บทที่ ๒

ระเบียบวิธีในการวิจัย

ความแปรปรวนของค่าสังเกตที่รวบรวมได้จากการทดลองจะมากหรือน้อยขึ้นกับผลกระทบต่าง ๆ อาจจะเป็นผลกระทบหนึ่งชนิดหรือมากกว่าหนึ่งชนิด ขึ้นอยู่กับลักษณะของการทดลอง ผลกระทบดังกล่าวเป็นได้ทั้งผลกระทบคงที่ และผลกระทบเชิงสุ่ม (random effect) ค่าสังเกตอาจจะแปรปรวนตามผลกระทบคงที่เพียงอย่างเดียว หรือผลกระทบเชิงสุ่มเพียงอย่างเดียว หรือทั้งผลกระทบคงที่และผลกระทบเชิงสุ่มพร้อม ๆ กัน โดยทั่วไปมักจะมีการสร้างแบบจำลองสำหรับแต่ละการทดลองขึ้นเพื่อแสดงผลกระทบต่าง ๆ

ในการวิจัยนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองของการทดลองเมื่อมีการแจกแจงแบบสองทางเท่านั้น

๒.๑ <u>คำนิยามของคำที่ใช้ในการวิจัย</u>

<u>แบบจำลองคงที่</u> (Fixed Model)

ในการทดลองที่มีทรีทเมนท์สองชนิด ทรีทเมนท์แต่ละชนิดเรียกว่าเป็นปัจจัย (factor) ถ้าปัจจัยทั้งสองเป็นปัจจัยคงที่จะเรียกแบบจำลองของการทดลองนี้ว่าแบบจำลองคงที่ ปัจจัยคงที่หรือไม่นั้นขึ้นกับจุดประสงค์ของการทดลอง ถ้าผลใช้กับระดับของปัจจัยที่นำมาทดลองเท่านั้น ปัจจัยจะเป็นปัจจัยคงที่ ถ้าผลใช้กับทุกระดับของปัจจัยที่เป็นได้ซึ่งมากกว่าระดับที่นำมาทดลอง ปัจจัยจะเป็นปัจจัยเชิงสุ่ม

<u>แบบจำลองคงที่ของค่าสังเกตของการแจกแจงแบบสองทางและข้อมูลที่ได้มีลักษณะไม่สมดุลย์</u>

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$$

โดย Y_{ijk} เป็นค่าสังเกตที่ k จากระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

μ เป็นค่าคงที่

α_i เป็นผลกระทบคงที่จากระดับที่ i ของปัจจัย A โดยมีข้อกำหนด

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

β_j เป็นผลกระทบคงที่จากระดับที่ j ของปัจจัย B โดยมีข้อกำหนด

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$(\alpha\beta)_{ij}$ เป็นผลกระทบคงที่จากระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B โดยมีข้อกำหนด

$$\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, \ldots, b$$

$$\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

ε_{ijk} เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่มซึ่ง $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$

จากแบบจำลองคงที่ดังกล่าว จะเห็นได้ว่าค่าสังเกต Y_{ijk} ประกอบด้วย ๓ ส่วนคือ ค่าเฉลี่ยทั่วไป (μ) ผลกระทบเนื่องจากทรีทเมนท์และความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่ง $Y_{ijk} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma_e^2)$.

<u>แบบจำลองเชิงสุ่ม</u>

แบบจำลองเชิงสุ่มเป็นแบบจำลองที่ทรีทเมนท์ทั้งสองเป็นปัจจัยสุ่ม ตัวอย่างของการทดลองที่มีแบบจำลองเชิงสุ่ม เช่น การตรวจสอบจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ได้ต่อวันขึ้นอยู่กับความสามารถของคนคุมเครื่องจักร (ปัจจัย A) และประสิทธิภาพของเครื่องจักร (ปัจจัย B) ในการทดลองนี้ใช้คนคุมเครื่อง ๕ คน เครื่องจักร ๓ เครื่อง ซึ่งจำนวนคน ๕ คนนี้จะเป็นใครก็ได้จากจำนวนคนคุมเครื่องทั้งหมดที่มีอยู่ในโรงงาน กล่าวคือ ๕ คนนี้ถูกเลือกออกมาอย่างสุ่ม ซึ่งถือว่าเป็นตัวแทนของคนคุมเครื่องทั้งหมด ในทำนองเดียวกันเครื่องจักร ๓ เครื่องก็ถูกเลือกอย่างสุ่ม จากเครื่องจักรทั้งหมดที่มีอยู่ จะเป็นเครื่องใดก็ได้ เป็นต้น

แบบจำลองเชิงสุ่มของค่าสังเกตของการแจกแจงแบบสองทาง และข้อมูลที่ได้มีลักษณะไม่สมดุลย์

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$$

Y_{ijk} เป็นค่าสังเกตที่ k จากระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

μ เป็นค่าคงที่

α_i เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม ซึ่ง $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$

β_j เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม ซึ่ง $\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta^2)$

$(\alpha\beta)_{ij}$ เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม ซึ่ง $(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$

ε_{ijk} เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่ง $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$

<u>แบบจำลองผสม</u>

แบบจำลองผสม เป็นแบบจำลองซึ่งทรีท เมนท์หนึ่งหรือปัจจัยหนึ่ง เป็นผลกระทบคงที่ อีกปัจจัยหนึ่ง เป็นผลกระทบ เชิงสุ่ม ซึ่งมีการกระจายแบบปกติ ตัวอย่างการทดลองที่มีแบบจำลองผสม เช่น กรณีทดสอบสมรรถภาพของพ่อพันธุ์ (ปัจจัย A) ซึ่ง เรากำหนดไว้ว่าจะทดสอบกับพ่อพันธุ์ตัวใดบ้าง ซึ่งพ่อพันธุ์นั้น เรา เลือกมาโดยอาศัยหลักฐานหรือ เหตุผลใด เหตุผลหนึ่ง มิได้สุ่มมาจากประชากร แล้วนำพ่อพันธุ์มาผสมกับตัวแทนของแม่พันธุ์ (ปัจจัย B) ที่ เลือกโดยสุ่ม เมื่อได้ลูกก็ เลือกมา เพียงจำนวนหนึ่งโดยสุ่ม เพื่อ เข้าทดสอบและสัง เกตลักษณะในครอก เป็นต้น

แบบจำลองผสมของค่าสัง เกตของการแจกแจงแบบสองทางและข้อมูลที่ได้มีลักษณะที่ไม่สมดุลย์

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$$

โดย Y_{ijk} เป็นค่าสัง เกตที่ k จากระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

μ เป็นค่าคงที่

α_i เป็นผลกระทบคงที่จากระดับที่ i ของปัจจัย A โดยมีข้อกำหนด

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

β_j เป็นผลกระทบ เชิงสุ่ม ซึ่ง $\beta_j \sim N(0, \sigma^2_\beta)$

$(\alpha\beta)_{ij}$ เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม ซึ่ง $(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\alpha\beta})$ โดยมีข้อกำหนด $\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, b$

ε_{ijk} เป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม ซึ่ง $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2_e)$

<u>แวเรียนซ์ คอมโปเนนท์</u>

จากแบบจำลองเชิงเส้นทั่วไป

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + u_p\varepsilon_p$$

Y เป็น $n \times 1$ เวคเตอร์ของค่าสังเกต n จำนวน

X เป็น $n \times q$ เมทริกส์ ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบคงที่ในแบบจำลอง, $q < n$ โดยมี rank เท่ากับ q

β เป็น $q \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบคงที่ที่ไม่ทราบค่า

u_i เป็น $n \times m_i$ เมทริกส์ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่มในแบบจำลอง, $m_i < n$

ε_i เป็น $m_i \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม

$E(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2_i I$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$

ดังนั้น $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2_1 u_1u_1' + \ldots\ldots + \sigma^2_p u_pu_p'$

$$= \sigma^2_1 V_1 + \ldots\ldots + \sigma^2_p V_p$$

ซึ่ง $V_i = u_iu_i'$

จากการทดลองหนึ่ง ๆ จะทราบสมาชิกต่าง ๆ ของเวคเตอร์ Y เมทริกส์ X, u_i $\sigma^2 = [\sigma^2_1, \ldots\ldots, \sigma^2_p]$ เป็นความแปรปรวนของผลกระทบเชิงสุ่ม $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ มักจะเรียกความแปรปรวนของผลกระทบเชิงสุ่มนี้ว่า แวเรียนซ์คอมโปเนนท์

ให้ α_i , β_j และ $(\alpha\beta)_{ij}$ เป็นผลกระทบเชิงสุ่มในแบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งมีความแปรปรวน σ^2_α , σ^2_β และ $\sigma^2_{\alpha\beta}$ ตามลำดับ ความแปรปรวนดังกล่าวนี้เรียกว่า แวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ความแปรปรวนของค่าสังเกตคือ σ^2_y ซึ่ง $\sigma^2_y = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_e$ และจะเรียกแบบจำลอง $\sigma^2_y = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_e$ ว่าแบบจำลองแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ (Variance Component Model)

<u>แผนแบบสมดุลย์</u> (Balanced Design)

แผนแบบสมดุลย์ หมายถึง แผนการทดลองที่จัดให้ค่าสังเกตมีจำนวนเท่ากันในแต่ละ cell เช่น ในการแจกแจงสองทาง จำนวนค่าสังเกตใน cell ที่ i, j มีค่าเท่ากับ n สำหรับทุกค่าของ i และ j มีแบบจำลอง

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

<u>แผนแบบไม่สมดุลย์</u> (Unbalanced Design)

แผนแบบไม่สมดุลย์ หมายถึง แผนการทดลองที่มีจำนวนค่าสังเกตไม่เท่ากันในแต่ละ cell เช่น ในการแจกแจงสองทาง จำนวนค่าสังเกตใน cell ที่ i, j เท่ากับ n_{ij} มีแบบจำลอง

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$$

๒.๒ แบบจำลองของการทดลอง

๒.๒.๑ แบบจำลองของการทดลองทั่วไป

$$Y = X\beta + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots + u_{p-1}\varepsilon_{p-1} + u_p\varepsilon_p$$

โดย Y เป็น $n \times 1$ เวคเตอร์ของค่าสังเกต n จำนวน

X เป็น $n \times q$ เมทริกส์ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบคงที่ในแบบจำลอง, $q \leq n$ โดยมี rank = q

β เป็น $q \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบคงที่ที่ไม่ทราบค่า

u_i เป็น $n \times m_i$ เมทริกส์ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่ม, $m_i \leq n$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$

ε_i เป็น $m_i \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2 I)$

$i = 1, 2, \ldots, p-1$

u_p เป็น Identity matrix

ε_p เป็น $n \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม, $\varepsilon_p \sim N(0, \sigma_e^2 I)$

ซึ่ง $\sigma_p^2 = \sigma_e^2$

โดยที่ $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 I$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$Cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$j = 1, 2, \ldots, p$

จะเห็นได้ว่า $E(Y) = X\beta$

และ $Var(Y) = V = \sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i^2 V_i + \sigma_e^2 I$ โดยที่ $V_i = u_i u_i'$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, p-1$

๒.๒.๒ แบบจำลองของการทดลองแบบการแจกแจงสองทาง

ในการวิจัยนี้จะศึกษาถึงแบบจำลองการแจกแจงสองทาง โดยมีผลกระทบระหว่างกันเมื่อแผนแบบไม่สมดุลย์ แบบจำลองมีดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, a$$

$$j = 1, 2, \ldots, b$$

$$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$$

จะแสดงสมการเชิงเส้นโดยตัวอย่างของการแจกแจงสองทาง ซึ่งปัจจัย A มี ๒ ระดับ ปัจจัย B มี ๒ ระดับ จำนวนค่าสังเกตในแต่ละ cell ไม่เท่ากัน $n_{11} = 2$, $n_{12} = 1$, $n_{21} = 3$, $n_{22} = 2$ ค่าสังเกตแสดงไว้ในตารางที่ ๑

<u>ตารางที่ ๑</u> ค่าสังเกตจากการทดลองแบบการแจกแจงสองทาง

ปัจจัย		A	
		1	2
B	1	8 13	9 12 11
	2	7	6 2

ก. กรณีเป็นแบบจำลองคงที่ ปัจจัย A ปัจจัย B และการกระทำระหว่างกัน (interaction) AB เป็นผลกระทบคงที่ เขียนให้อยู่ในแบบจำลองเชิงเส้นได้ดังนี้

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} = 8 \\ Y_{112} = 13 \\ Y_{211} = 9 \\ Y_{212} = 12 \\ Y_{213} = 11 \\ Y_{121} = 7 \\ Y_{221} = 6 \\ Y_{222} = 2 \end{bmatrix}_{8\times 1}, \quad X^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \mu & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{21} & \alpha\beta_{12} & \alpha\beta_{22} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8\times 9} \end{array}$$

$$\beta^* = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{22} \end{bmatrix}_{9\times 1}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{213} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix}_{8\times 1}$$

กำหนดว่าให้ X เป็น full rank เมทริกส์ เพื่อต้องการให้การวิเคราะห์ต่อไป ทำได้ง่ายขึ้นกล่าวคือ ให้เมทริกส์ $(X'V^{-1}X)$ หา inverse ได้ เพราะ $X'V^{-1}X$ เป็น full rank เมทริกส์ ดังนั้น ถ้า X ไม่ full rank ซึ่งเขียนเป็น X* จะต้องลดรูปแบบ (reduced) $Y = X\beta + \varepsilon$ โดยใช้ข้อจำกัดที่ว่า $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$,

$\beta_1 + \beta_2 = 0$, $(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{12} = 0$, $(\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22} = 0$,
$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} = 0$, $(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{22} = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ (\alpha\beta)_{11} \end{bmatrix}$$

ข. กรณีแบบจำลองเชิงสุ่ม ปัจจัย A ปัจจัย B และการกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม เขียนในแบบจำลองเชิงเส้นได้ดังนี้

$$Y = X\beta + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + u_3\varepsilon_3 + u_4\varepsilon_4$$

ซึ่ง $Y = \begin{bmatrix} Y_{111} = 8 \\ Y_{112} = 13 \\ Y_{211} = 9 \\ Y_{212} = 12 \\ Y_{213} = 11 \\ Y_{121} = 7 \\ Y_{221} = 6 \\ Y_{222} = 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = I_n, \ \beta = \mu$$

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{22} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{213} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix}$$

ค. กรณีแบบจำลองผสม ปัจจัย A เป็นผลกระทบคงที่ ปัจจัย B และการกระทำระหว่างกัน AB เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม เขียนในแบบจำลองเชิงเส้นได้ดังนี้

$$Y = X\beta + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + u_3\varepsilon_3$$

ซึ่ง $Y = \begin{bmatrix} Y_{111} = 8 \\ Y_{112} = 13 \\ Y_{211} = 9 \\ Y_{212} = 12 \\ Y_{213} = 11 \\ Y_{121} = 7 \\ Y_{221} = 6 \\ Y_{222} = 2 \end{bmatrix}$, $X^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = I_n$, $\beta^* = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{22} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{213} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ X ไม่เป็น full rank เมทริกส์ จะทำให้เป็น full rank เมทริกส์ โดยใช้ข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

๒.๓ การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในการแจกแจงสองทางในกรณีแผนแบบสมดุลย์

๒.๓.๑ วิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในการทดลองแบบการแจกแจงสองทางในกรณีแผนแบบสมดุลย์ การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ทำได้โดยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน จากตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนสร้างสมการโดยให้ค่า mean square เท่ากับค่าประมาณของค่าคาดหวังของ mean square ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ต้องการประมาณ จำนวนสมการจะเท่ากับจำนวนแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ จากสมการดังกล่าวจะหาค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ได้

ในแบบจำลองเชิงสุ่มค่าคาดหวังของ mean square เป็นผลรวมของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ซึ่งแต่ละตัวมีค่าสัมประสิทธิ์ (coefficient) คูณอยู่ซึ่งสัมประสิทธิ์ของ σ_e^2 มีค่าเป็น ๑ เสมอ ส่วนสัมประสิทธิ์ของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ตัวอื่น ๆ มีค่าเป็น n เท่าของระดับของปัจจัย ซึ่งไม่ได้ปรากฏใน subscript ของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ดังแสดงในตารางที่ ๒ ดังนั้น สมการที่ได้จากการให้ค่า mean square เท่ากับค่าประมาณของค่าคาดหวังของ mean square คือ

$$nb\,\hat{\sigma}_\alpha^2 + n\,\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}_e^2 = MSA$$

$$na\,\hat{\sigma}_\beta^2 + n\,\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}_e^2 = MSB$$

$$n\,\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}_e^2 = MSAB$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = MSE$$

$$\text{หรือ} \quad \hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{(MSA - MSAB)}{bn}$$

$$\hat{\sigma}^2_\beta = \frac{(MSB - MSAB)}{an}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{(MSAB - MSE)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_e = MSE$$

ในแบบจำลองผสม เมื่อปัจจัย A เป็นผลกระทบคงที่ และปัจจัย B เป็นผลกระทบเชิง-สุ่ม ดังนั้น แวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ต้องการประมาณคือ σ^2_β , $\sigma^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_e σ^2_α ไม่ต้อง ... fix ค่าประมาณจะได้จากการแก้สมการซึ่งได้จากการให้ค่า mean square เท่ากับค่า-ประมาณของค่าคาดหวังของ mean square คือ

$$na\ \hat{\sigma}^2_\beta + \hat{\sigma}^2_e = MSB$$

$$n\ \hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} + \hat{\sigma}^2_e = MSAB$$

$$\hat{\sigma}^2_e = MSE$$

$$\text{หรือ} \quad \hat{\sigma}^2_\beta = \frac{MSB - MSE}{na}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{MSAB - MSE}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_e = MSE$$

ในแบบจำลองคงที่ เมื่อปัจจัยทั้งสองเป็นปัจจัยคงที่ แวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ต้องการประมาณคือ $\hat{\sigma}^2_e$ ซึ่ง $\hat{\sigma}^2_e = MSE$

ตารางที่ ๒ ค่าคาดหวังของ mean square (EMS) ในการแจกแจงสองทาง

E(MS)

mean square	d.f.	Fixed Effects (A and B fixed)	Random Effects (A and B random)	Mixed Effects (A fixed, B random)
MSA	(a-1)	$\sigma_e^2 + nb \frac{\Sigma \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma_e^2 + nb\,\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_e^2 + nb \frac{\Sigma \alpha_i^2}{a-1} + n\,\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	(b-1)	$\sigma_e^2 + na \frac{\Sigma \beta_i^2}{b-1}$	$\sigma_e^2 + na\,\sigma_\beta^2 + n\,\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_e^2 + na\,\sigma_\beta^2$
MSAB	(a-1)(b-1)	$\sigma_e^2 + n \frac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_e^2 + n\,\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_e^2 + n\,\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	(n-1)ab	σ_e^2	σ_e^2	σ_e^2

หมายเหตุ กฎการหาค่าคาดหวังของ mean square ผู้สนใจรายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จาก "Applied Linear Statistical Models" หน้า ๖๒๐ - ๖๒๑ ของ John Neter และ William Wasserman, พ.ศ. ๒๕๑๗.

๒.๓.๒ <u>คุณสมบัติของค่าประมาณ</u>

การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ จากแผนแบบสมดุลย์โดยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน จะมีคุณสมบัติเป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง ไม่ว่าจะเป็นแบบจำลองผสม หรือ แบบจำลองเชิงสุ่ม ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

สมมติให้ $m = \{M_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นเวคเตอร์ของ mean square ของผลกระทบเชิงสุ่ม $E(m)$ เป็นเวคเตอร์ของค่าคาดหวังของ mean square m และให้ σ^2 เป็นเวคเตอร์ของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ต้องการประมาณ เวคเตอร์ของค่าคาดหวังเขียนได้เป็นผลคูณของเมทริกส์ p (สมาชิกใน p เป็นค่าคงที่ที่ได้จากสัมประสิทธิ์ของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์) และเวคเตอร์ σ^2

$$E(m) = p\sigma^2$$

หรือ

$$p\hat{\sigma}^2 = m$$

เนื่องจาก p เป็น nonsingular เมทริกส์ ดังนั้น

$$\hat{\sigma}^2 = p^{-1}m$$

ค่าประมาณที่ได้ไม่เอนเอียงเพราะ

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= p^{-1}E(m) \\ &= p^{-1}p\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

ในปี พ.ศ. ๒๔๙๗ Graybill และในปี พ.ศ. ๒๔๙๙ Graybill และ Wortham ได้แสดงว่าค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธีนี้มีคุณสมบัติที่ดีอีกประการหนึ่ง คือเป็นค่าประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด ในบรรดาค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าการแจกแจงเป็นปกติ

๒.๔ การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในการแจกแจงสองทาง กรณีแผนแบบไม่สมดุลย์

ในการวิจัยนี้จะกล่าวถึงการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ คือวิธีการ-แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธี MINQUE และ MIVQUE วิธี Iterative MINQUE และวิธีการแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด ดังจะกล่าวถึงแต่ละวิธีโดยละเอียดต่อไปนี้

๒.๔.๑ วิธีการแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (ML)

จากแบบจำลองทั่วไป

$$Y = X\beta + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \cdots + u_{p-1}\varepsilon_{p-1} + u_p\varepsilon_p$$

$$\mathrm{Var}(Y) = V$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 V_i$$

$$V_i = u_i u_i' \ , \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

ดังนั้น ภาวะน่าจะเป็นของ Y ได้แก่

$$L = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |V|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\{-(Y-X\beta)' V^{-1}(Y-X\beta)\} / (2)\right]$$

ให้ $\lambda = \ln L$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = X' V^{-1} Y - (X' V^{-1} X)\beta = 0$$

$$(X' V^{-1} X)\beta = X' V^{-1} Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma_i^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(V^{-1}u_i u_i') + \frac{1}{2}(Y-X\beta)' V^{-1} u_i u_i' V^{-1} (Y-X\beta)$$

$$= 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

$$tr(V^{-1}u_i u_i') = (Y - X\beta)' V^{-1} u_i u_i' V^{-1} (Y - X\beta)$$

ให้ $V_i = u_i u_i'$ และ $V^{-1} = V^{-1} V V^{-1}$ ดังนั้น

$$tr(V^{-1}u_i u_i') = tr(V^{-1}V_i) = tr(V^{-1}VV^{-1}V_i)$$

$$= tr(V^{-1}(\sum_j \sigma_j^2 V_j) V^{-1}V_i), \quad j = 1,2,\ldots, p$$

$$i = 1,2,\ldots, p$$

$$= \sum_j \sigma_j^2 \left[tr(V^{-1}V_j V^{-1}V_i)\right]$$

$$\sum_j \sigma_j^2 \left[tr(V^{-1}V_j V^{-1}V_i)\right] = (Y - X\beta)' V^{-1}V_i V^{-1} (Y-X\beta) \ldots . (2.2)$$

มีนักสถิติหลายคนใช้วิธีการแก้สมการที่ไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear equation) มาช่วยในการหาค่าประมาณจากวิธี ML เช่น วิธี Steepest Ascent, วิธี Newton - Raphson เป็นต้น ในที่นี้จะใช้วิธี successive approximation ซึ่งต้องกำหนดค่าสมมติของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ เบื้องต้น โดยค่าสมมติเบื้องต้นนี้จะเป็นค่าใดก็ได้ เช่น อาจจะให้ค่าสมมติเบื้องต้นของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ เป็น ๑ ทั้งหมด เป็นต้น ซึ่งให้ $V = \sum_i \sigma_i^2 V_i$ แล้วแก้สมการ หา $\hat{\beta}$ ในสมการ (2.1) จาก $\hat{\beta}$ ที่ได้แทนในสมการ (2.2) ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นค่าสมมติเบื้องต้นสำหรับรอบต่อไป แล้วจึงเริ่มรอบใหม่ ทำเช่นนี้ไปเรื่อยจนกว่าจะได้ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงในรอบถัด ๆ กัน

ในงานวิจัยนี้ ค่าประมาณที่แตกต่างกันในช่วงไม่เกิน ๐.๐๕ จะถือว่าค่าแตกต่างกันน้อยมากจนเรียกได้ว่าไม่แตกต่างกันเลย

ในทางปฏิบัติค่าประมาณจะเป็นลบได้ ถ้าค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์มีค่าเป็นลบ ให้ค่าประมาณที่มีค่าลบมีค่าเป็นศูนย์แทน เนื่องจากค่าประมาณของแวเรียนซ์

คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี ML จะมีค่าเป็นลบไม่ได้ เพราะค่าประมาณดังกล่าวเป็นค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ซึ่งกำหนดว่าจะมีค่าเป็นบวก ต่อจากนั้นจะเริ่มวิธี ML ใหม่จากแบบจำลองที่ไม่มีผลกระทบเชิงสุ่มของค่าประมาณที่เป็นลบ

๒.๔.๒ วิธี MINQUE และ MIVQUE

วิธี MINQUE เป็นวิธีที่ใช้ประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ทฤษฎีของ MINQUE สามารถใช้ได้ทั้งในแบบจำลองเชิงสุ่มและแบบจำลองผสม ซึ่งแผนแบบอาจจะสมดุลย์ หรือไม่สมดุลย์ วิธี MINQUE ไม่ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่าค่าสังเกตมีการแจกแจงในรูปแบบใด แต่ MIVQUE นั้น เป็นวิธีการที่มีเงื่อนไขว่าค่าสังเกตจะมีการแจกแจงแบบปกติ การประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี MINQUE ต้องมีค่าสมมติเบื้องต้นของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ค่าประมาณที่ได้จะเป็นค่าที่ดีเพียงใดขึ้นอยู่กับค่าสมมติเบื้องต้น ซึ่งค่าสมมติเบื้องต้นที่ดีนั้นก็หาได้ยาก ดังนั้น จึงมีนักสถิติหลายคนใช้วิธี Iterative MINQUE ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

การที่ให้ค่าสมมติเบื้องต้นเป็นสัดส่วนกับค่าจริงของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ แล้วเราจะได้ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่เป็น minimum variance quadratic unbiased estimator หรือ ที่เรียกว่า MIVQUE จากแบบจำลองเชิงเส้นทั่วไป

$$Y = X\beta + u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \dots + u_{p-1}\varepsilon_{p-1} + u_p\varepsilon_p$$

Y เป็น $n \times 1$ เวคเตอร์ของค่าสังเกต n จำนวน

X เป็น $n \times q$ เมทริกส์ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบคงที่ในแบบจำลอง, $q < n$ โดยมี rank = q

β เป็น $q \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบคงที่ที่ไม่ทราบค่า

u_i เป็น $n \times m_i^i$ เมทริกส์ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่มในแบบจำลอง, $m_i < n$

$$i = 1, 2, \dots, p-1$$

ε_i เป็น $m_i \times 1$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม

$i = 1, 2, \ldots, p-1$

ซึ่ง $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2 I)$

$u_p = I_n$ และ $\varepsilon_p \sim N(0, \sigma_e^2 I)$, $\sigma_p^2 = \sigma_e^2$

และ $E(Y) = X\beta$

$V = Var(Y) = \sigma_1^2 V_1 + \ldots\ldots + \sigma_{p-1}^2 V_{p-1} + \sigma_p^2 V_p$

ซึ่ง $V_i = u_i u_i'$, $i = 1, 2, \ldots, p$

การประมาณค่าของ $\sum\limits_{i=1}^{p} \sigma_i^2 V_i$ โดย $Y'AY$ โดยที่ A เป็นเมทริกส์ที่ $AX = 0$ และ $tr(AV_i) = p_i$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, p$ ค่า MINQUE ของ

$\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_p^2)$ คือค่า

$$\hat{\sigma}^2 = S^- q \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

โดยที่ S เป็น $p \times p$ เมทริกส์ โดยที่สมาชิก ij คือ S_{ij}

ซึ่ง $S_{ij} = tr(Q V_i Q V_j)$ และ

$$Q = V^{-1} - V^{-1} X (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1}$$

ซึ่ง S^- หมายถึง generalized inverse ของ S และ q เป็น $p \times 1$ เวคเตอร์ โดยที่สมาชิกแต่ละตัวคือ $Y' Q V_i Q Y$

$$S\hat{\sigma}^2 = q$$

หรือ $\sum\limits_{j=1}^{p} tr(Q V_i Q V_j)\, \hat{\sigma}_j^2 = Y' Q V_i Q Y$, $i = 1, 2, \ldots, p$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4)$$

๒.๔.๓ <u>วิธี Iterative MINQUE</u>

วิธี Iterative MINQUE เป็นการทำต่อจากวิธี MINQUE โดยให้ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี MINQUE มาเป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบใหม่ต่อไป ทำเช่นนี้จนกว่าจะได้ค่าประมาณคงที่ กล่าวคือไม่แตกต่างจากรอบก่อนเกิน ๐.๐๕ ค่าประมาณที่ได้อาจจะมีค่าเป็นลบ หรือมีค่าเป็นบวกก็ได้

ในกรณีที่ค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้เป็นค่าลบ ซึ่งไม่น่าจะเป็นลบสำหรับค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ถือว่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ที่สัมพันธ์กับค่าประมาณที่เป็นลบไม่ควรมีผลกระทบต่อค่าสังเกตจึงตัดผลกระทบนั้นออกจากแบบจำลองได้ โดยเริ่มการประมาณค่าโดยวิธี MINQUE ในรอบใหม่ จากแบบจำลองที่ไม่มีผลกระทบเชิงสุ่มของค่าประมาณที่เป็นลบ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ หลายรอบ จนกว่าค่าจะไม่เปลี่ยนแปลง จะถือว่าค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในรอบท้ายสุดจะเป็นค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ดีที่สุด

๒.๔.๔ <u>วิธีการแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด</u> (REML)

จากวิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ โดยวิธี ML ซึ่งเป็นวิธีการที่คำนวณได้ค่อนข้างลำบาก มีความยุ่งยากของสมการของภาวะน่าจะเป็น จึงได้มีนักสถิติ พยายามปรับปรุงแก้ไขวิธี ML ให้ดีขึ้น

ในปี พ.ศ. ๒๕๑๔ Patterson และ Thompson ได้แก้ไขวิธี ML ให้ดีขึ้นโดยการแบ่งฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็นออกเป็น ๒ ส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งไม่มีผลกระทบคงที่ ส่วนนี้จะถูกนำไปใช้ประมาณค่าแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ วิธีการนี้มีชื่อเรียกว่าวิธีการแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัดหรือที่เรียกว่า REML

ดังกล่าวแล้วว่าวิธี REML นั้น จะใช้เพียงส่วนหนึ่งของฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็นที่ไม่มีผลกระทบของค่าคงที่อยู่ด้วย นั่นคือใช้วิธี ML กับเวคเตอร์ TY ซึ่ง T เป็น $(n - k) \times n$ เมทริกส์ โดย $(n - k)$ rows เป็น $(n - k)$ linearly independent rows ของเมทริกส์ $(I - X(X'X)^{-1}X)$ ซึ่ง $TX = 0$ และ k เป็น rank ของเมทริกส์ X เนื่องจาก Y เป็น $n \times 1$ เวกเตอร์ของค่าสังเกตซึ่งมีการกระจายแบบปกติ กล่าวคือ $Y \sim N(X\beta, V)$ ดังนั้น TY จะมีการกระจายแบบปกติ กล่าวคือ $TY \sim N(0, TVT')$ ดังนั้น ภาวะน่าจะเป็นของ TY ได้แก่

$$L = \frac{K}{|TVT'|^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\tfrac{1}{2} Y'T'(T'VT')^{-1}TY\}$$

โดย K เป็นค่าคงที่

จากการทำ partial derivative $\ln L$ โดยเทียบกับ σ_i^2 จะได้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_i^2} = -\tfrac{1}{2}\,tr\left[(TVT')^{-1}TV_iT'\right] + \tfrac{1}{2} Y'T'(TVT')^{-1}TV_iT'(TVT')^{-1}TY \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,P$$

ให้ $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_i^2}$ เท่ากับ 0 ทั้งนี้เพื่อหาค่าสูงสุด (maximize) ของฟังก์ชั่น ผลจากการกำหนดให้ $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_i^2}$ เท่ากับศูนย์ดังกล่าว จะทำให้ได้

$$tr\left[T'(TVT')^{-1}TV_i\right] = Y'T'(TVT')^{-1}TV_iT'(TVT')^{-1}TY$$

สำหรับ $i = 1,2,\ldots, P$ ....(2.5)

จากผลงานของ Khatri ในปี พ.ศ. ๒๕๐๙ เรื่อง A note on a manova model applied to problem in growth curve แสดงว่าสำหรับเมทริกส์ที่มีลักษณะสมมาตร (Symmetric) V ใด ๆ จะได้ว่า

$$T'(TVT')^{-1}T = V^{-1}Q$$

ซึ่ง $Q = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}$

ดังนั้นสมการ (2.5) จะเขียนได้เป็น

$$tr(V^{-1}Q\,V_i) = Y'Q\,V^{-1}V_i\,V^{-1}Q\,Y \qquad i = 1, 2,\ldots, P$$

.........(2.6)

ซึ่ง $tr(V^{-1}Q\,V_i) = tr(Q\,V^{-1}V_i\,V^{-1}Q\,V)$

$$= \sum_j tr\,(Q\,V^{-1}V_i\;V^{-1}Q\,V_j)\;\sigma_j^2$$

จะได้ว่า $\sum_j tr(Q\,V^{-1}V_i\;V^{-1}Q\,V_j)\;\sigma_j^2 \;=\; Y'Q\,V^{-1}V_i\;V^{-1}Q\,Y$

สำหรับ $i = 1,2,\ldots, P$ ......(2.7)

สมการ (2.7) ที่ได้นี้จะเป็นสมการที่ใช้หาค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ในกรณีที่แก้สมการที่ไม่ใช่เชิงเส้นนี้ด้วยวิธี successive approximation ซึ่งจะต้องกำหนดค่าสมมติเบื้องต้น วิธีนี้จะให้ผลเหมือนวิธี Iterative MINQUE ซึ่งกำหนดว่าค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ เป็นบวกเสมอ ทั้งนี้วิธี Iterative MINQUE ได้จากการแก้สมการที่ไม่ใช่เชิงเส้นดังสมการ (2.4)

๒.๕ คุณสมบัติของค่าประมาณของแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ในการแจกแจงแบบสองทางที่มีข้อมูลไม่สมดุลย์

คุณสมบัติของค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ซึ่งได้จากวิธีต่าง ๆ คือ วิธี ML วิธี MINQUE วิธี Iterative MINQUE และวิธี REML จะกล่าวถึงโดยละเอียดต่อไปนี้

๒.๕.๑ ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี ML มีคุณสมบัติดังนี้

๑. เป็น translation invariant

translation invariant เป็นคุณสมบัติของตัวประมาณซึ่งไม่ขึ้นกับผลกระทบคงที่ กล่าวคือ

$Y'AY = (Y-X\beta)'A(Y-X\beta)$ สำหรับทุก ๆ Y

ทั้งนี้เนื่องจาก $AX=0$ ดังนั้นจะเป็น translation invariant ถ้า $AX=0$

จากสมการ (2.3) จะได้ว่า $S\,\hat{\sigma}^2 = q$

$$\hat{\sigma}^2 = S^-q$$

ให้ r_{ij} เป็นสมาชิกตัวที่ ij ของเมทริกส์ S^- ซึ่งมีขนาด $P \times P$

q เป็น $P \times 1$ เวคเตอร์โดยที่สมาชิกแต่ละตัวคือ

$$(Y - X\hat{\beta})'V^{-1}V_i\ V^{-1}(Y - X\hat{\beta})$$

ดังนั้น $\hat{\sigma}_j^2 = (Y - X\hat{\beta})'V^{-1}W_j\ V^{-1}(Y - X\hat{\beta})$

ซึ่ง $W_j = \sum_i r_{ij} V_i$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \left[Y-X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y\right]' V^{-1}W_jV^{-1}\left[Y-X(X'V^{-1}X)X'V^{-1}Y\right]$$

$$= \left\{\left[I-X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]Y\right\}' V^{-1}W_jV^{-1}\left[Y-X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y\right]$$

$$= Y'\left[I-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'\right]V^{-1}W_jV^{-1}\left[I-X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]Y$$

$$= Y'\left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right] W_j \left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]Y$$

ถ้ากำหนดให้เมทริกส์ $A_j = \left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]W_j\left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]$

ดังนั้น $\hat{\sigma}_j^2 = Y'A_j\ Y$

$$A_jX = \left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]W_j\left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right]X$$

$$= \left[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\right] W_j\left[V^{-1}X-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X)\right]$$

ซึ่ง $\left[V^{-1}X - V^{-1}X\ (X'V^{-1}X)^{-1}\ (X'V^{-1}X) \right] = 0$

ดังนั้น $A_jX = 0$

แสดงว่า $Y'A_j\ Y$ เป็น translation invariant

๒. เป็นค่าที่สอดคล้อง เมื่อ $\ell n\ L$ ถูกดิฟเฟอเรนชิเอทในช่วงค่าจริง จะได้ว่ามีรากของสมการที่ทำให้ฟังก์ชั่นภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 1 เมื่อจำนวนค่าสังเกตมีค่าเข้าใกล้อนันต์ ในขณะที่จำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัยสุ่มมีค่าต่ำกว่าค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง (Universal Constant)

๓. เป็น asymptotic efficiency เมื่อจำนวนค่าสังเกตมีค่าเข้าใกล้อนันต์ ในขณะที่จำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัยสุ่มมีค่าต่ำกว่าค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง

๔. เป็นค่าปกติเมื่อใกล้อนันต์ ถ้า $\hat{\sigma}_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, P)$ เป็นเวคเตอร์ของค่าประมาณโดยวิธี ML และ σ_i^2 เป็นเวคเตอร์ของค่าจริง ดังนั้น $\sqrt{n_i}\ [\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2]$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, P$ มีการแจกแจงแบบปกติเป็น $N(0, C^{-1})$ โดย

C เป็น $p \times p$ เมทริกส์

$$[C]_{ij} = \tfrac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n_i n_j} \operatorname{tr} V^{-1} V_i V^{-1} V_j \quad , i, j = 1, 2, \ldots, p$$

ซึ่งจากการแบ่ง $i = 1, 2, \ldots, P-1$ เป็น c กลุ่ม คือ $S_1, S_2, \ldots, S_c$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, P-1$ และ $i \in S_s$ ซึ่ง $s = 1, 2, \ldots, c$ โดย i ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันจะมีค่า m_i ที่สัมพันธ์กับ i มีค่าใกล้เคียงกัน

ให้ $\nu_i \equiv \operatorname{rank}\left[u_{i_s} : u_{i+1_s} : \ldots : u_{p-1}\right] - \operatorname{rank}\left[u_{i_s} : \ldots : u_{i-1} : u_{i+1} : \ldots : u_{p-1}\right]$

$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$

$$\nu_p = n - \operatorname{rank}\left[u_1 : u_2 : \ldots : u_{p-1}\right]$$

และ $n_i = \nu_i^{\frac{1}{2}}$

๒.๕.๒ ค่าประมาณที่ได้จากวิธี MINQUE จะมีคุณสมบัติ

๑. เป็น translation invariant

พิสูจน์ จากสมการ (2.3) $\hat{\sigma}^2 = S^{-}q$

ให้ r_{ij} เป็นสมาชิกตัวที่ ij ของเมทริกส์ S^{-}

$$\hat{\sigma}_j^2 = \Sigma\, r_{ij}\, Y'Q\, V_i\, Q\, Y$$

$$= Y'Q(\Sigma\, r_{ij}V_i)\, Q\, Y$$

กำหนดให้ $A_j = Q\, (\Sigma\, r_{ij}V_i)\, Q$

ดังนั้น $\hat{\sigma}_j^2 = Y'A_jY$

จะพบว่า $A_jX = Q\, (\Sigma\, r_{ij}V_i)\, Q\, X$

$$= 0$$

เพราะ

$$QX = (V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1})X$$

$$= V^{-1}X - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X)$$

$$= V^{-1}X - V^{-1}X$$

$$= 0$$

แสดงว่า $Y'A_jY$ เป็น translation invariant

๒. เป็นค่าที่สอดคล้อง เมื่อจำนวนค่าสังเกตมีค่ามากเข้าใกล้อนันต์ ในขณะที่จำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัยสุ่มมีค่าต่ำกว่าค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง แต่มี

เงื่อนไขว่า n_i (ซึ่ง n_i ได้อธิบายไว้แล้วในคุณสมบัติของ ML ข้อที่ ๔) จะมีค่าเข้าใกล้อนันต์ทั้งหมด

๓. เป็นค่าที่ให้ minimum norm เพราะว่าวิธีการ MINQUE คือการประมาณค่าโดย $Y'A_jY$ โดย A_j เป็นเมทริกส์ที่มีคุณสมบัติเป็นค่าที่ทำให้ผลต่างของ $|| u'A_ju - \Delta ||$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง Δ หมายถึง ไดเอโกนอล เมทริกส์ (diagonal matrix) ซึ่งเมทริกส์ A_j มีคุณสมบัติดังกล่าวเมื่อ $A_jX = 0$ และ $tr\ (A_jV_i) = p_i$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots, p$

๔. เป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียง กล่าวคือ $E(Y'A_jY) = \sigma_j^2$ แสดงได้ดังนี้ จากทฤษฎีที่ ๑ (จากหนังสือ Linear Models โดย S.R. Searle หน้า ๕๕) ซึ่งแสดงว่าคาดหวังของรูปแบบกำลังที่สอง (quadratic form) $Y'A_jY$

$$E(Y'A_jY) = tr(A_jV) + \mu'A_j\mu$$

ซึ่ง $\mu = E(Y)$

$$= X\beta$$

$$E(Y'A_jY) = tr(A_jV) + \beta'X'A_jX\beta$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2\ tr\ A_jV_i + \beta'X'A_jX\beta$$ ซึ่ง $V_i = u_iu_i'$

แต่ $A_jX = 0$ ตามข้อ ๓

$$E(Y'A_jY) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2\ tr\ A_jV_i$$

ให้ $p_i = tr\ A_jV_i$

$$E(Y'A_jY) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2\ p_i$$

ซึ่งสำหรับบางค่าของ p_i จะทำให้ $E(Y'A_jY) = \sigma_j^2$

๒.๕.๓ <u>ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี Iterative MINQUE มีคุณสมบัติดังนี้</u>

เนื่องจากวิธี Iterative MINQUE เป็นวิธีที่ทำต่อจากวิธี MINQUE ดังนั้น ค่าประมาณจึงมีคุณสมบัติเหมือนกับค่าประมาณโดยวิธี MINQUE นอกจากนี้วิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณมีค่าเป็นลบไม่ได้ ยังมีค่าเท่ากับค่าประมาณโดยวิธี REML ดังนั้น ค่าประมาณวิธี Iterative MINQUE ในกรณีค่าประมาณมีค่าเป็นลบไม่ได้ จึงมีคุณสมบัติเหมือนกับค่าประมาณโดยวิธี REML ซึ่งได้กล่าวไว้โดยละเอียดในหัวข้อ ๒.๕.๔

๒.๕.๔ <u>ค่าประมาณแวเรียนซ์ คอมโปเนนท์ ที่ได้จากวิธี REML มีคุณสมบัติดังนี้</u>

๑. เป็น translation invariant เนื่องจากวิธีนี้เริ่มต้นจากสมการภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเช่นกัน ซึ่งวิธีการแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด มีคุณสมบัติเป็น translation invariant ดังนั้น วิธี REML จึงมีคุณสมบัติเป็น translation invariant ด้วย

๒. เป็นค่าที่สอดคล้อง เมื่อขนาดของการทดลองเพิ่มขึ้น กล่าวคือ จำนวนระดับของผลกระทบเชิงสุ่มเพิ่มขึ้น

๓. เป็น asymptotic efficiency ในเชิงของ Cramer-Rao lower bound สำหรับโคแวเรียนซ์ เมทริกส์

๔. เป็นค่าปกติเมื่อข้อมูลใกล้อนันต์ กล่าวคือ จำนวนระดับของผลกระทบเชิงสุ่มเพิ่มขึ้น