บทที่ ๓

การหาคำตอบของเมตริกซ์สมการปกติโดยวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

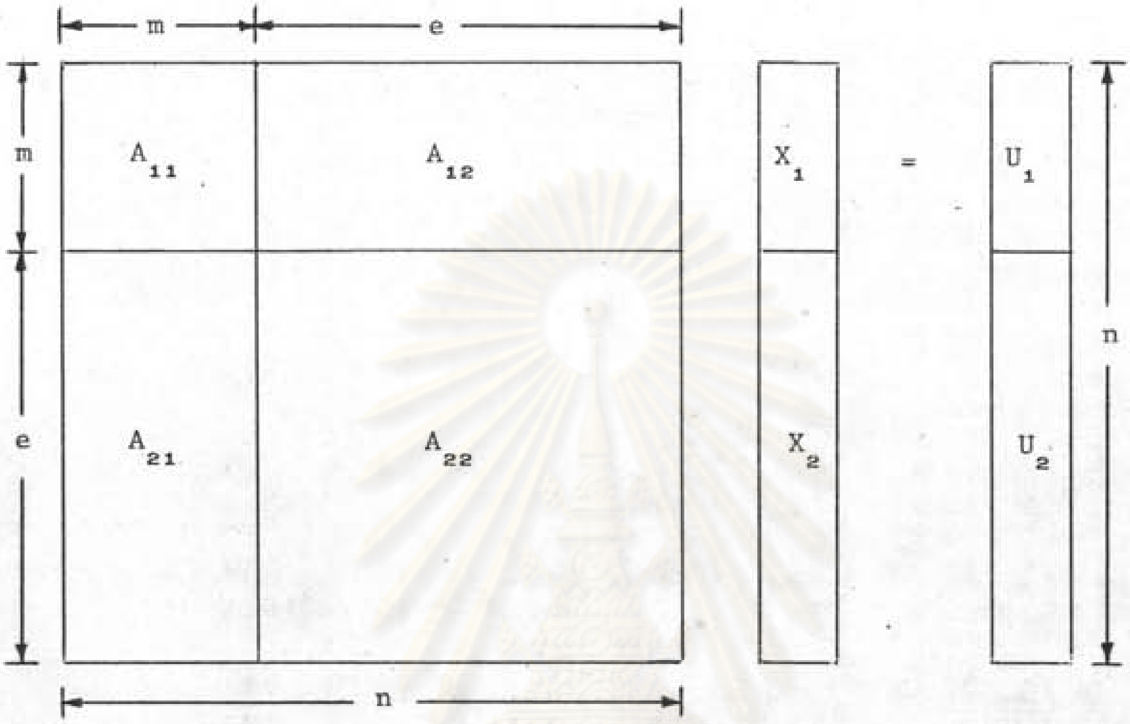
ปัญหาของการปรับแก้ขนาดใหญ่ ๆ มักจะมาลงเอยที่การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นซึ่งก็คือ สมการปกติลดรูป นอกเหนือจากการจัดรูปแบบเพื่อให้ได้โครงสร้างของเมตริกซ์เป็นลักษณะพิเศษแล้ว การเลือกวิธีการสำหรับหาคำตอบก็ควรกระทำในลักษณะที่ยังคงรูปแบบของโครงสร้างเดิมอยู่และคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วย โดยปกติความสามารถและประสิทธิภาพของวิธีการที่เลือกมักจะเป็นขีดจำกัดขนาดของระบบสมการที่จะแก้ด้วยคอมพิวเตอร์ที่กำหนดให้ ฉะนั้นการเลือกวิธีการที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบสมการที่กำหนดให้ โดยมีโครงสร้างของสมการปกติลดรูปแบบเฉพาะแต่ละกรณีจึงมีความสำคัญทีเดียว

โดยทั่วไปวิธีการที่ใช้สามารถแยกออกได้เป็นสองพวกใหญ่ ๆ คือ ประเภทแรกเป็นแบบกรรมวิธีทำซ้ำ (Iterative Processes) ส่วนอีกประเภทหนึ่งเป็นแบบหาคำตอบโดยตรง (Direct Solution Procedures) แบบกรรมวิธีทำซ้ำมีหลายวิธีเช่น Block - Gauss - Seidel , Block Gauss - Seidel With Acceleration , Block Successive Over Relaxation (BSOR) และ Conjugate Gradient Method วิธีการสำหรับการหาคำตอบโดยตรงก็กระทำได้หลายวิธี เช่น Gaussian Elimination , Gauss - Jordan Method , Cholesky Method , Partitioning Method และ Recursive Partitioning Method การใช้แบบกรรมวิธีทำซ้ำมักไม่ต้องใช้หน่วยความจำมาก เขียนโปรแกรมได้ง่าย แต่อัตราการเข้าสู่คำตอบมักจะเป็นปัญหา ซึ่งทั้งนี้จะแล้วแต่ลักษณะและคุณสมบัติของสมการ ในระยะหลัง ๆ มีแนวโน้มที่จะใช้วิธีการหาคำตอบโดยตรงกับระบบสมการปกติลดรูปมากขึ้น (วิชา จิวาลัย, 2524)

๓.๑ การหาคำตอบโดยตรงโดยวิธีการแบ่งส่วน

ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีหาเมตริกซ์ส่วนกลับมักจะมีปัญหาที่คอมพิวเตอร์ที่ใช้มีหน่วยความจำไม่พอสำหรับหาเมตริกซ์ส่วนกลับของระบบสมการที่มีอยู่ การใช้วิธีการแบ่งส่วนเป็นวิธีหนึ่งซึ่งสามารถแก้ปัญหานี้ได้ เพราะวิธีการแบ่งส่วนสามารถกำหนดขนาดของเมตริกซ์ย่อยที่จะหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้

จากสมการ $A X' = U$ (3.1)



รูป 3.1 สมการปกติ

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็นสองระดับดังรูป 3.1 ทำให้

A_{11}	มีขนาด	$m \times m$
A_{12}	มีขนาด	$m \times e$
A_{22}	มีขนาด	$e \times e$
A_{21}	มีขนาด	$e \times m$
X_1, U_1	มีขนาด	$m \times 1$
X_2, U_2	มีขนาด	$e \times 1$

จากรูป 3.1

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = U_1 \tag{3.2}$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = U_2 \tag{3.3}$$

จากสมการ (3.2)

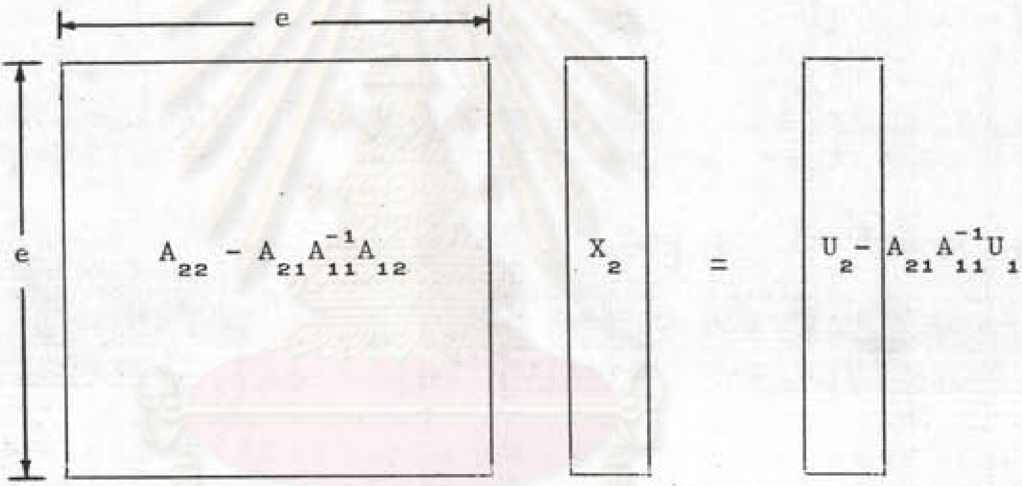
$$X_1 = A_{11}^{-1}(U_1 - A_{12}X_2) \tag{3.4}$$

แทนค่า X_1 จากสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.3)

$$A_{21}A_{11}^{-1}(U_1 - A_{12}X_2) + A_{22}X_2 = U_2$$

$$A_{21}A_{11}^{-1}U_1 - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}X_2 + A_{22}X_2 = U_2$$

$$A_{22}X_2 - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}X_2 = U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \tag{3.5}$$



รูป 3.2 สมการปกติลดรูป

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.5) หรือรูป 3.2 กับสมการ (3.1) หรือรูป 3.1 จะเห็นว่าขนาดของสมการลดจาก n เหลือเพียง e อาศัยกรรมวิธีคือแบ่งเป็นสองระดับเช่นเดิม แล้วกำจัดตัวไม่ทราบค่าออกไป ขนาดของสมการใหม่ก็จะลดลงเรื่อย ๆ ในที่สุดก็จะเหลือเพียงระบบสมการขนาดเล็กพอที่จะหาคำตอบได้โดยตรง หลังจากนั้นก็แทนค่ากลับเพื่อหาส่วนเวคเตอร์ย่อยของตัวไม่ทราบค่าที่ถูกกำจัดออกไปย้อนกลับขึ้นไปโดยหาจากสมการ (3.4)

จะเห็นว่าการหาคำตอบโดยวิธีนี้ มีการหาส่วนกลับของเมตริกซ์ขนาด $m \times m$ เท่า

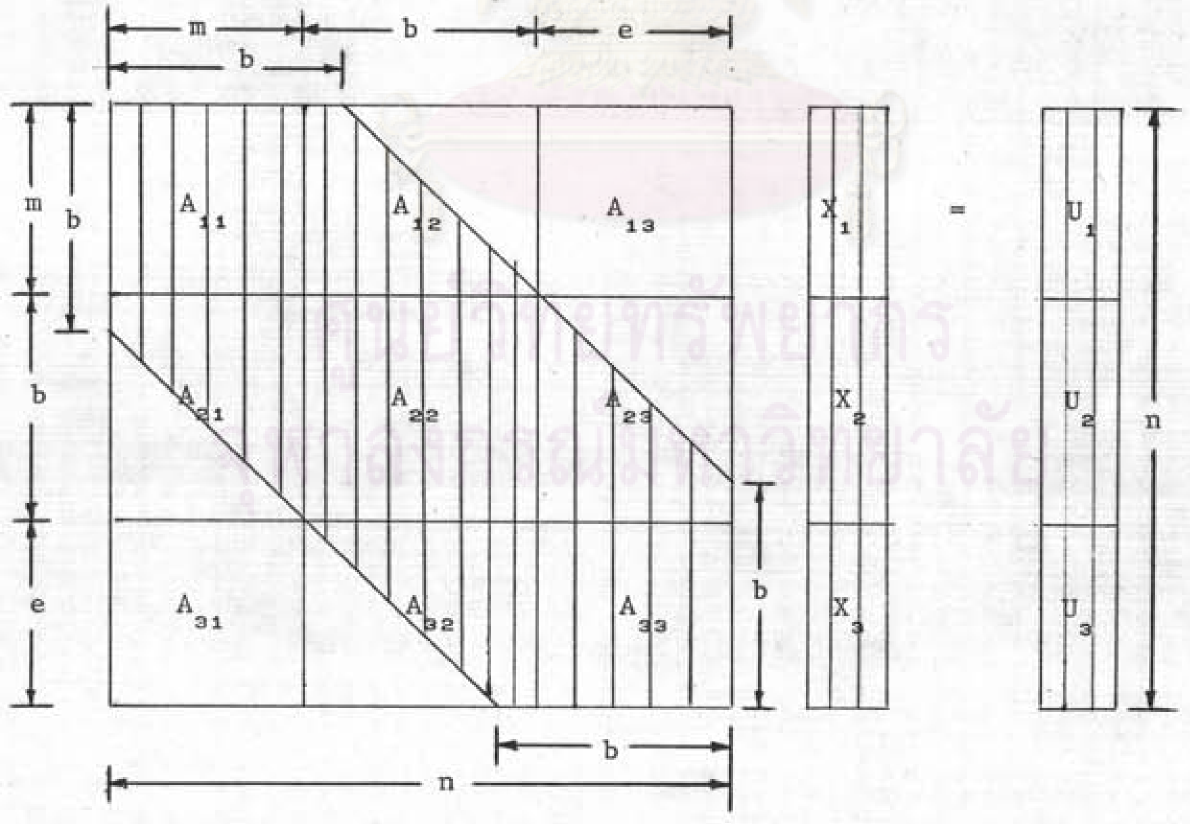
นั้น ทำให้คอมพิวเตอร์ที่มีโปรแกรมสามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับขนาดเล็กสามารถหาคำตอบของระบบสมการที่มีขนาดใหญ่กว่าได้

3.2 การหาคำตอบโดยตรงโดยวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

การหาคำตอบโดยตรงโดยวิธีการแบ่งส่วน ในบางครั้งพบว่าระบบสมการที่จะหาคำตอบเป็นเมตริกซ์ที่มีรูปแบบพิเศษ เช่น เมตริกซ์แถบ หรือแบนด์บอร์เดอร์เมตริกซ์ ซึ่งเมตริกซ์เหล่านี้มีค่าของธาตุมูลนอกแถบหรือบอร์เดอร์มีค่าเป็นศูนย์. หากแบ่งเมตริกซ์ดังกล่าวให้เหมาะสมแล้วจะทำให้เมตริกซ์ย่อยบางเมตริกซ์เป็นเมตริกซ์ศูนย์ ซึ่งคุณสมบัติพิเศษของเมตริกซ์ศูนย์ คือเมื่อนำมาคูณกับเมตริกซ์อื่นจะได้เมตริกซ์ศูนย์จึงไม่ต้องคูณทำให้สามารถลดจำนวนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ลงไป เป็นผลทำให้ประสิทธิภาพของการหาคำตอบโดยตรงโดยการแบ่งส่วนเพิ่มขึ้นอีก ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่าวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน

ให้ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรแถบ มีขนาด $n \times n$ มีความกว้างแถบเท่ากับ b จากสมการ

$$A X = U \tag{3.6}$$



รูป 3.3 เมตริกซ์สมการปกติที่อยู่ในรูปเมตริกซ์แถบ

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็น 3 ระดับดังรูป 3.3 โดยให้ $m \leqslant b$ ทำให้

A_{11}	มีขนาด	$m \times m$
A_{12}	มีขนาด	$m \times b$
A_{13}	มีขนาด	$m \times e$
A_{21}	มีขนาด	$b \times m$
A_{22}	มีขนาด	$b \times b$
A_{23}	มีขนาด	$b \times e$
A_{31}	มีขนาด	$e \times m$
A_{32}	มีขนาด	$e \times b$
A_{33}	มีขนาด	$e \times e$
X_1, U_1	มีขนาด	$m \times 1$
X_2, U_2	มีขนาด	$b \times 1$
X_3, U_3	มีขนาด	$e \times 1$

การแบ่งลักษณะนี้มีผลทำให้ A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์ หากกำจัดเวคเตอร์ X_1 ออกไปในลักษณะเดียวกับสมการ (3.5) จะได้

$$\left[\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} U_1$$

$$\left[\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ A_{31}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{13} \\ A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_3 - A_{31}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{13} \\ A_{32} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_3 - A_{31}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$\begin{bmatrix} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

การหาเวคเตอร์ X_1 สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกับสมการ (3.4)

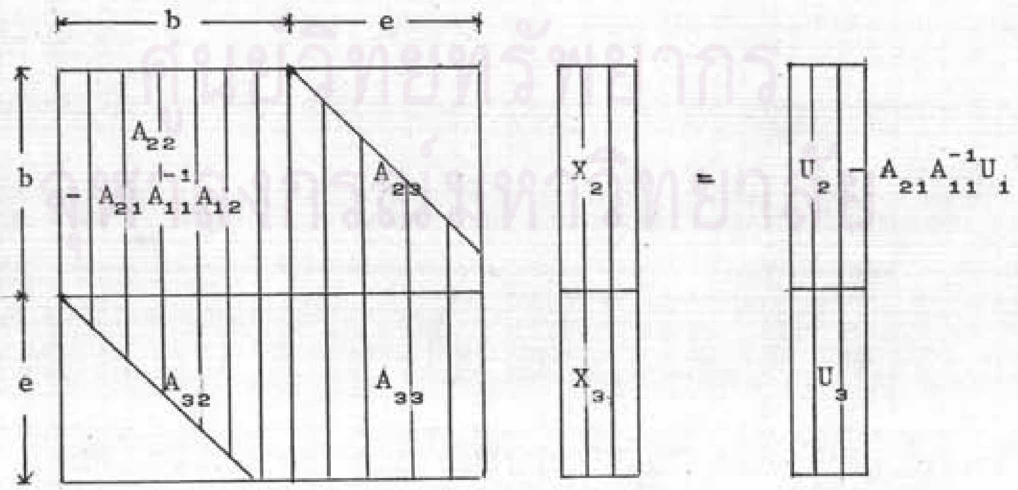
$$X_1 = A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1}\begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$= A_{11}^{-1}U_1 - \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$= A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2 - A_{11}^{-1}A_{13}X_3$$

เนื่องจาก A_{13} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$X_1 = A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2 \tag{3.8}$$



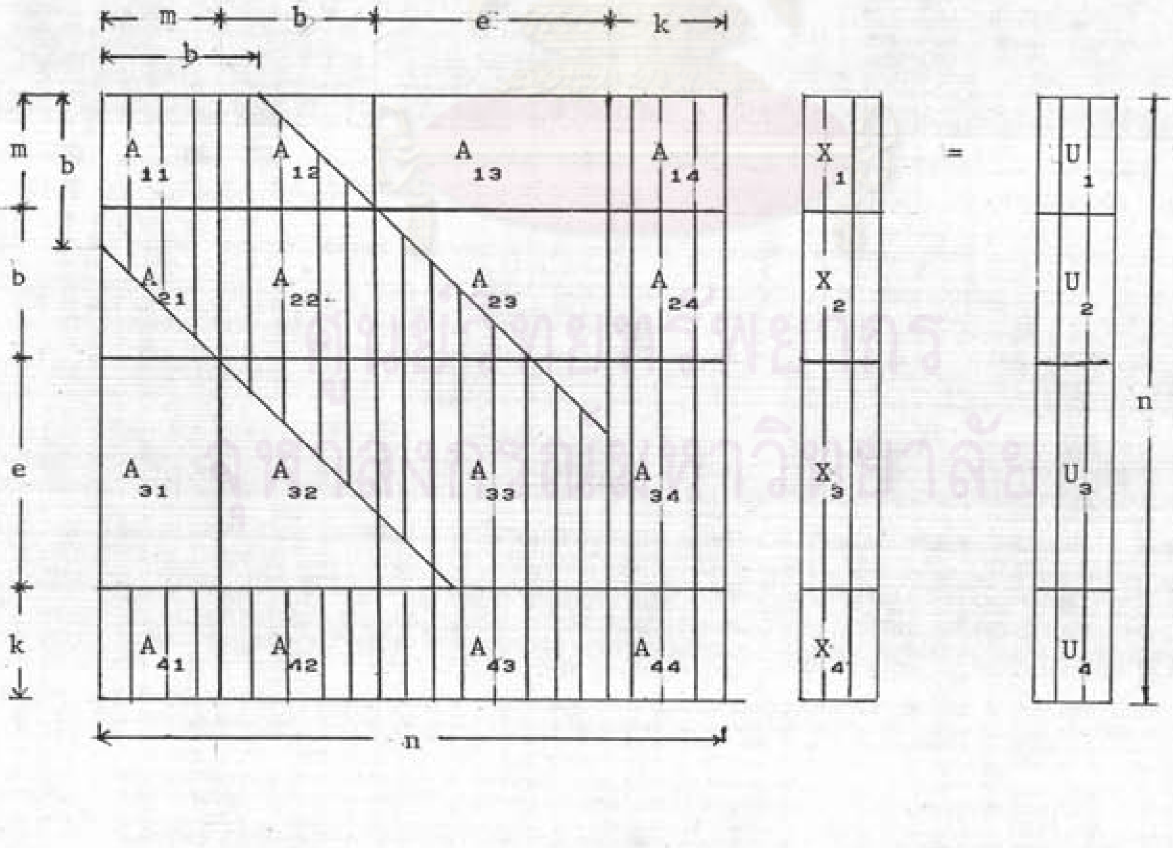
รูป 3.4 เมตริกซ์สมการปกติลดรูปที่อยู่ในรูปของเมตริกซ์แถบ

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.6) หรือ รูป 3.3 กับสมการ (3.7) หรือ รูป 3.4 จะเห็นว่าขนาดของสมการ (3.7) มีขนาดเล็กกว่าสมการ (3.6) เท่ากับ m แต่ทั้งรูปแบบแถบและความกว้างของแถบยังคงเดิมอยู่ การกำจัด X_1 มีผลเฉพาะส่วนของ A_{22} และ U_2 อาศัยกรรมวิธีแบ่งออกเป็นสามระดับเช่นเดิม แล้วกำจัดตัวไม่ทราบค่าออกไปขนาดของระบบสมการใหม่ก็จะลดลงเรื่อย ๆ จนในที่สุดก็จะเหลือระบบสมการขนาดเล็กที่พอจะหาคำตอบได้โดยตรง หลังจากนั้นก็เป็นการแทนค่ากลับเพื่อหาส่วนของเวคเตอร์ย่อยของตัวไม่ทราบค่าที่ถูกกำจัดออกไปย้อนกลับขึ้นไปจากสมการ (3.8)

3.3 การหาคำตอบโดยตรงของระบบสมการที่มีเมตริกซ์ในรูปแบนด์บอร์เดอร์โดยวิธีรีเดอร์ซีฟ-พาทิชัน

ให้ A เป็นแบนด์บอร์เดอร์เมตริกซ์มีขนาด $n \times n$ มีความกว้างของแถบเท่ากับ b ความกว้างบอร์เดอร์เท่ากับ k

จากสมการ $$A X = U \qquad (3.9)$$



รูป 3.5 เมตริกซ์สมการปกติที่อยู่ในรูปแบนด์บอร์เดอร์

เมื่อแบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็นสี่ระดับดังรูป โดยให้ $m \leqslant b$ ทำให้

A_{11}	มีขนาด	$m \times m$
A_{12}	มีขนาด	$m \times b$
A_{13}	มีขนาด	$m \times e$
A_{14}	มีขนาด	$m \times k$
A_{21}	มีขนาด	$b \times m$
A_{22}	มีขนาด	$b \times b$
A_{23}	มีขนาด	$b \times e$
A_{24}	มีขนาด	$b \times k$
A_{31}	มีขนาด	$e \times m$
A_{32}	มีขนาด	$e \times b$
A_{33}	มีขนาด	$e \times e$
A_{34}	มีขนาด	$e \times k$
A_{41}	มีขนาด	$k \times m$
A_{42}	มีขนาด	$k \times b$
A_{43}	มีขนาด	$k \times e$
A_{44}	มีขนาด	$k \times k$
X_1, U_1	มีขนาด	$m \times 1$
X_2, U_2	มีขนาด	$b \times 1$
X_3, U_3	มีขนาด	$e \times 1$
X_4, U_4	มีขนาด	$k \times 1$

การแบ่งลักษณะนี้มีผลทำให้ A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์ หากกำจัดเวคเตอร์ X_1 ออกไปในลักษณะเดียวกับสมการ (3.5) จะได้

$$\left[\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} U_1$$

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} & A_{11}^{-1}A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ A_{31}A_{11}^{-1}U_1 \\ A_{41}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{13} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{14} \\ A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} & A_{31}A_{11}^{-1}A_{14} \\ A_{41}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{41}A_{11}^{-1}A_{13} & A_{41}A_{11}^{-1}A_{14} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_3 - A_{31}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_4 - A_{41}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก A_{13} และ A_{31} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$\begin{bmatrix} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} & A_{24} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{14} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} - A_{41}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{43} & A_{44} - A_{41}A_{11}^{-1}A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 - A_{21}A_{11}^{-1}U_1 \\ U_3 \\ U_4 - A_{41}A_{11}^{-1}U_1 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

การหาเวคเตอร์ X_1 สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกับสมการ (3.4) กล่าวคือ

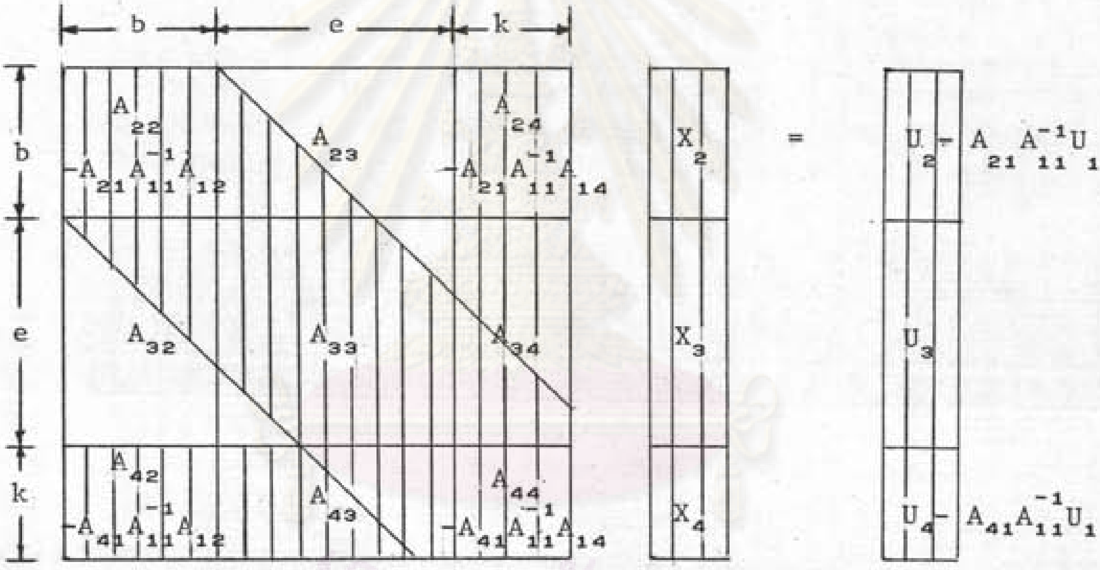
$$X_1 = A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$$= A_{11}^{-1}U_1 - \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1}A_{13} & A_{11}^{-1}A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

$$= A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2 - A_{11}^{-1}A_{13}X_3 - A_{11}^{-1}A_{14}X_4$$

เนื่องจาก A_{13} เป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$X_1 = A_{11}^{-1}U_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2 - A_{11}^{-1}A_{14}X_4 \qquad (3.11)$$



รูป 3.6 เมตริกซ์สมการปกติลดรูปที่อยู่ในรูปแบนด์บอร์เดอร์

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.6) หรือ รูป 3.5 กับสมการ (3.10) หรือ รูป 3.6 จะเห็นว่าขนาดของสมการใหม่มีขนาดเล็กกว่าขนาดของสมการเดิมเท่ากับ m แต่รูปแบบแถบ รูปแบบบอร์เดอร์ ขนาดแถบและขนาดบอร์เดอร์ยังคงเดิมอยู่ การกำจัด X_1 เมื่อพิจารณาเมตริกซ์ A จะเห็นว่ามีผลเฉพาะ A_{22} , A_{42} , A_{24} และ A_{44} ซึ่งอยู่ในเฉพาะส่วนของแถบและบอร์เดอร์อาศัยกรรมวิธีเดิมอีกคือ แบ่งเป็นสี่ระดับเช่นเดิมแล้วกำจัดตัวไม่ทราบค่าออกไปขนาดของสมการใหม่ก็จะลดลงเรื่อย ๆ ในที่สุดก็จะเหลือเพียงระบบสมการขนาดเล็กพอที่จะหาคำตอบได้โดยตรงหลังจากนั้นก็เป็นการแทนค่ากลับเพื่อหาส่วนเวคเตอร์ย่อยของตัวไม่ทราบค่าที่ถูกกำจัดออกไปไล่ย้อนกลับขึ้นไป ตามสมการ (3.11)