{32} = 1$ ค่าสังเกตแสดงในตารางที่ ๒๐

ตารางที่ ๒๐ ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทางสำหรับแบบจำลองเชิงสุ่ม

ปัจจัย B \ ปัจจัย A	a_1	a_2	a_3
b_1	13 5	8	6 9 10
b_2	12 11	14 7	12

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML แทนค่าสมมติเบื้องต้นซึ่งเป็นค่าประมาณของ $\sigma^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2]$ มีค่าเท่ากับ (1, 1, 1, 1)

ในสมการ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ ลงในสมการ (2.1) เพื่อหาค่าประมาณ $\hat{\beta}$ เมื่อได้ค่าประมาณ $\hat{\beta}$ แล้วแทนในสมการ (2.2) เพื่อหา $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2, \hat{\sigma}_4^2]$ แล้วนำค่าประมาณที่ได้ไปแทนค่าในรอบถัด ๆ ไป ในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๔ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๕ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ในรอบที่ ๕ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๒๑

ตารางที่ ๒๑ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	0.4274	0.0000	1.5225	7.0325
2	0.2697	0.0000	0.7987	6.5493
3	0.2921	0.0000	0.9782	6.3847
4	0.2837	0.0000	0.9173	6.4429
5	0.2865	0.0000	0.9381	6.4233

ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE ซึ่งได้จากการแทนค่าสมมติเบื้องต้นในแวเรียนซ์-โคแวเรียนซ์ เมทริกส์ $\hat{V} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2 V_i$ และแทนค่า $\hat{V}$ ในสมการ (2.4) ผลการคำนวณดังนี้

$$\hat{\sigma}_1^2 = 258.4273$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = -672.5461$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = 25.0079$$

$$\hat{\sigma}_4^2 = 237.1707$$

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ซึ่งทำต่อจากวิธี MINQUE โดยการนำค่าประมาณที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป ในแต่ละรอบจะตรวจสอบว่าผลต่างจากรอบก่อนน้อยกว่า ๐.๐๕ หรือไม่ ในที่นี้ค่าประมาณทุกตัวในรอบที่ ๙ ห่างจากค่าประมาณในรอบที่ ๑๐ น้อยกว่า ๐.๐๕ ฉะนั้น จึงใช้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบที่ ๑๐ ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๒๒

ตารางที่ ๒๒ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบได้

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	13.3593	-25.0034	0.4042	9.2468
2	5.6802	- 6.2553	-0.0006	1.9142
3	5.4946	- 5.8589	0.5498	1.8525
4	6.6650	- 9.7274	0.1598	3.1424
5	5.6158	- 6.3876	0.2012	1.9549
6	5.7991	- 6.9916	0.3458	2.2177
7	5.9968	- 7.6646	0.2103	2.4210
8	5.7294	- 6.8035	0.2545	2.1169
9	5.8560	- 7.2067	0.2766	2.2730
10	5.8560	- 7.2067	0.2766	2.2730

จากตารางที่ ๒๒ เห็นได้ว่าค่าประมาณบางค่ามีค่าเป็นลบ เพื่อหลีกเลี่ยงค่าประมาณที่เป็นค่าลบ จะคำนวณรอบใหม่โดยตัดผลกระทบที่ค่าประมาณเป็นค่าลบออก พบว่าในรอบที่ ๔ ค่าประมาณที่ได้ไม่แตกต่างจากรอบที่ ๓ ค่าประมาณที่เหมาะสมคือค่าประมาณ

ในรอบที่ ๔ วิธีการนี้ให้ค่าประมาณเท่ากับค่าประมาณที่ได้จากวิธี REML ผลที่ได้ในแต่ละรอบแสดงในตารางที่ ๒๓

ตารางที่ ๒๓ แสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

รอบที่	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1	0.5828	0.0000	1.4451	7.0391
2	1.5509	0.0000	0.7442	6.5755
3	1.6007	0.0000	0.6386	6.6267
4	1.6007	0.0000	0.6386	6.6267

๓.๓ การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์

ในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบผลการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ โดยใช้ข้อมูลในตัวอย่างในหัวข้อ ๓.๒

จากตัวอย่างที่ ๑ ในกรณีแบบจำลองผสม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ_β^2 , $\sigma_{\alpha\beta}^2$ และ σ_e^2 ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\sigma}_3^2$ ตามลำดับ

ตารางที่ ๒๔ แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๑

วิธี	$\hat{\sigma}^2_\beta$	$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$	$\hat{\sigma}^2_e$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	723.6531	0.0000	77.5311	5
MINQUE	1473.5952	23.3530	79.2668	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	1464.4624	26.9580	78.8428	8
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	1464.4624	26.9580	78.8428	8

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๔ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML และ REML จะให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ น้อยกว่าการประมาณโดยวิธี MINQUE

๒. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ มีค่าใกล้เคียงกันไม่ว่าจะใช้วิธีใดในการประมาณค่าส่วน $\hat{\sigma}^2_\beta$ และ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ จากวิธี MINQUE และ Iterative MINQUE มีค่าใกล้เคียงกัน

๓. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี ML มีค่าเป็นศูนย์

๔. ทั้ง ๔ วิธีให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นมาก

๕. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกันมากระหว่างวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE

๖. ถึงแม้วิธี MINQUE และ Iterative MINQUE จะยอมให้ค่าประมาณเป็นลบได้ แต่จากตัวอย่างที่ ๑ ผลที่ได้ก็ไม่เป็นค่าลบ

๗. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ให้ค่าใกล้เคียงกันกับวิธี MINQUE แต่มีค่าน้อยกว่า

จากตัวอย่างที่ ๒ ในแบบจำลองผสม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ^2_β , $\sigma^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_e ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}^2_1$, $\hat{\sigma}^2_2$, $\hat{\sigma}^2_3$ ตามลำดับ

ตารางที่ ๒๔ แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๒

วิธี	$\hat{\sigma}^2_\beta$	$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$	$\hat{\sigma}^2_e$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	723.4048	0.0000	77.5309	7
MINQUE	1472.4675	17.9209	80.4011	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	1464.2964	26.9568	78.8425	12
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	1464.2964	26.9568	78.8425	12

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๔ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML และวิธี REML จะให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ น้อยกว่าการประมาณโดยวิธี MINQUE

๒. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ มีค่าใกล้เคียงกัน ไม่ว่าจะใช้วิธีใดในการประมาณค่า

๓. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี ML มีค่าเป็นศูนย์

๔. ทั้ง ๔ วิธี ให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นมาก

๕. จำนวนรอบที่คำนวณต่างกันระหว่างวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE

๖. ถึงแม้วิธี MINQUE และ Iterative MINQUE จะยอมให้ค่าประมาณเป็นลบได้ แต่จากตัวอย่างที่ ๒ ผลที่ได้ก็ไม่เป็นค่าลบ

๗. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ให้ค่าใกล้เคียงกันกับวิธี MINQUE แต่มีค่าน้อยกว่า

จากตัวอย่างที่ ๓ ในแบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ_α^2, σ_β^2, $\sigma_{\alpha\beta}^2$ และ σ_e^2 ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$, $\hat{\sigma}_3^2$, $\hat{\sigma}_4^2$ ตามลำดับ

ตารางที่ ๒๖ แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๓

วิธี	$\hat{\sigma}_\alpha^2$	$\hat{\sigma}_\beta^2$	$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2$	$\hat{\sigma}_e^2$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	0.00000	0.00000	0.00000	193.57425	4
MINQUE	264.11279	-470.72163	0.62968	240.65941	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	61.56676	- 80.94000	0.68300	35.68871	7
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	0.00000	0.18347	0.00000	151.15764	4

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๖ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML และ REML จะให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ น้อยกว่าการประมาณโดยวิธี MINQUE หรือ Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบได้

๒. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบไม่ได้ หรือวิธี REML มีค่าใกล้เคียงกัน เช่น $\hat{\sigma}^2_e$ มีค่าใกล้เคียงกันทั้ง ๒ วิธี ส่วน $\hat{\sigma}^2_\alpha$, $\hat{\sigma}^2_\beta$ และ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ ก็มีค่าใกล้เคียงกันทั้ง ๒ วิธี ซึ่งต่างมีค่าเป็นศูนย์ หรือเข้าใกล้ศูนย์

๓. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบได้ จะให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ น้อยกว่าการประมาณโดยวิธี MINQUE

๔. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_\beta$ โดยวิธี MINQUE และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบได้ ให้ค่าประมาณเป็นลบทั้ง ๒ วิธี ส่วน $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ ทั้ง ๒ วิธีนี้ จะให้ค่าเป็นบวก และมีค่าใกล้เคียงกับ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบไม่ได้

๕. ทั้ง ๔ วิธี ให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นมาก ยกเว้น $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียง ๑ ในวิธี MINQUE และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้

๖. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกันระหว่างวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ แต่จำนวนรอบที่คำนวณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบได้มีค่ามากกว่าของวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ หรือวิธี REML

จากตัวอย่างที่ ๔ ในแบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ^2_α , σ^2_β , $\sigma^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_e ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}^2_1$, $\hat{\sigma}^2_2$, $\hat{\sigma}^2_3$ และ $\hat{\sigma}^2_4$ ตามลำดับ

ตารางที่ ๒๗ แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๔

วิธี	$\hat{\sigma}^2_\alpha$	$\hat{\sigma}^2_\beta$	$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$	$\hat{\sigma}^2_e$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	0.00000	0.00000	1.90313	5.80830	4
MINQUE	4.57001	-5.99524	-0.08862	2.91965	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	4.88926	-5.17813	0.08727	3.07946	7
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	0.00000	0.00000	2.96309	5.80883	4

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๗ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบไม่ได้ หรือวิธี REML ให้ค่าประมาณใกล้เคียงกัน แต่ถ้าเปรียบกับวิธี MINQUE หรือ Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบได้จะเห็นว่ามีค่าประมาณไม่ใกล้เคียงกัน ไม่ว่าสำหรับค่าประมาณใด

๒. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีเป็นค่าลบได้ ให้ค่าประมาณใกล้เคียงกัน

๓. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี MINQUE กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีที่ค่าเป็นลบได้ มีค่าน้อยกว่าค่าประมาณ โดยวิธี ML หรือวิธี REML ซึ่งวิธี ML กับวิธี REML มีค่าเท่ากัน

๔. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\alpha}$, $\hat{\sigma}^2_{\beta}$ โดยวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ หรือวิธี REML มีค่าเป็นศูนย์

๕. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\beta}$ และ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี MINQUE มีค่าเป็นลบ ซึ่งค่า $\hat{\sigma}^2_{\beta}$ โดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้ มีค่าเป็นลบเพียงค่าเดียว

๖. ค่าประมาณทั้ง ๔ วิธี ให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นไม่ค่อยมาก

๗. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกันระหว่างวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ ซึ่งทั้ง ๒ วิธี มีจำนวนรอบที่คำนวณน้อยกว่าวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้

จากตัวอย่างที่ ๔ ในแบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ^2_{α} , σ^2_{β} , $\alpha^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_e ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}^2_1$, $\hat{\sigma}^2_2$, $\hat{\sigma}^2_3$ และ $\hat{\sigma}^2_4$ ตามลำดับ

<u>ตารางที่ ๒๘</u> แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๔

วิธี	$\hat{\sigma}^2_{\alpha}$	$\hat{\sigma}^2_{\beta}$	$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$	$\hat{\sigma}^2_e$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	0.00000	0.00000	0.00000	177.28628	4
MINQUE	258.42725	-672.54614	25.00787	237.17072	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	76.95964	-167.31351	4.31338	51.16003	9
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	0.00000	0.00000	0.00000	179.65459	4

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๘ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ หรือวิธี REML มีค่าใกล้เคียงกันมาก

๒. ค่าประมาณโดยวิธี ML และวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ มีค่าประมาณน้อยกว่าวิธี MINQUE ยกเว้น $\hat{\sigma}^2_\beta$ ซึ่งวิธี MINQUE มีค่าเป็นลบ

๓. ค่า $\hat{\sigma}^2_\alpha$, $\hat{\sigma}^2_\beta$, $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี ML และ Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ มีค่าเป็นศูนย์

๔. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าลบได้ ค่า $\hat{\sigma}^2_\beta$ มีค่าเป็นลบ ซึ่ง $\hat{\sigma}^2_\beta$ โดยวิธี MINQUE ก็มีค่าเป็นลบเช่นกัน

๕. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้มีค่าน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ

๖. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าลบได้ มีค่าประมาณน้อยกว่าวิธี MINQUE ซึ่งแตกต่างกันค่อนข้างมาก

๗. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกัน ระหว่างวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ ซึ่งทั้ง ๒ วิธี มีจำนวนรอบที่คำนวณน้อยกว่าวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้

๘. ค่าประมาณทั้ง ๔ วิธี ให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นมาก

จากตัวอย่างที่ ๖ ในแบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งต้องการประมาณค่าของ σ^2_α , σ^2_β , $\sigma^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_e ซึ่งในที่นี้ให้เท่ากับ $\hat{\sigma}^2_1$, $\hat{\sigma}^2_2$, $\hat{\sigma}^2_3$ และ $\hat{\sigma}^2_4$ ตามลำดับ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ ๒๙ แสดงเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ด้วยวิธีต่าง ๆ จากตัวอย่างที่ ๖

วิธี	$\hat{\sigma}^2_\alpha$	$\hat{\sigma}^2_\beta$	$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$	$\hat{\sigma}^2_e$	จำนวนรอบที่คำนวณ
ML	0.28648	0.00000	0.93814	6.42327	5
MINQUE	13.35932	-25.00336	0.40422	9.24678	1
Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	5.85601	- 7.20669	0.27655	2.27301	10
Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้) หรือ REML	1.60073	0.00000	0.63857	6.62673	4

ข้อสังเกตจากตารางที่ ๒๙ ซึ่งแสดงค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธีต่าง ๆ มีดังนี้

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML และ REML หรือวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ ให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ไม่แตกต่างกันมากหรือมีค่าใกล้เคียงกัน และมีค่าน้อยกว่าค่าประมาณโดยวิธี MINQUE

๒. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้ ให้ค่า $\hat{\sigma}^2_e$ น้อยที่สุด ส่วน $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี ML กับวิธี REML มีค่าใกล้เคียงกันมาก ส่วนของ MINQUE มีค่ามากกว่าวิธีอื่น ๆ

๓. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ ทั้ง ๔ วิธี มีค่าใกล้เคียงกัน โดยเฉพาะวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้มีค่าใกล้ ๑ ซึ่งเป็นค่าสมมติเบื้องต้น

๔. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_\beta$ โดยวิธี ML กับวิธี REML หรือวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ มีค่าเป็นศูนย์ ส่วนค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_\beta$ โดยวิธี MINQUE และ Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้มีค่าเป็นลบ

๕. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้มีค่าน้อยกว่า ค่าประมาณโดยวิธี MINQUE

๖. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกันมากระหว่างวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบไม่ได้หรือวิธี REML ในขณะที่วิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบได้ มีจำนวนรอบมากกว่าวิธีทั้งสองถึงสองเท่า

จากตัวอย่างทั้ง ๖ ตัวอย่างดังกล่าวมาแล้ว สรุปได้ว่า

๑. ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML, วิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML ให้ค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ใกล้เคียงกัน และมีค่าน้อยกว่าการประมาณค่าโดยวิธี MINQUE และวิธี Iterative MINQUE ที่ค่าประมาณมีค่าเป็นลบได้

๒. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_\alpha$ และ $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี MINQUE มีค่ามากกว่าวิธีอื่น ๆ

๓. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้ มีค่าน้อยกว่า $\hat{\sigma}^2_e$ โดยวิธีอื่น ๆ

๔. ค่าประมาณ $\hat{\sigma}^2_\alpha$, $\hat{\sigma}^2_\beta$ และ $\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta}$ โดยวิธี ML, วิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML ส่วนใหญ่มีค่าเป็นศูนย์

๕. ค่าประมาณโดยวิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบได้มีค่าน้อยกว่าค่าประมาณโดยวิธี MINQUE

๖. จำนวนรอบที่คำนวณไม่ต่างกันระหว่างวิธี ML กับวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบไม่ได้ หรือวิธี REML ในขณะที่วิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณเป็นลบได้ มีจำนวนรอบมากกว่าวิธีทั้งสองถึงสองเท่า

๗. ค่าประมาณทั้ง ๔ วิธี ให้ผลที่แตกต่างจากค่าสมมติเบื้องต้นมาก

๘. การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML คำนวณยุ่งยากกว่าวิธีอื่น ๆ

จากข้อสรุปทั้ง ๘ ข้อดังกล่าวมานี้ การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ควรจะใช้วิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ หรือ วิธี REML เหตุผลที่สนับสนุนอีกประการหนึ่งคือ การประมาณค่าโดยวิธี ML จะลดจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระในขณะที่วิธี REML ไม่ได้ลดชั้นแห่งความเป็นอิสระ ทั้งนี้ เพราะวิธี REML เป็นวิธีที่แบ่งดิฟเฟอเรนทีเอจ เฉพาะส่วนที่ไม่มีผลกระทบคงที่

๓.๔ <u>การเปรียบเทียบค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ จากทั้ง ๔ วิธี จากคุณสมบัติ</u>

จากคุณสมบัติของค่าประมาณแต่ละวิธีดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ ๒.๕ พอจะสรุปเปรียบเทียบว่าวิธีใดมีคุณสมบัติใดบ้าง ดังนี้

๑. เป็น translation invariant ได้แก่วิธี ML, วิธี MINQUE, วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML

๒. เป็นค่าที่สอดคล้อง ได้แก่ วิธี ML, วิธี MINQUE, วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML

๓. เป็น asymptotic efficiency ได้แก่ วิธี ML, วิธี Iterative MINQUE ในกรณีที่มีค่าเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

๔. เป็นค่าปกติเมื่อใกล้อนันต์ ได้แก่ วิธี ML, วิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ และวิธี REML

๕. เป็นค่า minimum norm ได้แก่ วิธี MINQUE และวิธี Iterative MINQUE

๖. เป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง ได้แก่ วิธี MINQUE และวิธี Iterative MINQUE

ตารางที่ ๓๐ แสดงคุณสมบัติของค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี ML, วิธี MINQUE, วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML

คุณสมบัติ	วิธี				
	ML	MINQUE	Iterative MINQUE (เป็นลบได้)	Iterative MINQUE (เป็นลบไม่ได้)	REML
translation invariant	✓	✓	✓	✓	✓
ค่าที่สอดคล้อง	✓	✓	✓	✓	✓
asymptotic efficiency	✓			✓	✓
ค่าปกติเมื่อใกล้อนันต์	✓			✓	✓
minimum norm		✓	✓	✓	
ค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง		✓	✓	✓	

จากตารางที่ ๓๐ เห็นได้ว่าวิธี Iterative MINQUE ในกรณีที่ค่าเป็นลบไม่ได้ มีคุณสมบัติครบทั้ง ๖ ข้อ ส่วนวิธีอื่น ๆ มีคุณสมบัติเพียงบางข้อเท่านั้น เช่น วิธี ML ไม่มีคุณสมบัติเป็น minimum norm และค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง หรือวิธี MINQUE ไม่มีคุณสมบัติเป็นค่า asymptotic efficiency และ ค่าปกติเมื่อใกล้อนันต์ เป็นต้น ดังนั้น วิธี Iterative MINQUE ในกรณีมีค่าเป็นลบไม่ได้ ให้คุณสมบัติที่ดีมากกว่าค่าประมาณจากวิธีอื่น ๆ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย