เซมิกรุปของเมตริกซ์บนเซมิริง

นายอมร วาสนาวิจิตร์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2528

ISBN 974 - 566 - 064 - 7

MATRIX SEMIGROUPS OVER A SEMIRING

Mr. Amorn Wasanawichit

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1985

Thesis Title	Matrix Semigroups over a Semiring
By	Mr. Amorn Wasanawichit
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

.........S. Bunnag...........Dean of Graduate School

(Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Thavee Srisangthong ....Chairman

(Associate Professor Thavee Srisangthong M.A.)

Sidney S. Mitchell .....Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit .....Member

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิกรุปของเมตริกซ์บนเซมิริง

ชื่อนิสิต นายอมร วาสนาวิจิตร์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2528

บทคัดย่อ

ถ้า S เป็นเซมิริงสลับที่ได้ภายใต้การบวกและ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วเราให้ $M_n(S)$ แทนเซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บน S ทั้งหมด ซึ่งจะได้ว่า $M_n(S)$ เป็นเซมิกรุปภายใต้การคูณของเมตริกซ์

ถ้า S เป็นเซมิริงสลับที่ได้และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วสำหรับเมตริกซ์ $A \in M_n(S)$ เรานิยามตัวกำหนดบวกของ A, $\det^+ A$, และตัวกำหนดลบของ A, $\det^- A$, โดย

$$\det^+ A = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}, \quad \det^- A = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

ตามลำดับ โดยที่ $\mathcal{A}_n$ คือเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนคู่บนเซต $\{1,2,\ldots,n\}$ ทั้งหมด และ $\mathcal{B}_n$ คือเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนคี่บนเซต $\{1,2,\ldots,n\}$ ทั้งหมด

เรากล่าวว่า เซมิกรุป S เรกูลาร์ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $a \in S$, $a = axa$ สำหรับบางสมาชิก $x \in S$ เราเรียกเซมิริง $(S,+,\cdot)$ ว่า เซมิริงเรกูลาร์ ถ้าทั้ง $(S,+)$ และ $(S,\cdot)$ เป็นเซมิกรุปเรกูลาร์

เราเรียกเซมิกรุป S ว่า เซมิแลตทิซถ้า S เป็นเซมิกรุปซึ่งสลับที่ได้และ $a^2 = a$ สำหรับทุกสมาชิก $a \in S$ เราเรียกเซมิริง $(S,+,\cdot)$ ว่า เซมิริงเซมิแลตทิซ ถ้าทั้ง $(S,+)$ และ $(S,\cdot)$ เป็นเซมิแลตทิซ

ในวิทยานิพนธ์นี้เราให้ลักษณะของเมตริกซ์ซึ่งหาตัวผกผันได้ และเซมิกรุปของเมตริกซ์ซึ่งเรกูลาร์บนเซมิริงที่มีคุณสมบัติพิเศษบางประการ และยังแนะนำให้รู้จัก 3 เซมิกรุปย่อย

สลับที่ได้ ซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม (ในรูปแบบที่ชัดเจน) ของเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ ที่ S เป็นเซมิริงสลับที่ได้และมี 0,1 ด้วย

ผลลัพธ์ที่สำคัญมีดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ให้ S เป็นเซมิริงสลับที่ได้และมี 0,1 สมมติว่า S ไม่มีตัวหารศูนย์ และ 0 เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้นของ S ซึ่งหาตัวผกผันได้สำหรับการบวก ดังนั้นเมตริกซ์จตุรัส A บน S หาตัวผกผันได้ เมื่อและต่อเมื่อ ทุก ๆ แถวและทุก ๆ หลักของ A มีสมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์เพียงตัวเดียวเท่านั้น และทุก ๆ สมาชิกที่ไม่ใช่ศูนย์ของ A เป็นสมาชิกซึ่งหาตัวผกผันได้ของ S

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ให้ S เป็นเซมิริงเซมิแลตทิซและมี 0,1 และ A เป็นเมตริกซ์จตุรัสบน S ดังนั้น A หาตัวผกผันได้ เมื่อและต่อเมื่อ $\det^{+}A + \det^{-}A = 1$ และผลคูณของ 2 สมาชิกใด ๆ ในหลัก [แถว] เดียวกันของ A เป็น 0

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ให้ S เป็นเซมิริงเซมิแลตทิซและมี 0,1 และ A เป็นเมตริกซ์จตุรัสบน S ดังนั้น A หาตัวผกผันได้ เมื่อและต่อเมื่อ ผลคูณของ 2 สมาชิกใด ๆ ในหลัก [แถว] เดียวกันของ A เป็น 0 และผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ A ในแต่ละแถว [หลัก] เป็น 1

<u>ทฤษฎีบท 4</u> ให้ S เป็นเซมิริงสลับที่ได้ภายใต้การบวก และมี 0, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n \geqslant 3$ ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อ S เป็นริงเรกูลาร์

<u>ทฤษฎีบท 5</u> ให้ S เป็นเซมิริงสลับที่ได้ภายใต้การบวกและมี 0 และสมมติว่า 0 เป็นไอเดมโพเทนต์สำหรับการบวกเพียงตัวเดียวเท่านั้นของ S ดังนั้นสำหรับ $n \geqslant 2$ เซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อ S เป็นริงเรกูลาร์

<u>ทฤษฎีบท 6</u> ให้ S เป็นเซมิริงเซมิแลตทิซและมี 0,1,n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n \geqslant 2$ ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อ $n = 2$ และ S เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ทฤษฎีบท 7</u> ให้ S เป็นเซมิริงสลับที่ได้และมี 0,1 และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บน S ทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & \cdots & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix},$$

เซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บน S ทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

และเซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บน S ทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

เป็นเซมิกรุปย่อยสลับที่ได้ซึ่งใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$

Thesis Title Matrix Semigroups over a Semiring

Name Mr. Amorn Wasanawichit

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Department Mathematics

Academic Year 1985

ABSTRACT

If S is an additively commutative semiring and n is a positive integer, let $M_n(S)$ denote the set of all n×n matrices over S, so $M_n(S)$ is a semigroup under matrix multiplication.

If S is a commutative semiring and n is a positive integer, for $A \in M_n(S)$, the <u>positive determinant</u> of A, $\det^+ A$, and the <u>negative determinant</u> of A, $\det^- A$, are defined by

$$\det^+ A = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}, \quad \det^- A = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

respectively, where $\mathcal{A}_n$ is the set of all even permutations on $\{1,2,\ldots,n\}$ and $\mathcal{B}_n$ is the set of all odd permutations on $\{1,2,\ldots,n\}$.

A semigroup S is said to be <u>regular</u> if for every $a \in S$, $a = axa$ for some $x \in S$. A semiring $(S,+,\cdot)$ is called a <u>regular semiring</u> if $(S,+)$ and $(S,\cdot)$ are regular semigroups.

A semigroup S is called a <u>semilattice</u> if S is commutative and $a^2 = a$ for every $a \in S$. A semiring $(S,+,\cdot)$ is called a <u>semilattice semiring</u> if $(S,+)$ and $(S,\cdot)$ are semilattices.

In this thesis, we characterize invertible matrices and regular matrix semigroups over semirings with some special properties. Also, three maximal commutative subsemigroups, in explicit forms, of the matrix semigroup $M_n(S)$ with S a commutative semiring with 0,1 and n a positive integer are introduced.

The main results are as follow :

Theorem 1. Let S be a commutative semiring with 0,1. Assume that S has no zero divisors and 0 is the only element of S which has an additive inverse. Then a square matrix A over S is invertible if and only if every row and every column of A has exactly one nonzero element and every nonzero element of A is an invertible element of S.

Theorem 2. Let S be a semilattice semiring with 0,1 and A a square matrix over S. Then A is invertible if and only if $\det^+A + \det^-A = 1$ and the product of any two elements of A in the same column [row] is 0.

Theorem 3. Let S be a semilattice semiring with 0,1 and A a square matrix over S. Then A is invertible if and only if the product of any two elements of A in the same column [row] is 0 and the sum of all elements of A in each row [column] is 1.

Theorem 4. Let S be an additively commutative semiring with 0, n a positive integer and $n \geqslant 3$. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if S is a regular ring.

Theorem 5. Let S be an additively commutative semiring with 0 and assume that 0 is the only additive idempotent of S. Then for $n \geqslant 2$, the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if S is a regular ring.

Theorem 6. Let S be a semilattice semiring with 0,1, n a positive integer and $n \geqslant 2$. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if n = 2 and S is a Boolean algebra.

Theorem 7. Let S be a commutative semiring with 0,1 and n a positive integer. Then the set of all n×n matrices over S in the form

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \cdots & b_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2 & \cdots & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix},$$

the set of all n×n matrices over S in the form

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

and the set of all n×n matrices over S in the form

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

are maximal commutative subsemigroups of the matrix semigroup $M_n(S)$.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Asso. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father and mother for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS

page

ABSTRACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLISH vi

ACKNOWLEDGEMENT x

INTRODUCTION 1

CHAPTER

I PRELIMINARIES 3

II INVERTIBLE MATRICES 8

III REGULAR MATRIX SEMIGROUPS 18

IV MAXIMAL COMMUTATIVE SUBSEMIGROUPS OF MATRIX SEMIGROUPS 31

REFERENCES 43

VITA 44