บทที่ 2

การเก็บค่าธาตุมูลของเมตริกซ์สมมาตรให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์

โดยปกติการเก็บค่าของธาตุมูลของเมตริกซ์ทั่วไปในคอมพิวเตอร์ จะต้องเก็บค่าของธาตุมูลทุกค่า แต่ถ้าเป็นเมตริกซ์สมมาตรจะสามารถเก็บเฉพาะในส่วนของสามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular) หรือส่วนของสามเหลี่ยมบน (Upper Triangular) ถ้าเป็นเมตริกซ์สมมาตรที่มีลักษณะพิเศษอื่นอีกเช่น เมตริกซ์สมมาตรแถบและเมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์ก็จะเก็บค่าธาตุมูลในส่วนของสามเหลี่ยมล่างหรือสามเหลี่ยมบนที่อยู่ในแถบและบอร์เดอร์เท่านั้น วิธีที่สะดวกในการเก็บค่าของธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์กล่าวคือ นำค่าของธาตุมูลไปเก็บในเวคเตอร์ในตำแหน่งที่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งในเมตริกซ์กับในเวคเตอร์ได้ง่าย เมื่อต้องการนำค่าของธาตุมูลในตำแหน่งของเมตริกซ์มาใช้ ก็ใช้ความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นหาค่าของธาตุมูลนั้นจากเวคเตอร์

2.1 การเก็บเมตริกซ์สมมาตร

– เมตริกซ์สมมาตร

เมตริกซ์จตุรัสใด ๆ A ถ้า $A = A^T$ แล้ว A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตร

ให้ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด 5 × 5

เนื่องจาก A เป็นเมตริกซ์สมมาตร นั่นคือ $A_{ij} = A_{ji}$ หรือธาตุมูลในแถวที่ i ใด ๆ จะเหมือนกับธาตุมูลในสดมภ์ที่ i นั้นทุกประการ ผลที่ตามมาซึ่งสามารถทำได้คือ การเก็บเมตริกซ์ในคอมพิวเตอร์เพียงแต่เก็บส่วนของสามเหลี่ยมล่างหรือส่วนของสามเหลี่ยมบนของ A ไว้ก็เพียงพอแล้ว เพราะสามารถใช้ความสมมาตรหาธาตุมูลเหนือแนวทแยงมุม (Diagonal) ได้ (หรือใต้แนวทแยงมุมในกรณีเก็บส่วนบนไว้)

ให้ X เป็นเวคเตอร์ขนาด 15 สำหรับเก็บค่าธาตุมูลของสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์สมมาตร A ไว้ตามตำแหน่งดังรูป 2.2

ให้ t เป็นขนาดของเวคเตอร์ X

$n \times n$ เป็นขนาดของเมตริกซ์ A

i, j เป็นตำแหน่งธาตุมูลในแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์ A p เป็นตำแหน่งธาตุมูลในเวคเตอร์ X

$$t = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (2.1)$$

$$p = \frac{1}{2}i(i-1) + j \ ; \ i \geq j \qquad (2.2)$$

a_{11}				
a_{21}	a_{22}			
a_{31}	a_{32}	a_{33}		
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

รูป 2.1 สามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์สมมาตร A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

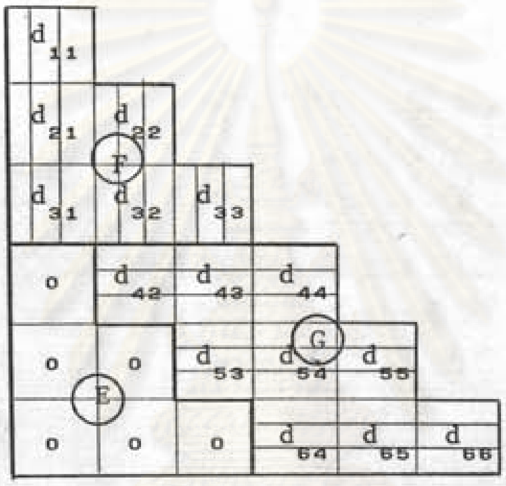
รูป 2.2 เวคเตอร์ X

2.2 การเก็บเมตริกซ์สมมาตรแถบ

- เมตริกซ์สมมาตรแถบ

เมตริกซ์สมมมาตร D ใด ๆ ถ้าธาตุมูลนอกแถบมีค่าเป็นศูนย์แล้ว D จะเป็นเมตริกซ์สมมาตรแถบ จำนวนธาตุมูลจากแนวทแยงมุมไปถึงขอบของแถบเรียกว่าความกว้างแถบ

ให้ D เป็นเมตริกซ์สมมาตรแถบขนาด 6×6 และมีความกว้างแถบเท่ากับ 3



รูป 2.3 สามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์สมมาตรแถบ D

เมื่อพิจารณาธาตุมูลในส่วนของสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์ D สามารถแบ่งออกได้เป็นสามส่วนคือ F, E และ G โดยที่

F เป็นส่วนที่ $i \leq 3$

E เป็นส่วนที่ $i > 3$ และ $i - j \geq 3$

G เป็นส่วนที่ $i > 3$ และ $i - j < 3$

ให้ Y เป็นเวคเตอร์ขนาด 15 เก็บค่าธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์ในสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์ D คือ เก็บส่วน F และ G ตามตำแหน่งดังรูป 2.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_{11}	d_{21}	d_{22}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	d_{64}	d_{65}	d_{66}

รูป 2.4 เวคเตอร์ Y

จะเห็นว่าในส่วนของ F ตำแหน่งในเวคเตอร์ Y เป็นปกติเหมือนกับเมตริกซ์สมมาตร แต่ในส่วน G ตำแหน่งจะเลื่อนขึ้นไปแทนในส่วนของ E ซึ่งเป็นผลให้ขนาดของเวคเตอร์ Y ลดลงเท่ากับจำนวนของธาตุมูลในส่วนของ E เมื่อเปรียบเทียบกับการเก็บเมตริกซ์สมมาตรทั่วไป

ให้ s เป็นขนาดของเวคเตอร์ Y

$n \times n$ เป็นขนาดของเมตริกซ์ D

b เป็นความกว้างแถบ

i, j เป็นตำแหน่งของธาตุมูลแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์ D

q เป็นตำแหน่งของธาตุมูลในเวคเตอร์ Y

$$s = \frac{1}{2}[n(n+1) - (n-b)(n-b+1)] \qquad (2.3)$$

$$q = \frac{1}{2}i(i-1) + j \;;\; i \geqslant j \text{ และ } i \leqslant b \qquad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2}[i(i-1) - (i-b)(i-b+1)] + j \qquad (2.5)$$

$$; i \geqslant j \,,\; i > b \text{ และ } i - j < b$$

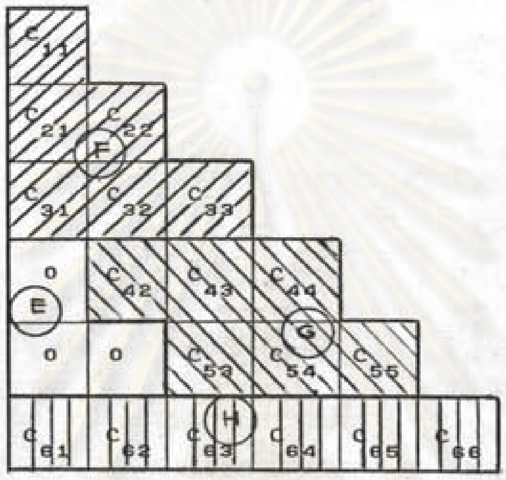
2.3 การเก็บเมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์

– เมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์

เมตริกซ์สมมาตร C ใด ๆ ถ้าธาตุมูลนอกแถบและบอร์เดอร์มีค่าเป็นศูนย์แล้ว C จะเป็นเมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์ จำนวนธาตุมูลจากแนวทแยงมุมไปถึงขอบของแถบเรียกว่า

ความกว้างแถบ จำนวนธาตุมูลจากแถวสุดท้ายหรือสดมภ์สุดท้ายถึงขอบของบอร์เดอร์เรียกว่า ความกว้างบอร์เดอร์

ให้ C เป็นเมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์ขนาด 6 × 6 ความกว้างแถบเท่ากับ 3 ความกว้างบอร์เดอร์เท่ากับ 1



รูป 2.5 สามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์สมมาตรแบนด์บอร์เดอร์ C

เมื่อพิจารณาธาตุมูลในส่วนของสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์ C สามารถแบ่งออกได้เป็นสี่ส่วน คือ F,E,G และ H โดยที่

F เป็นส่วนที่ $i \leq 3$

E เป็นส่วนที่ $i > 3$, $i - j \geq 3$ และ $i \leq 5$

G เป็นส่วนที่ $i > 3$, $i - j < 3$ และ $i \leq 5$

H เป็นส่วนที่ $i > 5$

ให้เวคเตอร์ Z ขนาด 18 เก็บค่าธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์ในส่วนสามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์ C คือเก็บส่วน E,G และ H ตามลำดับ ดังรูป 2.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
c_{11}	c_{21}	c_{22}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66}

รูป 2.6 เวคเตอร์ Z

จะพบว่าในส่วนของ F และ G มีการเก็บในเวคเตอร์ Z เหมือนกับเมตริกซ์สมมาตรแถบ แล้วต่อด้วยตำแหน่งของธาตุมูลในส่วน H ตามลำดับ

ให้ $n * n$ เป็นขนาดของเมตริกซ์ C

b เป็นความกว้างแถบ

k เป็นความกว้างบอร์เดอร์

u เป็นขนาดของเวคเตอร์ Z

i, j เป็นตำแหน่งของธาตุมูลในแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์ C

r เป็นตำแหน่งของธาตุมูลในเวคเตอร์ Z

$$u = \frac{1}{2}[n(n+1) - (n-b-k)(n-b-k+1)] \qquad (2.6)$$

$$r = \frac{1}{2}i(i-1) + j \quad ; i \geqslant j \text{ และ } i \leqslant b \qquad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2}[i(i-1) - (i-b)(i-b+1)] + j \qquad (2.8)$$

$; i \geqslant j , i > b , i - j < b$ และ $i \leqslant (n-k)$

$$= \frac{1}{2}[i(i-1) - (n-b-k)(n-b-k+1)] \quad j \qquad (2.9)$$

$; i \geqslant j$ และ $i > (n-k)$

2.4 การใช้เวคเตอร์เก็บค่าคงที่ประจำแถว

การหาตำแหน่งของธาตุมูลของเมตริกซ์ในเวคเตอร์ที่ใช้เก็บ จะต้องมีการคำนวณหาค่า $\frac{1}{2}(i-1)$ ทุกครั้ง ซึ่งค่านี้เป็นค่าคงที่ของธาตุมูลในแถวที่ i เพื่อจะลดจำนวนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ให้มีการหาค่านี้ในแต่ละแถวเพียงครั้งเดียว จึงควรหาค่านี้แล้วเก็บไว้ในเวคเตอร์ เมื่อต้องการหาตำแหน่งธาตุมูลของเมตริกซ์ในเวคเตอร์ ก็นำค่าของ $\frac{1}{2}i(i-1)$ ที่หาไว้แล้วมาบวกกับค่าของ j ก็จะได้ตำแหน่งของธาตุมูลในเวคเตอร์

จากสมการ 2.2 $$p = \frac{1}{2}i(i+j) + j \; ; \; i \geqslant j$$

ให้เวคเตอร์ U เป็นเวคเตอร์ใช้เก็บค่าคงที่ประจำแถว

$$U(i) = \frac{1}{2}i(i-1) \tag{2.10}$$

เมื่อแทนสมการ (2.10) ลงในสมการ (2.2) จะได้

$$P = U(i) + j \quad ; \quad i \geqslant j \tag{2.11}$$

การหาค่าของเวคเตอร์ U สามารถหาได้อีกวิธีหนึ่งคือ

$$U(i) = U(i-1) + i - 1 \; ; \; U(1) = 0 \tag{2.12}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (2.10) และสมการ (2.12) จะเห็นว่าสมการ (2.12) มีจำนวนขั้นตอนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์น้อยกว่าสมการ (2.10) จึงควรใช้สมการ (2.12) ในการหาค่าของเวคเตอร์ U ในทำนองเดียวกันวิธีการนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการเก็บในข้อ 2.2 และ 2.3 ได้

จะเห็นได้ว่าวิธีการดังกล่าวจะสามารถลดจำนวนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้เป็นจำนวนมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งมีจำนวนการหาตำแหน่งของธาตุมูลมากครั้ง แต่ข้อเสียคือจะต้องใช้หน่วยความจำภายในเพิ่มในการเก็บค่าเวคเตอร์ของค่าคงที่ประจำแถว

2.5 การเก็บเมตริกซ์สมมาตรในรูปแบบอื่น (TEWARSON, 1973)

ให้ H เป็นเมตริกซ์สมมาตรมีค่าของธาตุมูลดังรูป 2.7

ให้เวคเตอร์ E เก็บค่าธาตุมูลของเมตริกซ์ H ดังรูป 2.8

เวคเตอร์ F เก็บค่าตำแหน่งของธาตุมูลในแนวทแยงมุมในเวคเตอร์ E ดังรูป 2.9

h_{11}				
h_{21}	h_{22}			
o	h_{32}	h_{33}		
o	h_{42}	o	h_{44}	
o	h_{52}	o	h_{54}	h_{55}

รูป 2.7 สามเหลี่ยมล่างของเมตริกซ์สมมาตร H

ให้เวคเตอร์ E เก็บค่าธาตุมูลของเมตริกซ์ H ดังรูป 2.8

เวคเตอร์ F เก็บค่าตำแหน่งของธาตุมูลในแนวทแยงมุมในเวคเตอร์ E ดังรูป 2.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_{11}	h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{33}	h_{42}	o	h_{44}	h_{52}	o	h_{54}	h_{55}

รูป 2.8 เวคเตอร์ E

1	2	3	4	5
1	3	5	8	12

รูป 2.9 เวคเตอร์ F

ตำแหน่งของ h_{ij} ในเวคเตอร์ E จะเท่ากับ $F(i) - (i-j)$ เมื่อ

$F(i) - (i-j) \quad F(i-1)$ นอกนั้น $h_{ij} = 0$

เช่นการหาตำแหน่งของ h_{53}

$$
\begin{aligned}
F(i) - (i-j) &= F(5) - (5-3) \\
&= 12 - 2 \\
&= 10 \\
F(i-1) &= F(4) \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$F(i) - (i-j) \quad F(i-1)$

ตำแหน่งของ h_{53} คือ $E(10)$

การหาตำแหน่งของ h_{31}

$$
\begin{aligned}
F(i) - (i-j) &= F(3) - (3-1) \\
&= 5 - 2 \\
&= 3 \\
F(i-1) &= F(2) \\
&= 3 \\
F(i) - (i-j) &= F(i-1)
\end{aligned}
$$

$h_{31} = 0$

จะเห็นว่าวิธีดังกล่าวถ้าเป็นเมตริกซ์สมมาตรแถบที่มีแถบไม่เต็มจะทำให้ขนาดของเวคเตอร์ที่ใช้เก็บค่าเล็กลง และการหาค่าของธาตุมูลของเมตริกซ์จากเวคเตอร์สามารถทำได้รวดเร็วแต่ข้อเสียก็คือ

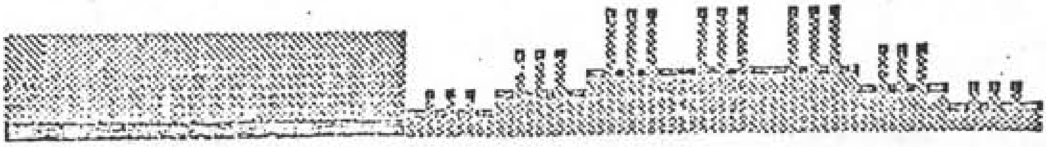
1. การหาค่าของเวคเตอร์ F ซึ่งเป็นตำแหน่งของธาตุมูลในแนวทแยงมุมทำได้ยากกว่า

2. หากใช้วิธีนี้เก็บค่าธาตุมูล ถ้าในระหว่างการประมวลผลเมตริกซ์มีรูปเปลี่ยนไป ก็จะทำให้ตำแหน่งของธาตุมูลในเวคเตอร์เปลี่ยนไป ดังนั้นเพื่อที่จะให้ทราบค่าในเวคเตอร์ F ที่เปลี่ยนไปจึงต้องเพิ่มขั้นตอนในการหาค่าขึ้นอีกจึงไม่เหมาะสม

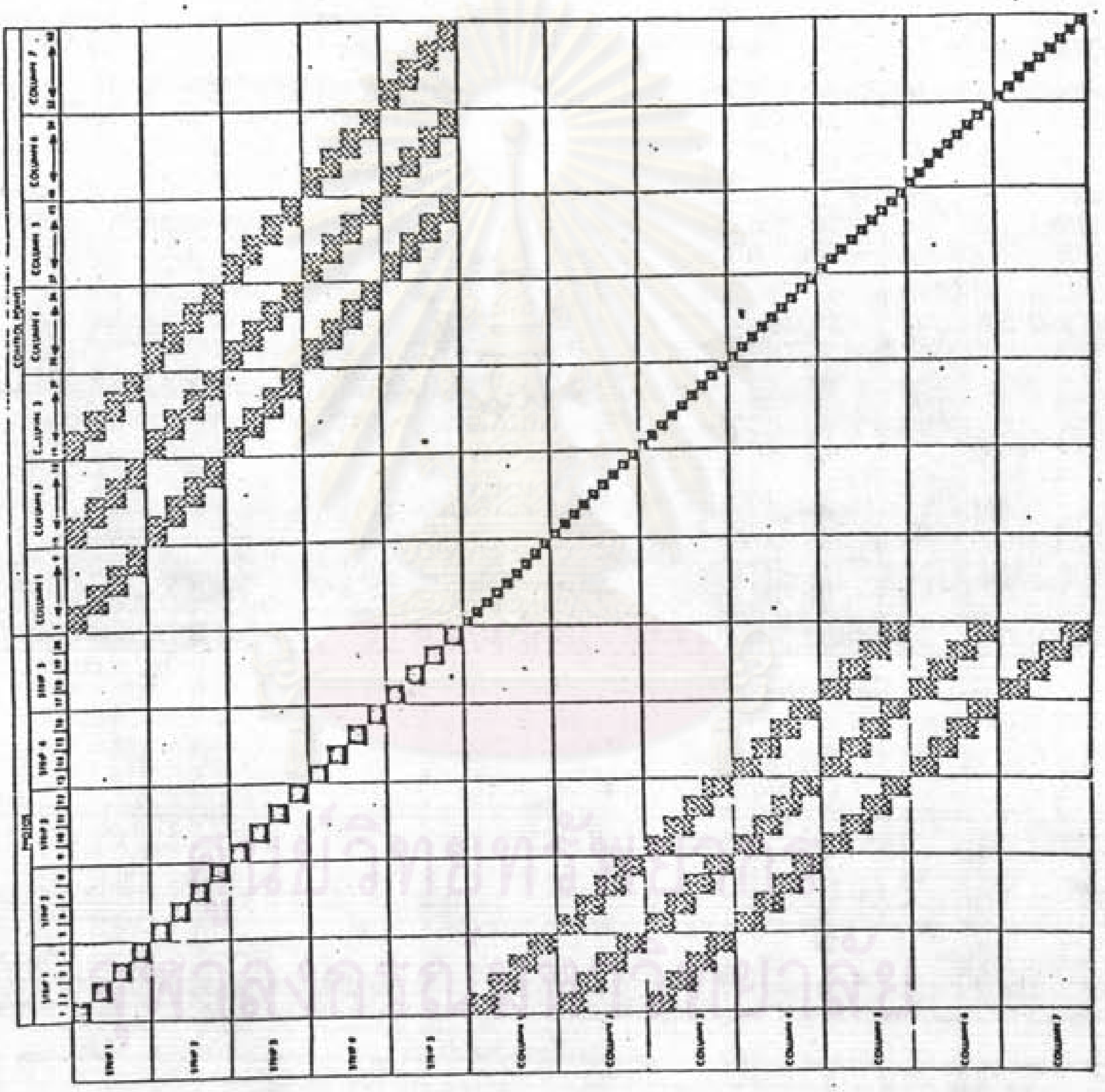
2.5 การเก็บระบบคอลแลพซ์ (Collapesed-System) (Brown, 1974)

การเก็บระบบคอลแลพซ์เป็นการเก็บค่าธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์ในแถวที่ i ของเมตริกซ์ไปเก็บในแถวที่ i ของอีกเมตริกซ์หนึ่ง ซึ่งทำให้เมตริกซ์ใหม่มีขนาดเล็กกว่าเมตริกซ์เดิมมาก เมตริกซ์ที่ใช้เก็บค่าธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์เรียกว่าคอลแลพซ์เมตริกซ์ (Collapesed Matrix) ดังตัวอย่างในรูป 2.10 และ รูป 2.11 จะเห็นได้ว่าวิธีนี้ถ้าเป็นสปาร์สเมตริกซ์ซึ่งมีธาตุมูลที่เป็นศูนย์เป็นจำนวนมาก การเก็บโดยวิธีนี้จะใช้หน่วยความจำน้อยมาก แต่ข้อเสียคือ ไม่เหมาะกับวิธีรีเคอร์ซีฟพาทิชัน โดยเฉพาะการหาเมตริกซ์ส่วนกลับเพราะผลที่ใช้จากการคำนวณจะเป็นเมตริกซ์สมบาตรเต็ม การเก็บโดยวิธีนี้ก็จะไม่ประหยัดหน่วยความจำ

วิธีนี้สามารถประยุกต์ให้เก็บอยู่ในลักษณะของเวคเตอร์ได้ โดยให้แต่ละเวคเตอร์เก็บค่าธาตุมูลที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละแถว ซึ่งจะต้องให้เวคเตอร์มีจำนวนเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์นั้น



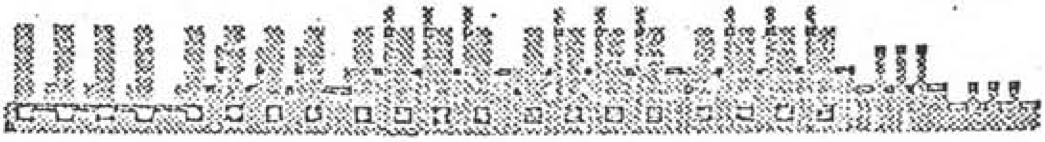
รูป 2.10 ข.



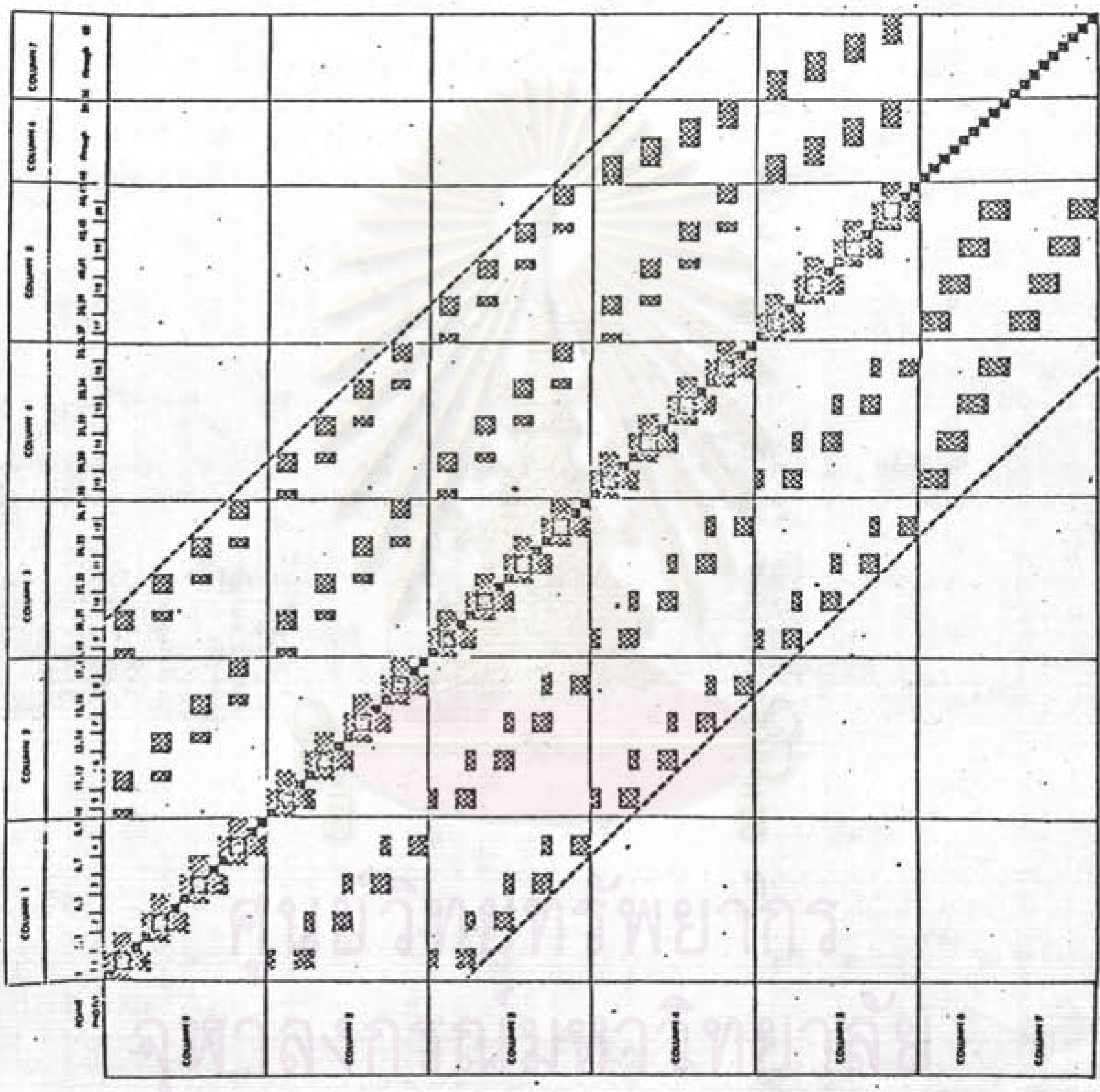
รูป 2.10 ก.

รูป 2.10 ก. แสดงโครงสร้างระบบสมการปกติทั่วไปเต็มรูป

รูป 2.10 ข. แสดงเมตริกซ์ที่ถูกลดรูปมาแล้ว



รูป 2.11 ข.



รูป 2.11 ก.

รูป 2.11 ก. แสดงโครงสร้างแบบ intertwined ของระบบสมการปกติทั่วไปเต็มรูป

รูป 2.11 ข. แสดงเมตริกซ์ถูกลดรูปมาแล้ว