## บทที่ 2

## ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิเคราะห์ความไวของค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรภายใต้สมการถดถอยเชิงเส้น จะเป็นการหาผลสรุปของการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของค่าตัวแปรอิสระที่ดีที่สุด เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรเป็น $\alpha$ และ 2.0 ด้วยการหาขอบเขตของพารามิเตอร์ $\alpha$ ที่ให้ค่าประมาณ x ที่ดีที่สุดไม่แตกต่างจากค่า $x = \bar{w}_2$ ในเชิงสถิติเมื่อ $\alpha = 2.0$ ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ แบ่งเรื่องออกเป็น 3 เรื่องใหญ่ๆ ดังนี้คือ

ก.) ขอบเขตของพารามิเตอร์ $\alpha$ ที่ให้ค่าประมาณ x ที่ดีที่สุดไม่แตกต่างจากค่า $x = \bar{w}_2$ ในเชิงสถิติ เมื่อ $\alpha = 2.0$ มีขั้นตอนในการใช้ทฤษฎีดังต่อไปนี้

ก.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายตามขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย รายละเอียดดูที่หัวข้อ 2.1 ในบทที่ 2

ก.2 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นภายหลังของ Z $p(Z|\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{w})$ ไว้แทนในค่าคาดหวังของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตร

$$E_{\alpha}[L(Z,a)] = \int_{-\infty}^{\infty} L_{\alpha}(Z,a)\, p(Z|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{w})\, dZ$$

รายละเอียดดูที่หัวข้อ 2.2 ในบทที่ 2

ก.3 เนื่องจากการอินทิเกรตค่าคาดหวังของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรกระทำได้ยาก จำเป็นต้องใช้เทคนิควิธีการเชิงตัวเลขมาช่วยในการอินทิเกรต ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธีเกาส์เลคเกนด์ รายละเอียดดูที่หัวข้อ 2.3 ในบทที่ 2

ก.4 หลังจากการแปลงการอินทิเกรตด้วยวิธีเกาส์เลคเกนด์ การที่จะหาค่าของตัวแปรอิสระที่ทำให้ค่าคาดหวังฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรต่ำสุดด้วยการอนุพันธ์นั้นกระทำได้ยาก จำเป็นจะต้องใช้เทคนิควิธีการเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย ซึ่งวิธีดังกล่าวจะใช้เทคนิคของพาวเวลล์และด็อกกินน์ รายละเอียดดูที่หัวข้อ 2.4 ในบทที่ 2

ก.5 ใช้ตัวสถิติ $t$ มาทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระที่ดีที่สุดของ $x$ ( $x = \overline{w}_2$) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบกำลังสอง ( $\alpha = 2.0$) กับค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระที่ดีที่สุดของ $x$ ( $x = \overline{w}_\alpha$ )ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียแบบไม่ใช่กำลังสอง ( $\alpha \neq 2.0$) เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างและค่าเป้าหมายเดียวกัน เพื่อที่จะหาช่วงของพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรที่ทำให้ค่าตัวแปรอิสระ $x$ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ รายละเอียดดูหัวข้อที่ 2.6 ในบทที่ 2

ข.) ความไวของพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตร เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ภายใต้ค่าเป้าหมายเดียวกัน

ในการสรุปความไวของพารามิเตอร์ดังกล่าว จะใช้ผลสรุปขอบเขตของพารามิเตอร์ในข้อ ก.) โดยพิจารณาแนวโน้มขอบเขตของพารามิเตอร์ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นภายใต้ค่าเป้าหมายเดียวกัน ถ้าขอบเขตของพารามิเตอร์กว้าง แสดงว่าความไวของพารามิเตอร์มีความไวน้อย แต่ถ้าขอบเขตของพารามิเตอร์แคบแสดงว่าความไวของพารามิเตอร์มีความไวมาก

ค.) ความไวของพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตร เมื่อค่าเป้าหมายเพิ่มขึ้น ภายใต้ขนาดตัวอย่างเดียวกัน

ในการสรุปความไวของพารามิเตอร์ดังกล่าว จะใช้ผลสรุปขอบเขตของพารามิเตอร์ในข้อ ก.) โดยพิจารณาแนวโน้มขอบเขตของพารามิเตอร์ เมื่อค่าเป้าหมายเพิ่มขึ้นภายใต้ขนาดตัวอย่างเดียวกัน ถ้าขอบเขตของพารามิเตอร์กว้างแสดงว่าความไวของพารามิเตอร์มีความไวน้อย แต่ถ้าขอบเขตของพารามิเตอร์แคบแสดงว่าความไวของพารามิเตอร์มีความไวมาก

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้หาค่าตัวแปรอิสระ $x$ ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อกำหนดค่าของพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการสูญเสียเท่ากับ 2.0 เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าตัวแปรอิสระ $x$ ที่ดีที่สุดจากวิธีการจำลอง เพื่อพิจารณาความถูกต้องของวิธีการจำลอง รายละเอียดดูหัวข้อที่ 2.5 ในบทที่ 2

สำหรับรายละเอียดทางด้านทฤษฎีที่ได้อ้างอิงนั้นมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

## 2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

รูปแบบสมการถดถอยพหุเชิงเส้นอย่างง่ายของตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$y_i = \beta_o+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \quad ; \quad i = 1, 2,\ldots,T$$

หรือจัดเป็นรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้ $\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ ........(2.1 .1 )

เมื่อ $\underset{\sim}{y}$ คือ เวคเตอร์สดมภ์ขนาด Tx1 ของตัวแปรตาม y ; $\underset{\sim}{y} = (y_1 , y_2,\ldots,y_T)'$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวคเตอร์สดมภ์ขนาด Tx1 ของความคลาดเคลื่อนสุ่ม ε ; $\underset{\sim}{\varepsilon} = (\varepsilon_1 ,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_T)'$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวคเตอร์สดมภ์ขนาด 2x1 ของพารามิเตอร์ β ; $\underset{\sim}{\beta} =(\beta_o , \beta_1 )'$

X คือ เมตริกซ์ขนาด Tx2 ของตัวแปรอิสระ x ;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_T \end{bmatrix}_{Tx2}$$

ในการวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นมีความจำเป็นต้องควบคุมความเคลื่อนไหวของ ε และ x เพื่อประโยชน์ในการประมาณค่า $\underset{\sim}{\beta}$ ทั้งนี้เพราะ ε เป็นตัวแปรที่เป็นแหล่งข้อผิดพลาดทั้งปวงจากการกำหนดความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x ต่าง ๆ เช่น ความผิดพลาดจากการวัดค่า y ความผิดพลาดจากการกำหนด x ที่คาดว่าจะสามารถอธิบายความเคลื่อนไหวของตัวแปรตาม y ไว้ไม่ครบถ้วน เป็นต้น ซึ่งความผิดพลาดนี้ จะส่งผลให้ค่าประมาณของ y ; ($\hat{y}$) คลาดเคลื่อนจากค่า y จริงอยู่ตลอดเวลา และด้วยเหตุที่ ε เป็นแหล่งรับความผิดพลาดทั้งหมดทั้งมวลเอาไว้ ดังนั้นค่าของ ε จึงไม่แน่นอนและไม่อาจวัดหรือสังเกตได้ด้วยเหตุผลดังกล่าว ε จึงมีความเคลื่อนไหว

ได้ตลอดเวลา ซึ่งจะมีผลกระทบต่อการสร้างฟังก์ชันและการพยากรณ์ ดังนั้นเพื่อให้งานการประมาณค่าดำเนินไปได้นั้น จำเป็นต้องควบคุมความเคลื่อนไหวของ $\varepsilon$ ไว้ในกรอบที่พิจารณาเห็นว่าจำเป็น ด้วยการกำหนดเป็นข้อตกลงขึ้นดังนี้

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ เป็นเวคเตอร์สดมภ์ของตัวแปรคลาดเคลื่อนสุ่ม $\sim N(0,\sigma^2 I_T)$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method) จะได้ว่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$ นั่นคือ

$$\hat{\beta}_1 = [\sum_{i=1}^{T} (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]/[\sum_{i=1}^{T} (x_i-\bar{x})^2]$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}$$

โดย $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $E(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{\beta}$ นั่นคือ $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ และ $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

2. $V(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ นั่นคือ $V(\hat{\beta}_0) = \sigma^2[\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{T}(x_i-\bar{x})^2}]$

และ $V(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{T}(x_i-\bar{x})^2}$

3. $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นค่าประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE) ของ $\underset{\sim}{\beta}$

2.2 <u>ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบภายหลัง</u> (Posterior Probability Density Function) ของ Z

จากรูปแบบสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในสมการ (2.1.1) ถ้าเราพิจารณาการพยากรณ์ในคาบเวลาถัดไป 1 คาบเวลา จากเวลาปัจจุบัน T กล่าวคือ คาบเวลา T+1 โดยการหาค่า $x_{T+1} \equiv w$ ที่ทำให้ค่า $y_{T+1} \equiv z$ มีค่าใกล้เคียงกับค่าเป้าหมาย a มากที่สุด หรือเพื่อให้ค่าคาดหวังของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรต่ำสุด นั่นคือ

$$y_{T+1} = \beta_o + \beta_1 x_{T+1} + \varepsilon_{T+1}$$

หรือ

$$z = \beta_o + \beta_1 w_1 + \ell$$

หรือจัดเป็นรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้ $z = \underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{w} + \ell$ ..........(2.2.1)

เมื่อ z คือค่าตัวแปรตาม y ที่คาบเวลา T+1

$\underset{\sim}{w}$ คือเวคเตอร์สดมภ์ขนาด 2×1 ของตัวแปรอิสระ x ที่คาบเวลา T+1 ; $\underset{\sim}{w}' = (1, w)'$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือเวคเตอร์สดมภ์ขนาด 2×1 ของพารามิเตอร์ β ; $\underset{\sim}{\beta} = (\beta_o, \beta_1)'$

$\ell$ คือความคลาดเคลื่อนสุ่ม ε ที่คาบเวลา T+1 หรือความผิดพลาดอนาคต และ $\ell \sim N(0, \sigma^2)$

สมมุติให้การแจกแจงเบื้องต้น[1] (Prior Distribution) ของ $\underset{\sim}{\beta}$, log $\sigma$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และเป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ

$$p(\beta_j) \propto \text{ค่าคงที่} \quad ; \; -\infty < \beta_j < \infty \; ; \quad j = 0, 1$$

และ
$$p(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad ; \quad 0 < \sigma < \infty$$

และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function, L) ของ $\underset{\sim}{y}$ เขียนได้ดังนี้

$$L(\underset{\sim}{y}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^T} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})\}$$

$$= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^T} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon}\} \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}$$

จากคาบเวลา T+1 การแจกแจงร่วม (Joint distribution) ของ Z, $\underset{\sim}{\beta}$, $\sigma$ เมื่อกำหนด $\underset{\sim}{y}$ และ $\underset{\sim}{w}$ เขียนได้เป็น

$$p(Z,\underset{\sim}{\beta},\sigma|\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{w}) \propto \frac{1}{\sigma^{T+2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underset{\sim}{\varepsilon}'\underset{\sim}{\varepsilon} + \ell^2)\} \quad ; \quad \ell = Z - \underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{w}$$



---

[1] Zeller, A. and Chetty, V.K. "Prediction and Decision Problems in Regression Models from the Baysian Point of View." Journal of American Statistical Association 60(1965): 608-615.

เมื่ออินทิเกรต $p(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{\beta}, \sigma | \underset{\sim}{y}, w)$ เทียบกับ $\sigma$ และ $\underset{\sim}{\beta}$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงภายหลังของ $Z$ เมื่อกำหนด $y$, $w$ มีการแจกแจงแบบสติวเดนท์ ที่[2] (Student t Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{w}$ และองศาอิสระเท่ากับ $V$

$$p(Z|\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{w}) = C\{V+(Z-\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{w})'\, g(Z-\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{w})\}^{-\frac{(V+1)}{2}} \qquad ........(2.2.2)$$

เมื่อ $V = T-2$ , $\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$ , $g = \frac{1}{s^2}\{1+\underset{\sim}{w}'(X'X)^{-1}\underset{\sim}{w}\}^{-1}$ ,

$Vs^2 = (\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\hat{\beta}})$ และ $C = \dfrac{V^{V/2}\left(\frac{V-1}{2}\right)!\, g^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V-2}{2}\right)!}$

สำหรับกรณีตัวแปรอิสระ 1 ตัวแปร จากสมการ (2.2.2) เมื่อ $k = 1$ จะได้

$$p(Z|\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{w}) = \frac{\Gamma\left(\frac{T-1}{2}\right)g^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma\left(\frac{T-2}{2}\right)(T-2)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{(Z-\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{w})^2 g}{V}\right\}^{-\frac{(T-1)}{2}} \qquad .....(2.2.3)$$

กำหนดให้ $m = \frac{V+1}{2} = \frac{(T-1)}{2}$ ดังนั้น

$$p(Z|\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{w}) = \frac{\Gamma(m)\, g^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})\, V^{\frac{1}{2}}}\left\{1+\frac{(Z-\underset{\sim}{\hat{\beta}}'\underset{\sim}{w})^2 g}{V}\right\}^{-m} \qquad .....(2.2.4)$$

---

[2]Raiffa, H., and Schlaifer, R. Applied Statistical Decision Theory, Harvard University Press, Massachusettes, 1961, P. 256, 345.

## 2.3 การประมาณค่าอินทิเกรตด้วยวิธีเกาสส์เลคเกนด์ (Gauss-Legendre)

พิจารณาค่าคาดหวังฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตร

$$E[L_{\alpha}(Z,\ a)] = \int_{-\infty}^{\infty} L_{\alpha}(Z,\ a)\ p(Z|\underset{\sim}{y},\ \underset{\sim}{w})\ dZ \qquad ......(2.3.1)$$

เมื่อ $L_{\alpha}(Z,\ a) = |Z-a|^{\alpha}$

$$p(Z|\underset{\sim}{y},\ \underset{\sim}{w}) = \frac{\Gamma(m)\ g^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})v^{\frac{1}{2}}} \left\{1+\frac{(Z-\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w})^2\ g}{V}\right\}^{-m}$$

แทนค่า $L_{\alpha}(Z,\ a)$ และ $p(Z|\underset{\sim}{y},\ \underset{\sim}{w})$ ลงในสมการ (2.3.1) จะได้

$$E[L_{\alpha}(Z,\ a)] = \frac{\Gamma(m)\ g^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})\ v^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |Z-a|^{\alpha}\left\{1+\frac{(Z-\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w})^2 g}{V}\right\}^{-m} dZ \qquad .....(2.3.2)$$

กำหนดให้ $D = \dfrac{(Z-\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w})g^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}}$ หรือ $Z = \{\frac{V}{g}\}^{\frac{1}{2}}D + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w}$



เพราะฉะนั้น จากสมการ (2.3.2) จะได้

$$E[L_{\alpha}(Z,\ a)] = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\{\tfrac{V}{g}\}^{\frac{1}{2}}D+\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w}-a\right|^{\alpha}\{1+D^2\}^{-m} dD \qquad .....(2.3.3)$$

กำหนดให้ $D = \tan\theta$ ($D = \infty$ , $\theta = \pi/2$ และ $D = -\infty$ , $\theta = -\pi/2$)

เพราะฉะนั้น จากสมการ (2.3.3) จะได้

$$E[L_{\alpha}(Z, a)] = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\{\frac{V}{g}\}^{\frac{1}{2}} \tan(\theta)+\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w}-a\right|^{\alpha}[\sec(\theta)]^{-2(m-1)}d\theta \quad ...(2.3.4)$$

กำหนดให้ $\theta = I\pi/2$ ( $\theta = \pi/2$ , $I = 1$ และ $\theta = -\pi/2$ , $I = -1$)

เพราะฉะนั้น จากสมการ (2.3.4) จะได้

$$E[L_{\alpha}(Z, a)] = \frac{\pi/2\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} \left|\{\frac{V}{g}\}^{\frac{1}{2}} \tan(\frac{\pi I}{2})+\hat{\underset{\sim}{\beta}}'\underset{\sim}{w}-a\right|^{\alpha}[\sec(\frac{\pi I}{2})]^{-2(m-1)}dI \quad ...(2.3.5)$$

จะเห็นได้ว่าในการอินทิเกรตสมการ (2.3.5) ด้วยวิธีแคลคูลัสนั้นกระทำได้ยาก เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวติดค่าสัมบูรณ์ (Absolute) ด้วยเหตุผลนี้จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิควิธีการเชิงตัวเลขมาช่วยประมาณค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันนี้ และเทคนิคที่ใช้จะเป็นเทคนิคเกาสส์เลคเกนด์ (Guass-Legendre Technique) ซึ่งมีแนวความคิดหลักเป็นดังนี้คือ พยายามแปลงช่วงของการอินทิเกรต (a, b) ให้อยู่ในช่วง (-1, 1) แล้วเลือกสูตร n จุดที่ทำให้ $\int_a^b y(x_i)dx_i \sim \sum_{i=1}^{n} A_i y(x_i)$ โดยที่ จุด $x_i$ จะมีค่าเป็นศูนย์ในพหุนามเลคเกนด์เชิงตั้งฉาก (Legendre Orthogonal Polynomial)

$$P_n'(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

และสัมประสิทธิ์ $A_i$ มีค่าเท่ากับ $[2(1-x_i^2)]/[n^2(P_{n-1}(x_i)]$

เนื่องจากในการศึกษาครั้งนี้ได้แปลงช่วงของการอินทิเกรต $(-\infty, \infty)$ ให้อยู่ในช่วง (-1, 1) ดังนั้นเราจึงสามารถใช้การประมาณค่าอินทิเกรตด้วยวิธีเกาสส์เลคเกนด์ได้โดยจะใช้สูตร n จุดที่ค่า n = 16 ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่าจำนวนจุด ค่าของ $x_i$ และสัมประสิทธิ์ $A_i$ จากสูตรการ[3] อินทิเกรตด้วยวิธีเกาสส์เลคเกนด์

| n | $x_i$ | $A_i$ |
|---|---|---|
| 16 | $\pm$0.98940093 | 0.02715246 |
| | $\pm$0.94457502 | 0.06225352 |
| | $\pm$0.86563120 | 0.09515851 |
| | $\pm$0.75540441 | 0.12462897 |
| | $\pm$0.61787624 | 0.14959599 |
| | $\pm$0.45801678 | 0.16915652 |
| | $\pm$0.28160355 | 0.18260342 |
| | $\pm$0.09501251 | 0.18945061 |

## 2.4 การประมาณคำตอบจากฟังก์ชันที่ให้ค่าต่ำสุดด้วยวิธีพาวเวลล์และค็อกกินน์

ในการหาคำตอบที่ทำให้ค่าคาดหวังฟังก์ชันการสูญเสียต่ำสุด หรือ $\min_{x=w} E[L_\alpha(Z,a)]$ หรือหาค่า $x = w$ จากสมการ

$$\frac{d}{dw} \int_{-\infty}^{\infty} |Z-a|^\alpha P(Z|\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{w})\, dZ = 0$$

เนื่องจากสมการซับซ้อนมาก ไม่อาจจะหาค่า $x$ ได้จากการแก้สมการโดยตรงของ $E[L_\alpha(Z,a)]$ ที่แท้จริงได้ ดังนั้นวิธีที่จะแก้ปัญหานี้ได้โดยพิจารณาหาคำตอบจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการสูญเสียแบบสมมาตรให้มีค่าต่ำสุดด้วย "เทคนิคการแก้ปัญหากำหนดการที่ไม่ใช่เส้นตรงโดยไม่มีเงื่อนไขบังคับ" (Unconstrained Nonlinear Programming) กล่าวโดยทั่วไปคือเป็น

---

[3]Scheid, Francis. Theory and Problems of Numerical Analysis., McGraw-Hill Book Company, 1968, P. 135.

การหาค่าต่ำสุดของ $f(\underset{\sim}{X})$ สำหรับ $\underset{\sim}{X} \varepsilon E^n$ โดยมีเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับจุด $\underset{\sim}{X}^*$ ที่ทำให้ค่าของ $f(\underset{\sim}{X})$ มีค่าต่ำสุดดังต่อไปนี้

1. $f(\underset{\sim}{X})$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $\underset{\sim}{X}^*$

2. มีจุดหยุดนิ่ง (Stationary Point) $\underset{\sim}{X}^*$ ที่ทำให้ $\nabla f(\underset{\sim}{X}) = 0$

เมื่อ $\nabla f(\underset{\sim}{X}) = [\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n}]'$

3. $\nabla^2 f(X^*) > 0$ หรือกล่าวได้ว่าเมตริกซ์เฮชเซ่นน์เป็นบวกแน่นอน (Positive Definite)

เมื่อ
$$\nabla^2 f(\underset{\sim}{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underset{\sim}{X}) & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underset{\sim}{X})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\underset{\sim}{X})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underset{\sim}{X}) \end{bmatrix}$$

และการแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้จะใช้เทคนิคของพาวเวลล์ (Powell's Technique) ร่วมกับเทคนิคของค็อกกินน์ (Coggin's Technique) ในการหาคำตอบของฟังก์ชันต่ำสุด โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.4.1 <u>เทคนิคของพาวเวลล์</u>

วิธีการของพาวเวลล์เป็นวิธีการหาคำตอบของฟังก์ชันกำลังสอง $f(\underset{\sim}{X})$ ที่มีเมตริกซ์เฮชเซ่นน์เป็นบวกแน่นอนด้วยการหาคำตอบทีละมิติ (หรือทีละตัวแปร) จนประสบผลสำเร็จในการหาค่าฟังก์ชันต่ำสุดด้วยการเริ่มต้นด้วยจุด $\underset{\sim}{X}_o^{(k)}$ ในขั้นที่ k

$$\underset{\sim}{X}_o^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]$$

แนวความคิดของพาวเวลล์จะอาศัยนิยามและทฤษฎีดังต่อไปนี้

<u>นิยามการสังยุค</u> (Conjugate)

ทิศทาง 2 ทิศทาง $\underset{\sim}{s}_j$ และ $\underset{\sim}{s}_i$ จะเป็นทิศทางสังยุคต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$(\underset{\sim}{S}_j)'Q\underset{\sim}{S}_i = 0 \quad i \neq j$$

$$(\underset{\sim}{S}_j)'Q\underset{\sim}{S}_i \geqslant 0 \quad i \neq j$$

เมื่อ $Q = \nabla^2 f(\underset{\sim}{x})^{(k)}$ หรือเมตริกซ์เฮชเซ่นในขั้นที่ k

<u>ทฤษฎีการสังยุค</u>

จากจุดเริ่มต้น $\underset{\sim}{x}^{(o)}$ สามารถหาจุด $\underset{\sim}{x}^{(a)}$ ที่อยู่ในทิศทาง $\underset{\sim}{s}$ ทำให้ค่าของฟังก์ชันต่ำสุด และจากจุดเริ่มต้น $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ สามารถหาจุด $\underset{\sim}{x}^{(b)}$ ที่อยู่ในทิศทาง $\underset{\sim}{s}$ ทำให้ค่าของฟังก์ชันต่ำสุด

ถ้า $f(\underset{\sim}{x}^{(b)}) < f(\underset{\sim}{x}^{(a)})$ ดังนั้นทิศทาง $(\underset{\sim}{x}^{(b)} - \underset{\sim}{x}^{(a)})$ จะสังยุคต่อทิศทาง $\underset{\sim}{s}$

<u>นิยมการเลื่อนจุด</u> (Transition)

การเลื่อนจุด $\underset{\sim}{x}_o^{(k)}$ ไปยังจุด $\underset{\sim}{x}_m^{(k)}$ กำหนดโดย

$$\underset{\sim}{x}_m^{(k)} = \underset{\sim}{x}_o^{(k)} + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{(k)} \underset{\sim}{s}_i^{(k)} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, m-1$$

เมื่อ $\underset{\sim}{s}_i^{(k)}$ คือทิศทางสังยุคตัวที่ i ที่สร้างขึ้นในขั้นที่ k

$\lambda_i^{(k)}$ คือค่าที่ได้จากการหาค่าของฟังก์ชันต่ำสุดตัวที่ $i$ ในขั้นที่ $k$ ด้วยวิธีการหาคำตอบของคือกกินน์

ขั้นตอนวิธีของพาวเวลล์ในขั้นที่ $k$ จะบ่งชี้ทิศทางการค้นหาคำตอบ[4] เชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกัน $n$ ทิศทางโดยการกำหนดจุดเริ่มต้น $\underset{\sim}{x}_o^{(k)} = \underset{\sim}{x}_{n+1}^{(k-1)}$ มีดังต่อไปนี้

1. กำหนดจุด $\underset{\sim}{x}_o^{(k)}$ เพื่อหาค่าของ $\lambda_1^{(k)}$ ที่ทำให้ค่าของ $f(\underset{\sim}{x}_o^{(k)}+\lambda_1\underset{\sim}{s}_1^{(k)})$ มีค่าต่ำสุดด้วยวิธีคือกกินน์ และกำหนดจุด $\underset{\sim}{x}_1^{(k)} = \underset{\sim}{x}_o^{(k)} +\lambda_1^{(k)}\underset{\sim}{s}_1^{(k)}$

จากจุด $\underset{\sim}{x}_1^{(k)}$ เพื่อหาค่าของ $\lambda_2^{(k)}$ ที่ทำให้ค่าของ $f(\underset{\sim}{x}_1^{(k)}+\lambda_2\underset{\sim}{s}_2^{(k)})$ มีค่าต่ำสุด ด้วยวิธีคือกกินน์ และกำหนดจุด $\underset{\sim}{x}_2^{(k)} = \underset{\sim}{x}_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)}\underset{\sim}{s}_2^{(k)}$

ในทำนองเดียวกันหาค่า $\lambda_i^{(k)}$ ; $i = 3, 4, \ldots, n$ ด้วยวิธีคือกกินน์

2. คำนวณหาจุด $\underset{\sim}{x}_{n+1}^{(k)} = 2\underset{\sim}{x}_n^{(k)} - \underset{\sim}{x}_o^{(k)}$

3. คำนวณค่าที่ลดมากที่สุดของ $f(\underset{\sim}{x})$ ในขั้นที่ $k$ กล่าวคือ

$$\Delta^{(k)} = \max_{i=1,\ldots,n}[f(\underset{\sim}{x}_{i-1}^{(k)})-f(\underset{\sim}{x}_i^{(k)})]$$

สมมุติให้ทิศทางการค้นคำตอบทิศทางที่ $m$ เป็นทิศทางที่ทำให้ค่าของ $f(\underset{\sim}{x})$ เปลี่ยนแปลงมากที่สุด $(\underset{\sim}{s}_m^{(k)})$ ; $1 \leq m \leq n$

---

[4]Himmelblau, D.M., Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill Book Company, 1972, P. 167-176.

กำหนดให้ $f_1 = f(\underset{\sim}{x}_o^{(k)})$ , $f_2 = f(\underset{\sim}{x}_n^{(k)})$ และ

$f_3 = f(2\underset{\sim}{x}_n^{(k)} - \underset{\sim}{x}_o^{(k)})$

เมื่อ $\underset{\sim}{x}_o^{(k)} = \underset{\sim}{x}_n^{(k-1)}$ และ $\underset{\sim}{x}_n^{(k)} = \underset{\sim}{x}_{n-1}^{(k)} + \lambda_n^{(k)}\underset{\sim}{s}_n^{(k)} = \underset{\sim}{x}_o^{(k)} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(k)}\underset{\sim}{s}_i^{(k)}$

แล้วทดสอบดังต่อไปนี้

$$f_3 \geq f_1 \text{ หรือ } (f_1-2f_2+f_3)(f_1-f_2-\Delta^{(k)})^2 \geq 0.5\, \Delta^{(k)}(f_1-f_3)^2 \quad ......(2.4.1.1)$$

ในการทดสอบตามสมการ (2.4.1.1) ดังกล่าวถ้าเป็นจริงจะใช้ทิศทางการค้นหาคำตอบ n ทิศทางเดียวกันสำหรับในขั้นที่ k และ k+1 กล่าวคือ $\underset{\sim}{s}_i^{(k+1)} = \underset{\sim}{s}_i^{(k)}$ ; $i=1,2,...,n$ และถ้า $f(\underset{\sim}{x}_n^{(k)})$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $f(\underset{\sim}{x}_{n+1}^{(k)})$ จะกำหนด $\underset{\sim}{x}_o^{(k+1)} = \underset{\sim}{x}_{n+1}^{(k)}$ แต่ถ้าไม่ใช่จะกำหนด $\underset{\sim}{x}_o^{(k+1)} = \underset{\sim}{x}_n^{(k)}$ หลังจากกำหนด $\underset{\sim}{s}^{(k+1)}$ และ $\underset{\sim}{x}_o^{(k+1)}$ แล้วข้ามไปพิจารณาข้อ 5 ต่อไป สำหรับในกรณีการทดสอบตามสมการ (2.4.1.1) ดังกล่าวไม่เป็นจริงจะพิจารณาในข้อ 4 ต่อไป

4. พิจารณาฟังก์ชัน $f(\underset{\sim}{x}^{(k)})$ ที่มีค่าต่ำสุดในทิศทางการค้นหาคำตอบ $\underset{\sim}{s}^{(k)}$ จากจุด $\underset{\sim}{x}_o^{(k)}$ ไปยังจุด $\underset{\sim}{x}_n^{(k)}$ และกำหนดทิศทางการค้นหาคำตอบ n ทิศทางในขั้นที่ k+1 เป็น $[\underset{\sim}{s}_1^{(k+1)}, \underset{\sim}{s}_2^{(k+1)}, ..., \underset{\sim}{s}_n^{(k+1)}] = [\underset{\sim}{s}_1^{(k)}, \underset{\sim}{s}_2^{(k)}, ..., \underset{\sim}{s}_{m-1}^{(k)}, \underset{\sim}{s}^{(k)},$

$\underset{\sim}{s}_{m+1}^{(k)}, ..., \underset{\sim}{s}_n^{(k)}]$

5. ทดสอบเกณฑ์กำหนดในการลู่เข้า (Convergence Criterion) เป็นดังนี้

$$\left|f(\underset{\sim}{x}^{(k+1)})\right| < 10^{-10} \text{ หรือ } \frac{\underset{\sim}{x}_i^{(k+1)} - \underset{\sim}{x}_i^{(k)}}{\underset{\sim}{x}_i^{(k)}} < \varepsilon \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ $\varepsilon$ คือความถูกต้องในตำแหน่งทศนิยมที่ต้องการ
ถ้าการทดสอบเป็นจริงขั้นตอนการหาคำตอบด้วยวิธีพาวเวลล์จะยุติในขั้นนี้ แต่ถ้าการทดสอบไม่เป็นจริงจะย้อนกลับไปพิจารณาในข้อ 1 อีกครั้ง

2.4.2 <u>เทคนิคของค็อกกินน์</u>[5]

เป็นเทคนิคในการหาคำตอบที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันต่ำสุดตามตำแหน่งทศนิยมที่ต้องการซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนดจุด $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ แล้วคำนวณหาจุด $\underset{\sim}{x}^{(2)} = \underset{\sim}{x}^{(1)} + \Delta\underset{\sim}{x}$
เมื่อ $\Delta\underset{\sim}{x}$ คือจำนวนค่าที่เพิ่มหรือลดลงตามที่กำหนดไว้

2. คำนวณค่า $f(\underset{\sim}{x}^{(1)})$ และ $f(\underset{\sim}{x}^{(2)})$

3. ถ้า $f(\underset{\sim}{x}^{(1)}) > f(\underset{\sim}{x}^{(2)})$ กำหนด $\underset{\sim}{x}^{(3)} = \underset{\sim}{x}^{(1)} + 2\,\Delta\underset{\sim}{x}$

   ถ้า $f(\underset{\sim}{x}^{(1)}) \leqslant f(\underset{\sim}{x}^{(2)})$ กำหนด $\underset{\sim}{x}^{(3)} = \underset{\sim}{x}^{(1)} - \Delta\underset{\sim}{x}$

4. คำนวณ $f(\underset{\sim}{x}^{(3)})$

5. คำนวณค่า $\underset{\sim}{x}^*$ ที่ทำให้ $f(\underset{\sim}{x})$ มีค่าต่ำสุด

---

[5] Himmelblau, D.M., <u>Applied Nonlinear Programming</u>, McGraw-Hill Book Company, 1972, P. 46-47.

เมื่อ $$\underset{\sim}{x}^{*} = -\tfrac{1}{2}\frac{[(\underset{\sim}{x}^{(2)})^2-(\underset{\sim}{x}^{(3)})^2]f(\underset{\sim}{x}^{(1)})+[(\underset{\sim}{x}^{(3)})^2-(\underset{\sim}{x}^{(1)})^2]f(\underset{\sim}{x}^{(2)})+[(\underset{\sim}{x}^{(1)})^2-(\underset{\sim}{x}^{(2)})^2]f(\underset{\sim}{x}^{(3)})}{[\underset{\sim}{x}^{(2)}-\underset{\sim}{x}^{(3)}]f(\underset{\sim}{x}^{(1)})+[\underset{\sim}{x}^{(3)}-\underset{\sim}{x}^{(1)}]f(\underset{\sim}{x}^{(2)})+[\underset{\sim}{x}^{(1)}-\underset{\sim}{x}^{(2)}]f(\underset{\sim}{x}^{(3)})}$$

6. ถ้า $\underset{\sim}{x}^{*}$ และจุดใดจุดหนึ่งใน $\{\underset{\sim}{x}^{(1)}, \underset{\sim}{x}^{(2)}, \underset{\sim}{x}^{(3)}\}$มีค่าของฟังก์ชัน $f(\underset{\sim}{x})$ และค่าของ $\underset{\sim}{x}$ แตกต่างกันน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ขั้นตอนของค็อกกินน์จะหยุดทำงาน แต่ถ้ามีค่ามากกว่าจะคำนวณ $\underset{\sim}{x}^{*}$ และหาค่าความแตกต่างที่มากที่สุดของ $\{|f(\underset{\sim}{x}^{*})-f(\underset{\sim}{x}^{(1)})|, |f(\underset{\sim}{x}^{*})-f(\underset{\sim}{x}^{(2)})|, |f(\underset{\sim}{x}^{*})-F(\underset{\sim}{x}^{(3)})|\}$ และกำจัด $\underset{\sim}{x}^{(i)}$ ที่ทำให้ค่าแตกต่างมากที่สุดออกไปให้เหลือ $\underset{\sim}{x}$ เพียงแค่ 3 จุดโดยให้จุด $\underset{\sim}{x}^{*}$ ไปแทนที่ตำแหน่ง $\underset{\sim}{x}^{(i)}$ ที่กำจัดออกไปแล้วย้อนกลับไปพิจารณาข้อ 5 อีกครั้ง

## 2.5 วิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสอง[6]

ในกรณีฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสอง แสดงได้ว่าค่า x ที่ดีที่สุดที่ทำให้ค่าคาดหวังของฟังก์ชันการสูญเสียกำลังสองต่ำสุด คือ ( ดู Fisher หน้า 13 และ Theil บทที่ 8 )

$$x^{*} = \frac{a\hat{\beta}_1}{\sum_{i=0}^{1}[\hat{\beta}_i^2+\mathrm{var}(\hat{\beta}_i)]}$$

$$= \frac{a\hat{\beta}_1}{\sum_{i=0}^{1}\hat{\beta}_i^2+s^2\left[\dfrac{T+\sum_{i=1}^{T}x_i^2}{\sum_{i=1}^{T}(x_i-\bar{x})^2}\right]}$$



[6] Fisher, Walter D, "Estimation in the Linear Decision Model." International Economic Review 3, 1962, P. 1-27.

## 2.6 การทดสอบนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย

ในการเปรียบเทียบค่าสถิติระหว่างกลุ่มสองกลุ่มนั้น เราจะเห็นว่ามันมีค่าต่างกันเสมอ ในทางสถิติเรายังไม่สามารถที่จะยอมรับค่าที่เราเห็นว่าต่างกันนั้น ต่างกันจริงหรือไม่ จนกว่าจะได้มีการทดสอบเสียก่อน การทดสอบนั้นเราอาจจะเรียกว่าการทดสอบนัยสำคัญของความแตกต่าง (Test Significance of Differences) ซึ่งเป็นการทดสอบว่าความแตกต่างที่ปรากฏนั้นแตกต่างกันจริง ๆ หรือว่าเกิดขึ้นโดยบังเอิญ ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยในกรณีที่มีกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม

สมมุติฐานของการทดสอบ

$H_o$ : ค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่มเท่ากัน หรือ $H_o : \mu_1-\mu_2 = 0$

$H_1$ : ค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่มไม่เท่ากัน หรือ $H_1 : \mu_1-\mu_2 \neq 0$

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มสุ่มมาจากประชากรสองกลุ่มซึ่งต่างก็มีการแจกแจงแบบปกติ

2. กลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน (Independent Samples)

3. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่ม แต่สมมุติว่ามีความแปรปรวนเท่ากัน

<u>ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ</u>

$$t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{(2n-2)}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right]}}$$

<u>การตัดสินใจ</u>

ปฏิเสธสมมุติฐาน $H_o$ : ถ้าค่าสัมบูรณ์ของ t ($|t|$) ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่า t จากตารางที่ระดับนัยสำคัญ = $\gamma/2$ และองศาแห่งความเป็นอิสระ (df) = 2n-2