

บทที่ ๔

การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี

รายงานของทฤษฎีการสลายตัว

ในปี ค.ศ. 1900 ครุกส์ (Crooks) ทดลองพบว่า ถ้าใส่แอมโมเนียมคาร์บอเนตลงไปในสารละลายของเกลือยูเรเนียมให้มากเกินพอแล้ว จะมีตะกอนชนิดหนึ่งตกออกมาซึ่งสามารถส่งรังสีไคมามากกว่าสารละลายของเกลือยูเรเนียมที่เหลือ แสดงว่ารังสีที่ออกมาจากยูเรเนียมนั้นส่วนใหญ่ออกมาจากธาตุอื่นซึ่งอยู่ในตะกอนที่ตกออกมา ครุกส์ให้ชื่อธาตุนั้นว่า ยูเรเนียมเอกซ์ (Uranium X) เบคเคอเรล (Becquerel) พบว่าธาตุนั้นแยก ยูเรเนียมเอกซ์ (UX) และยูเรเนียม (U) ออกจากกันในระยะเวลาหนึ่ง รังสีที่ออกมาจาก UX จะมีปริมาณลดลง ส่วนรังสีที่ออกมาจาก U กลับมีมากขึ้น . . . ค.ศ. 1902 รูเธอร์ฟอร์ด (Rutherford) และซอดดี (Soddy) ได้พบปรากฏการณ์อย่างเดียวกันนี้ เกิดขึ้นกับเกลือของทอเรียม (Thorium) และได้ตั้งชื่อสารกัมมันตภาพรังสีที่แยกออกมาจากทอเรียมว่า ทอเรียมเอกซ์ (Thorium X)

กัมมันตรังสีที่ลดลงของทอเรียมเอกซ์ และที่เพิ่มขึ้นของทอเรียมนั้นมีลักษณะเป็นไปดังสมการ ต่อไปนี้

$$A_{x,t} = A_{x_0} e^{-\lambda t} \text{-----(4.1)}$$

โดยที่ A_{x_0} = กัมมันตรังสีเริ่มต้นของ ThX

$A_{x,t}$ = กัมมันตรังสีที่เวลา t ของ ThX

λ = ค่าคงที่ของการสลายตัว
(Disintegration Constant)

และ $A_t = A_0 [1 - e^{-\lambda t}] \text{-----(4.2)}$

โดยที่ A_0 = กัมมันตรังสีเริ่มต้นของ Th

$$A_t = \text{กัมมันตภาพรังสีที่เวลา } t \text{ ของ } Th$$

สมการ (4.1) และ (4.2) ถ้าเขียนเป็นกราฟจะได้เส้นโค้งดังรูป 1 หน้า 39
รูเทอร์ฟอร์ดและซอดได้อธิบายว่า ธาตุกัมมันตภาพรังสี (Radioactive Element) สลายตัวพร้อม ๆ กับส่งรังสีออกมาและตัวมันเองกลายเป็นธาตุอื่น ความเข้มของรังสี ซึ่งเรียกว่า "กัมมันตภาพรังสี" (Activity) เป็นปริมาณโดยตรงกับจำนวนอะตอมซึ่งสลายตัวในระยะหน่วยเวลาอันหนึ่ง

จากสมการ (4.1) ถ้าเราแทนค่า A ด้วย N โดยให้ N เป็นจำนวนอะตอมแล้ว เราจะได้สมการสำหรับสารที่สลายตัวเช่น ThX ดังนี้คือ

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} \text{ -----(4.3)}$$

ถ้าเพื่อเรนทีเอต (Differentiate) สมการ (4.3) จะได้

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \text{ -----(4.4)}$$

สมการ (4.4) เป็นสมการหลักของทฤษฎีการสลายตัว ซึ่งแสดงว่า จำนวนอะตอมของธาตุรังสีที่ลดลงต่อหน่วยเวลาในการสลายตัวนั้น เป็นปริมาณโดยตรงกับอะตอมที่ยังไม่สลายตัวในขณะนั้น

เราสามารถเขียนสมการแสดงถึงกัมมันตภาพรังสีที่เพิ่มขึ้นของซอเรียมโคดังนี้ คือ เลข ๑ ในซอเรียม

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - Q \text{ -----(4.5)}$$

โดยที่ Q = อะตอมของ ThX ที่เกิดขึ้นจาก Th ในหน่วยเวลาหนึ่ง

จาก (4.5) $\frac{dN}{dt} + \lambda N = Q$

คูณตลอดด้วย $e^{\lambda t}$ จะได้

$$e^{\lambda t} \frac{dN}{dt} + \lambda N e^{\lambda t} = Q e^{\lambda t}$$

$$\frac{d}{dt} (Ne^{-\lambda t}) = Qe^{-\lambda t}$$

โดยการอินทิเกรต (Integration) จะได้

$$Ne^{-\lambda t} = \frac{Q}{\lambda} e^{-\lambda t} + C$$

$$\therefore N = \frac{Q}{\lambda} + Ce^{-\lambda t}$$

C เป็นค่าคงที่ ; หาได้ดังนี้

เมื่อ $t = 0$; $N = 0$; $\therefore C = -\frac{Q}{\lambda}$

แทนค่า C จะได้ $N = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$

$$\therefore N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{----- (4.6)}$$

เมื่อ $N_0 = \frac{Q}{\lambda} =$ จำนวนอะตอมของ ^{238}Th ที่เกิดขึ้นจาก ^{238}Th ในหน่วยเวลาหนึ่ง
ส่วนของอะตอมของ ^{238}Th ที่สลายตัวไปในหน่วยเวลาเดียวกัน

เนื่องจากค่า A และ N เป็นปริมาณซึ่งกันและกัน เราจึงใช้ A และ N แทนกันได้ในสมการของการสลายตัว สำหรับสารกัมมันตภาพรังสีตัวหนึ่ง ๆ เราอาจจะให้ $A = C \wedge N$ โดยที่ C = สัมประสิทธิ์ของการตรวจหา (Detection Coefficient) ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะและประสิทธิภาพของเครื่องวัดรังสี และสารกัมมันตภาพรังสีที่ทำการวัดปริมาณนั้น ๆ ถ้าเป็นสารชนิดเดียวกันเราอาจจะสับเปลี่ยนระหว่าง A กับ N ได้ เพราะค่า C จะตัดกันออกไปในการเทียบอัตราส่วนของ $A(t_1)$ ต่อ $A(t_2)$ แต่ถ้าเป็นสารสองชนิดค่าของ C อาจจะ ไม่เหมือนกันก็ได้

ค่าคงที่ของการสลายตัว ชีวิตครึ่ง (Half - Life) และ ชีวิตเฉลี่ย (Mean - Life)

สารกัมมันตภาพรังสีตัวหนึ่งตัวใดจะส่งรังสีออกมาอย่างน้อยเท่าใดนั้นอาจจะทราบได้โดยค่าหนึ่งค่าใดในสามค่าต่อไปนี้ คือ ค่าคงที่ของการสลายตัว ชีวิตครึ่ง และ ชีวิตเฉลี่ย

จากสมการ $N = N_0 e^{-\lambda t}$

∴ log N = log N₀ - 0.4343 λ t

เนื่องจาก $\frac{N}{N_0} = \frac{A}{A_0}$

∴ log A = log A₀ - 0.4343 λ t

ดังนั้นถ้าเราเขียนกราฟของ log A (log ของกัมมันตรังสีที่วัดได้) กับ เวลา เราควรได้กราฟเส้นตรงซึ่งมีความชัน (Slope) เป็น - 0.4343 λ และสามารถคำนวณ λ ออกมาได้ ซึ่งมีหน่วยเป็น (เวลา)⁻¹

ชีวิตครึ่ง (T_{1/2}) คือ เวลาที่ครึ่งหนึ่งของจำนวนอะตอมของสารกัมมันตภาพรังสีสลายตัวไป ฉะนั้นที่เวลา T_{1/2} หรือชีวิตครึ่ง $\frac{N}{N_0} = 0.5$ เราจะคำนวณหาค่า T_{1/2} ออกมาได้ เป็น

T_{1/2} = $\frac{0.693}{\lambda}$ -----(4.7)

จากสูตร A = A₀ e^{- λ t}

เมื่อเขียนกราฟ (ดังรูป 2 หน้า 39) จะได้

A₁(T_{1/2}) = $\frac{1}{2}$ A₀

A₂(T_{1/2}) = $\frac{1}{2^2}$ A₀

.....

∴ A_n(T_{1/2}) = $\frac{1}{2^n}$ A₀

∴ $\frac{A_n(T_{1/2})}{A_0} = \frac{1}{2^n}$ -----(4.8)

n = จำนวนชีวิตครึ่ง (No. of Half - Life Period)

จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป τ เท่าของชีวิตครึ่ง สารกัมมันตภาพรังสี จะมีกัมมันตรังสีเหลือเพียง $\frac{1}{128}$ ของกัมมันตรังสีเดิม ซึ่งเวลานานมากขึ้น กัมมันตรังสีก็ลดลง เป็นลำดับ แนวว่าจะไม่ถึงศูนย์แต่ก็น้อยมากเมื่อเทียบกับปริมาณเดิม จนสามารถจะวัดหาค่าได้

ชีวิตเฉลี่ย (τ) คือ ผลบวกของเวลาที่อะตอมทุก ๆ อะตอมของสารกัมมันตภาพรังสียังคงสภาพของตัวมันอยู่ก่อนแตกสลายไปหารด้วยจำนวนอะตอมที่ตั้งต้นทั้งหมด

ในทางคณิตศาสตร์ เราอาจหาค่า ชีวิตเฉลี่ยได้ดังนี้
จำนวนอะตอมที่สลายตัวในระหว่างเวลา t และ $t + dt$ คือ

$$dN = -\lambda N dt ;$$

แต่จำนวนอะตอมที่ยังคงสภาพตัวของมันอยู่ที่เวลา t คือ

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\therefore dN = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

เนื่องจากการสลายตัวเป็นขบวนการทางสถิติแบบหนึ่ง จำนวนอะตอมใด ๆ อาจมีชีวิต จากศูนย์ถึง อนันต์ ดังนั้นชีวิตเฉลี่ยอาจเขียนได้ดังนี้

$$\tau = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N_0 \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

$$\therefore \tau = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore \tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{-----(4.9)}$$

$$\therefore T_{\frac{1}{2}} = 0.693 \tau$$

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า ชีวิตเฉลี่ย คือระยะเวลาที่สารสลายตัวไปทำให้
กัมมันตภาพรังสีลดลงเหลือ $\frac{1}{e}$ เท่าของกัมมันตภาพรังสีเดิม ทั้งนี้

$$\begin{aligned} \text{จาก } N &= N_0 e^{-\lambda t} \\ \frac{N}{N_0} &= e^{-\lambda t} \\ &= e^{-1} \text{ เมื่อ } \lambda t = 1 \text{ หรือ } t = \frac{1}{\lambda} = T \end{aligned}$$

การสลายตัวต่อเนื่องกันไป

การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีส่วนมากที่พบในธรรมชาติ เราพบว่า
มีได้เป็นการสลายตัวระหว่างสารรังสี 2 ชนิด คือ "พ่อ" (Parent) สลายตัวให้
"ลูก" (Daughter) เท่านั้น แต่ "ลูก" จะสลายตัวต่อไปให้ "หลาน" หลานสลาย
ตัวต่อไปให้เหลน และเหลนสลายตัวต่อไปอีกจนกระทั่งได้สารที่อยู่ตัวในที่สุด

สมมุติว่า สาร (I) $\xrightarrow{\text{สลายตัว}}$ (II) $\xrightarrow{\text{สลายตัว}}$ (III) และจำนวนอะตอม
ของสารทั้งสามชนิดที่เวลา t เป็น N_1, N_2, N_3 ตามลำดับ และค่าคงที่ของการ
สลายตัวเป็น $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ โดยทั่วๆ ไป เราอาจจะเขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียลได้
ดังนี้

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 ; \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 ; \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

ถ้าเรากำหนดให้ สาร (I) เป็นสารตั้งต้นทั้งหมด เราจะได้คำตอบจาก
สมการทั้งสามเป็น และสาร (III) อยู่ตัว

$$N_1(t) = N_1^0 e^{-\lambda_1 t} \text{ -----(4.10)}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \text{ -----(4.11)}$$

$$N_3(t) = N_1^0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) \text{ -----(4.12)}$$

โดยที่ N_1^0 = จำนวนอะตอมของสาร (I) เมื่อตั้งต้น

เราจะพบว่าปริมาณของสาร (I) จะลดลงมาเป็นลำดับตามกฎของเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential) พร้อมกับที่ปริมาณของสาร (II) จะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนถึงค่าสูงสุด และจะค่อย ๆ ลดลงไปตามลำดับ โดยที่ปริมาณของสาร (III) ที่เพิ่มขึ้นตั้งแต่แรกแต่ค่อย ๆ จะมีค่าสูงขึ้นในระยะเวลาสลายตัวที่นานที่สุด

สมดุลกับมันครึ่งสั

สมดุลกับมันครึ่งสัจะเกิดขึ้นเมื่อจำนวนอะตอมของสารครึ่งสัต่าง ๆ ที่สลายตัวต่อเนื่องกันนั้นไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา นั่นคือ

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} = 0$$

(ก) ถ้า $\lambda_1 \ll \lambda_2 \therefore \lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots$

หรือ $\frac{N_1}{(T_{\frac{1}{2}})_1} = \frac{N_2}{(T_{\frac{1}{2}})_2} = \frac{N_3}{(T_{\frac{1}{2}})_3} = \dots$

สมดุลในกรณีนี้เรียกว่า "สมดุลเซกคิวลาร์" (Secular Equilibrium) จะเกิดขึ้นเมื่อสารกัมมันตภาพครึ่งสั "พ่อ" สลายตัวช้ากว่าการสลายตัวของ "ลูก" หรืออีกนัยหนึ่ง "พ่อ" มีชีวิตครึ่งยาวมากกว่า "ลูก" หรือ "หลาน" ฯลฯ สมดุลประเภทนี้ช่วยให้เราหาชีวิตครึ่งของสารกัมมันตภาพครึ่งสับางตัวได้ เช่น ถ้าเราทราบว่าปริมาณของเรเดียมที่อยู่ในยูเรเนียมในธรรมชาติ เป็น $2.8 \times 10^6 : 1$ และรู้ชีวิตครึ่งของเรเดียมเป็น 1620 ปี ดังนั้นชีวิตครึ่งของยูเรเนียมจะคำนวณได้จาก

$$(T_{\frac{1}{2}})_1 = \frac{N_1}{N_2} (T_{\frac{1}{2}})_2 = 2.8 \times 10^6 \times 1620 = 4.5 \times 10^9 \text{ ปี}$$

(ข) ถ้าชีวิตครึ่งของ "พ่อ" ไม่ยาวกว่าของ "ลูก" มากนัก คือ $\lambda_1 < \lambda_2$

เราจะพบว่า $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ และอัตราส่วนของกัมมันตภาพครึ่งสั "พ่อ" และ "ลูก" $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$ ที่สมดุลประเภทนี้เรียกว่า "สมดุลทรานเซียนต์" (Transient Equilibrium)

(ค) ถ้าชีวิตครึ่งของ "พ่อ" สั้นกว่าของ "ลูก" ($\lambda_1 > \lambda_2$) จะไม่เกิดสมดุล

กัมมันตรังสีขึ้นเลย

หน่วยวัดกัมมันตรังสี มีดังนี้

- 1 คูรี (c) = 3.7×10^{10} dps.
- = 10^6 μ c
- = 10^3 mc
- = 10^{12} $\mu\mu$ c
- 1 รูเธอร์ฟอร์ด = 10^6 dps.

กฎกำลังสองผกผันของการแผ่รังสีและค่าทางสถิติของการแผ่รังสี

ความเข้มของรังสีจากจุดที่เป็นบ่อกำเนิดของสารกัมมันตภาพรังสี มีกฎเกณฑ์ เช่นเดียวกับกฎกำลังสองผกผันในวิชาแสง ถ้าไม่คิดการดูดกลืนรังสีของตัวกลางที่ต้นขุมระหว่างบ่อกำเนิดรังสีและผู้สังเกตก็น่าจะากกฎกำลังสองผกผันมาใช้คำนวณหาความเข้มของรังสีที่ตำแหน่งต่าง ๆ ได้ ดังสูตรต่อไปนี้

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \text{-----(4.13)}$$

ตัวอย่างการใช้กฎกำลังสองผกผัน เช่นสมมุติว่า ที่จุด ๆ หนึ่งซึ่งห่างออกจากบ่อเกิดกัมมันตภาพรังสี 10 ซม. มีความเข้มของรังสี 20 mr ถ้าต้องการให้มีความเข้ม 5 mr จะต้องอยู่ห่างจากบ่อเกิดรังสีเท่าไร (ไม่คิดการดูดกลืนรังสี และ Backscattering ของอากาศ)

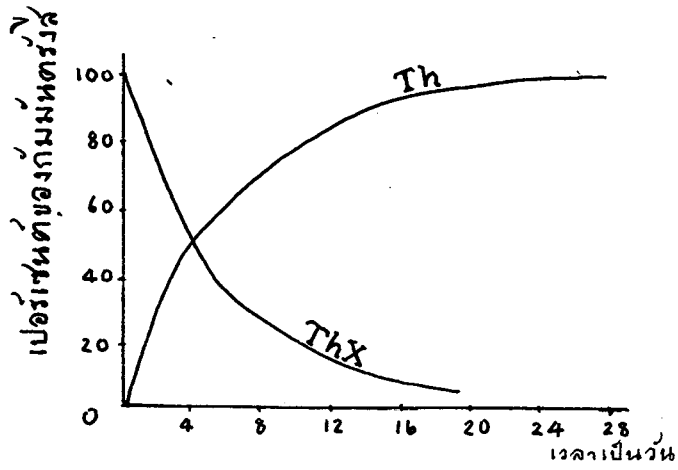
วิธีคำนวณ ใช้สมการ (4.13)

ให้

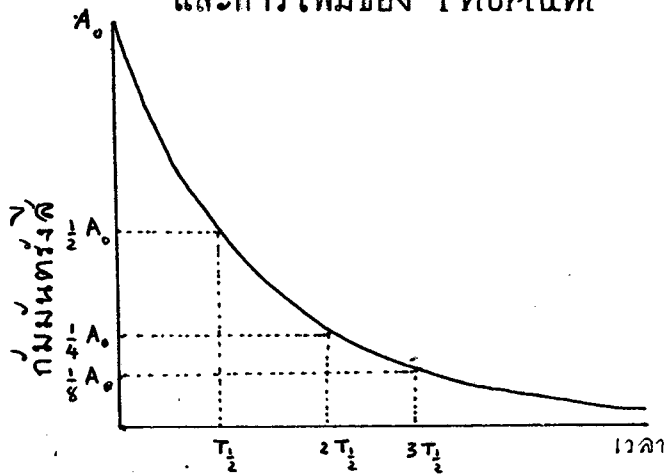
$$I_1 = 20 \text{ mr}$$

$$d_1 = 10 \text{ ซม.}$$

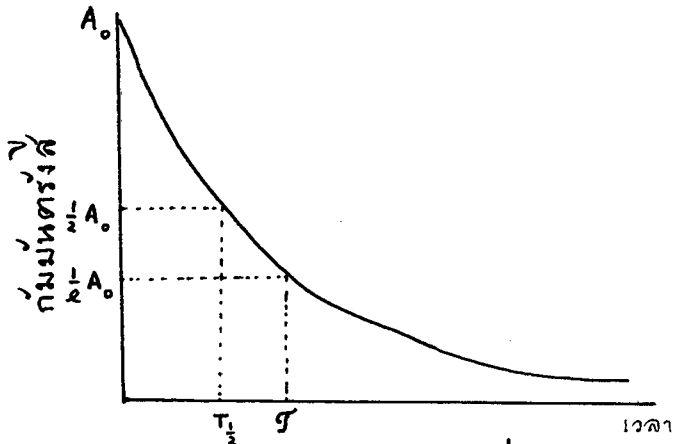
$$I_2 = 5 \text{ mr}$$



รูป ๑ กราฟแสดงการสลายตัวของ Thorium X และการเพิ่มของ Thorium



รูป ๒ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกัมมันตรังสีและเวลา (เพื่อแสดงชีวิตครึ่ง)



รูป ๓ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกัมมันตรังสีและเวลา (เพื่อแสดงชีวิตเฉลี่ย)

$$\begin{aligned} \therefore d_2^2 &= \frac{20}{5} \times 10^2 \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$\therefore d_2 = 20 \text{ ซม.}$$

เราทราบแล้วว่า การสลายตัวของพวกกัมมันตภาพรังสี มันเป็นไปอย่างไม่เป็นระเบียบ ดังนั้น จึงต้องมีวิธีทางสถิติ ถ้าเรานับสารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งใน 1 นาที และทำซ้ำ ๆ กัน 10 ครั้ง จะเห็นว่าจำนวนครั้งที่นับได้ใน 1 นาที มีค่าไม่เท่ากัน ช่วงเวลาที่ไหนจะใหญ่สุดถูกต้องที่สุดเราไม่ทราบ วิธีที่ดีที่สุดก็คือ หากค่าเฉลี่ย ถ้าหากเรานับซ้ำอีกค่าเฉลี่ยอันใหม่ก็ไม่เท่ากับอันเดิม ดังนั้นวิธีที่ดีก็คือ นำค่าเฉลี่ยนั้นมาเฉลี่ยอีกครั้งหนึ่งและเพียงแต่เรารู้ค่าเฉลี่ยของมัน ก็ไม่ทำให้เราทราบค่าทางสถิติใด เพราะฉะนั้น จึงต้องมีค่าจำกัดความเกี่ยวกับจำนวนที่โชครึก ความไกลเคียงของค่าที่ถูกคองซึ่งเทอมนี้เราเรียกว่า "Statistical Standard Diviation" หรือ "Limit of Probability" ใช้ตัวย่อว่า σ ค่าที่ได้จาก Data จะตกอยู่ในช่วงขอบเขตอันหนึ่งโดยการอาศัยวิธีคำนวณในทางสถิติ เราก็สามารถหาค่าจำกัดความของ σ ได้ว่า $\sigma = (n e^{-\lambda t})^{\frac{1}{2}}$ ในทางปฏิบัติ λt มีค่าน้อย นั่นคือ Observation Time (Counting Time) t น้อย เมื่อเทียบกับ Half Life ถ้าจำนวนครั้งของการนับ (n) มีค่านากจะได

$$\sigma = (n)^{\frac{1}{2}}$$

- ซึ่ง
- σ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
 - n = จำนวนครั้งที่นับได้

\therefore ถ้าใน 1 นาที นับได้ 100 ครั้ง ก็จะได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $(100)^{\frac{1}{2}} = \pm 10$ และอัตราการนับก็เขียนได้ดังนี้ 100 ± 10 ครั้ง/นาที

ถ้าใน 10 นาที นับได้ 1000 ครั้ง

$$\text{จะได้อัตราเบี่ยงเบนมาตรฐาน} = (1000)^{\frac{1}{2}} = \pm 32$$

$$\therefore \text{อัตราการนับก็จะเป็น} = \frac{1000 \pm 32}{10} = 100 \pm 32 \text{ ครั้ง/นาที}$$

เราจะเห็นว่ายิ่งใช้เวลาในการนับนาน ค่าที่นับได้ก็จะถูกต้องมากขึ้น
ตัวอย่างเช่น

สมมติว่า เครื่องนับรังสี เครื่องหนึ่งวัด Background ได้ 600 ครั้ง ใน 15 นาที วัด Sample ได้ 1000 ครั้ง ใน 10 นาที ต้องการหาอัตราการนับที่แท้จริงของ Sample

$$\text{ให้ } R_b = \text{อัตราการนับ Background}$$

$$\therefore R_b = \frac{600 \pm (600)^{\frac{1}{2}}}{15} = \frac{600 \pm 24}{15}$$

$$= 40 \pm 1.6 \text{ ครั้ง/นาที}$$

$$R_t = \text{อัตราการนับทั้งหมดรวมทั้ง Sample}$$

$$R_t = \frac{1000 \pm (1000)^{\frac{1}{2}}}{10}$$

$$= 100 \pm 3.2 \text{ ครั้ง/นาที}$$

$$\text{ถ้าให้ } R_n = \text{Net Counting Rate}$$

$$\text{จะได้ } R_n = 100 - 40 = 60 \text{ ครั้ง/นาที}$$

ส่วนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานก็อาจจะคำนวณได้จากสูตร ต่อไปนี้ คือ

$$\sigma_n = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$$

$$\sigma_n = (1.6^2 + 3.2^2)^{1/2}$$

$$= 3.6 \quad \text{ครั้ง/นาที}$$

$$\therefore R_n = 60 \pm 3.6 \quad \text{ครั้ง/นาที}$$