บทที่ 3

ฟัซซีลอจิก

หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับฟัซซีลอจิก

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการเบื้องต้นที่เกี่ยวกับฟัซซีลอจิกในหัวข้อต่าง ๆ หลายหัวข้อด้วยกัน หัวข้อแรกเกี่ยวข้องกับฟัซซีเซต ซึ่งเป็นการขยายแนวความคิดของเซตแบบธรรมดา เพื่อให้สามารถจัดการ กับ ความไม่แน่นอน ของระดับความเป็นสมาชิกของ สิ่งของที่เราสนใจได้ ฟัซซีเซตมีนิยามและคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกับเซตธรรมดา โดยเราจะสามารถใช้ตัวดำเนินการต่างๆ ที่ใช้ในเซตธรรมดาไม่ว่าจะเป็นการอินเตอร์เซคชัน, การยูเนียน, การคอมพลีเมนท์ ฯลฯ บนฟัซซีเซตได้โดยตัวดำเนินการที่เรียกว่าตัวดำเนินการฟัซซี ความสัมพันธ์ฟัซซี เป็น ฟัซซีเซตซึ่งมีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชัน หรือความสัมพันธ์ในเซตธรรมดา เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ฟัซซีร่วมกับกฎการผสมแบบต่าง ๆ ในการหาค่าการแปลงของความสัมพันธ์ฟัซซีจากฟัซซีเซตที่กำหนดให้ในทำนองเดียวกับ การหาค่าฟังก์ชันเมื่อกำหนดอาร์กิวเมนต์ให้ได้อีกด้วย

1. ฟัซซีเซต (Fuzzy Set)

เซต ในความหมายปกติ เป็นแนวคิดที่มีประโยชน์มากต่อการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวข้องกับตรรกศาสตร์ โดยเซตจะหมายถึงกลุ่มของสิ่งของที่มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกันและสามารถจัดรวมเข้าไว้ในกลุ่มเดียวกันได้ เพื่อความชัดเจนเราอาจให้นิยามเซตหนึ่ง ๆ ได้ โดยการกำหนดให้มีตัวเลขประจำตัวของแต่ละสิ่งของซึ่งแสดงระดับความเป็นสมาชิกของสิ่งของนั้นในเซตที่เราสนใจ ตัวเลขนี้มีค่าเป็น 0 หรือ 1 โดยค่า 0 แสดงว่าสิ่งของนั้นไม่อยู่ในเซตที่เราสนใจและค่า 1 แสดงว่าสิ่งของนั้นอยู่ในเซตที่เราสนใจ เราเรียกฟังก์ชันที่ทำการกำหนดค่าระดับการเป็นสมาชิกนี้ว่าฟังก์ชันลักษณะสมบัติ (Characteristic Function) ซึ่งแสดงได้ดังนี้ [4]

$$X_A\, U \Rightarrow \{0,1\}$$

$$X_A(u) = \begin{cases} 1 & ;u \in A \\ 0 & ;u \notin A \end{cases}$$

จากที่แสดงข้างต้น χ_A เป็นฟังก์ชันที่แสดงระดับความเป็นสมาชิกในเซต A ของสิ่งของสิ่งหนึ่ง (แสดงโดย u) โดยจะให้ค่าเป็น 0 ถ้าสิ่งของนั้นไม่อยู่ในเซต A และให้ค่าเป็น 1 ถ้าสิ่งของนั้นอยู่ในเซต A เมื่อ u เป็นสิ่งของสิ่งหนึ่งซึ่งอยู่ในเซตที่เรียกว่า เอกภพสัมพัทธ์(Universe) ซึ่งใหญ่พอที่จะครอบคลุมสิ่งของที่เราสนใจทั้งหมดได้

ถึงแม้ว่าจะมีประโยชน์มากแต่เซตในความหมายปกติก็มีความจำกัดเช่นเดียวกัน เราพบว่า ในบางครั้ง เราไม่สามารถกำหนดได้อย่างมั่นใจว่าสิ่งของสิ่งหนึ่งมีคุณสมบัติบางอย่างพอที่เราจะนับมันว่าเป็นสมาชิกของเซตนั้น ๆ ได้หรือไม่

แนวความคิดเรื่องฟัซซีเซตเป็นแนวความคิดที่ริเริ่มขึ้นมาในช่วงคริสตศักราชที่ 1960 โดย Prof. Lotfi A. Zadeh แห่ง University of Califonia at Berkeley ในบทความเชิงสัมมนาในเรื่องเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของความไม่แน่นอนของภาษาธรรมชาติ

1.1 <u>นิยามของฟัซซีเซต</u>

กำหนดให้ U เป็นเซตของสิ่งของชุดหนึ่งซึ่งแสดงโดย {u} โดย u แทนสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของ U เราจะเรียก U ว่า เอกภพสัมพัทธ์แห่งการบรรยาย (Universe of Discourse : UOD) ซึ่งอาจมีสมาชิกเป็นค่าต่อเนื่อง (Continuous Universe of Discourse) หรือเป็นค่าเป็นระดับขั้น (Discrete Universe of Discourse)

นิยาม 3.1 <u>ฟัซซีเซต</u> F ในเอกภพสัมพัทธ์แห่งการบรรยาย U จะถูกกำหนดลักษณะสมบัติโดยฟังก์ชั่น ความเป็นสมาชิก (Membership Function) $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$, โดย $\mu_F : (u)$ เป็นค่าประจำตัวของแต่ละสมาชิก u ใน U ซึ่งแสดงระดับความเป็นสมาชิก (Grade of Membership) ของ u ในฟัซซีเซต F [5],[6]

เราอาจพิจารณาฟัซซีเซตว่าเป็นการขยายแนวความคิดของเซตธรรมดา ซึ่งฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเรียกว่า ฟังก์ชันลักษณะสมบัติ ในกรณีเซตธรรมดา ให้ค่าเพียง 2 ค่าคือ 0 และ 1 โดยค่า 0 และ 1 แสดงถึงความไม่เป็นสมาชิก และความเป็นสมาชิกในเซตธรรมดาตามลำดับในหัวข้อต่อไปเราจะใช้คำว่าเซต แทนความหมายของเซตธรรมดา และใช้คำว่าฟัซซีเซตหมายถึงเซตที่

มีนิยามในนิยาม 3.1 สัญลักษณ์ F, G, A, B ใช้แทนฟัซซีเซตใด ๆ และสัญลักษณ์ U, V แทนเอกภพสัมพัทธ์แห่งการบรรยาย (UOD)

จากนิยามของฟัซซีเซตซึ่งอาศัยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกเป็นตัวกำหนดคุณสมบัติ เราสามารถแสดงฟัซซีเซต F ได้ด้วยเซตของคู่ลำดับของสมาชิก u และระดับความเป็นสมาชิกของมันดังนี้

$$F = \{(u, \mu_F(u)) | u \in U\}$$

ในกรณีที่ U มีสมาชิกเป็นค่าต่อเนื่องเราจะแทน F โดยการใช้สัญลักษณ์

$$F = \int_u u_F(u) / u$$

และในกรณีที่ U มีสมาชิกเป็นค่าไม่ต่อเนื่องเราจะแทน F ด้วยสัญลักษณ์

$$F = \sum_{i=1}^{n} u_F(u_i) / u_i$$

นิยาม 3.2 ความสูง (Height) ของฟัซซีซต F หมายถึงค่าสูงสุดของระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต F ของสมาชิกทุกตัวใน UOD

$$\text{Height}(F) = \sup_{u \in U} \mu_F(u)$$

นิยาม 3.3 เราเรียกฟัซซีเซต F ซึ่งนิยามใน U ว่าเป็นฟัซซีเซตปกติ (Normal Fuzzy Set) ถ้าฟัซซีเซตนั้นมีความสูงเป็น 1

$$\text{Height}(F) = \sup_{u \in U} \mu_F(u) = 1$$

นิยาม 3.4 ปริมาณฟัซซี (Fuzzy Quantity) หมายถึงฟัซซีเซตที่นิยามบน UOD ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ดังนั้นถ้า F เป็นปริมาณฟัซซีจะได้ว่า

$$F = \{(u, \mu_F(u)) | u \in R\}$$

โดย R เป็นเซตของจำนวนจริง [7]

นิยาม 3.5 ช่วงฟัซซี (Fuzzy Interval) หมายถึงปริมาณฟัซซีนูน (Convex Fuzzy Quantity) นั่นคือถ้า F เป็นช่วงฟัซซีที่นิยามบน U แล้ว [7]

$$\forall x,y \in U, \forall \lambda \in [0,1]\ \mu_F(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min(\mu_F(x), \mu_F(y))$$

นิยาม 3.6 จำนวนฟัซซี (Fuzzy Number) หมายถึงช่วงฟัซซีที่มีสมาชิกที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 1 เพียงตัวเดียว [7]

นิยาม 3.7 ฟัซซีซิงเกิลตัน (Fuzzy Singleton) หมายถึงฟัซซีเซตซึ่งมีสมาชิกเพียงหนึ่งตัวใน

Universe of Discourse ที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกมากกว่า 0 และมีค่าเท่ากับ 1 ที่สมาชิกตัวนั้นด้วย

ฟัซซีซิงเกิลตัน เป็น ฟัซซีเซตที่ไม่มีความไม่แน่นอนในระดับความเป็นสมาชิก จึงสามารถใช้แทนค่าตายตัว (Crisp Value) ซึ่งก็คือค่าที่ไม่มีความไม่แน่นอนค่าหนึ่งได้

จากนิยามที่กล่าวถึงข้างต้นอาจให้คำอธิบายได้ว่า ช่วงฟัซซี เป็น ฟัซซีเซต ที่ใช้ในการแทนช่วงของจำนวนจริงที่มีขอบเขตไม่แน่นอน ซึ่งทำให้เราต้องกำหนดคุณสมบัติความเป็นฟัซซีเซตแบบนูนเพื่อให้การจำลองเป็นไปอย่างสมเหตุสมผล ส่วนจำนวนฟัซซีเป็นฟัซซีเซตที่ใช้แทนจำนวนจริง (ค่าเดียว) ที่มีค่าไม่แน่นอน ซึ่งจะเห็นได้จากการกำหนดให้มีสมาชิกใน UOD เพียงตัวเดียวที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกเป็น 1 นั่นคือเป็นสมาชิกที่มีความเป็นไปได้ที่จะเป็นตัวแทนของจำนวนฟัซซีดังกล่าวมากที่สุด

ในการใช้งานของฟัซซีเซตในทางวิศวกรรม เรามักใช้ฟัซซีเซตเป็นแบบจำลองของปริมาณที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริงไม่ว่าจะเป็น สัญญาณค่าผิดพลาด การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณค่าผิดพลาด สัญญาณควบคุม ฯลฯ ดังนั้นเราจึงพบว่าปริมาณฟัซซีเป็นฟัซซีเซตประเภทที่พบมากที่สุดในการประยุกต์ใช้งานฟัซซีเซตในงานวิศวกรรม

ฟัซซีเซตมีคุณสมบัติความเท่ากัน (Equality) และ ความเป็นส่วนหนึ่ง (Inclusion) ทำนองเดียวกับเซตธรรมดาดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.8 ความเท่ากัน (Equality) ของฟัซซีเซตสองเซต เรากล่าวว่าคือฟัซซีเซต F เท่ากับฟัซซีเซต G ก็ต่อเมื่อฟัซซีเซตทั้งสองมีค่าระดับความเป็นสมาชิกเท่ากันสำหรับสมาชิกทุกตัวในUOD ที่ใช้นิยามฟัซซีเซตทั้งสอง

$$F = G \leftrightarrow\ , \forall u \in U,\ \mu_F(u) = \mu_G(u)$$

นิยามที่ 3.9 ความเป็นส่วนหนึ่ง (Inclusion) ของฟัซซีเซตหนึ่งในอีกฟัซซีเซตหนึ่ง เรากล่าวว่าฟัซซีเซต F เป็นส่วนหนึ่งในฟัซซีเซต G (F เป็นซับเซตของ G) ก็ต่อเมื่อระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิกตัวใด ๆ ของ UOD ในฟัซซีเซต F มีค่าน้อยกว่าระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิกตัวนั้นในฟัซซีเซต G

$$F \subset G \leftrightarrow \forall u \in U,\ \mu_F(u) \leq \mu_G(u)$$

1.2 <u>ตัววัดคุณสมบัติของฟัซซีเซต</u>

ฟัซซีเซตแต่ละเซตมีคุณสมบัติที่ต่างกัน ซึ่งแสดงได้โดยตัวเลขซึ่งเป็นค่าวัดคุณสมบัติของฟัซซีเซตหนึ่ง ๆ ดังมีนิยามต่อไปนี้ [4]

1) ตัววัดเอนโทรปีของความเบลอ (Entropy Meagure of Fuzziness) เป็นดัชนีที่ใช้วัดค่าความเบลอ (Fuzziness) ของฟัซซีเซต

นิยามที่ 3.10 กำหนดให้ F เป็นฟัซซีเซตใน U เราจะได้ตัววัดพลังงานของความเบลอของฟัซซีเซต F, E(F) มีนิยามเป็น [4]

$$E(F) = \int f(\mu_F(u)).dv$$

โดย v เป็นตัววัด (Measure) ที่นิยามใน U, สำหรับกรณีที่ U เป็นเซตของจำนวนจริงเราจะให้ v เป็น u, และ $f:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ โดยเป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[0, {}^1/_2]$ แต่เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $[{}^1/_2,1]$

2) ตัววัดพลังงานของความเบลอ (Energy Measure of Fuzziness)

เป็นดัชนีที่ใช้วัดค่าความเบลอขอฟัซซีเซตเช่นเดียวกันแต่มีนิยามที่ต่างไปดังนี้

นิยาม 3.11 กำหนดให้ F เป็นฟัซซีเซตใน U เราจะได้ตัววัดพลังงานของความเบลอของฟัซซีเซต F, E(F) มีนิยามเป็น [4]

$$E(F) = \int h(\mu_F(u)) \,.\, dv$$

โดย v เป็นตัววัด (Measure) ที่นิยามใน U, สำหรับกรณีที่ U เป็นเซตของจำนวนจริงเราจะให้ v เป็น u, และ $h:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ โดยเป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง [0,1] กรณีพิเศษที่ h(v)=v เราจะได้ $E(F)=\int \mu_F(u).dv$ ซึ่งเรียกว่าคาดินัลลิตี(Cardinality) ของ F

3) ค่าความละเอียด (Granularity)

นิยาม 3.12 กำหนดให้ F เป็นฟัซซีเซตใน U เราจะได้ค่าความละเอียดของฟัซซีเซต F, G(F) มีนิยามเป็น [4]

$$G(F) = 1 - \int_0^1 \frac{\text{meas}(F_\alpha)\psi(\alpha)}{\text{meas}(U)}.d\alpha$$

4) ค่าความเฉพาะเจาะจง (Specificity)

นิยาม 3.13 กำหนดให้ F เป็นฟัซซีเซตใน U เราจะได้ค่าความเฉพาะเจาะจงของฟัซซีเซต F, Sp(F) มีนิยามเป็น [4]

$$S_P(F) = \int_0^1 \frac{\alpha_{\max}}{\text{card}(A_\alpha)}.d\alpha$$

1.3 <u>เซตที่สัมพันธ์กับฟัซซีเซต</u>

เซตธรรมดาที่มีความสัมพันธ์กับฟัซซีเซตมีหลายประเภทดังนิยามต่อไปนี้ [7]

นิยาม 3.14 **<u>อัลฟาคัท</u> (α-Cut) ของฟัซซีเซต F หรือเขียนแทนได้ด้วย F_α หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกใน Universe of Discourse ทั้งหมดที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต F <u>มากกว่าหรือเท่ากับ</u> α หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งได้เป็น**

$$F_\alpha = \{u \mid \mu_F(u) \geq \alpha\}$$

นิยาม 3.15 **<u>สตรองอัลฟาคัท</u>** (Strong α-Cut) **ของฟัซซีเซต F หรือ เขียนแทนได้ด้วย F_α หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกใน** Universe of Discourse **ที่มีค่าระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต F <u>มากกว่า</u> α**

$$F_\alpha = \{u \mid \mu_F(u) > \alpha\}$$

นิยาม 3.16 **<u>ซัพพอร์ท</u>** (Suport) **F หมายถึงสตรองอัลฟาคัทของฟัซซีเซต F ที่ค่า $\alpha = 0$**

$$S(F) = \{u \mid \mu_F(u) > 0\} = F_0$$

นิยาม 3.17 **<u>คอร์</u>** (Core) **ของฟัซซีเซต F หมายถึงอัลฟาคัทของฟัซซีเซต F ที่ค่า $\alpha = 1$**

$$F = \{u \mid \mu_F(u) \geq 1\} = \{u \mid \mu_F(u) = 1\} = F_1$$

1.4 <u>ตัวแปรเชิงภาษา (Linguistic Variable) และป้ายชื่อของฟัซซีเซต (Label of Fuzzy Set)</u>

ถ้าพิจารณาแบบไม่เป็นทางการ อาจจะให้คำจำกัดความตัวแปรเชิงภาษาได้ว่าเป็นตัวแปรที่สามารถมีค่าเป็นคำในภาษาได้ ตัวอย่างเช่น ตัวแปรเชิงภาษา<u>ความเร็ว</u>อาจมีค่าเป็นคำต่างๆ ได้คือ เร็ว ช้า ปานกลาง เร็วมาก ช้าพอสมควร เป็นต้น นอกจากจะมีค่าเป็นคำในภาษาแล้ว ตัวแปรเชิงภาษายังอาจมีค่าเป็นตัวเลขได้เช่นกัน เช่น อาจมีค่าระหว่าง 0 ถึง 200 กิโลเมตรต่อชั่วโมง สำหรับคำนิยามอย่างเป็นทางการของตัวแปรเชิงภาษาคือ [8]

นิยาม 3.18 **<u>ตัวแปรเชิงภาษา</u> เป็นตัวแปรชนิดหนึ่งที่ถูกกำหนดคุณสมบัติโดยองค์ประกอบ 5 ประการ** (Quintuple) **คือ (x, T(x), U, G, M) โดย x เป็นชื่อของตัวแปร, T(x) เป็นเซตคำ** (Term Set) **ที่จะใช้เป็นค่าเชิงภาษา** (Linguistic Value) **ของ x โดยแต่ละคำเป็นฟัซซีเซตซึ่งมีนิยามใน** Universe of Discourse **U, G เป็นกฎเชิงไวยากรณ์** (Syntactic Rule) **สำหรับการสร้างชื่อของค่าเชิงภาษาของ x, และ M เป็นกฎเชิงความหมาย** (Semantic Rule) **ซึ่งใช้กำหนดความหมายให้กับคำแต่ละคำในเซตคำ**

เราอาจพิจารณาโดยไม่ต้องใช้นิยามอย่างเป็นทางการว่า ถ้าตัวแปรตัวหนึ่งสามารถมีค่าเป็นคำในภาษาธรรมชาติ (ตัวอย่างเช่น เล็ก, เร็ว, ฯลฯ) เราจะสามารถเรียกตัวแปรนี้ว่าเป็นตัวแปรเชิงภาษา โดยคำต่าง ๆ ที่ใช้เป็นค่าของตัวแปรดังกล่าว เช่น เล็ก, ใหญ่, ปานกลาง, ฯลฯ เป็นป้ายชื่อของฟัซซีเซต (Label of Fuzzy Set) ที่ใช้แทนค่าเชิงภาษานั้น ๆ หรือหมายถึงคำที่ใช้เรียกแทนฟัซซีเซตนั้น ๆ

2 การดำเนินการฟัซซี (Fuzzy Operation)

2.1 <u>การดำเนินการพื้นฐานบนฟัซซีเซต</u>

กำหนดให้ A และ B เป็นฟัซซีเซต 2 เซตใน U โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_A และ μ_B ตามลำดับ เราสามารถให้นิยามการดำเนินการทางทฤษฎีเซต (Set-theoretic Operation) ของยูเนียน อินเตอร์เซคชัน และคอมพลิเมนท์ในกรณีของฟัซซีเซตได้ดังนี้ [8]

นิยาม 3.19 ยูเนียนของ A และ B, เขียนแทนได้ด้วย $A \cup B$ เป็นฟัซซีเซตใน U ซึ่งได้มาโดยใช้การดำเนินการยูเนียนระหว่าง A และ B โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนิยามสำหรับทุกค่า $u \in U$ เป็น

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max \{ \mu_A(u), \mu_B(u) \}$$

นิยาม 3.20 อินเตอร์เซคชันของ A และ B เขียนแทนได้ด้วย $A \cap B$ เป็นฟัซซีเซตใน U ซึ่งได้มาโดยใช้การดำเนินการอินเตอร์เซคชันระหว่าง A และ B โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนิยามสำหรับทุกค่า $u \in U$ เป็น

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min \{ \mu_A(u), \mu_B(u) \}$$

นิยาม 3.21 คอมพลีเมนท์ของ A เขียนแทนได้ด้วย $\bar{A}$ เป็นฟัซซีเซตใน U ซึ่งได้มาโดยการใช้การดำเนินการคอมพลีเมนท์กับ A โดยมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกนิยามสำหรับทุกค่า $u \in U$ เป็น

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

นิยามของยูเนียน, อินเตอร์เซคชัน, และคอมพลีเมนท์ ที่กล่าวถึงข้างต้นเป็นเพียงนิยามหนึ่งที่เป็นไปได้ โดยเราสามารถให้นิยามที่ต่างไปจากนี้ได้ โดยการใช้ตัวดำเนินการที่แตกต่างไปจากที่ได้กล่าวมาในข้างต้น ตัวดำเนินการที่ใช้กันมากในทฤษฎีฟัซซีลอจิก คือตัวดำเนินการที่มีชื่อเรียกว่า Triangular Norm และตัวดำเนินการ Triangular Co-norm ซึ่งถูกใช้ในการนิยามตัวดำเนินการอินเตอร์เซคชัน และ ยูเนียนตามลำดับ

2.2 Triangular Norm

นิยาม 3.22 Triangular Norm (t-norm) เป็นตัวดำเนินการซึ่งมีนิยาม [4]

$$*:[0,1] \times [0,1]$$

โดยมีคุณสมบัติ 4 ประการ คือ

1. เป็นฟังก์ชันไม่ลดของอาร์กิวเมนท์แต่ละตัว (Nondecreasing Function)

   $$(x_1<x_2) \text{ AND } (y_1 < y_2) \longrightarrow x_1*y_1<x_2*y_2$$

2. คุณสมบัติการสลับที่ (Commutativity)

   $$x*y = y*x$$

3. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associativity)

   $$(x*y)*z = x*(y*z)$$

4. เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

   $$x*0 = 0$$

   $$x*1 = x$$

ตัวอย่างของ Triangular Norm ที่สำคัญและใช้กันมากในทางปฏิบัติมี 4 ชนิด ได้แก่ [9],[10]

1. อินเตอร์เซคชัน (Intersection)

   $$x \cap y = \min \{x,y\}$$

2. ผลคูณพีชคณิต (Algebraic Product)

   $$x.y = xy$$

3. ผลคูณจำกัดเขต (Bounded Product)

   $$x \otimes y = \max \{0,x+y-1\}$$

4. ผลคูณดราสติก (Drastic Product)

$$x \cap y = \begin{cases} x; y = 1 \\ y; x = 1 \\ 1; x, y < \end{cases}$$

2.3 <u>Triangular Co-norm</u>

นิยาม 3.23 Triangular Co-norm (t-conorm, s-norm) เป็นการดำเนินการซึ่งมีนิยาม [4]

$$+ : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

โดยมีคุณสมบัติ 4 ประการเช่นเดียวกับ Triangular Norm คือ

1. เป็นฟังก์ชันไม่ลดของอาร์กิวเมนท์แต่ละตัว

$$(x_1 < x_2)\text{AND}(y_1 < y_2) \rightarrow x_1 + y_1 < x_2 + y_2$$

2. คุณสมบัติการสลับที่

$$x + y = y + x$$

3. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

4. เงื่อนไขขอบเขต

$$x + 0 = x$$

$$x + 1 = 1$$

ตัวอย่างของ Triangular Co-norm ที่ใช้กันมากมี 5 ชนิด ได้แก่ [10]

1. ยูเนียน (Union)

$$x \cup y = \max\{x,y\}$$

2. ผลบวกพีชคณิต (Algebraic Sum)]

$$x \hat{+} y = x + y -$$

3. ผลบวกจำกัดขอบเขต (Baunded Sum)

$$x \oplus y = \min\{1, x+y\}$$

4. ผลบวกดราสติก (Drastic Sum)

$$x \cup y = \begin{cases} x; y = 0 \\ y; x = 0 \\ 1; x, y > 0 \end{cases}$$

5. ผลบวกดิสจอยน์ (Disjoint Sum)

$$x \Delta y = \max\{\min(x, 1-y), \min(1-x, y)\}$$

2.4 หลักการการขยาย (Extension Principle)

หลักการการขยายช่วยขยายการดำเนินการบางอย่าง (เช่น บวก ลบ คูณ หาร) และการหาค่าฟังก์ชันของจำนวนจริงให้สามารถมาทำบนฟัซซีเซตได้ด้วย ดังมีนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.24 กำหนดให้ A และ B เป็นฟัซซีเซต ซึ่งมีนิยามใน Universe of Discourse U และ V ตามลำดับ f เป็นฟังก์ชันที่แปลงค่าจาก U ไปยัง V หลักการ การขยายให้นิยาม B = f(A) โดยกำหนดฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต B เป็น [11]

$$\mu_B(v) = \sup_{u \in f^{-1}(v)} [\mu_A(u)]$$

นั่นคือ $\mu_B(v)$ มีค่าตามนิยามเป็นค่าสูงสุดของ $\mu_A(u)$ สำหรับทุกค่า u ที่ทำให้ f(u) = v โดยสำหรับกรณี $f^{-1}(v)$ เป็นเซตว่างสำหรับค่า บางค่า เรากำหนดให้ $\mu_B(v) = 0$

นอกจากการหาค่าฟังก์ชันของฟัซซีเซตแล้ว หลักการขยายยังสามารถให้คำนิยามของการดำเนินการทางพีชคณิตบางอย่างได้ดังต่อไปนี้ [4]

นิยาม 3.25 กำหนดให้ A และ B เป็นฟัซซีเซต ซึ่งมีนิยามใน Universe of Discourse U และ V ตามลำดับ * เป็นตัวดำเนินการ Triangular Norm เราจะได้ว่า

$$\mu_{A+B}(w) = \sup_{u,v;u+v=w} \{\mu_A(u) * \mu_B(v)\}$$

$$\mu_{A-B}(w) = \sup_{u,v;u-v=w} \{\mu_A(u) * \mu_B(v)\}$$

$$\mu_{A.B}(w) = \sup_{u,v;u.v=w} \{\mu_A(u) * \mu_B(v)\}$$

$$\mu_{A/B}(w) = \sup_{u,v;u/v=w} \{\mu_A(u) * \mu_B(v)\}$$

3. ความสัมพันธ์ฟัซซี (Fuzzy Relation)

3.1 นิยามของความสัมพันธ์ฟัซซี

นิยาม 3.26 กำหนดให้ U และ V เป็น Universe of Discourse 2 เซต ความสัมพันธ์ฟัซซี R มีนิยามเป็นฟัซซีเซตในปริภูมิผลคูณ (Product Space) U x V นั่นคือ R มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิก μ_R (u,v) สำหรับแต่ละ u $\in$U, v$\in$v [9]

3.2 <u>ฟัซซีคอนจังชัน, ฟัซซีดิสจังชัน, และ ฟัซซีอิมพลีเคชัน</u>

กำหนดให้ A และ B เป็นฟัซซีเซตที่นิยามบน Universe of Discourse U และ V ตามลำดับ เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีระหว่างฟัซซีเซต A และ B ซึ่งเขียนแทนได้ด้วย A$\rightarrow$B ได้โดยการใช้ตัวดำเนินการประเภทต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ [10]

นิยาม 3.27 ฟัซซีคอนจังชัน (Fuzzy Conjunction) ของ A และ B เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน U x V ที่กำหนดโดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \mu_A(u)*\mu_B(v)$$

นิยาม 3.28 ฟัซซีดิสจังชัน (Fuzzy Disjunction) ของ A และ B เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน UxV ที่กำหนดโดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \mu_A(u)+\mu_B(v)$$

นิยาม 3.29 ฟัซซีอิมพลีเคชัน (Fuzzy Implication) ของ A และ B เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน U x V ประเภทหนึ่งซึ่งกำหนดโดยฟังก์ชันความเป็นสมาชิกแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. Material Implication

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u)+\mu_B(v)$$

2. Propositional Calculus

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u)+\mu_{A*B}(v)$$

3. Extended Propositional Calculus

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \mu_{\bar{A}}(u)*\mu_{\bar{B}}(v)+\mu_B(v)$$

4. Generalization of Modus Ponens

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \sup\{c \in [0,1] | \mu_A(u)*c \le \mu_B(v)\}$$

5. Generalization of Modus Tollen

$$\mu_{A\rightarrow B}(u,v) = \inf\{c \in [0,1] | \mu_B(v)+c \le \mu_A(u)\}$$

โดยการใช้ตัวดำเนินการ Triangular Norm และ Triangular Co-Norm แบบต่าง ๆ กับฟัซซีดิสจังชัน และฟัซซีอิมพลีเคชันที่แสดงในข้างต้น เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีเพื่อนำไปใช้ในการนิรนัยความฟัซซี (Fuzzy Inference) ได้หลายวิธี แต่ละวิธีเรียกว่าเป็นกฎการอิมพลิเคชันฟัซซีแบบหนึ่ง (Fuzzy Implication Rule) สำหรับกฎการนิรนัยความจริงที่ใช้ในบทความเชิงวิชาการทั่วไปมีดังต่อไปนี้

1. Mini-operation rule of fuzzy implication

   Rc: $\mu_{A\to B}(u,v) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(v)\}$

2. Product-operation rule of fuzzy implication

   Rp: $\mu_{A\to B}(u,v) = \mu_A(u).\mu_B(v)$

3. Arithmetic rule of fuzzy implication]

   Ra: $\mu_{A\to B}(u,v) = \min\{1, 1-\mu_A(u)+\mu_B(v)\}$

4. Maxmin rule of fuzzy implication

   Rm: $\mu_{A\to B}(u) = \max\{\min\{\mu_A(u), \mu_B(v)\}, 1-\mu_A(u)\}$

5. Standard sequence of fuzzy implication

$$\text{Rs:}\ \mu_{A\to B}(u,v) = \begin{cases} 1; \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ 0; \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

6. Boolean fuzzy implication

   Rb: $\mu_{A\to B}(u,vu) = \max\{1-\mu_A(u), \mu_B(v)\}$

7. Goguen's fuzzy implication

$$\text{R}\Delta\text{:}\ \mu_{A\to B}(u,v) = \begin{cases} 1; \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \dfrac{\mu_B(v)}{\mu_A(u)}; \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

4. กฎการผสม (Compositional Rule)

กำหนดให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน U x V และ V x W ตามลำดับ เราสามารถหาความสัมพันธ์ผสมระหว่าง R และ S ได้ ในทำนองเดียวกับ การหาฟังก์ชันผสม (Composite Function) ที่มีนิยามบนเซตธรรมดา (ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ f(x)=cos(x), g(y)=2*y เราจะได้ว่า f(g(y))=f(2*y)=cos(2*y) เป็นฟังก์ชันผสมระหว่าง f และ g

นิยาม 3.30 การผสมแบบซูปรีมัม-ที หรือซูปรีมัม-สตาร์ (Sup-t Composition, Sup-star

Composition) ของ R และ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซี ซึ่งมีสัญลักษณ์เป็น $R \circ S$ และ ได้จากการผสมความสัมพันธ์ R และ S โดยการใช้กฎการผสมซึ่งทำให้ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกมีค่าดังสมการต่อไปนี้ [9]

$$\mu_{RoS} = \sup_{v \in V}\left[\mu_R(u,v) * \mu_S(v,w)\right]$$

โดย $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ และ * เป็นตัวดำเนินการแบบ Triangular Norm แบบต่าง ๆซึ่งมีนิยามในหัวข้อ 2.3

เราจะเห็นว่า $R \circ S$ เป็นฟัซซีเซตที่มีนิยามใน UxW, ในกรณีที่ S เป็นเพียงฟัซซีเซต (มีนิยามใน Universe of Discourse ธรรมดา ไม่ใช่ในผลคูณของ Universe of Discourse เหมือนกับความสัมพันธ์ฟัซซี) ใน V ดังนั้น $\mu_S(v,w)$ จะกลายเป็น $\mu_S(v)$ และ $\mu_{R.S}(u,w)$ จะกลายเป็น $\mu_{R.S}(u)$ การผสมจะมีความหมายเหมือนกับการหาอิเมจ (Image) ของฟังก์ชันธรรมดา แต่ในกรณีของฟัซซีเซตจะเป็นการหาผลของการแปลง (ที่นิยามโดยความสัมพันธ์ R) ของฟัซซีเซต S นั่นเอง นอกจากการผสมแบบซูปรีมัม-ทีซึ่งเป็นการผสมแบบที่ใช้มากที่สุดแล้วก็ยังมีการผสมแบบอื่นๆอีกเช่นเดียวกัน กำหนดให้ T เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้จากการผสมความสัมพันธ์ R และ S เข้าด้วยกันเราจะได้นิยามของการผสมแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ [4]

การผสมแบบอินฟีมัมเอส (Inf-s Composition)

$$\mu_T(u,w) = \inf_{v \in V}\left[\mu_R(u,v) + \mu_S(v,w)\right]$$

การผสมแบบทีเอส (T-S Composition)

$$\mu_T(u,w) = \underset{v \in V}{*}\left[\mu_R(u,v) + \mu_S(v,w)\right]$$

การผสมแบบเอสที (S-T Composition)

$$\mu_T(u,w) = \underset{v \in V}{+}\left[\mu_R(u,v) * \mu_S(v,w)\right]$$

<u>การให้เหตุผลโดยประมาณ (Approximate Reasoning)</u>

เนื้อหาในหัวข้อนี้ครอบคลุมถึงการนำหลักการของ ฟัซซีลอจิก ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อที่แล้วเพื่อนำมาประยุกต์ใช้งานในการให้เหตุผลเลียนแบบมนุษย์ที่เรียกว่า<u>การให้เหตุผลโดยประมาณ</u> การให้เหตุผลโดยประมาณนี้มีรูปแบบที่สำคัญ 2 รูปแบบคือ แบบ GMP (Generalized Modus Ponens) และ แบบ GMT (Generalized Modus Tollens) โดยในการใช้งานทางวิศวกรรมทั่วไปจะใช้แบบ GMP เป็นหลัก ในการนำหลักการของฟัซซีลอจิกมาใช้ในการให้เหตุผลโดยประมาณเรายังต้องคำนึงถึงสิ่งต่าง ๆ อีกหลายประการ ซึ่งมีเนื้อหาในส่วนนี้ ได้แก่ ฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันซึ่งเป็นกฎในการสร้างความสัมพันธ์ในลักษณะของเงื่อนไขระหว่างข้อมูลขาเข้าและขาออกของกฎ

การให้เหตุผลแต่ละข้อ ตัวเชื่อม AND สำหรับเชื่อมข้อมูลขาเข้าหลายตัวในส่วนต้นของกฎการให้เหตุผลในกรณีที่มีข้อมูลขาเข้ามากกว่าหนึ่งตัว ตัวเชื่อม ALSO สำหรับเชื่อมประโยคเงื่อนไขหลายประโยคเข้าด้วยกัน และตัวดำเนินการผสมซึ่งใช้สำหรับหาผลลัพธ์ที่ได้จากการให้เหตุผลจากข้อมูลขาเข้าที่กำหนดให้และความสัมพันธ์ในลักษณะเงื่อนไขที่เราได้สร้างขึ้นมา

1 การให้เหตุผลโดยประมาณ (Approximate Reasoning)

นิยาม 3.31 การให้เหตุผลโดยประมาณ เป็นวิธีการหาผลสรุป (Conclusion) จากความรู้ (Knowledge) ที่กำหนดให้ โดยที่ทั้งผลสรุปและความรู้ดังกล่าวมีความไม่แน่นอนและความไม่แม่นยำเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยมากเป็นการหาผลสรุปจากความรู้ที่แสดงในรูปของประโยคที่เป็นภาษาธรรมชาติ เรามักใช้แนวความคิดเกี่ยวกับตัวแปรเชิงภาษาในทฤษฎีฟัซซีลอจิกเพื่อทำการให้เหตุผลโดยประมาณ [7]

การให้เหตุผลโดยประมาณซึ่งเกี่ยวข้องกับความไม่แน่นอน ความไม่แม่นยำ เป็นการให้เหตุผลแบบที่มนุษย์เราใช้ในการทำงานต่างๆในชีวิตประจำวัน หรือ อาจกล่าวโดยทั่วไปได้ว่าเป็นการ

ทำงานที่เกี่ยวข้องกับการตัดสินใจอย่างมีเหตุผลในสภาวะแวดล้อมที่มีความสลับซับซ้อน และมีความไม่แน่นอน ความสามารถในการตัดสินใจในสภาวะแวดล้อมดังกล่าวเป็นความสามารถพิเศษของมนุษย์ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ไม่มี เพราะการตัดสินใจของคอมพิวเตอร์เป็นการตัดสินใจตามหลักตรรกศาสตร์ดั้งเดิม ซึ่งข้อมูลและกฎการตัดสินใจจะต้องมีความแน่นอนและแม่นยำ เราพบว่าโดยทั่วไปสถานการณ์ที่จำเป็นต่อการตัดสินใจมักมีความไม่แน่นอนและความไม่แม่นยำเข้ามาเกี่ยวข้องอยู่ด้วยเสมอ ทำให้เราไม่สามารถใช้ประโยชน์จากตรรกศาสตร์แบบธรรมดามาช่วยคอมพิวเตอร์ในการตัดสินใจ ดังนั้นการให้เหตุผลโดยประมาณจึงเป็นแนวคิดที่มีประโยชน์ในการช่วยให้เครื่องคอมพิวเตอร์สามารถตัดสินใจโดยเลียนแบบการตัดสินใจของมนุษย์ในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม

2. กฎการนิรนัยฟัซซี (Fuzzy Inference Rule)

การให้เหตุผลโดยประมาณที่เราสนใจในงานวิจัยนี้อยู่ในรูปแบบของการนิรนัย หรือการหาผลสรุปในรูปของข้อมูลขาออก (Output Data) จากความรู้ที่มีอยู่แล้วสองประการ ได้แก่ความรู้เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้า (Input Data) ซึ่งเป็นข้อมูลที่เราได้มาโดยวิธีการต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น

การวัดข้อมูลจากสภาวะแวดล้อมจริงหรือวิธีการอื่นๆและความรู้ที่เรามีเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้าและข้อมูลขาออก(Input-Output Relationship)ซึ่งแสดงในรูปแบบของประโยคเงื่อนไข IF-THEN คือ

IF (ส่วนต้น) THEN (ส่วนปลาย)

โดยส่วนต้น (Antecedent) และส่วนปลาย (Consequent) เป็นประโยคที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลขาเข้าหรือข้อมูลขาออกอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยขึ้นอยู่กับรูปแบบการนิรนัยฟัซซี (Fuzzy Inference) ซึ่งมี 2 รูปแบบดังจะได้กล่าวต่อไป

ประโยคเงื่อนไขดังกล่าวจะถูกนำมาใช้ในการให้เหตุผลโดยประมาณ โดยถ้าส่วนต้นเป็นจริง (ในกรณีฟัซซีลอจิกจะมีระดับของความจริงที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1) เราจะสามารถนิรนัยได้ผลลัพธ์ตามที่กำหนดไว้ในส่วนปลาย (กำหนด $p \rightarrow q$ ถ้า p เป็นจริง จะสรุปได้ว่า q เป็นจริง) และนอกจากนี้แล้วตามหลักตรรกศาสตร์เราจะได้ว่าถ้าส่วนปลายไม่เป็นจริง (โดยมีระดับความไม่จริงอยู่ระหว่าง 0 และ 1 เช่นเดียวกัน) ในกรณีนี้เราก็จะสามารถวินิจฉัยได้นิเสธ (Negation) ของส่วนต้นเป็นผลลัพธ์แทน (กำหนด $p \rightarrow q$ ซึ่งสมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$, ถ้า q เป็นเท็จจะสรุปได้ว่า p เป็นจริง)

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า การให้เหตุผลโดยประมาณ โดยอาศัยประโยคเงื่อนไข IF-THEN ดังกล่าวมีใช้กัน 2 รูปแบบโดยได้แก่ แบบ Generalized Modus Ponen (GMP) และ แบบ Generalized Modus Tollen (GMT) ซึ่งมี ลักษณะการนิรนัยหาผลลัพธ์จากความรู้ที่กำหนดให้ 2 ชุดดังแสดงให้เห็นดังนี้

1. Generalized Modus Ponen (GMP)

ความรู้ 1 :u is A'

ความรู้ 2 :IF u is A THEN v is B

ผลลัพธ์ :v is B'

2. Generalized Modus Tollen (GMT)

ความรู้ 1 :v is B'

ความรู้ 2 :IF u is A THEN v is B

ผลลัพธ์ :u is A'

โดยที่ A, A', B และ B' เป็นฟัซซีเซตที่ใช้เป็นค่าเชิงภาษา ของตัวแปรเชิงภาษา u และ v ซึ่งมีนิยามใน UOD U สำหรับ A, A', และ V สำหรับ B, B' ตามลำดับ ประโยคที่อยู่เหนือเส้น

เป็นประโยคที่เกี่ยวข้องกับความรู้ซึ่งมีอยู่สองประโยคคือ ประโยคที่เกี่ยวข้องกับความรู้เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้า (u ในกรณี GMP, และ v ในกรณี GMT) และ ประโยคที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้า และ ข้อมูลขาออก ในขณะที่ส่วนที่อยู่ใต้เส้นเป็นผลลัพธ์ที่เราต้องการสรุปจากประโยคความรู้ทั้งสองประโยค โดยอยู่ในรูปข้อมูลขาออก (v ในกรณี GMP และ u ในกรณี GMT)

การให้เหตุผลในลักษณะดังกล่าว เป็น การให้เหตุผลที่กว้างขวางครอบคลุมรูปแบบการให้เหตุผลในลักษณะต่าง ๆ อีกมากมาย การศึกษาการให้เหตุผลในลักษณะของ GMP และ GMT จึงมีประโยชน์มากต่อการนำหลักการการให้เหตุผลโดยประมาณไปประยุกต์ใช้งานในด้านต่าง ๆ

สำหรับตรรกศาสตร์แบบดั้งเดิม การนิรนัยหาผลสรุปจากความรู้ที่มีอยู่ทำได้ตรงไปตรงมา แต่ สำหรับกรณีฟัซซีลอจิกซึ่งมีระดับความจริงหรือระดับความเป็นสมาชิกซึ่งมีค่าต่าง ๆ มากกว่า 2 ค่านั้น การนิรนัยหาผลสรุปจากความรู้สามารถกระทำได้หลายรูปแบบมาก โดยแต่ละแบบอาจให้ผลลัพธ์ที่สมเหตุสมผลต่างกันไป ในการทดสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการนิรนัยในวิธีต่าง ๆ นั้น เรากำหนดประโยคเงื่อนไข IF u is A THEN v is B เป็นความรู้ที่เรามีเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเข้าและข้อมูลออก และตั้งบรรทัดฐานซึ่งเกี่ยวข้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากการนิรนัย โดยอาศัยความรู้จากประโยคเงื่อนไขดังกล่าว กับความรู้เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้าที่ต่างไปจากที่ปรากฏในประโยคเงื่อนไขบรรทัดฐานดังกล่าวเป็นกฎสามัญสำนึกในการให้เหตุผลที่มนุษย์ใช้กันทั่วไป โดยแสดงในตารางที่ 3.1 และตารางที่ 3.2 สำหรับ GMP และ GMT ตามลำดับ ตัวอย่างบรรทัดฐานนี้เช่น บรรทัดฐาน 2.1 ซึ่งมีข้อมูลเข้าคือ u is Very A ทำให้ได้ผลลัพธ์ เป็น v is Very B ซึ่งก็สอดคล้องกับสามัญสำนึกของเรา เป็นต้น หลังจากนั้นจึงทำการทดสอบว่าการนิรนัยโดยใช้วิธีใดบ้างที่สอดคล้องกับการให้เหตุผลโดยสามัญสำนึกของมนุษย์ การที่เราใช้สามัญสำนึกของมนุษย์เป็นหลักในการประเมินการนิรนัยแบบต่าง ๆ เพราะการให้เหตุผลโดยประมาณเป็นวิธีที่ช่วยให้เครื่องคอมพิวเตอร์สามารถเลียนแบบการตัดสินใจแทนมนุษย์ บรรทัดฐานที่ใช้ในการตัดสินวิธีการให้เหตุผลโดยประมาณ จึงควรเป็นบรรทัดฐานที่สอดคล้องกับการให้เหตุผลโดยสามัญสำนึกของมนุษย์นั้นเอง

เราสามารถตั้งข้อสังเกตุจากตารางที่ 3.1 และ 3.2 ได้หลายประการ ตัวอย่าง เช่น ประการแรกในกรณีที่ประโยค “u is A” และประโยค “v is B” มีความสัมพันธ์ที่ไม่แน่นหนามากนัก เราอาจอนุโลมการให้เหตุผลแบบที่ปรากฏในบรรทัดฐาน 2.2 และ 3.2 ได้ นั่นคือถ้ามีความรู้ว่า u is Very A ควรสรุปออกมาได้ว่า v is Very B แต่ถ้าสรุปออกมาได้ผลลัพธ์เป็น v is B ก็อนุโลมว่าวิธีการนิรนัยนั้นพอใช้ได้, ในประการที่ 2 ความหมายที่ได้จากจากบรรทัดฐาน 4.2 จะเหมือนกับประโยค IF u is A THEN v is B, ELSE v is Not B คือมีความรู้ว่า u is A สรุปผลได้

เป็น v is B และถ้ามีความรู้ว่า u is Not A ก็สรุปผลได้เป็น v is Not B ซึ่งแม้ว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวจะไม่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ แต่ก็เป็นการให้เหตุผลตามสามัญสำนึกที่มนุษย์เราใช้กันประจำดังนั้นเรา จึงยอมรับบรรทัดฐานดังกล่าวได้ และ เราก็ให้เหตุผลในลักษณะเดียวกันในการยอมรับบรรทัดฐาน 8.2

ตารางที่ 3.1 บรรทัดฐานสำหรับการให้เหตุผลแบบ GMP [9]

บรรทัดฐาน	u is A'	v is B'
1.1	u is A	v is B
2.1	u is Very A	v is Very B
2.2	u is Very A	v is B
3.1	u is More or Less A	vis More or Less B
3.2	u is More or Less A	vis B
4.1	u is Not A	v is unknown
4.2	u is Not A	vis Not B

ตารางที่ 3.2 บรรทัดฐานสำหรับการให้เหตุผลแบบ GMT [9]

บรรทัดฐาน	v is A'	u is B'
5	v is Not B	u is Not A
6	v is Not very B	u is Not very A
7	v is Not More or Less A	u is Not More or Less A
8.1	v is B	u is unknown
8.2	v is B	u is A

3. ฟัซซีอิมพลิเคชันฟังก์ชัน (Fuzzy Implication Function)

ประโยคเงื่อนไข IF-THEN แต่ละประโยคถูกกำหนดโดยฟัซซีเซตของข้อมูลขาเข้าและฟัซซีเซตของข้อมูลขาออก ดังนั้น เราจึงสามารถแทนประโยคเงื่อนไขแต่ละประโยคได้ในรูปของความสัมพันธ์ฟัซซีที่สร้างขึ้นมาจากฟัซซีเซตทั้งสอง เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีดังกล่าวได้หลายวิธีโดยการเลือกใช้ตัวดำเนินการสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีแบบต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นตัวดำเนินการ ฟัซซีคอนจังชัน, ฟัซซีดิสจังชัน, หรือ ฟัซซีอิมพลิเคชัน

ตัวดำเนินการที่ใช้สร้างความสัมพันธ์ฟัซซีดังกล่าวนี้ เรารวมเรียกว่า ฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันเพื่อแสดงให้เห็นว่า เป็นฟังก์ชันที่ใช้ ในการสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีเพื่อใช้สำหรับนิรนัย

ความจริง จากหัวข้อในฟัซซีอิมพลิเคชันฟังก์ชันแต่ละประเภทเราก็ยังสามารถเลือกใช้ Triangular Norm และ Triangular Co-norm แบบต่าง ๆ กันได้อีกทำให้การตีความหมายของประโยคเงื่อนไขในรูปของความสัมพันธ์ฟัซซีมีรูปแบบต่าง ๆ กันมากมายดังต่อไปนี้ [9]

1. Mini-operation Rule of Fuzzy Implication
2. Product-operation Rule of Fuzzy Implication
3. Arithmetic Rule of Fuzzy Implication
4. Maxmin Rule of Fuzzy Implication
5. Standard Sequence of Fuzzy Implication
6. Boolean Fuzzy Implication
7. Goguen's Fuzzy Implication

หลังจากสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีแล้ว เราจะสามารถทำการนิรนัยหาผลลัพธ์ในรูปของฟัซซีเซตขาออก (B' สำหรับ GMP, A' สำหรับ GMT) จากข้อมูลขาเข้าในรูปของฟัซซีเซตขาเข้า (A' สำหรับ GMP, B' สำหรับ GMT) ได้ โดยใช้กฎการรวม ซึ่งโดยทั่วไปเราจะใช้การรวมแบบซูปรีมัมทีเป็นหลัก ความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้มาจากฟัซซีอิมพลิเคชันฟังก์ชันแต่ละแบบทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากข้อมูลเข้าชุดเดียวกันมีค่าแตกต่างกันออกไปนั่นคือ จะมีคุณสมบัติในการตีความหมายของประโยคเงื่อนไขที่แตกต่างกัน ในการทดสอบคุณสมบัติการตีความหมายของฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันแต่ละชนิดเราจะทำการทดสอบความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้กับการให้เหตุผลทั้งแบบ GMP และ GMT

จากประโยคเงื่อนไข IF u=A THEN v=B ในกรณี GMP เราจะตรวจสอบผลลัพธ์ B' ที่ได้จากสมการ $B'=A'\circ R$ โดย A' มีค่าต่าง ๆ กัน คือ A'=A, Very A, More or Less A และ $A'=\bar{A}$ R แทนความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้จากวิธีต่าง ๆ กัน และ $\circ$ แทนตัวดำเนินการผสมซูปรีมัม-มินิมัม ทำนองเดียวกันในกรณี GMT เราจะตรวจสอบผลลัพธ์ A' ที่ได้จากสมการ$A'=R\circ B$ สำหรับ $B'=\bar{B}$, Not Very B, Not More of Less B และ B (ดูตัวอย่างการคำนวณได้ในภาคผนวก ก.)

ดังที่ได้กล่าวมาในข้างต้น เราจะใช้บรรทัดฐานที่แสดงในตาราง 3.1 และ 3.2 มาเปรียบเทียบกับผลการทดสอบว่า ความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้จากฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันแบบใดที่ให้ผลการนิรนัยที่สอดคล้องกับบรรทัดฐานที่กำหนดไว้มากที่สุด และสอดคล้องกับบรรทัดฐานใดบ้างข้อมูลที่ได้ถูกสรุปไว้ในตารางที่ 3.3 โดยเครื่องหมาย O หมายถึงความสอดคล้องกับบรรทัดฐาน และเครื่องหมาย $\times$ หมายถึงความไม่สอดคล้อง

พิจารณากฎการนิรนัยแบบ Rc และ Rp ซึ่งได้มาจากตัวดำเนินการฟัซซีคอนจังชันโดย

ใช้ตัวดำเนินการอินเตอร์เซคชันและตัวดำเนินการผลคูณพีชคณิตเป็น Triangular Norm ตามลำดับ ถ้าเป็นตรรกศาสตร์แบบดั้งเดิม เราต้องกล่าวว่ากฎการนิรนัยทั้งสองแบบนี้ไม่เหมาะสมที่จะเป็นกฎที่จะใช้ในการนิรนัย (ใช้ตัวดำเนินการอินเตอรเซคชันหรือผลคูณพีชคณิตระหว่างฟัซซีเซตทั้งสองชุดโดยเปรียบได้กับ $p \wedge q$ ในขณะที่การให้เหตุผลแบบนิรนัยควรมีลักษณะของ $p \rightarrow q$ หรือ $p \vee q$) แต่จากการทดลองใช้ในการให้เหตุผลโดยประมาณ พบว่าให้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมในการวินิจฉัยความจริงในรูปแบบGMP จึงสามารถใช้ได้ในการประยุกต์ใช้ในการให้เหตุผลโดยประมาณในหลาย ๆ กรณีได้

จากข้อมูลในตารางพบว่ากฎการนิรนัยแบบ Rm, Rb, RΔ และ Ra ไม่เหมาะสมสำหรับการให้เหตุผลโดยประมาณ เพราะผลลัพธ์ที่ได้ไม่สอดคล้องกับบรรทัดฐาน ส่วนกฎการนิรนัย Rs เป็นรูปแบบที่ให้ผลลัพธ์ที่สมเหตุสมผลสอดคล้องกับบรรทัดฐานเป็นอย่างมาก จึงเหมาะอย่างยิ่งสำหรับใช้ในการให้เหตุผลโดยประมาณทั้งแบบ GMP และ GMT

สำหรับกรณีพิเศษในการประยุกต์การให้เหตุผลโดยประมาณมาใช้กับการควบคุมกระบวนการ จะอยู่ในรูปของการนิรนัยหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมจากสัญญาณเข้าที่วัดได้

ตารางที่ 3.3 ผลการทดสอบฟัซซีอิมพลีเคชันแบบต่าง ๆ [9],[11]

บรรทัดฐาน	Rc	Rp	Ra	Rm	Rs	RΔ	Rb
1	O	O	×	×	O	×	×
2.1	×	×	×	×	O	×	×
2.2	O	O	×	×	×	×	×
3.1	×	×	×	×	O	×	×
3.2	O	O	×	×	×	×	×
4.1	×	×	O	O	O	O	O
4.2	×	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	O	×	×
6	×	×	×	×	O	×	×
7	×	×	×	×	O	×	×
8.1	×	×	O	×	O	O	O
8.2	O	O	×	×	×	×	×

ประโยคเงื่อนไขที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้า (สัญญาณเข้า) และ ข้อมูลขาออก (สัญญาณควบคุม) มีลักษณะเป็น

IF (ประโยคเงื่อนไขของสัญญาณเข้า) THEN (กำหนดค่าสัญญาณควบคุมเพื่อใช้ควบคุม)

สัญญาณควบคุมจะถูกนำไปใช้ในการควบคุมกระบวนการโดยตรง โดยไม่มีการนำไปเป็นข้อมูลขาเข้าในการให้เหตุผลโดยประมาณซ้ำอีกครั้ง ดังนั้นการนิรนัยความจริงที่ใช้ในการประยุกต์ใช้การควบคุมกระบวนการจึงมีลักษณะในรูปแบบของ GMP ดังนั้นในกฎการนิรนัยที่สามารถให้ผลลัพธ์การนิรนัยแบบ GMP ได้ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมกระบวนการได้เสมอ จากข้อมูลข้างต้นเราพบว่ากฎการนิรนัยที่สามารถนำมาใช้กับงานการควบคุมกระบวนการมีอยู่ 3 กฎด้วยกันคือ Rc, Rp และ Rs แม้ว่า Rs จะให้ผลลัพธ์ที่สมเหตุสมผลดีกว่าบ้าง แต่ก็ต้องอาศัยการคำนวณที่ค่อนข้างมาก ดังนั้นในงานการควบคุมกระบวนการทั่วไปเราจึงนิยมใช้กฎการนิรนัยแบบ Rc หรือ Rp ในการนิรนัยเป็นหลัก

ในกรณีที่ข้อมูลขาเข้าประกอบด้วยตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว เราจะใช้ตัวดำเนินการเชื่อมประโยค AND เพื่อใช้รวมประโยคย่อย ๆ ในส่วนต้น (Antecedent) ของประโยคเงื่อนไขเข้าด้วยกัน เช่น กรณีที่มีข้อมูลขาเข้าสองชุดเราอาจได้ประโยคเงื่อนไขในรูปของ IF (u^1 is A^1 AND u^2 is A^2) THEN ... การใช้ตัวดำเนินการ AND ดังกล่าวก็คือการรวมฟัซซีเซตของตัวแปรขาเข้าทุกตัวเข้าด้วยกันให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ฟัซซี ซึ่งก็คือฟัซซีเซตที่มี UOD เป็น ปริภูมิผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product Space) ของ UOD ทุกเซตที่อยู่ในส่วนต้นของประโยคเงื่อนไข สำหรับประโยคเงื่อนไขข้างต้น ข้อมูลในส่วนต้นของประโยคเงื่อนไขจะถูกตีความหมายเป็นฟัซซีเซตในปริภูมิผลคูณ U^1 x U^1 ซึ่งมีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกกำหนดโดย

$$\mu_{A^1 x A^2}(u^1,u^2) = \min \{\mu_{A^1}(u^1), \mu_{A^2}(u^2)\}$$

หรือ

$$\mu_{A^1 x A^2}(u^1,u^2) = \mu_{A^1}(u^1).\mu_{A^2}(u^2)$$

โดย U^1 และ U^2 เป็น UOD ของฟัซซีเซต A^1 และ A^2 ตามลำดับ

นอกจากนี้ ในกรณีที่เรามีประโยคเงื่อนไขหลายประโยค เราจะใช้ตัวเชื่อมประโยค ALSO ในการเชื่อมประโยคเงื่อนไขแต่ละประโยคเข้าด้วยกัน ตัวดำเนินการที่จะใช้เป็นตัวดำเนินการ ALSO ได้ต้องมีคุณสมบัติพื้นฐานคือคุณสมบัติการสลับที่และคุณสมบัติการจัดหมู่ เพื่อให้การสลับที่และการจัดหมู่ของประโยคเงื่อนไขไม่ควรมีผลใด ๆ ต่อผลลัพธ์ที่เราควรจะได้ ดังนั้นเราจึงมักใช้ตัวดำเนินการ Triangular Norm หรือ Triangular Conorm เป็นตัวเชื่อมประโยค ALSO

5. ตัวดำเนินการผสม (Compositional Operator)

ตัวดำเนินการผสมเป็นตัวดำเนินการที่ใช้หาค่าผลลัพธ์คือข้อมูลขาออก (ในรูปของฟัซซีเซตของตัวแปรออก) จากข้อมูลขาเข้า (ฟัซซีเซตของตัวแปรเข้า) และ ประโยคเงื่อนไข (ความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้จากฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันแบบต่าง ๆ) แต่ละประโยคที่กำหนดให้ โดยทั่วไปเราใช้ตัวดำเนินการรวมเป็นแบบซูปรีมัม-ที โดยที่หมายถึงตัวดำเนินการ Triangular Norm ใด ๆ เช่น อินเตอร์เซคชัน, ผลคูณเชิงพีชคณิต ฯลฯ ซึ่งเลือกมาให้เหมาะสมกับการประยุกต์ใช้งาน ในเอกสารวิชาการต่าง ๆ เราจะพบตัวดำเนินการที่ใช้อยู่รวม 4 ชนิด ในการให้เหตุผลโดยประมาณนั่นคือ [9]

1. ตัวดำเนินการ Sup-Min
2. ตัวดำเนินการ Sup-Product
3. ตัวดำเนินการ Sup-Bounded Product
4. ตัวดำเนินการ Sup-Drastic Product

ในการประยุกต์ใช้การให้เหตุผลโดยประมาณในการควบคุมกระบวนการ เรามักใช้ตัวดำเนินการแบบ Sup-Min และแบบ Sup-Product มากที่สุด เนื่องมาจากความสะดวกรวดเร็วในการคำนวณ ซึ่งมีผลอย่างมากต่อประสิทธิภาพของการควบคุม

5. กลไกการนิรนัยความจริง (Inference Mechanism)

ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น กลไกการนิรนัยความจริงสำหรับการให้เหตุผลโดยประมาณที่ใช้ในการควบคุมกระบวนการมีรูปแบบที่ง่ายกว่าที่ใช้ในระบบผู้เชี่ยวชาญ (Expert System) ทั่วไปเป็นอย่างมาก เพราะเป็นการให้เหตุผลแบบ GMP เพียงระดับเดียว ในขณะที่ในระบบผู้เชี่ยวชาญอาจมีการให้เหตุผลซ้อน ๆ กันหลายครั้ง

ฐานกฎ (Rule Base) หรือ ชุดของกฎที่ใช้ในการควบคุมกระบวนการ อยู่ในรูปของประโยคเงื่อนไขหลายประโยคที่ต้องใช้ร่วมกัน โดยประโยคเงื่อนไขแต่ละประโยคเป็นกฎย่อยที่ใช้ในการควบคุม ฐานกฎ ดังกล่าวมักได้มาจากความรู้ของผู้เชี่ยวชาญ และอยู่ในรูปของระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (Multi-Input-Multi-Output : MIMO System) คือ

$R = \{R_{MIMO1}, R_{MIIMO2}, \ldots, R_{MIMOn}\}$

R_{MIMOi} แทนประโยคเงื่อนไข :

IF (u^1 is A_i1 AND ... AND u^p is A_ip) THEN (v^1 is B_i1,..., v^q is B_iq)

โดยข้อมูลในส่วนต้นของ R_{MIMOi}(MIMO:Multi-Input-Multi-Output)เป็นฟัซซีเซต $A_i^1 \times \ldots \times A_i^p$ ในปริภูมิผลคูณ $U^1 \times \ldots \times U^p$ และผลลัพธ์เป็นการควบคุม q ชุด โดยในแต่ละชุดแทนสัญญาณควบคุมแต่ละสัญญาณ ดังนั้นประโยคเงื่อนไข $R_{MIMO\,i}$ อาจแสดงได้ในรูปของความสัมพันธ์ฟัซซีดังต่อไปนี้

$$R_{MIMOi} : (A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to (B_i^1 \times \ldots \times B_i^q)$$

ซึ่งจากนั้นเราสามารถแสดงได้ว่าฐานกฎ R สามารถแสดงได้เป็นยูเนียนของ

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} R_{MIMOi} \right\} \\
&= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \left[(A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to (B_i^1 + B_i^q) \right] \right\} \\
&= \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \left[(A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to B_i^1 \right], \right. \\
&\qquad \bigcup_{i=1}^{n} \left[A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to B_i^2 \right], \ldots \\
&\qquad \left. \bigcup_{i=1}^{n} \left[(A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to B_i^q \right] \right\} \\
&= \left\{ \bigcup_{k=1}^{q} \bigcup_{i=1}^{n} \left[(A_i^1 \times \ldots \times A_i^p) \to B_i^k \right] \right\} \\
&= \left\{ RB_{MISO}^1, RB_{MISO}^2, \ldots, RB_{MISO}^q \right\}
\end{aligned}$$

ซึ่งหมายความว่าฐานกฎ R สามารถแตกเป็นฐานกฎย่อย ๆ RM^i_{MISO} โดยฐานกฎย่อยแต่ละฐานประกอบด้วยประโยคเงื่อนไข n ประโยคโดยมีข้อมูลขาเข้าชุดเดียวกับของฐานกฎ R แต่มีข้อมูลขาออกเพียงตัวเดียวในแต่ละฐานกฎย่อย (MISO:Multi-Input-Single-Output) โครงสร้างกฎโดยทั่วไปของระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก จึงสามารถแสดงได้เป็นชุดของระบบหลายสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกรวมกันหลายชุด คือ

$$R = \{ RB^1_{MISO}, RB^2_{MISO}, \ldots, RB^q_{MISO} \}$$

โดย RB^k_{MISO} แสดงกฎ IF (u^1 is A_i^1 AND..., AND u^p is A_i^p) THEN (v^k is Bi^k)

i = 1,2,...n

พิจารณารูปแบบทั่วไปของระบบหลายสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกในกรณีระบบ

ฟัซซีสองสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก

สัญญาณเข้า : u^1 is $A^{1'}$ AND u^2 is $A^{2'}$

$$
\begin{array}{rl}
R_1: & \text{IF } u^1 \text{ is } A_1^1 \text{ AND } u^2 \text{ is } A_1^2 \text{ THEN } v \text{ is } B_1 \\
\text{ALSO } R_1: & \text{IF } u^1 \text{ is } A_2^1 \text{ AND } u^2 \text{ is } A_2^2 \text{ THEN } v \text{ is } B_2 \\
& \ldots \\
& \ldots \\
\text{ALSO } R_1: & \text{if } U^1 \text{ IS } A_n^1 \text{ AND } u^2 \text{ is } A_n^2 \text{ THEN } v \text{ is } B_2 \\
\hline
& v \text{ is } B'
\end{array}
$$

โดย u^1, u^2, v เป็นตัวแปรเชิงภาษาที่ใช้แสดงตัวแปรสภาวะ และตัวแปรควบคุมตามลำดับ A_i, B_i และ C_i เป็นค่าเชิงภาษาของตัวแปรเชิงภาษา u^1, u^2, v ใน Universe of Discourse U^1, U^2, V ตามลำดับ โดย i = 1, 2,..., n

กฎการควบคุมฟัซซี IF (u^1 is A_i^1 AND u^2 is A_i^2) THEN (v is B_i) จะถูกแปลงให้เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีโดยการใช้ฟัซซีอิมพลิเคชันฟังก์ชันทำให้ได้ผลลัพธ์เป็น R_i ซึ่งมีนิยามเป็น

$$
\begin{aligned}
\mu_{R_i} &= \mu_{A_i^1 AND\, A_i^2 \to B_i)}(u,v,w) \\
&= \left[\mu_{A_i^1}(u^1) AND \mu_{A_i^2}(u^2)\right] \to \mu_{B_i}(v)
\end{aligned}
$$

โดย A_i^1 AND A_i^2 เป็นฟัซซีเซต $A_i^1 \times A_i^2$ ใน $U^1 \times U^2$; $R_i = (A_i^1 \text{ AND } A_i^2) \to B_i$ เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีใน $U^1 \times U^2 \times V$ และ $\to$ เป็นฟัซซีอิมพลิเคชันฟังก์ชันชนิดที่เราใช้

ผลลัพธ์ B_i' ถูกนิรนัยมาจาก กฎการผสมซูปรีมัม-ที (Sup-T) ระหว่าง ข้อมูลขาเข้า $A^{1'}$,$A^{2'}$ และความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้จากฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชัน, ตัวเชื่อมประโยค AND และตัวเชื่อมประโยค ALSO

พิจารณากรณีพิเศษในการอิงความจริง โดยการใช้ตัวดำเนินการผสม ซูปรีมัม-มินิมัม (Sup-Min) ซึ่งแสดงโดย $\circ$ และใช้ตัวดำเนินการยูเนียนเป็นตัวเชื่อมประโยค ALSO เราพบว่าการควบคุมที่ได้จากฐานกฎรวมจะเหมือนกับที่ได้จากผลรวมของการควบคุมที่ได้จากกฎย่อยแต่ละกฎ โดยคุณสมบัติดังกล่าวนี้ยังใช้ได้กับ ตัวดำเนินการ ซูปรีมัม-โปรดักท์ (Sup-Product) อีกด้วย ซึ่งสามารถดูรายละเอียดการพิสูจน์ได้ในภาคผนวก ข.

<u>ระบบฟัซซีลอจิก (Fuzzy Logic System)</u> [11]

ระบบฟัซซี เป็นระบบที่นำหลักการของฟัซซีลอจิก และการให้เหตุผลโดยประมาณเพื่อมาใช้งานในด้านต่าง ๆ ระบบฟัซซีที่ใช้งานกันทั่วไปมีหลายลักษณะ แต่ที่แพร่หลายมากที่สุดเป็น

ระบบฟัซซีแบบที่มีตัวแปลงฟัซซี และตัวแปลงกลับฟัซซี สิ่งที่เราให้ความสนใจเป็นพิเศษในหัวข้อนี้ได้แก่การออกแบบระบบฟัซซี ซึ่งจะต้องคำนึงถึงองค์ประกอบต่าง ๆ ของระบบฟัซซีทั้งระบบ ทั้งส่วนที่เกี่ยวกับการให้เหตุผลโดยประมาณ ได้แก่ ฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชัน ตัวเชื่อมประโยค ตัวดำเนินการผสม ฯลฯ และส่วนที่ไม่เกี่ยวกับการให้เหตุผลโดยประมาณ ได้แก่ ตัวแปลงฟัซซี ตัวแปลงกลับฟัซซี การแบ่งช่วงของข้อมูล การสร้างฐานกฎ เป็นต้น

1. <u>ประเภท และส่วนประกอบของระบบฟัซซีลอจิก</u>

ระบบฟัซซีลอจิกหรือเรียกสั้น ๆ ว่า ระบบฟัซซี เป็นระบบที่ทำงานโดยอาศัยหลักการของฟัซซีลอจิก และ การให้เหตุผลโดยประมาณ เป็นการนำหลักการทั้งสองมาช่วยในการนิรนัยความจริงจากความรู้เกี่ยวกับข้อมูลเข้า และ ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง ข้อมูลขาเข้ากับข้อมูลขาออก เพื่อหาข้อสรุปเป็นผลลัพธ์นำไปใช้ต่อไป ระบบฟัซซีลอจิกที่ปรากฏในบทความเชิงวิชาการมีด้วยกัน 3 ประเภทด้วยกัน ประเภทที่หนึ่งได้แก่ ระบบฟัซซีลอจิกล้วน ประเภทที่สองได้แก่ ระบบฟัซซีของ Takagi และ Sugeno และประเภทที่สามได้แก่ ระบบฟัซซีลอจิกที่มีตัวแปลงฟัซซี (Fuzzifier) และ ตัวแปลงกลับฟัซซี (Defuzzifier) ในงานวิจัยนี้จะขอกล่าวถึงในประเภทที่ 3 ที่ใช้ในงานวิจัยเท่านั้น

<u>ระบบฟัซซีลอจิกที่มีตัวแปลงฟัซซีและตัวแปลงกลับฟัซซี</u>

ตัวแปลงฟัซซี จะทำการแปลงข้อมูลค่าตายตัวใน U ให้เป็นฟัซซีเซตขาเข้าใน U และตัวแปลงกลับฟัซซีจะแปลงฟัซซีเซตผลลัพธ์ใน V ให้เป็นข้อมูลค่าตายตัวใน V ในบทความเชิงวิชาการ เรามักเรียกระบบฟัซซีในลักษณะนี้ว่าตัวควบคุมฟัซซี (Fuzzy Logic Controller) เพราะมักใช้เป็นตัวควบคุมในการควบคุมกระบวนการ ระบบฟัซซีแบบนี้ถูกเสนอครั้งแรกโดย Mamdani และถูกใช้อย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา

ระบบฟัซซีลอจิกที่มีตัวแปลงฟัซซีและตัวแปลงกลับฟัซซีมีข้อดีหลายประการ ประการแรกคือมีความเหมาะสมที่จะใช้งานกับระบบเชิงวิศวกรรมทั่วไปเพราะข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออกของระบบเป็นค่าจริงตายตัว ประการที่สองคือมีความเหมาะสมสำหรับใช้เก็บความรู้ของผู้เชี่ยวชาญเนื่องจากทั้งส่วนต้นและส่วนปลายของระบบเกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงภาษา และประการที่สามคือมีความยืดหยุ่นในการออกแบบ คือ สามารถเปลี่ยนแปลงแก้ไขส่วนต่าง ๆ ของระบบได้หลายประการไม่ว่าจะเกี่ยวข้องกับตัวแปลงฟัซซี, ตัวนิรนัยฟัซซี, และตัวแปลงกลับฟัซซี เพื่อให้เราออกแบบระบบฟัซซีให้เหมาะสมกับปัญหาหนึ่ง ๆ มากที่สุด ดังนั้นต่อไปเมื่อเราพูดถึงระบบฟัซซี เราจะหมายความถึงระบบฟัซซีที่มีตัวแปลงฟัซซีและตัวแปลงกลับฟัซซีนี้เป็นหลัก

ระบบฟัซซีประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ 4 ส่วนคือ [9]

1. ส่วนตัวแปลงฟัซซี (Fuzzifier) ซึ่งจะทำหน้าที่
- วัดค่าของตัวแปรขาเข้า
- ทำการแปลงค่า (Input Scale Mapping) ตัวแปรขาเข้าให้มีค่าอยู่ในย่านที่เหมาะสมใน Universe of Discourse
- แปลงข้อมูลขาเข้าให้อยู่ในรูปของค่าเชิงภาษาหรือฟัซซีเซต

2. ส่วนฐานความรู้ (Knowledge Base) ประกอบด้วยส่วนประกอบย่อยๆ สองส่วนคือ

- ฐานข้อมูล (Data Base) ให้ข้อมูลเกี่ยวกับนิยามซึ่งจำเป็นต่อการจัดการข้อมูล เช่น การแบ่งช่วง และการปรับ UOD การกำหนดฟัซซีเซต การกำหนดฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต เป็นต้น

- ฐานกฎ (Rule Base) กำหนดกฎที่ใช้ในการควบคุม โดยแสดงในรูปของกฎฟัซซี

3. ส่วนการนิรนัยฟัซซี หรือ ส่วนตัดสินใจ (Decision making Logic) เป็นส่วนที่สำคัญของระบบฟัซซีซึ่งมีความสามารถในการตัดสินใจเลียนแบบมนุษย์ ส่วนนี้จะใช้แนวความคิดเกี่ยวกับฟัซซีลอจิก และทำหน้าที่ในการหาการควบคุม (Control Action) หรือ ผลลัพธ์จากข้อมูลขาเข้าและ ฐานกฎที่กำหนดได้โดยการใช้กลไกการนิรนัยฟัซซี

4. ส่วนตัวแปลงกับฟัซซี (Defuzzifier Interface) ทำหน้าที่
- แปลงผลลัพธ์ที่เป็นฟัซซีเซตให้เป็นค่าตายตัว
- แปลงสเกล (Output Scale Mapping) ค่าตายตัวที่ได้ ให้มีค่าอยู่ในช่วงที่ใช้เป็นสัญญาณควบคุม

1.1 ประโยคเงื่อนไขฟัซซีและกฎฟัซซี

วิธีการตัดสินใจของระบบฟัซซีถูกแสดงในรูปของชุดของกฎเชิงภาษาซึ่งได้มาจากความรู้ของผู้เชี่ยวชาญ โดยความรู้ของผู้เชี่ยวชาญมักอยู่ในรูปของประโยคเงื่อนไข IF-THEN คือ

IF (ชุดของเงื่อนไขเป็นจริง) THEN (นิรนัยได้ชุดของผลลัพธ์)

เนื่องจากส่วนต้น และส่วนปลายของกฎต่าง ๆ เกี่ยวข้องกับแนวความคิดเกี่ยวกับตัวแปรเชิงภาษาซึ่งเป็นแนวความคิดที่ปรากฏในฟัซซีลอจิก เช่น ตัวแปรเชิงภาษา เราจึงมักเรียกกฎต่าง ๆ เหล่านี้ว่า กฎฟัซซี โดยเป็นกฎที่เราใช้แสดงวิธีการควบคุมในระบบฟัซซี

1.2 ตัวดำเนินการแปลงฟัซซี (Fuzzification Operator)

ตัวดำเนินการแปลงฟัซซีมีผลในการแปลงข้อมูลค่าตายตัวให้เป็นฟัซซีเซต นั่นคือ

$u =$ fuzzifier (u_0) ,

โดย u_0 เป็นข้อมูลขาเข้าค่าตายตัว u เป็นฟัซซีเซตขาเข้า และ fuzzifier เป็นตัวดำเนินการแปลงฟัซซี

1.3 ตัวดำเนินการเชื่อมประโยค (Sentence Connective Operator)

ตัวดำเนินการ AND เป็นตัวดำเนินการเชื่อมประโยคในกรณีที่ระบบฟัซซีมีข้อมูลขาเข้ามากกว่าหนึ่งตัว ในขณะที่ตัวดำเนินการ ALSO เป็นตัวดำเนินการเชื่อมประโยคเงื่อนไข ฟัซซีหลายประโยคที่มีอยู่ในฐานกฎเข้าด้วยกัน

1.4 ตัวดำเนินการผสม (Compositional Operator)

เป็นตัวดำเนินการที่ช่วยให้เรานิรนัยหรือสรุปหาผลลัพธ์จากความรู้เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้าและความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้าและข้อมูลขาออก ในการวิจัยนี้เราใช้ตัวดำเนินการผสมที่เรียกกันว่าซูปรีมัม-ที (Sup-T) เป็นหลัก

1.5 ตัวดำเนินการแปลงกลับฟัซซี (Defuzzification Operator)

เป็นตัวดำเนินการที่แปลงผลลัพธ์ที่นิรนัยได้ ซึ่งอยู่ในรูปของฟัซซีเซตให้อยู่ในรูปของจำนวนจริงค่าตายตัวเพื่อใช้ในการควบคุม นั่นคือ

$v_o =$ defuzzifier (v)

โดย v_o เป็นค่าของสัญญาณควบคุมที่เป็นค่าตายตัว v เป็นฟัซซีเซตขาออก และ defuzzifier เป็นตัวดำเนินการแปลงกลับฟัซซี

2. การออกแบบระบบฟัซซีลอจิก

พารามิเตอร์ในการออกแบบระบบฟัซซีมีดังต่อไปนี้

2.1. วิธีการแปลงฟัซซี (Fuzzification Strategy)

2.2 ฐานข้อมูล

ก) การแบ่งช่วง (Discretization) และการปรับ (Normalization) ของ UOD

ข) การแบ่งฟัซซี (Fuzzy Partition) ของปริภูมิขาเข้า และขาออกโดยการใช้ฟัซซีเซต

ค) ความสมบูรณ์ (Completeness) ของฐานข้อมูล

ง) การกำหนดฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตปฐมภูมิ

2.3 ฐานกฎ

ก) การเลือกตัวแปรขาเข้า (ตัวแปรสภาวะ) และตัวแปรขาออก (ตัวแปรควบคุม) ของกฎฟัซซี

ข) แหล่งที่มาและการได้มาของกฎการควบคุมฟัซซี

ค) ความสอดคล้อง (Consistency) ความเกี่ยวเนื่อง (Interactivity) และความสมบูรณ์ (Completeness) ของฐานกฎ

2.4 ลอจิกการตัดสินใจ

ก) นิยามของฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชัน

ข) การตีความตัวเชื่อมประโยค ALSO

ค) การตีความตัวเชื่อมประโยค AND

ง) นิยามของตัวดำเนินการผสม

จ) กลไกการนิรนัยความจริง

2.5 วิธีการแปลงกลับฟัซซี (Defuzzification Strategy)

3 หลักการแปลงฟัซซี (Fuzzification Stragegy)

การแปลงฟัซซีเป็นส่วนที่กระทำในส่วนต้นของระบบฟัซซี โดยต้องแปลงข้อมูลขาเข้าในรูปของค่าตายตัวให้เป็นฟัซีเซตเพื่อให้ระบบฟัซซีสามารถจัดการข้อมูลได้ หลักการทั่วไปในการกำหนดวิธีการแปลงฟัซซีมี 3 วิธีดังต่อไปนี้

ก) ทำการแปลงค่าตายตัวให้เป็นฟัซซีซิงเกิลตันใน UOD วิธีนี้เป็น วิธีที่นิยมใช้กันทั่วไปในการประยุกต์ใช้งาน ในการควบคุมกระบวนการ.เพราะความสะดวกง่ายดาย โดยจะแปลงข้อมูลเข้า u_o ให้เป็นฟัซซีเซตที่มีฟังก์ชันความเป็นสมาชิกที่ให้ค่าเป็นศูนย์ทุกที่ยกเว้นมีค่าเป็นหนึ่งที่ u_o เพียงที่เดียว

ข) ถ้าข้อมูลที่วัดได้ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวน ตัวดำเนินการแปลงฟัซซีควรแปลงข้อมูลดังกล่าวให้เป็นฟัซซีเซตที่แสดงถึงความไม่แน่นอนในข้อมูลขาเข้าด้วย เช่น อาจเลือกฟัซซีเซตเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุมยอดตรงกับค่าเฉลี่ยของข้อมูลเข้า และมีฐานเท่ากับสองเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นต้น การจัดการกับข้อมูลที่เป็นลักษณะ Possibilistic Data ซึ่งก็คือฟัซซีเซต ในวิธีนี้จะทำได้ง่ายกว่าการจัดการข้อมูลที่เป็นตัวลักษณะของ Probabilistic Data หรือตัวแปรสุ่มเป็นอย่างมาก เราจึงนิยมใช้ฟัซซีเซตในการแทนข้อมูลที่มีความไม่แน่นอน และ จัดการข้อมูลดังกล่าวโดยการใช้ระบบฟัซซี

ค) ในกรณีที่ระบบมีขนาดใหญ่หรือในการประยุกต์ใช้งานอย่างอื่น ข้อมูลอาจมีทั้งลักษณะของ Possibilistic Data และ Probabilistic Data จึงอาจต้องใช้แนวความคิดของ Hybrid Number ซึ่งรวมเอาแนวความคิดของตัวแปรสุ่มและฟัซซีเซตเข้าด้วยกัน

4 ฐานข้อมูล และฐานกฎ (Data Base)

4.1 การแบ่งช่วงข้อมูลและการปรับระดับข้อมูล (Discretization & Normalization of UOD)

จากข้างต้น เราได้แสดงให้เห็นว่าฟัซซีเซต ซึ่งมีระดับความเป็นสมาชิกเป็นค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 สามารถแทนข้อมูลที่เกี่ยวกับคำในภาษาได้อย่างเป็นธรรมชาติมากกว่าเซตซึ่งมีระดับความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0 หรือ 1 อย่างไรก็ตามในการนำฟัซซีเซตมาใช้ในคอมพิวเตอร์เราก็ต้องมีการจัดโครงสร้างข้อมูลให้เหมาะสมด้วย โดยทั่วไปเราจะทำการแบ่ง UOD ที่เป็นแบบต่อเนื่องออกเป็นช่วง ๆ เพราะเราไม่สามารถเก็บค่าระดับความเป็นสมาชิกของสมาชิกทุกตัวใน UOD ได้ การแบ่งช่วงของ UOD ดังกล่าว ก็คล้ายกับการแปลงสัญญาณอนาลอกมาเป็นสัญญาณดิจิตอลใน A/D Converter นั่นเอง นอกจากการแบ่งช่วงแล้ว บางครั้งเราอาจต้องปรับข้อมูลซึ่งอาจมีย่านที่ไม่เหมาะสม เช่น กว้างเกินไป หรือแคบเกินไป ให้มาอยู่ในย่านที่เรากำหนดไว้เพื่อที่จะสามารถอ้างอิงได้

ก) การแบ่งช่วง UOD

เรียกอีกอย่างว่าการทำควอนไตเซชัน (Quantization) เป็นการแบ่ง UOD ซึ่งเป็นแบบต่อเนื่องออกเป็นช่วง ๆ เพื่อความสะดวกในการเก็บข้อมูล แต่ละช่วงจะเป็นเสมือนกับสมาชิกหนึ่งตัวของ UOD ที่แบ่งช่วงแล้ว คือมีระดับความเป็นสมาชิกเท่ากันหมดสำหรับแต่ละช่วง การนิยามฟัซซีเซตทำได้โดยการกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิกให้กับแต่ละช่วงดังกล่าว ด้วยวิธีการนี้ทำให้เราสามารถสร้างตารางอ่านค่า (Lookup-Table) เพื่อหาสัญญาณออกสำหรับสัญญาณเข้าใด ๆ ที่กำหนดให้ได้ โดยการประมวลผลออฟไลน์ (Off-line Processing) ซึ่งช่วยลดเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของตัวควบคุม จำนวนช่วงที่ใช้แบ่งควรมีจำนวนมากพอที่จะทำให้การประมาณสัญญาณขาเข้าละเอียดพอ จำนวนช่วงที่ใช้แบ่งเป็นตัวกำหนดความละเอียดของการควบคุม โดยยิ่งมีจำนวนช่วงมากความละเอียดของการควบคุมก็ยิ่งละเอียด แต่ก็ควรมีจำนวนไม่มากจนเกินไปเพื่อประหยัดหน่วยความจำ

การแปลงสเกล (Scale Mapping) เป็นสิ่งจำเป็นในการใช้ UOD ที่ได้แบ่งช่วงเอาไว้โดยทำหน้าที่ในการแปลงตัวแปรที่วัดได้ให้เป็นค่าใน UOD ที่ได้แบ่งช่วงไว้แล้วโดยการแปลงอาจเป็นแบบเชิงเส้น แบบไม่เชิงเส้น หรือทั้งสองแบบก็ได้ การเลือกการแบ่งช่วง UOD ให้ละเอียด หรือหยาบนั้นสะท้อนถึงเหตุผลบางอย่าง เช่น การเลือกแบ่งช่วงหยาบ ๆ เหมาะสำหรับสัญญาณที่ยอมให้มีความผิดพลาดมาก แต่ถ้าต้องการให้สัญญาณมีความผิดพลาดน้อยต้องเลือกแบ่งช่วงละเอียด ๆ ในกรณีระบบฟัซซีแบบ 3 สัญญาณเข้า 1 สัญญาณออก เราอาจมีกฎในรูปของ

R_i:IF (error(e) is A_i AND sum of error(ie) is B_i AND change of error (de) is C_i)

THEN Output is D_i

โดยเราอาจแทนระบบฟัซซีได้ด้วยสมการ

$$K_4\ [u(k)] = F[K_1e(k),K_2ie(k),K_3de(k)]$$

โดย F แทนความสัมพันธ์ฟัซซีที่นิยามโดย ฐานกฎ และ K_i ;i=1,2,3,4 แทนการแปลงสเกลที่เหมาะสม

ข) การปรับ UOD

การปรับ UOD เป็นการแบ่งช่วงโดยมีการแปลงเสกลของแต่ละช่วงที่ถูกแบ่งให้ไปเป็นเป็นช่วงที่กำหนดไว้ใน UOD ที่ปรับแล้ว หลังจากนั้นจึงนิยาม ฟัซซีเซต โดยการกำหนดฟังก์ชันความเป็นสมาชิก การแปลงสเกลอาจเป็นแบบเชิงเส้น ไม่เชิงเส้น หรือทั้งสองแบบก็ได้

4.2 การแบ่งปริภูมิขาเข้าและปริภูมิขาออก

ตัวแปรที่ใช้เป็นตัวแปรขาเข้า และ ตัวแปรขาออกของระบบฟัซซีเป็นตัวแปรเชิงภาษา นั่นคือ เป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นคำในภาษาซึ่งคำในภาษาในที่นี้ก็คือป้ายชื่อของฟัซซีเซตตัวหนึ่งนั่นเอง นอกจากนี้ โดยทั่วไปแล้วตัวแปรขาเข้า และ ตัวแปรขาออกของระบบฟัซซีมักจะมีจำนวนมากกว่าหนึ่งตัวแปร ข้อมูลขาเข้า และ ข้อมูลขาออกจึงมักถูกมองในรูปของฟัซซีเซต (หรือความสัมพันธ์) ที่มีนิยามใน UOD ที่เป็นปริภูมิผลคูณของ UOD ย่อย ๆ ของตัวแปรแต่ละตัวการแบ่งปริภูมิขาเข้า และปริภูมิขาออกในที่นี้ หมายถึง การกำหนดจำนวนของฟัซซีเซต เพื่อใช้เป็นค่าของตัวแปรเชิงภาษาแต่ละตัว โดยฟัซซีเซตดังกล่าวมีนิยามบน UOD ของตัวแปรแต่ละตัว จำนวนฟัซซีเซตเป็นตัวกำหนดความละเอียด (Granualarity) ของการควบคุมที่ได้จาก กฎฟัซซี และ ยังเป็นตัวกำหนดจำนวนสูงสุดของกฎฟัซซีที่เราสามารถสร้างขึ้นได้ด้วย ในกรณีของระบบฟัซซี 2 สัญญาณเข้า 1 สัญญาณออก ถ้าจำนวนฟัซซีเซตของข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออกมีค่าเท่ากับ 3 และ 7 ตามลำดับ เราจะได้จำนวนกฎฟัซซีที่สามารถตั้งได้สูงสุดเป็น $3\times7=21$ โดยทั่วไปมักตั้งชื่อของฟัซซีเซตให้มีความหมายที่เข้าใจได้ง่าย เช่น NB = Negative Big, NM = Negative Medium, NS =Negative Small,ZE = Zero,PS =Positive Small,PM = Posistive Medium,PB= Positive Big

4.3 ความสมบูรณ์ (Completeness)

ความสมบูรณ์ของฐานกฎ หมายถึง ความสามารถของฐานกฎในการนิรนัยหาสัญญาณควบคุมได้สำหรับสภาวะทุกสภาวะที่อาจเกิดขึ้นในกระบวนการ คุณสมบัติความสมบูรณ์

ของฐานกฎขึ้นอยู่กับเงื่อนไขสองประการที่เกี่ยวข้องกับทั้งฐานข้อมูลและฐานกฎ

ก) ฐานข้อมูล

การที่ฐานกฎจะมีความสมบูรณ์ได้นั้น ฐานข้อมูล ที่ใช้ในการนิยามฐานกฎจะต้องมีความสมบูรณ์เสียก่อน ความสมบูรณ์ของฐานข้อมูลในที่นี้ หมายความถึง การที่ฟัซซีเซตสามารถครอบคลุม UOD ที่ใช้นิยามได้อย่างทั่วถึง เงื่อนไขที่ใช้ในการกำหนดความสมบูรณ์ของฐานข้อมูลก็คือ ยูเนียน ของ ฟัซซีเซต ทุกเซต จะต้องมีค่าระดับความเป็นสมาชิกไม่ต่ำกว่าระดับที่กำหนดไว้ค่าหนึ่ง โดยทั่วไปเราเลือกเอาระดับความเป็นสมาชิก 0.5 เป็นระดับที่ใช้กำหนด ซึ่งหมายความว่าในการนิรนัยความฟัซซีสำหรับข้อมูลเข้าค่าใด ๆ ของตัวแปรขาเข้าตัวแปรหนึ่ง จะมีกฎอยู่กฎหนึ่งเสมอที่ให้ระดับความเป็นสมาชิกสำหรับตัวแปรขาเข้าตัวนั้นมากกว่า หรือเท่ากับ 0.5 โดยอาจมีกฎดังกล่าวมากกว่าหนึ่งกฎสำหรับข้อมูลขาเข้าบางค่า

ข) ฐานกฎ

เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับความสมบูรณ์ของฐานกฎถูกกำหนดโดยอาศัยประสบการณ์การออกแบบและความรู้ทางวิศวกรรม โดยเราจะใส่กฎเพิ่มเติมเข้าไปในฐานกฎเมื่อใดก็ตามที่ฐานกฎดังกล่าวยังไม่ได้ครอบคลุมเงื่อนไขที่อาจเกิดขึ้นบางประการ หรือ ใส่กฎเพิ่มเติมเข้าไปเมื่อใดที่ค่าความจริงสูงสุดสำหรับทุกกฎยังมีค่าต่ำกว่าค่าที่กำหนดไว้ค่าหนึ่ง เช่น 0.5 ในกรณีแรกเป็นการแก้ไขฐานกฎให้สมบูรณ์ในแง่ที่อาจมีเหตุการณ์ที่ไม่มีกฎใดเป็นกฎที่เด่น(ค่าความจริงมากกว่า 0.5) เลยแม้แต่กฎเดียว

4.4 ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต

เรามีวิธีสองวิธีในการนิยามฟัซซีเซต โดยขึ้นอยู่กับลักษณะของ UOD ว่ามีสมาชิกเป็นแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องได้แก่

ก) การนิยามเชิงตัวเลข (Numerical Definition)

วิธีนี้ ระดับความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตถูกแสดงในรูปของเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับจำนวนช่วงที่ใช้ในการแบ่ง UOD (แต่ละค่าในเวกเตอร์ คือ ค่าระดับความเป็นสมาชิกของช่วงหนึ่ง ๆ ใน UOD) ฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตในกรณีนี้จะอยู่ในรูปของ

$$\mu_F(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / u_i$$

ข) การนิยามเชิงฟังก์ชัน (Functional Definition)

วิธีนี้จะแสดงฟังก์ชันความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตในรูปแบบของฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันรูประฆังคว่ำ รูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยมคางหมู การนิยามเชิงฟังก์ชันมีข้อดีคือสามารถปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ของฟังก์ชันเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงวิธีการแบ่งหรือการปรับUOD

ได้ง่ายดาย

4.5 ฐานกฎ (Rule Base)

ระบบฟัซซีมีคุณสมบัติที่กำหนดโดยชุดของประโยคเชิงภาษา ซึ่งได้มาจากความรู้ของผู้เชี่ยวชาญ ความรู้ของผู้เชี่ยวชาญดังกล่าว มักถูกแสดงในรูปของ IF-THEN ซึ่งอยู่ในรูปแบบเดียวกับการใช้ประโยคเงื่อนไข ที่แสดงไว้ในเนื้อหาที่เกี่ยวกับ การให้เหตุผลโดยประมาณ ชุดของประโยคเงื่อนไขทุกประโยคจะรวมกันเข้าเป็นฐานกฎในระบบฟัซซี

ก) การเลือกตัวแปรขาเข้าและตัวแปรขาออกของกฎฟัซซี

การเลือกตัวแปรที่เหมาะสมเพื่อใช้เป็นตัวแปรขาเข้า และตัวแปรขาออกในกฎฟัซซีมีผลอย่างมากต่อประสิทธิภาพการทำงานของระบบฟัซซี โดยทั่วไปเราใช้ประสบการณ์และความรู้ทางวิศวกรรม ในการเลือกตัวแปรดังกล่าว ซึ่งตัวแปรที่เรามักเลือกไดแก่ ตัวแปรสภาวะ (State Variable) สัญญาณผิดพลาดของสภาวะ (State Error) การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณผิดพลาดของตัวแปรสภาวะ (State Error Derivative) อินทิกรัลของสัญญาณผิดพลาดของตัวแปรสภาวะ (State Error Integral) เป็นต้น

ข) ที่มาและการได้มาของกฎฟัซซี

จากบทความเชิงวิชาการ เราพบว่าวิธีการสร้างกฎฟัซซีเพื่อนำมาใช้ในการควบคุมกระบวนการมีอยู่ 4 วิธีด้วยกันโดยแต่ละวิธีไม่ได้ใช้แยกจากกันโดยสิ้นเชิง เราอาจใช้หลายวิธีร่วมกันเพื่อสร้างกฎฟัซซีที่มีประสิทธิภาพมากขึ้นกว่ากฎที่ได้มาจากวิธีเพียงวิธีเดียวก็ได้ วิธีทั้ง 4 ในการสร้างกฎมีดังต่อไปนี้

-ประสบการณ์ของผู้เชี่ยวชาญและความรู้วิศวกรรมควบคุม

กฎฟัซซี เป็น ประโยคเงื่อนไขเชิงภาษา ที่กำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปรขาเข้าในส่วนต้นและตัวแปรขาออกในส่วนปลาย เราจะพบว่าในชีวิตประจำวันของมนุษย์เรา ข้อมูลที่เราใช้ในการตัดสินใจมักมีลักษณะเป็นข้อมูลเชิงภาษามากกว่าจะเป็นข้อมูลเชิงตัวเลข ดังนั้นกฎฟัซซีจึงเป็นกรอบ (Framework) ที่เป็นธรรมชาติสำหรับแสดงลักษณะการตัดสินใจของมนุษย์ ผู้เชี่ยวชาญในด้านต่าง ๆ พบว่ากฎฟัซซีเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับแสดงความรู้ของพวกเขาออกมาให้อยู่ในรูปที่นำไปใช้งานได้ วิธีการสร้างกฎฟัซซีโดยอาศัยประสบการณ์ของผู้เชี่ยวชาญและความรู้ทางวิศวกรรมจึงเป็นวิธีที่ใช้แพร่หลายในงานด้านต่าง ๆ เป็นอย่างมาก

-การควบคุมโดยอาศัยผู้ปฏิบัติงาน

ในอุตสาหกรรมหลายประเภท เราไม่ทราบความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้า และสัญญาณออกด้วยความแม่นยำมากพอที่จะใช้ทฤษฎีควบคุมดั้งเดิม (Classical Control Theory) สำหรับการจำลองแบบ (Modeling) และการจำลองสภานการณ์ (Simulation) ได้ แม้กระนั้นผู้ปฏิบัติงาน (Operator) ที่มีความชำนาญก็ยังสามารถควบคุมระบบดังกล่าวได้อย่างดี โดยไม่จำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใด ๆ โดยผู้ปฏิบัติงานดังกล่าวมีการใช้กฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในการควบคุมกระบวนการซึ่งตัวเองเป็นคนตั้งขึ้นมาโดยอาจรู้ตัวหรือไม่รู้ตัวก็ได้ เราสามารถนำความสามารถดังกล่าวของผู้ปฏิบัติงานมาใช้ในการควบคุมกระบวนการแบบอัตโนมัติ โดยการแสดงกฎการควบคุมของผู้ปฏิบัติงานในรูปของ กฎฟัซซี และ นำกฎดังกล่าวไปใช้ควบคุมกระบวนการโดยผ่านระบบฟัซซี กฎฟัซซีดังกล่าวได้มาจากการสังเกตการควบคุม (Control Action) ของผู้ปฏิบัติงานสำหรับสถานการณ์ต่าง ๆ แล้วสรุปออกมาในรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออก

ค) การใช้แบบจำลองฟัซซี

แบบจำลองฟัซซีได้มาจากการใช้ประโยคเชิงภาษาในการอธิบายลักษณะสมบัติพลวัตของกระบวนการแทนการอธิบายโดยการใช้สมการดิฟเฟอเรนเชียล หรือวิธีทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เราอาจมองประโยคเชิงภาษาดังกล่าวว่าเป็นแบบจำลองเชิงภาษา หรือแบบจำลองฟัซซีของกระบวนการ การใช้แบบจำลองฟัซซีดังกล่าวนี้มีวิธีในการสร้างชุดของกฎฟัซซีเพื่อใช้ในการควบคุมกระบวนการให้ได้ประสิทธิภาพที่ดีอย่างที่เราต้องการได้ วิธีนี้เป็นวิธีที่ซับซ้อน แต่ก็ให้ประสิทธิภาพสูงและให้ความเชื่อถือได้ (Reliability) นอกจากนี้ยังทำให้เราสามารถวิเคราะห์ระบบฟัซซีในแง่ของทฤษฎีได้ อย่างไรก็ตามวิธีที่การออกแบบระบบฟัซซีโดยการใช้แบบจำลองฟัซซีก็ยังไม่ได้รับการพัฒนาอย่างสมบูรณ์

ง) การใช้การเรียนรู้

เป็นวิธีการสร้างกฎฟัซซีโดยการให้คอมพิวเตอร์มีการเรียนรู้ และสร้างกฎฟัซซีดังกล่าวขึ้นมาได้เอง มีระบบฟัซซีมากมายที่ถูกออกแบบให้เลียนแบบมนุษย์ในการตัดสินใจ แต่มีเพียงไม่กี่ระบบที่ถูกออกแบบให้เลียนแบบการเรียนรู้ของมนุษย์ ซึ่งเป็นความสามารถในการสร้างกฎฟัซซี และเปลี่ยนแปลงกฎดังกล่าวได้โดยอาศัยประสบการณ์ การสร้างกฎวิธีนี้เป็นวิธีที่ค่อนข้างซับซ้อน

4.5.1 ความสอดคล้อง (Consistency), ความมีปฏิสัมพันธ์ (Interactivity)และความสมบูรณ์ (Completeness)

ก) ความสมบูรณ์ของฐานกฎ

ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.3 ก่อนหน้าเกี่ยวกับความสมบูรณ์ของฐานข้อมูล

ข) ความสอดคล้องของกฎฟัซซี

ความสอดคล้องของกฎฟัซซีหมายความถึงลักษณะของกฎแต่ละกฎที่จะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ขัดแย้งกันเอง เราต้องทำการทดสอบความสอดคล้องของกฎฟัซซีเสมอเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่อาจเกิดขึ้นขณะทำการควบคุม

ค) ความมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างกฎฟัซซี

สมมติว่ามีชุดของประโยคเงื่อนไขที่อยู่ในรูปของ

R_i:IF u is A_i THEN v is B_i

ถ้าข้อมูลขาเข้าเป็น $u=A_i$ เราอาจคิดว่าข้อมูลขาออกควรจะเป็น $v=B_i$ ซึ่งในความจริงแล้วอาจมีค่าเป็นซับเซตหรือซูเปอร์เซตของ B_i ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับนิยามของฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชัน และ ตัวดำเนินการผสมซูปรีมัม-ที ลักษณะดังกล่าวนี้อาจเรียกว่าเป็น ความมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างกฎฟัซซี นั่นคือข้อมูลขาออกจะได้รับผลมาจากประโยคเงื่อนไขทุกประโยค ไม่ใช่จากประโยคที่มีข้อมูลในส่วนต้นตรงกับข้อมูลขาเข้าเพียงประโยคเดียว

5. ลอจิกการตัดสินใจ

ลอจิกการตัดสินใจที่ใช้ในระบบฟัซซีเป็นการตัดสินใจในลักษณะของการให้เหตุผลโดยประมาณ ซึ่งเป็นการให้เหตุผลโดยการใช้ความรู้เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้า ซึ่งเป็นข้อมูลที่ไม่ชัดเจนไม่แน่นอนโดยแสดงในรูปของฟัซซีเซต และความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้าและข้อมูลขาออกในรูปของกฎ IF-THEN ซึ่งสามารถแสดงในรูปของความสัมพันธ์ฟัซซีโดยสร้างมาจากการใช้ฟัซซีอิมพลีเคชันฟังก์ชันแบบต่าง ๆ การนิรนัยหาผลลัพธ์ที่ได้จากกฎฟัซซีในการให้เหตุผลโดยประมาณจะทำได้โดยการใช้ตัวดำเนินการผสม ซึ่งโดยมากใช้แบบซูปรีมัม-ทีเพื่อผสมข้อมูลขาเข้าในรูปของฟัซซีเซตขาเข้ากับความสัมพันธ์ฟัซซีที่ใช้แทนฐานกฎดังกล่าว เพื่อให้ได้เป็นฟัซซีเซตของข้อมูลขาออก

ฐานกฎที่ใช้ในระบบฟัซซีอยู่ในรูปชุดของกฎฟัซซีซึ่งประกอบด้วยกฎย่อย ๆ หลายกฎโดยแต่ละกฎจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลขาเข้า และข้อมูลขาออก เราใช้ตัวดำเนินการเชื่อมประโยค ALSO ในการเชื่อมกฎแต่ละกฎเข้าด้วยกันเป็นฐานกฎรวม นอกจากนี้ในกรณีที่ข้อมูลขาเข้ามีมากกว่าหนึ่งตัวเราจะใช้ตัวเชื่อมประโยค AND ในการเชื่อมประโยคที่เกี่ยวกับข้อมูลขาเข้าแต่ละตัวเข้าด้วยกัน

6.หลักการแปลงกลับฟัซซี

การแปลงกลับฟัซซีเป็นการแปลงฟัซซีเซตที่ได้มาจากการวินิจฉัยของส่วนลอจิกตัดสินใจใน UOD หนึ่ง ๆ ให้ไปเป็นค่าตายตัวเพื่อนำไปใช้ในการควบคุมกระบวนการ ในปัจจุบันวิธีในการแปลงกลับฟัซซีที่ใช้กันอยู่ได้แก่ วิธีค่ามากสุด วิธีเฉลี่ยค่ามากที่สุด วิธีจุดศูนย์ถ่วง

1) วิธีค่ามากที่สุด จะให้ค่าที่เป็นจุดสูงสุดของฟัซซีเซตของข้อมูลขาออก วิธีนี้อาจมีปัญหาเกิดขึ้นเมื่อค่าสูงสุดของฟัซซีเซตดังกล่าวมีมากกว่าหนึ่งค่า

2) วิธีเฉลี่ยค่ามากที่สุด (Mean of Maximum : MOM) วิธีนี้จะแก้ไขข้อบกพร่องของวิธีแรก โดยการใช้ค่าเฉลี่ยของจุดสูงสุดของฟัซซีเซตของข้อมูลขาออก ในกรณีของ Discrete Universe of Discourseค่าที่ได้จะอยู่ในรูปของ

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$$

โดย v_i เป็นจุดที่ให้ค่าระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซตข้อมูลขาออกมีค่าสูงสุดและ n เป็นจำนวนจุดสูงสุดดังกล่าว

3) วิธีจุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity : COG)

วิธีนี้จะคำนวณให้ค่าที่ต้องการเป็นจุดศูนย์ถ่วงของฟัซซีเซตข้อมูลขาออก ในกรณีของ Discrete Universe of Discourse เราจะได้ค่าเป็น

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_z(v_i).v_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_z(v_i)}$$

โดย n เป็นจำนวนช่วงที่ใช้แบ่ง Universe of Discourse