



## วิธีการวิเคราะห์

### 2.1 บทนำ

ในการวิเคราะห์ใช้แนวความคิดที่เสนอโดย Coull และ Mohammed [ 10 ]  
เมื่อโครงสร้างของอาคารสูงรับแรงกระทำด้านข้าง ที่อาจก่อให้เกิดแรงที่ผ่านศูนย์กลางของ  
โครงสร้างและแรงบิด โดยการแทนที่แรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้างและแรงบิด ที่กระทำ  
ต่อโครงสร้างของอาคารซึ่งอาจประกอบไปด้วย โครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า ผนังต้าน  
แรงเฉือนเดี่ยว ผนังต้านแรงเฉือนคู่ โครงข้อแข็ง ด้วยแรงเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุดรวมกับ  
แรงกระจายในรูปโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ หรือแรงบิดเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุดรวมกับแรงบิด  
กระจายในรูปโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ จากนี้หน้าความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ผ่านศูนย์กลางของ  
โครงสร้างกับระยะ เอนและแรงบิดกับมุมบิดของ โครงอาคารแต่ละตัวมารวมกัน อาศัยความ  
สมดุลง่ายระหว่างแรงที่ผ่านศูนย์กลางของ โครงสร้างที่ต้านทานโดย โครงอาคารทั้งหมด ต่อแรง  
กระทำภายนอกที่ผ่านศูนย์กลางของ โครงสร้าง และความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดที่ต้านทานโดย  
โครงอาคารทั้งหมดต่อแรงบิดที่กระทำภายนอก ซึ่งในที่สุดจะได้สมการแสดงความสมดุลง่ายของ  
แรงที่ผ่านศูนย์กลางของ โครงสร้างกับระยะ เอนและแรงบิดกับมุมบิดของ โครงสร้าง เมื่อคำนวณ  
หาค่าระยะ เอนและมุมบิดของแต่ละ โครงอาคารได้ ก็สามารถที่จะหาแรงที่ผ่านศูนย์กลาง  
ของ โครงสร้างและแรงบิดของแต่ละ โครงอาคารที่ต้องต้านทานได้ แต่สิ่งที่สำคัญที่สุดของขั้นตอน  
การวิเคราะห์คือ การหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ผ่านศูนย์กลางกับระยะ เอน และแรงบิดกับ  
มุมบิดของแต่ละ โครงอาคาร ซึ่งจะ ได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

### 2.2 สมมติฐาน

พฤติกรรมภายใต้แรงกระทำด้านข้างของ โครงสร้าง

ในวิทยานิพนธ์นี้อาศัย

ข้อสมมติฐานในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

2.2.1 โครงอาคารใดๆประกอบขึ้นด้วยองค์อาคารที่มีเนื้อวัสดุประเภทเดียวกัน

2.2.2 ภายใต้งานกระทำด้านข้าง โครงสร้างมีพฤติกรรมในช่วงอีลาสติก

(Elastic Range)

2.2.3 ระยะโก่งของอาคาร ระยะเอน และมุมบิดของโครงสร้างมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดของ โครงอาคาร

2.2.4 ระบบที่มีความแข็งแกร่ง (Rigidity) ในระนาบของระบบพื้นสูง

2.2.5 จุดดัดกลับของเสาและคานในโครงข้อแข็งอยู่ที่จุดกึ่งกลางของชั้นและจุดกึ่งกลางช่วงคาน เพื่อให้การจำลองหน่วย โครงข้อแข็งเป็นผนังเทียบเท่ากระทำได้ง่าย และถูกต้องตามสภาพจริงของ โครงสร้าง

2.2.6 แต่ละหน่วยของโครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบขึ้นด้วยช่วงเสา ที่มีระยะห่างใกล้เคียงกัน และมีคานยึดต่อกันแข็งแรงเพียงพอ ทำให้สามารถแทนด้วยผนังเทียบเท่าที่มีพฤติกรรมเหมือนกัน โดยมีอัตราส่วนระยะห่างช่วงเสาต่อความยาวในแต่ละด้านมีค่า 0.05 ถึง 0.10 และอัตราส่วนความสูงในแต่ละชั้นต่อความสูงทั้งหมดของ โครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีค่า 0.01 ถึง 0.05

2.2.7 การยึดหดของรอยต่อ (Joints) น้อยมากไม่นำมาพิจารณา

2.2.8 ผลเนื่องจากการเคลื่อนที่นอกระนาบ(Out of Plane Effects) น้อยมาก

## 2.3 พฤติกรรมการรับแรงกระทำด้านข้างขององค์อาคาร

### 2.3.1 พฤติกรรมการรับแรงกระทำด้านข้างของ โครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การหาความสัมพันธ์ระหว่าง แรงที่ผ่านศูนย์กลางและระยะเอน หรือแรงบิด และมุมบิดของ โครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้วิธีที่เสนอโดย พูลสวัสดิ์ กล่าวคือ วิธีการ Continuum Approach ได้ถูกนำมาใช้ โดยการแทนโครงสร้างดิสครีตด้วยกล่องเทียบเท่าออร์โทโทรปิก (รูปที่ 1) และอาศัยการสมมติการเคลื่อนที่ที่สำคัญที่เกิดขึ้นจากแรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้าง หรือแรงบิด ที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกของโครงสร้างจากนั้นจึงหาพลังงานภายในที่เกิดขึ้นในรูปของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งและระยะเอน หรือมุมที่บิด ไปของ โครงสร้าง และใช้หลักของพลังงานศักย์รวมน้อยที่สุด ( Principle of Minimum Total

Potential Energy) และวิธีการของวิธวิธี เพื่อหาค่าคงที่ที่ติดอยู่กับโมเมนต์กึ่งขึ้นของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง และระยะเอน หรือมุมที่บิดไปของโครงสร้างซึ่งสมมติขึ้น แทนค่าคงที่ในสมการของระยะเอนหรือมุมบิดที่เกิดจากแรง หรือแรงบิดที่จุดยอดสุดและโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ ก็จะได้ความสัมพันธ์ตามต้องการ

### 2.3.1.1 พลังงานศักย์ทั้งหมด (Total Potential Energy) ของโครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เนื่องจากความสมมาตร พลังงานความเครียดทั้งหมด (Total Strain Energy) ที่เกิดขึ้นในกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก (รูปที่ 1) ซึ่งแสดงได้ว่า

$$U = 2U_1 + 2U_2 + 4U_c \quad (1)$$

โดยที่  $U$  เป็นพลังงานความเครียดทั้งหมด

$U_1$  และ  $U_2$  เป็นพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นของด้านที่ 1 และ ด้านที่ 2 ของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิกตามลำดับ

$U_c$  เป็นพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากพื้นที่หน้าตัดเข้มข้น (Concentrated Area) ที่รับแรงในแนวแกนอย่างเดี่ยวของมุมกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก

สำหรับทิศทางของความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ในแต่ละด้าน และแกน  $x, y, z$  (รูปที่ 2) ดังนั้นพลังงานความเครียด  $U_1, U_2$  และ  $U_c$  เขียนได้

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-c}^c (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) t_1 dx dz \quad (2)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-b}^b (\sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz}) t_2 dy dz \quad (3)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^H A_{cc}^* \sigma_c \epsilon_c dz \quad (4)$$

โดยที่  $t_1, t_2$  = ความหนาแน่นที่ 1, 2 ของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิกตามลำดับ  
(ภาคผนวก ก)

$A_{cc}^*$  = พื้นที่หน้าตัด เข้มข้นรับแรงในแนวแกนอย่างเดีวของมุมกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิก (ภาคผนวก ก)

$2c$  = ความยาวด้านตั้งฉากกับทิศทางของแรงกระทำด้านข้างของกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิก

$2b$  = ความยาวด้านขนานกับทิศทางของแรงกระทำด้านข้างของกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิก

$H$  = ความสูงของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  = ความเครียดในทิศทาง  $x, y, z$  ตามลำดับ

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  = ความเค้นในทิศทาง  $x, y, z$  ตามลำดับ

$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  = ความเครียดของการเฉือนของด้านที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  = ความเค้นการเฉือนของด้านที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$\epsilon_c, \sigma_c$  = ความเครียดและความเค้นในแนวแกนของมุมกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิกตามลำดับ

เนื่องจากข้อสมมติฐานที่ว่า สติฟเนสของพื้นมีความแข็งแรงในระนาบสูงดังนั้น  
พลังงานความเครียด เนื่องจากความเครียดของความเค้นในแนวราบมีค่าน้อยมาก ( $\sigma_x, \sigma_y$   
มีค่าเป็น 0) สมการที่ (2), (3) และ (4) สามารถลดรูปได้

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_0^c (\sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) t_1 dx dz \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_0^b (\sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}) t_2 dy dz \quad (6)$$

H

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^H A_{cc}^* \sigma_c \epsilon_c dz \quad (7)$$

0

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ ( Strain-Displacement Relationship)

$$\epsilon_z = \partial w / \partial z \quad (8)$$

$$\gamma_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \quad (9)$$

$$\gamma_{yz} = \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \quad (10)$$

เนื่องจากวัสดุอยู่ในช่วงอีลาสติกตามข้อสมมติฐานดังนั้น

$$\sigma_z = E_z (\partial w / \partial z) \quad (11)$$

$$\tau_{xz} = G_1 (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z) \quad (12)$$

$$\tau_{yz} = G_2 (\partial w / \partial y + \partial v / \partial z) \quad (13)$$

โดยที่ u, v, w เป็นหน่วยการเคลื่อนที่ในแกน x, y, z ( รูปที่ 2 ) แทนค่าจากสมการ (8) - (13) ในสมการ (5), (6), (7) ได้ดังนี้

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_0^c [E_1 (\partial w / \partial z)^2 + G_1 (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z)^2] t_1 dx dz \quad (14)$$

0 -c

H b

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^H \int_0^b [E_2 (\partial w / \partial z)^2 + G_2 (\partial w / \partial y + \partial v / \partial z)^2] t_2 dy dz \quad (15)$$

0 -b

H

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^H A_{cc}^* E_c (\partial w_c / \partial z)^2 dz \quad (16)$$

0

โดยที่ w เป็นการเคลื่อนที่ในแนวแกนของด้านที่ 1 หรือ 2 ตามการกระจายของฟังก์ชันที่สมมติ

- $E_1, E_2$  เป็นค่าโมดูลัสยืดหยุ่นด้านที่ 1 และ 2 ของกล่องเทียบเท่า  
ออร์โททรอปิกตามลำดับ (ภาคผนวก ก)
- $G_1, G_2$  เป็นค่าโมดูลัสของการเฉือนของด้านที่ 1 และ 2 ของกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิกตามลำดับ (ภาคผนวก ก)
- $w_c, E_c$  เป็นหน่วยการเคลื่อนที่และค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในแนวแกนของมุมกล่อง  
เทียบเท่าออร์โททรอปิกตามลำดับ

### 2.3.1.2 พลังงานศักย์เนื่องจากแรงกระทำภายนอก (V)

$$\text{แรงกระทำผ่านศูนย์กลางของโครงสร้าง} : V_p = -\int_0^H \bar{P} \cdot \Delta \, dz \quad (17)$$

$$\text{แรงบิด} : V_T = -\int_0^H \bar{T} \cdot \bar{\theta} \, dz \quad (18)$$

โดยที่  $V_p$  เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากแรงกระทำด้านข้างผ่านศูนย์กลางของโครงข้อแข็ง  
รูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$V_T$  เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากแรงบิดของโครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$\bar{P}$  เป็นฟังก์ชันของแรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้างอยู่ในรูปแรงเดี่ยวที่  
จุดยอดสุดและโพลีโนเมียลอันดับต่าง ๆ

$\Delta$  เป็นฟังก์ชันของระยะเอนที่สมมติขึ้น

$\bar{T}$  เป็นฟังก์ชันของแรงบิดที่จุดยอดสุดและโพลีโนเมียลอันดับต่าง ๆ

$\bar{\theta}$  เป็นฟังก์ชันของมุมบิดที่สมมติขึ้น

### 2.3.1.3 วิธีการของริทซ์ (Ritz Method)

แรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้าง

1. การยืดหดในแนวแกนของมุมกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก โดยอาศัย

Boundary Condition : ( $w_c = 0$  เมื่อ  $z = 0$  และ เมื่อ  $\partial w_c / \partial z = 0$ ) ดังนั้นจะได้ว่า

$$w_c(z) = A_1 \sin \pi \xi / 2 + B_1 (\cos \pi \xi - 1) + C_1 (\cos 2\pi \xi - 1) \quad (19)$$

2. ระยะเอนของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก โดยอาศัย Boundary Condition ( $\Delta = 0$  เมื่อ  $z = 0$  และ  $\partial \Delta / \partial z = 0$  เมื่อ  $z = 0$ ) ดังนั้นจะได้ว่า

$$\Delta(z) = K_1 \xi^2 + K_2 \xi^3 + K_3 \xi^4 \quad (20)$$

3. การกระจายการยึดหดในแนวแกนแต่ละด้านของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก

โดยจากการเสนอแนะของ สุธรรม [ 7 ] จะได้ว่า

$$\text{ด้านที่ 1 : } w(x,z) = [(x/c)^{M_2} + M_3 \cdot (1-(x/c)^2)^{M_2}] \cdot w_c \quad (21)$$

$$\text{ด้านที่ 2 : } w(y,z) = [\sinh(y/b)^{M_1} / \sinh(1)] \cdot w_c \quad (22)$$

โดยที่  $M_1, M_2, M_3$  เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการยึดหดตามแนวแกนหาได้จากการเสนอแนะ (ดูรูปที่ 8 - 12)

4. ความสัมพันธ์หน่วยการเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x, y, z$  กับระยะเอน

$$\partial u / \partial z = 0, \quad \partial v / \partial z = \partial \Delta / \partial z \quad (23)$$

#### แรงบิด

1. การยึดหดในแนวแกนของมุมกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก จากการเสนอแนะ

โดย พูลสวัสดิ์ [ 8 ]

$$w_c(z) = A_2 \sin \pi \xi / 2 + B_2 (\cos \pi \xi - 1) + C_2 (\cos 2\pi \xi - 1) \quad (24)$$

2. มุมบิดของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก จากการเสนอแนะโดย พูลสวัสดิ์ [ 8 ]

$$\theta(z) = K_4 \xi + K_5 \cdot \xi^2 + K_6 \cdot \xi^3 \quad (25)$$

3. การกระจายการยึดหดของทั้งสองด้านของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิกจากการเสนอแนะโดย พูลสวัสดิ์ [ 8 ]

$$w(x,y,z) = (xy/bc) \cdot w_c \quad (26)$$

4. ความสัมพันธ์หน่วยการเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x, y, z$  กับมุมบิด

$$u(x,y,z) = -y \cdot \theta(z), \quad v(x,y,z) = x \cdot \theta(z) \quad (27)$$

โดยที่  $\xi = z/H$

$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$  เป็นค่าคงที่ของฟังก์ชันของการยึดหดในแนวแกนของกล่องเทียบเท่าออร์โททรอปิก ระยะเอน และมุมบิดที่สมมติขึ้น

โดยการใช้หลักการพลังงานศักย์ทั้งหมดน้อยที่สุด ( $\Pi_p$ )

$$\Pi p = 2U_1 + 2U_2 + 4U_C + V \quad (28)$$

โดยการหาอนุพันธ์ของพลังงานศักย์ทั้งหมด เทียบกับค่าคงที่ในแต่ละค่าคงที่ที่สมมติขึ้น จะได้ชุดของสมการเท่ากับจำนวนของค่าคงที่ที่สมมติขึ้น แก้อสมการจะได้ค่าคงที่ของฟังก์ชันที่สมมติขึ้น แล้วแทนในสมการ (20), (25) ของแต่ละแรงที่ผ่านศูนย์กลางและแรงบิดที่ศูนย์กลางของโครงสร้าง ก็จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำผ่านศูนย์กลางในรูปแบบแรงเดี่ยวที่จุดยอดสุด และโพลีโนเมียลอันดับต่างๆกับระยะเอน หรือแรงบิดในรูปแบบแรงบิดเดี่ยวที่จุดยอดสุด และโพลีโนเมียลอันดับต่างๆกับมุมบิดตามต้องการ

#### 2.4 ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

โครงสร้างอาคารสูงทั่วไป อาจประกอบไปด้วยโครงข้อแข็งรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือระบบโครงอาคารประเภทอื่นๆ ที่ใช้ในการต้านทานแรงกระทำด้านข้าง จำนวนรวมกันเท่ากับ  $J$  โดยการสมมติว่าแผ่นพื้นทำหน้าที่เป็นแผ่นไดอะแฟรม (Diaphragm) ที่มีความแข็งแรงในระนาบตัวเองสูงมาก เมื่อโครงสร้างรับแรงกระทำด้านข้างจะมีการเคลื่อนที่ตามแนวราบ (รูปที่ 3) ที่ระดับใดๆ องค์อาคารตัวที่  $j$  ที่ระยะ  $z_j$  จากจุดอ้างอิง ดังเช่นจุด  $O$  จะมีการเคลื่อนที่เท่ากับ  $y_j + \theta_j \cdot z_j$  และมุมบิดเท่ากับ  $\theta_j$  โดยที่  $y_j$  เป็นค่าการเคลื่อนที่เทียบกับแกนอ้างอิงและ  $\theta_j$  เป็นมุมบิดรอบแกน ที่ระดับ  $x_j$

เมื่อโครงสร้างรับแรงกระทำด้านข้าง ที่ระดับใดๆ แรงกระทำด้านข้างสามารถแยกได้เป็น 2 ชนิดคือ แรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้าง ( $P_{Lj}$ ) และ แรงบิด ( $M_{Tj}$ ) และโดยการสมมติให้องค์อาคารใดๆ มีการกระจายแรงซึ่งประกอบไปด้วยแรงเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุด ร่วมกับแรงกระจายในรูปแบบโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ รวมกัน (รูปที่ 4)

สำหรับแรงกระทำที่ผ่านศูนย์กลาง ขององค์อาคารที่  $j$  เขียนได้เป็น

$$P_j = P_{0j} + \sum_{i=0}^m p_{ij} \xi^i \quad (29)$$



โดยที่  $m =$  จำนวนเต็มใดๆ ที่แสดงค่าอันดับสูงสุดของโพลีโนเมียล ( $m < 8$ )  
 $= N - 2$ , โดยที่  $N =$  จำนวนจุดอ้างอิง

$P_{0,j} =$  แรงเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุด

$p_{0,j} =$  สัมประสิทธิ์คงที่ของแรงกระทำผ่านศูนย์กลางโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ

$\xi = x/H$

ในการทำงานเดียวกัน แรงบิดที่ระดับใด ๆ ขององค์อาคารตัวที่  $j$  ( $t_j$ )

ที่สามารถต้านทานแรงบิดได้ก็จะประกอบไปด้วย แรงบิดเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุด ร่วมกับแรงบิดกระจายในรูปโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ รวมกัน เขียนได้เป็น

$$T_j = T_{0,j} + \sum_{i=0}^m t_{i,j} \xi^i \quad (30)$$

โดยที่  $T_{0,j} =$  แรงบิดเดี่ยวกระทำที่จุดยอดสุด

$t_{i,j} =$  สัมประสิทธิ์คงที่ของแรงบิดโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ

กำหนดให้  $Q_j =$  แรงเฉือนที่ระดับใด ๆ ของโครงสร้างที่  $j$  แสดงได้ว่า

$$Q_j = P_{0,j} + \int_0^H \sum_{i=0}^m p_{i,j} \xi^i dx \quad (31)$$

$$Q_j = P_{0,j} + H \sum_{i=0}^m p_{i,j} \frac{\xi^{i+1}}{i+1} \quad (32)$$

$$Q_j = P_{0,j} + \sum_{i=0}^m s_i p_{i,j} \quad (33)$$

กำหนดให้  $T_j =$  แรงบิดที่ระดับใด ๆ ขององค์อาคารตัวที่  $j$  แสดงได้ว่า

$$T_j = T_{0,j} + \sum_{i=0}^m s_i t_{i,j} \quad (34)$$

โดยที่  $s_i = H \cdot \frac{\xi^{i+1}}{i+1}$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ของแรงเฉือนและแรงบิดที่ต้านทาน โดยโครงสร้างกับแรงกระทำภายนอกที่ก่อให้เกิดแรงที่ผ่านศูนย์กลางและแรงบิด จะได้ว่า

$$W_L = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_J \quad (35)$$

$$W_L = \sum_{j=1}^J Q_j \quad (36)$$

$$M_T = (Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \dots + Q_J z_J) + (T_1 + T_2 + \dots + T_J) \quad (37)$$

$$M_T = \sum_{j=1}^J Q_j z_j + \sum_{j=1}^J T_j \quad (38)$$

โดยที่  $W_L$  = แรงที่ผ่านศูนย์กลางของโครงสร้างเนื่องจากแรงภายนอกที่ระดับใดๆ

$M_T$  = แรงบิดเนื่องจากแรงภายนอกที่ระดับใดๆ รอบจุดอ้างอิง

โดยการกำหนดให้องค์อาคารมีการเชื่อมกันด้วยจุดเชื่อม จำนวนเท่ากับ  $m+2$

หรืออีกนัยหนึ่งอาจเรียกว่า ระดับอ้างอิง (Reference Level) ซึ่งจะต้องประกอบด้วยจุดเชื่อมที่จุดยอดสุด และจุดอื่นใดระหว่างโครงสร้าง จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเคลื่อนที่ขององค์อาคารตัวที่  $j$  สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\tilde{y}_j = \tilde{F}_j \tilde{P}_j \quad (39)$$

โดยที่  $\tilde{y}_j$  คือเวกเตอร์ (Vector) ของการเคลื่อนที่ที่ระดับอ้างอิงใดๆ ขององค์อาคารตัวที่  $j$

$\tilde{F}_j$  คือเฟล็กซิบิลิตีเมตริกซ์ (Flexibility matrix) ของแรงที่ผ่านศูนย์กลาง ขององค์อาคารตัวที่  $j$

$\tilde{P}_j$  คือเวกเตอร์ของแรงกระทำที่จุดยอดสุด และแรงในรูปโพลีโนเมียลอันดับต่างๆ

และจากความสัมพันธ์ตามแนวราบ อาจแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\tilde{Q}_j = \tilde{R}_j \tilde{P}_j \quad (40)$$

โดยที่  $\tilde{Q}_j$  คือเวกเตอร์ของแรงเฉือนที่ต้านทานโดยองค์อาคารตัวที่  $j$  ที่ระดับอ้างอิงใดๆ  
 $\tilde{S}$  คือเมตริกซ์คงที่

โดยสมมติฐานข้อที่ 4 ดังนั้นการเคลื่อนที่ที่ระดับอ้างอิงใดๆ ขององค์อาคารตัวที่  $j$   
 แสดงได้ว่า

$$\tilde{y}_j = \tilde{y} + \tilde{\theta}_j \cdot z_j \quad (41)$$

และจากสมการ (41) และ (39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \tilde{y} + \tilde{\theta}_j \cdot z_j &= \tilde{F}_j \tilde{P}_j \\ \tilde{P}_j &= \tilde{F}_j^{-1} (\tilde{y} + \tilde{\theta}_j \cdot z_j) \end{aligned} \quad (42)$$

และจากสมการ (36) แสดงในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{aligned} \tilde{W}_L &= \sum_{j=1}^J \tilde{Q}_j \end{aligned} \quad (43)$$

จากสมการ (40), (42) และ (43) จะได้ว่า

$$\tilde{W}_L = \tilde{S} \sum_{j=1}^J \tilde{F}_j^{-1} (\tilde{y} + \tilde{\theta}_j \cdot z_j) \quad (44)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับการหมุนขององค์อาคารตัวที่  $j$  สามารถเขียนได้ว่า

$$\tilde{\theta}_j = \tilde{F}'_j \tilde{T}_j \quad (45)$$

โดยที่  $\tilde{\theta}_j$  คือเวกเตอร์การหมุนที่ระดับอ้างอิงใด ๆ ของโครงอาคารตัวที่  $j$

$\tilde{F}'_j$  คือเฟลกซ์บิลิตีเมตริกซ์ของแรงบิดขององค์อาคารตัวที่  $j$

$\tilde{T}_j$  คือเวกเตอร์ของแรงบิดที่จุดยอดสุดและแรงบิด ในรูปโพลีโนเมียลอันอันดับต่างๆ

และจากความสมมูลย์ของแรงบิด สมการ (34) อาจแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ว่า

$$\tilde{M}_{T_j} = \tilde{S} \cdot \tilde{T}_j \quad (46)$$

โดยที่  $\tilde{M}_{T_j}$  คือเวกเตอร์ของแรงบิดที่ระดับอ้างอิงใด ๆ  
 ในทำนองเดียวกันจากสมการ 38 , 40 และ 45 จะได้ว่า

$$\tilde{M}_T = \tilde{S} \sum_{j=1}^J [\tilde{F}_j^{-1} (\tilde{y} + \tilde{\theta} \cdot z_j) \cdot z_j + (\tilde{F}'_j)^{-1} \tilde{\theta}] \quad (47)$$

$$\text{โดยกำหนดให้ } \tilde{G}_1 = \tilde{S} \sum_{j=1}^J \tilde{F}_j^{-1}$$

$$\tilde{G}_2 = \tilde{S} \sum_{j=1}^J \tilde{F}_j^{-1} z_j$$

$$\tilde{G}_3 = \tilde{S} \sum_{j=1}^J [\tilde{F}_j^{-1} z_j + (\tilde{F}'_j)^{-1}]$$

จากสมการ (44) และ (47) สามารถหาค่า  $\tilde{y}$  และ  $\tilde{\theta}$  ได้คือ

$$\tilde{y} = [\tilde{G}_2 - \tilde{G}_3 \tilde{G}_2^{-1} \tilde{G}_1]^{-1} [\tilde{M}_T - \tilde{G}_3 \tilde{G}_2^{-1} \tilde{P}_L] \quad (48)$$

$$\tilde{\theta} = [\tilde{G}_2 - \tilde{G}_1 \tilde{G}_2^{-1} \tilde{G}_3]^{-1} [\tilde{P}_L - \tilde{G}_1 \tilde{G}_2^{-1} \tilde{M}_T] \quad (49)$$


จากสมการ (48) และ (49) ทำให้สามารถทราบค่าการเคลื่อนที่และการบิดขององค์อาคาร  
 ที่ทุกระดับอ้างอิงได้

สำหรับค่าการเคลื่อนที่ และการบิดขององค์อาคารที่  $j$  หาได้จากความสัมพันธ์  
 ดังที่กล่าวมาในตอนต้น ดังนั้นหากการกระจายแรงกระทำผ่านศูนย์กลางของโครงสร้างและแรงบิด  
 ขององค์อาคารใด ๆ ทุกระดับอ้างอิงได้โดยการแทนในสมการ (39) และ (45) จะได้ว่า

$$\tilde{P}_j = \tilde{F}_j^{-1} \tilde{y}_j \quad (50)$$

$$\tilde{T}_j = (\tilde{F}'_j)^{-1} \tilde{\theta}_j \quad (51)$$

ในกรณีโครงสร้างอาคารประกอบด้วย โครงอาคารหลายประเภทประกอบกัน ค่าที่ได้จากสมการ (50) และ (51) จะแสดงถึงสัดส่วนของการต้านทานแรงกระทำด้านข้างที่อาจก่อให้เกิด แรงกระทำผ่านศูนย์กลางของโครงสร้าง และแรงบิดของแต่ละโครงอาคาร



ศูนย์วิทยพัชกร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย