บทที่ 3

การวิเคราะห์ความผิดพลาด

3.1 ความนำ

ผลลัพธ์ของค่าการเคลื่อนที่ที่ขั้วที่คำนวณได้นั้น เป็นผลลัพธ์โดยประมาณจะไม่เท่ากับค่าจริงพอดี ทั้งนี้เป็นเพราะเกิดความผิดพลาดขึ้นในระหว่างการคำนวณ สาเหตุที่เกิดความผิดพลาดที่เห็นได้ชัดมี 2 ประการ คือ ประการที่หนึ่งเกิดจากการที่เครื่องคอมพิวเตอร์ หรือเครื่องคำนวณไม่สามารถเก็บข้อมูลให้เป็นค่าจริงได้ เช่นเก็บตัวเลขได้เพียง 7 หลักจึงเรียกว่า ความผิดพลาดเนื่องจากการตัดตัวเลขที่เกินทิ้งไป (Truncation Error) ประการที่สองเกิดจากนำเอาตัวเลขในสาเหตุประการที่หนึ่งมาทำการคำนวณ และในระหว่างการกำจัด (Reduce) นำเอาค่าไม่จริงมาคำนวณ ดังนั้นค่าผลลัพธ์ที่ ได้จึงเป็นค่าโดยประมาณ ซึ่งเรียกสาเหตุประการนี้ว่า ความผิดพลาดเนื่องจากการคำนวณ (Round-off Error)

สาเหตุประการที่สองจะเป็นสาเหตุที่สำคัญมากต่อผลลัพธ์ที่ได้ออกมา ซึ่งมีวิธีแก้โดยในการวิเคราะห์ทำให้ตัวเลขมีความถูกต้องขึ้นเป็น 2 เท่า (Double Precision) แต่ในเครื่องคอมพิวเตอร์บางเครื่องไม่สามารถจะทำได้ จึงมีข้อผิดพลาดขึ้น จึงต้องคำนวณหาค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งเรียกว่า ความผิดพลาดของผลลัพธ์ (Solution Error)

ถ้าผลหารกันระหว่าง k^*_{ni} และ k^*_{nn} ในสมการที่ 2.2 และ 2.3 เป็นค่าจริงก็จะให้ผลลัพธ์ของ u_i ออกมาเป็นค่าจริงด้วย จะเห็นได้ว่าการทำงานตรงจุดนี้จะทำให้เกิด-ความผิดพลาดขึ้น

3.2 ความผิดพลาดเนื่องจากการวิเคราะห์

ในการหาความผิดพลาดนั้นจะหาจากค่าความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น คือ ค่าการเคลื่อนที่ที่ขั้ว โดยพิจารณาจากสมการสมดุลย์สมการที่ 2.1

$$\underset{\approx}{K}\,\overline{\underset{\sim}{U}} \doteq \underset{\sim}{F} \tag{3.1}$$

โดยที่

$\overline{\underset{\sim}{U}}$ = เวคเตอร์ของค่าการเคลื่อนที่ที่คำนวณได้

ดังนั้น ความผิดพลาดที่เกิดขึ้น (Residual Error - $\Delta \underset{\sim}{R}$) มีค่าดังนี้

$$\Delta \underset{\sim}{R} = \underset{\approx}{K}\underset{\sim}{U} - \underset{\approx}{K}\underset{\sim}{\bar{U}} \tag{3.2}$$

$$\Delta \underset{\sim}{R} = \underset{\approx}{K}\underset{\sim}{r} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{r}$ = ค่าความผิดพลาดของผลลัพธ์

$= \underset{\sim}{U} - \underset{\sim}{\bar{U}}$

จากสมการที่ 3.1 และ 3.3

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\approx}{K}^{-1}\underset{\sim}{F} \tag{3.4}$$

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\approx}{K}^{-1}\Delta \underset{\sim}{R} \tag{3.5}$$

จากสมการที่ 3.4 และ 3.5 ใส่นอร์มทั้งสองข้าง

$$||\underset{\sim}{U}||_2 \leq ||\underset{\approx}{K}^{-1}||_2 \; ||\underset{\sim}{F}||_2 \tag{3.6}$$

$$||\underset{\sim}{r}||_2 \leq ||\underset{\approx}{K}^{-1}||_2 \; ||\Delta \underset{\sim}{R}||_2 \tag{3.7}$$

โดยที่ $|| \; ||_2$ คือ ยูคลิเดียนนอร์ม (Euclidean Norm)

จากสมการที่ 3.6 และ 3.7

$$\varepsilon = \frac{||\underset{\sim}{r}||_2}{||\underset{\sim}{U}||_2} = \frac{||\Delta \underset{\sim}{R}||_2}{||\underset{\sim}{F}||_2} \tag{3.8}$$

$$\varepsilon = \frac{||\underset{\sim}{F} - \underset{\approx}{K}\underset{\sim}{\bar{U}}||_2}{||\underset{\sim}{F}||_2} \tag{3.9}$$

3.3 <u>การวิเคราะห์ความผิดพลาดในวิธีฟรอนทัล</u>

สำหรับการหาค่าความผิดพลาดจากวิธีการฟรอนทัล ใช้สมการที่ 3.9 ซึ่งจะทำให้ส่วนของโปรแกรมย่อย ERROR ซึ่งจะเรียกข้อมูลของสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย และค่าการเคลื่อนที่ เข้ามาเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หา

ในการรวมค่าแรงคงที่ของชิ้นส่วนย่อย ($\underset{\approx}{K}\underset{\sim}{\bar{U}}$) ทำได้ดังสมการต่อไปนี้

$$A = \sum_{LZ=1}^{NM} \underset{\sim}{F} \tag{3.10}$$

$$B = \sum_{LZ=1}^{NM} (\underset{\sim}{F} - \underset{\approx}{K}\,\bar{\underset{\sim}{U}}) \tag{3.11}$$

โดยที่ NM = จำนวนของชิ้นส่วนย่อย

นอร์ม ของ A และ B คำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{MQ} A_\ell^2} \tag{3.12}$$

$$||B||_2 = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{MQ} B_\ell^2} \tag{3.13}$$

สมการที่ 3.12 และ 3.13 ใช้เฉพาะสัมประสิทธิ์ในแถวที่ 1 ถึงแถวที่ MQ ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{||B||_2}{||A||_2} \tag{3.14}$$