## บทที่ 3

## ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

1. <u>สถิติและการวางแผนกำลังคน</u> (statistic and manpower planing)

การวางแผนกำลังคน (Manpower Planing) นั้นบ่อยครั้งที่ถูกให้คำจำกัดความว่า เป็นความพยายามที่จะจัดสรรบุคคลให้เหมาะสมกับงานที่มีอยู่ ปัญหานี้อาจเป็นปัญหาระดับประเทศหรือปัญหาระดับภูมิภาคซึ่งน่าจะเป็นกรณีที่เป็นการวางแผนกำลังคนโดยรัฐบาลเป็นฝ่ายดำเนินการ ปัญหาดังกล่าวยังเกิดขึ้นได้ในการบริหารงานของบริษัทเอกชนหรือกลุ่มอาชีพอื่น ๆ โดยความเป็นจริงแล้ว การวางแผนงานอื่น ๆ อีกมากมายรวมทั้งปัญหาต่าง ๆ ที่เป็นปัญหาที่คาดว่าจะเกิดขึ้นนอกขอบเขตการวางแผนกำลังคนก็มีโครงสร้างพื้นฐานแบบเดียวกัน ปัญหาการวางแผนกำลังที่พบมากที่สุด 2 ประการ ซึ่งเหมาะกับการใช้วิธีทางสถิติ (statistical treatment) ปัญหาประการแรกเป็นปัญหารวม ๆ ของการวางแผนกำลังคนนั้นต่างจากการวางแผนอาชีพของแต่ละบุคคล เพราะจะเกี่ยวข้องกับคนจำนวนมาก กล่าวคือ ต้องจัดบุคคลที่เหมาะสมกับตำแหน่งงานและยังต้องคำนึงถึงความเหมาะสมเรื่องเวลาในด้านเกี่ยวกับส่วนบุคคลและด้านที่เป็นผลรวมทั้งหมดนั้นมีส่วนสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิดในทางปฏิบัติจึงไม่อาจแยกออกจากกันได้ แต่วิธีทางสถิติ (statistical method) เป็นวิธีการที่เหมาะสมที่สุดสำหรับด้านผลรวมทั้งหมด ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า การนำวิธีทางสถิติ (statistical approach) มาใช้ในการวางแผนกำลังคนในปัจจุบันต้องคำนึงถึงความสำคัญของประเด็นต่าง ๆ เกี่ยวกับพฤติกรรมของมนุษย์หรือองค์การ (human and organization behaviour) ปัญหาประการที่สอง ในการวางแผนกำลังคนจึงต้องอาศัยความรู้ความชำนาญทางสถิติ (statistical expertise) ก็เนื่องจากความไม่แน่นอน (uncertainty) ปัญหานี้เกิดจากความไม่แน่นอนที่ซึ่งขึ้นอยู่กับสังคม เศรษฐกิจ และพฤติกรรมของมนุษย์ที่ไม่อาจคาดคะเนได้ ความพยายามใด ๆ เพื่อหาหลักการพื้นฐานเพื่อการวางแผนกำลังคนจะต้องคำนึงถึงความไม่แน่นอนดังกล่าวโดยการเสนอแนวความคิดต่าง ๆ ที่อาจนำมาใช้ได้

2. <u>ลูกโซ่มาร์คอฟ</u> (Markov chain)

ลูกโซ่มาร์คอฟเป็นแขนงหนึ่งของขบวนการสโตคาสติค (stochastic process) ขบวนการสโตคาสติคจะแตกต่างจากขบวนการสถิติธรรมดาตรงที่ว่า ผล (outcome) ที่จะเกิดขึ้นได้นั้นจะขึ้นอยู่กับเวลา (time dependent) สมมุติถ้า X เป็นผลที่เกิดขึ้นในทางสถิติ แต่ถ้าเป็นผลของปัญหาทางขบวนการสโตคาสติคแล้ว ค่า X นั้นจะต้องมีตัวสับคริพต์ (subscript) แสดงถึงเวลาที่เกิดขึ้นต่อท้ายด้วย นั่นคือ X จะกลายเป็น $X_t$ หรือ $X_n$ ซึ่งทั้ง t และ n สัญญลักษณ์แทนเวลา ความสัมพันธ์ระหว่างผล ($X_t$) และเวลา (t) แสดงในรูปที่ 3.1


<u>รูปที่ 3.1</u> ผลของปัญหาทางขบวนการสโตคาสติค

ตัวแปร 2 ตัวของปัญหานี้คือ ค่า $X_t$ และ t นั้นจะมีค่าเป็นช่วง ๆ (dicrete) หรือมีค่าแบบต่อเนื่อง (continuos) ได้ทั้งนั้น ดังนั้นขบวนการทางสโตคาสติคอาจแยกออกได้เป็นสี่แขนงใหญ่ ๆ ตามประเภทของตัวแปรดังนี้

| ค่าผลลัพธ์ | ค่าเวลา | แขนงของขบวนการสโตคาสติค |
|---|---|---|
| เป็นช่วง | เป็นช่วง | ลูกโซ่มาร์คอฟ |
| ต่อเนื่อง | เป็นช่วง | อนุกรมเวลา |
| เป็นช่วง | ต่อเนื่อง | ขบวนการมาร์คอฟ |
| ต่อเนื่อง | ต่อเนื่อง | ขบวนการนอร์มอล |

โดยทั่วไปแล้วปัญหาทางลูกโซ่มาร์คอฟนั้น มักจะเป็นการศึกษาถึงกลุ่มสภาวะ (state space) ในปัจจุบัน ศึกษาถึงกลุ่มสภาวะข้างหน้าที่ก้าวไปหา (move) และศึกษาถึงความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากสภาวะปัจจุบันไปอยู่สภาวะข้างหน้า ดังนั้นจะกล่าวถึงนิยามของกลุ่มสภาวะก่อน

<u>นิยาม</u> กลุ่มสภาวะ (state space) ของลูกโซ่มาร์คอฟ คือชุด (set) ของสภาวะทั้งหมดของระบบที่ศึกษา

<u>นิยาม</u> คุณสมบัติของมาร์คอฟ (Markov Property) กล่าวไว้ว่า ถ้ากำหนดสภาวะปัจจุบันของระบบ สภาวะในอนาคตของระบบจะขึ้นโดยตรงกับสภาวะปัจจุบันโดยที่ไม่ขึ้นกับสภาวะในอดีตที่เกิดขึ้นมาแล้ว

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้น (one-step transition probability function) สำหรับลูกโซ่มาร์คอฟคือ ฟังก์ชั่นซึ่งบ่งบอกความน่าจะเป็นในการที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ $i$ ไปสู่สภาวะ $j$ ในการก้าวไปหนึ่งก้าวข้างหน้า (one step) หรืออีกนัยหนึ่งก็คือความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ $i$ ไปสู่สภาวะ $j$ เมื่อเวลา (time) ได้ผ่านไปหนึ่งหน่วยของเวลาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้นอาจแสดงได้ดังนี้

$$P_{ij} = P(E_j/E_i) = P(j/i) \quad \text{ทุก ๆ ค่า } i \text{ และ } j \qquad (๒.๑)$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปเมื่อศึกษาระบบ เราอาจจะศึกษาเมื่อสภาวะของระบบผ่านการก้าวไปข้างหน้าแล้ว n ขั้นก็ได้ หรือคือเมื่อระบบผ่านไปแล้ว n ขั้น หรือ n หน่วยเวลาสภาวะของระบบอยู่ที่สภาวะ i เราอยากจะรู้ความน่าจะเป็นในกรณีที่จะเปลี่ยนจากสภาวะในขั้นตอนที่ n ไปสู่สภาวะ j ในขั้นตอนที่ n + 1 ในกรณีนี้ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้าหนึ่งขั้นตอนจะเขียนได้ดังนี้

$$P_{ij}(n,\ n+1) \;=\; P(X_{n+1} \;=\; E_j/X_n \;=\; E_i) \qquad (2.2)$$

ข้อแตกต่างระหว่างสมการ (2.1) และ (2.2) ก็คือ ดัชนีที่บ่งบอกเวลาสมการไม่ขึ้นอยู่กับเวลา คือเป็นแบบโฮโมเจนเนียส (Homogeneous) ในเชิงเวลา แต่สมการ (2.2) จะขึ้นอยู่กับเวลา (time dependent) ซึ่งบ่งไว้โดยดัชนีบ่งเวลา คือ n

ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นในการก้าวไปข้างหน้า 1 ขั้นตอน อาจจัดอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P \;=\; \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \cdots & P_{1j} \\ P_{21} & P_{22} \cdots & P_{2j} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{ij} \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแรกเริ่ม (initial probability fuenction) คือฟังก์ชั่นที่บอกถึงความน่าจะเป็นซึ่งระบบอยู่ที่สภาวะ i ในตอนแรกเริ่มของขบวนการ หรือคือที่เวลาเท่ากับศูนย์ สำหรับทุก ๆ ค่าของสภาวะ i ฟังก์ชั่นนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_i^{(o)} \;=\; P(X_o = E_i) \qquad \text{ทุก ๆ ค่าของ } i \qquad (2.3)$$

ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นแรกเริ่มนี้สามารถจัดเป็นแถวในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots)$$

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นการไปข้างหน้า n ขั้น (n-step transition probability function) คือ ฟังก์ชั่นที่บอกค่าความน่าจะเป็นในการที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j เมื่อก้าวไปข้างหน้า n ก้าว หรือคือเมื่อเวลาผ่านพ้นไปแล้ว n หน่วยเวลาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นอันนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = E_j / X_t = E_i) \qquad (2.4)$$

สมการ (2.4) นี้ไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (t) ในการก้าวไปข้างหน้า n ก้าวนี้มีอยู่หลายเส้นทางที่จะเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j ถ้าสมมติว่าระบบที่ศึกษาอยู่ระบบหนึ่งมีจำนวนสภาวะทั้งหมดเท่ากับ r สภาวะ การเปลี่ยนจากสภาวะ i ไปสู่สภาวะ j เมื่อก้าวไปสองขั้นตอนนั้นมีอยู่หลายเส้นทางด้วยกันดังแสดงไว้ข้างล่างนี้

$$\begin{array}{ccccc} E_i & \to & E_1 & \to & E_j \\ E_i & \to & E_2 & \to & E_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_i & \to & E_3 & \to & E_j \end{array}$$

ในการเปลี่ยนสภาวะจาก $E_i$ ไปสู่ $E_K (K = 1,2,\ldots, r)$ เมื่อก้าวไปข้างหน้า 1 ก้าว (one step) หรือคือ $E_i \to E_K$ นั้นจะไม่ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนสภาวะจาก $E_K$ ไปสู่ $E_j$ เมื่อก้าวต่อไปอีกหนึ่งก้าวข้างหน้า นั่นคือ เหตุการณ์ทั้งสองเหตุการณ์นี้จะไม่ขึ้นแก่กันในเชิงสถิติ ค่าความน่าจะเป็นจึงอาจแสดงได้ดังนี้

$$P(E_i \rightarrow E_K \text{ และ } E_K \rightarrow E_j) = P(E_i \rightarrow E_K).P(E_K \rightarrow E_j)$$

$$= P_{iK}.P_{Kj} \qquad (2.5)$$

และเนื่องจากจำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นทั้งหมด $r$ เหตุการณ์นั้นไม่สามารถที่จะเกิดขึ้นได้พร้อมกันได้ (mutually exclusive) ดังนั้น $P_{ij}^{(2)}$ จะเท่ากับผลบวกของค่าความน่าจะเป็นในทุก ๆ เส้นทางซึ่งมีอยู่ด้วยกัน $r$ เส้นทางด้วยกันดังนี้

$$P_{ij}^{(2)} = P_{i1} \cdot P_{1j} + P_{i2} \cdot P_{2j} + \ldots + P_{ir} \cdot P_{rj}$$

โดยใช้หลักการเชิงย้อนกลับ (recursive) ค่า $P_{ij}^{(3)}$ แสดงไว้ดังนี้

$$P_{ij}^{(3)} = P_{i1} \cdot P_{ij}^{(2)} + P_{i2} \cdot P_{2j}^{(2)} \ldots + P_{ir} \cdot P_{rj}^{(2)}$$

โดยวิธีการแบบอนุมาน (Induction) ค่า $P_{ij}^{(n)}$ หาได้ดังนี้

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{K=1}^{r} P_{iK} \cdot P_{kj}^{(n-1)} \qquad (2.6)$$

ความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลงเมื่อก้าวไป $n$ ก้าว อาจเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & \ldots & P_{1j}^{(n)} & \ldots \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & \ldots & P_{2j}^{(n)} & \ldots \\ P_{i1}^{(n)} & P_{i2}^{(n)} & \ldots & P_{ij}^{(n)} & \ldots \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $P^{(n)} = P^n$ หรือคือค่า $P^{(n)}$ นั้นได้จากการเอาเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเมื่อก้าวไป 1 ก้าว (one-step transition matrix) มาคูณตัวเอง n ครั้งด้วยกัน สมการ (3.6) อาจเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P^{(n)} = P^n = P \cdot P^{(n-1)} \qquad (2.7)$$

<u>นิยาม</u> ขบวนการมาร์คอฟจะเรียกว่าเป็น "regular" เมื่อนำเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงมายกกำลังแล้ว สมาชิก (elements) ทุก ๆ ตัวของเมตริกซ์นั้นต้องมากกว่าศูนย์ และจากสภาวะเริ่มต้น (initial state) เมื่อเวลาผ่านไปไม่ว่ากี่ช่วง (steps) เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงนี้จะสามารถออกจากภาวะใดไปอีกภาวะหนึ่งได้โดยอิสระ โดยสามารถติดต่อทุกภาวะได้หมด

<u>ทฤษฎี</u> เมื่อ P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงซึ่งสมจริง (correpond) กับ regular markov process ถ้านำ P มายกกำลังไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแถวนอน (row) แต่ละแถวของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงที่ได้มีสมาชิก (element) ทุกตัวเหมือนกันหรือใกล้เคียงกันหมด เช่น

$$P^n = T^1$$

$$T = \begin{bmatrix} \P \\ \P \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \P \end{bmatrix}$$ ¶ เป็น row vector ที่มีสมาชิกเป็นบวกหมด)

$$\P = \left[\P_1, \P_2, \ldots \P_n\right]$$

---

[1] วิจิตร ตัณฑสุทธิ วันชัย ริจิวรนิช และศิริจันทร์ ทองประเสริฐ, การวิจัยการดำเนินงาน เล่ม 2 ภาค Probabilistic (กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

T จะเรียกว่า steady state probability matrix หรือ limiting probability matrix

<u>ทฤษฎี</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ซึ่งสมจริงกับ Regular Markov Process และความเกี่ยวพันของ P กับ unique vector of steady state probability เป็น ¶ (D) = $\left[¶_1, ¶_2 \ldots ¶_n\right]$

โดยที่ $¶_j = ¶_j(P)$ คือ steady state probability ของระบบในภาวะ j เมื่อ j = 1, 2,... N

ดังนั้นจะได้ ¶ = ¶.P[1]

$$\sum_{j=1}^{N} ¶_j = 1$$

3. <u>แนวความคิดเกี่ยวกับการวางแผนกำลังคน</u>

แนวความคิดหลักในการวิเคราะห์ก็คือ การพิจารณาองค์การเป็นระบบที่มีจำนวนพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งและมีการเปลี่ยนแปลง (stock and flow) อยู่ตลอดเวลา โดยที่ระบบแบ่งเป็นกลุ่มหรือระดับ ถ้าแบ่งพนักงานของระบบออกเป็น K ระดับจำนวนพนักงานในระดับตำแหน่ง i ช่วงเวลา T จะเขียนแสดงได้เป็น $n_i(T)$ และเซทของพนักงานแต่ละระดับ (set of stock) เขียนแสดงในรูปของเวคเตอร์ (vector) ได้เป็น

---

[1] J.J. Martin Raysian, Decision Problems and Markov chains (New York : R.E. Krilger Publishing Company, 1975) p. 62.

$$n(T) = (n_1(T), n_2(T), \ldots, n_k(T))$$

จำนวนพนักงานในแต่ละระดับ (stock) แต่ละช่วงเวลา จะมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเลื่อนตำแหน่ง (Promotion) จำนวนพนักงานที่เปลี่ยนแปลงจากระดับตำแหน่ง i ไปตำแหน่ง j ในช่วงเวลา T - 1 ถึง T เมื่อสิ้นสุดของช่วงเวลานั้น เขียนแสดงได้เป็น $n_{ij}(T-1)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนแปลงของพนักงานจะมีความสัมพันธ์กับช่วงของเวลา แต่ไม่สัมพันธ์กับจำนวนพนักงานแต่ละระดับ ในแต่ละช่วงของเวลาจะมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนพนักงานแต่ละระดับเมื่อสิ้นสุดช่วงเวลาแสดงได้เป็น $n_{ij}(T-1, T)$ ถ้าระบบแบ่งออกเป็น K ระดับ โอกาสของการเปลี่ยนแปลงของพนักงานมีได้ K(K - 1) ซึ่งพนักงานแต่ละระดับจะมีพนักงานอยู่ในระดับตำแหน่งเดิมกับจำนวนพนักงานที่เปลี่ยนแปลงระดับตำแหน่งด้วย การเปลี่ยนแปลงของพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งสามารถเขียนแสดงในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} n_{11}(T-1) & n_{12}(T-1) & \cdots & n_{1K}(T-1) \\ n_{21}(T-1) & n_{22}(T-1) & \cdots & n_{2K}(T-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{K1}(T-1) & n_{K2}(T-1) & \cdots & n_{KK}(T-1) \end{bmatrix} = N(T-1)$$

ในทางปฏิบัตินั้นรูปเมตริกซ์ (matrix) ส่วนใหญ่สมาชิกจะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะมีการเปลี่ยนแปลงของพนักงานจากกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งไปยังกลุ่มที่ระดับต่ำกว่า การเปลี่ยนแปลง (Flows) ของพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งที่แสดงไว้ในรูปเมตริกซ์ (matrix) ข้างต้นเป็นการเปลี่ยนแปลง (Flows) ภายในของระบบ ซึ่งอาจจะเป็นการเลื่อนตำแหน่ง (promotion) หรือการลดตำแหน่ง (demotions) การเปลี่ยนแปลงของพนักงานระหว่างระบบและภายนอกระบบเกิดได้ 2 ทาง คือ การสูญเสียของพนักงาน (wastage flow) จากระดับตำแหน่ง i ในช่วงเวลา (T - 1 , T) เขียนแสดงได้เป็น $n_{i,k+1}(T-1)$ และเขียนในรูปของเวคเตอร์ของการสูญเสีย (vector of wastage flows) $n_{k+1}(T-1)$ และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการรับพนักงานเพิ่ม (recruitment flow)

เข้ามาระดับตำแหน่ง i ในช่วงเวลาเดียวกัน เขียนแสดงได้เป็น ($n_{0i}(T)$ และเขียนแสดงในรูปเวคเตอร์ได้เป็น $n_0(T)$ ถ้ากำหนดช่วงเวลาในการพิจารณาใหม่ ซึ่งแต่เดิมกำหนดจากจุดเริ่มต้นและใช้จุดสุดท้ายของช่วงเวลาแทน เนื่องจากต้องการทราบจำนวนพนักงานที่รับเพิ่มเข้ามาใหม่หลังจากที่มีการสูญเสียและการโอนย้ายของพนักงาน (wastage and transfer) ทั้งยังมีส่วนช่วยในการบันทึกข้อมูลของเหตุการณ์ต่าง ๆ อีกด้วย

โครงสร้างของจำนวนพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานอยู่ในรูปทั่ว ๆ ไป ซึ่งสามารถใช้ได้อย่างกว้างขวางมาก และสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามระดับตำแหน่งที่จัดแบ่งเพื่อให้เหมาะสมกับระบบงานนั้น ๆ

บางครั้งการเปลี่ยนแปลงของพนักงานก็ใช้เทียบสัดส่วน (proportions) กระทำโดยการแบ่งจำนวนพนักงานทั้งหมดตามระดับตำแหน่งดังแสดงในตาราง 3.1 จะเห็นการเปลี่ยนแปลงของพนักงานได้อย่างชัดเจน โดยที่ผลรวมในแถวนอนและแถวตั้ง (row and column totals) การกำหนดจำนวนพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งของจุดสิ้นสุดทั้งสองของเวลา

<u>ตารางที่ 3.1</u> แสดงจำนวนพนักงานในช่วงเวลา (T - 1, T)

| | $n_{01}(T)$ | $n_{02}(T)$ . . . . | $n_{0k}(T)$ | – | row totals |
|---|---|---|---|---|---|
| | $n_{11}(T-1)$ | $n_{12}(T-1)$ . . . | $n_{1k}(T-1)$ | $n_{1,k+1}(T-1)$ | $n_1(T-1)$ |
| | $n_{21}(T-1)$ | $n_{22}(T-1)$ . . . | $n_{2k}(T-1)$ | $n_{2,k+1}(T-1)$ | $n_2(T-1)$ |
| | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |
| | $n_{k1}(T-1)$ | $n_{k2}(T-1)$ . . . | $n_{kk}$ | $n_{k,k+1}(T-1)$ | $n_k(T-1)$ |
| Column totals | $n_1(T)$ | $n_2(T)$ . . . | $n_k(T)$ | – | – |

ถ้าสมาชิกในตารางเป็นสัดส่วน (proportions) กับผลรวมในแถวนอน (row total) ในแต่ละแถว การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งได้ ดังเช่น $n_{1,k+1}(T-1)/n_i(T-1)$ เป็นอัตราการสูญเสียกำลังคนในแต่ละระดับตำแหน่ง i อัตราต่าง ๆ ดังกล่าวเป็นประโยชน์ในการหารูปแบบของการเปลี่ยนแปลงของพนักงาน และการแก้ปัญหาในเรื่องต่าง ๆ นอกจากนั้นยังเป็นส่วนสำคัญในรูปแบบของมาร์คอฟ (Markov Model)

นอกจากนี้สมาชิกในตารางเป็นสัดส่วนกับผลรวมในแถวตั้ง (column totals) แต่ละแถวก็มีประโยชน์ด้วยเช่นกัน ซึ่งวิธีการนี้อาจเหมาะสมกว่าถ้าจะพิจารณารูปแบบของการเปลี่ยนแปลงของพนักงานเข้าสู่ระดับตำแหน่งที่กำหนดให้มากกว่ารูปแบบของการเปลี่ยนแปลงของพนักงานไปจากระบบ

ความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นในตารางที่ 3.1 สามารถแสดงได้ในรูปพีชคณิตซึ่งจะใช้ในการพัฒนาต่อไป โดยแสดงได้ดังนี้

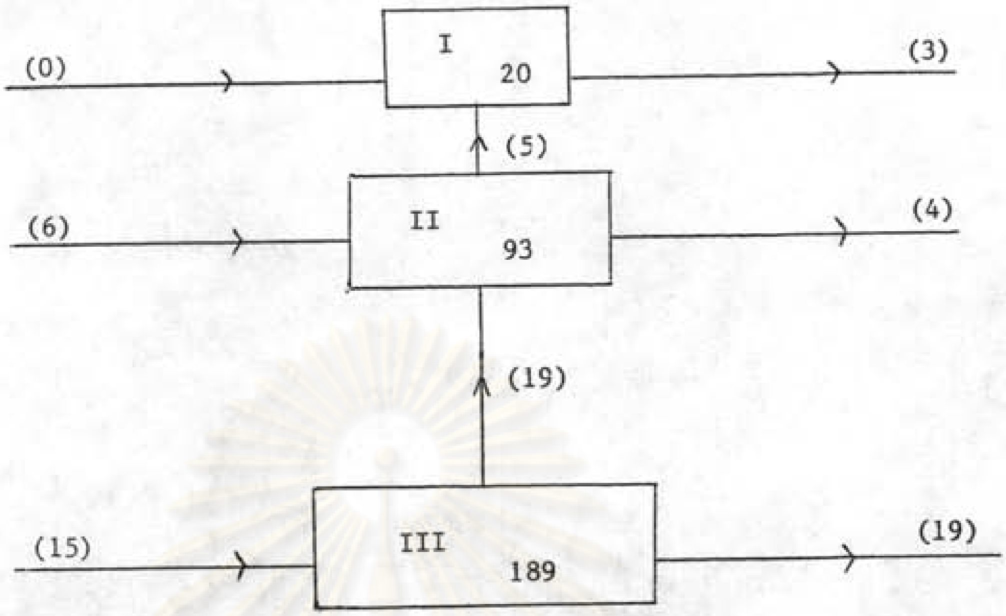
$$n_j(T) = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(T-1) + n_{oj}(T) \qquad (j = 1,2,\ldots,k) \qquad (3.1)$$

หรือ

$$n(T) = lN(T-1) + n_0(T) \qquad (3.2)$$

โดยที่ $l = (1,1,\ldots,1)$ สังเกตว่า การเปลี่ยนแปลงของพนักงานที่สูญเสียไป (wastage) ไม่ได้ปรากฏอยู่ภายในสมการเหล่านี้ เพราะพนักงานระดับต่าง ๆ ที่ลาออกไปหรือจากไปแล้วไม่มีผลต่อจำนวนพนักงานแต่ละระดับตำแหน่งในอนาคต

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงในแต่ละระดับตำแหน่งสามารถจัดเป็นไดอะแกรมโครงข่าย (network diagram) ซึ่งแสดงในรูป 3.2 สำหรับการแบ่งระดับตำแหน่ง 3 ระดับ ดังนี้




รูปที่ 3.2 จำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงสำหรับ 3 ระดับตำแหน่ง

ช่องสี่เหลี่ยม (rectangles) แทน 3 ระดับตำแหน่ง (three grades) และตัวเลขข้างในช่องสี่เหลี่ยมเป็นจำนวนพนักงานที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา (stock at the beginning of the interval) ลูกศร (arrows) ใช้แทนเส้นทางของการเปลี่ยนแปลงของพนักงาน (การรับพนักงาน, การเลื่อนตำแหน่ง, การสูญเสีย หรือการออกไปจากระบบ) ซึ่งแสดงด้วยตัวเลขที่อยู่ในวงเล็บ ตารางที่ 3.2 แสดงข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงของพนักงานในรูปแบบตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.2 แสดงจำนวนพนักงานของระบบในรูปที่ 3.2

| | 15 | 6 | 0 | wastage | Initial Stocks |
|---|---|---|---|---|---|
| | 151 | 19 | 0 | 19 | 189 |
| | 0 | 84 | 5 | 4 | 93 |
| | 0 | 0 | 17 | 3 | 20 |
| Final Stocks | 166 | 109 | 22 | | |

จำนวนพนักงานเมื่อสิ้นสุดช่วงเวลา (Final Stock) ไม่ได้แสดงจำนวนในรูปตารางที่ 3.1 สามารถหาค่าได้จากการรวมจำนวนพนักงานที่อยู่ในระดับตำแหน่งเดิมกับพนักงานที่รับเพิ่มเข้ามาใหม่ในระดับเดียวกัน อัตราการเปลี่ยนแปลง (flow rate) ของพนักงานออกไปแต่ละตำแหน่งดังต่อไป

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 151/189 | 19/189 | 0/189 | : | 19/189 |
| 0/93 | 84/93 | 5/93 | : | 4/93 |
| 0/20 | 0/20 | 17/20 | : | 3/20 |

จะได้

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.80 | 0.10 | 0 | : | 0.10 |
| 0 | 0.90 | 0.05 | : | 0.04 |
| 0 | 0 | 0.85 | : | 0.15 |

ผลรวมของแถวนอน (row to sum) ที่สองมีค่าไม่ถึง 1 เนื่องจากการปัดเศษทศนิยม ในลักษณะเดียวกันอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เข้ามาในแต่ละระดับตำแหน่ง คือ

| | | |
|---|---|---|
| 15/166 | 6/109 | 0/22 |
| 151/166 | 19/109 | 0/22 |
| 0/166 | 84/109 | 5/22 |
| 0/166 | 0/109 | 17/22 |

จะได้

| | | |
|---|---|---|
| 0.09 | 0.06 | 0 |
| 0.91 | 0.17 | 0 |
| 0 | 0.77 | 0.23 |
| 0 | 0 | 0.72 |

การวิเคราะห์ข้างบนนั้นทำได้ง่าย แต่ก็มักจะต้องวิเคราะห์ต่อไปอีกเพื่อที่จะศึกษาให้ชัดเจนในการวางแผนกำลังคน (Manpower planning issues) การวิเคราะห์แนวทางนี้จะพบได้มากในงานของ Parhhouse (1977), Mahaney และ coworker (1977)

จะพบว่าจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงพนักงาน (stock and flow) ในระบบกำลังคนมีหลักเกณฑ์พื้นฐาน 2 ประการ สำหรับระบบการเก็บข้อมูลส่วนบุคคล (Personal record system) ซึ่งต้องสามารถให้ข้อมูลต่อไปนี้ได้ ประการแรก ข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนพนักงานแต่ละระดับ (stocks) ตลอดของช่วงเวลา และประการที่สอง ข้อมูลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของพนักงาน (flows)

4. <u>รูปแบบของการเปลี่ยนแปลงโดยอาศัยทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ</u> (Transition Model Base on the Theory of Markov chains)

ระบบกำลังคน (Manpower system) ที่พิจารณาจะเกี่ยวข้องกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานแต่ละระดับ (stocks and flows) เนื่องจากการวางแผนกำลังคนอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานในระดับต่าง ๆ การควบคุมปริมาณดังกล่าวที่ต้องการเป็นรูปแบบระบบไดนามิคส์ (dynamic model of system) เพื่อที่จะค้นหาผลของแผนการต่าง ๆ รูปแบบจะต้องอยู่ภายใต้ข้อจำกัดต่าง ๆ ขององค์การ

แนวความคิดบางอย่างเกี่ยวกับรูปแบบของการเปลี่ยนแปลง (transition models) ในการปฏิบัติการวางแผนกำลังคน (Manpower planning) คือ

1. โครงสร้างของระดับตำแหน่ง (หรืออายุหรืออายุการทำงาน) จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในอนาคตเมื่อมีการสูญเสียพนักงานในระดับต่าง ๆ และมีการเลื่อนตำแหน่งในแต่ละระดับต่อเนื่องกัน

2. องค์การควรมีนโยบายการเลื่อนตำแหน่ง (pomotion rate) และการรับพนักงานอย่างไร

3. จะมีผลกระทบอย่างไรเมื่อองค์การมีการขยายงาน ควรจะมีการเลื่อนระดับตำแหน่งหรือโครงสร้างขององค์การอย่างไร เพื่อที่จะให้องค์การมีผลกระทบกระเทือนน้อยที่สุด

4. โครงสร้างอายุอุดมคติ (ideal age structure) สำหรับองค์การแต่ละองค์การมีหรือไม่

รูปแบบจำลอง (Models) มีส่วนสำคัญในการอธิบายรายละเอียดของระบบร่วมกับกลุ่มของสมมุติฐาน (set of assumptions) ที่ไม่สามารถควบคุมตัวแปรได้ (uncontrolled variables) สมมุติฐานแบ่งออกได้ 2 ชนิดคือ จากสังเกตหรือทดสอบสมมุติฐาน (empirical or hypothetical) สมมุติฐานจากการสังเกต (empirical assumption) เป็นสมมุติฐานที่ได้จากการสังเกตค่าของข้อมูลในอดีต ตัวอย่างเช่น อัตราการสูญเสีย (wastage rate) ถ้าตรวจสอบบันทึกของข้อมูลการลาออก (leaving) ของพนักงานกลุ่มหนึ่ง อายุการทำงาน (lenth of services) จะมีลักษณะเหมือนกัน จะพบว่ามีจำนวนเป็นสัดส่วนกับจำนวนพนักงานในกลุ่มนั้นหรือระดับตำแหน่งนั้น (stock) โดยประมาณ (approximate) สิ่งนี้เป็นการยืนยันสมมุติฐานที่ว่าแต่ละบุคคลในกลุ่มเดียวกันมีความน่าจะเป็นของการลาออก (probability of leaving) เหมือนกัน (ไม่ขึ้นกับเวลา)

จากสมมุติฐานดังกล่าวทำให้เข้าใจว่า การสังเกตรูปแบบในอดีตจะมีผลต่อเนื่องถึงอนาคต อย่างไรก็ตามในแผนการจำนวนมากสนใจความเป็นไปได้ในอนาคตมากกว่าโครงการในอดีต ในกรณีเช่นนี้ควรมองถึงผลของสมมุติฐานในระดับที่แตกต่างของความน่าจะเป็นของการสูญเสีย (wastage probability) ซึ่งทำให้ทราบถึงระบบของการทำงาน

จากการสังเกตนั้นแสดงว่า การเปลี่ยนแปลง (flow) ของพนักงานเป็นสัดส่วนกับจำนวนพนักงาน (stock) ในแต่ละระดับ ซึ่งเป็นหลักการหนึ่งที่มีพื้นฐานมาจากรูปแบบของลูกโซ่มาร์คอฟ (markov chain model) เราจะต้องศึกษาในการแบ่งระดับของรูปแบบเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition flows) ซึ่งค่าเฉลี่ยเป็นสัดส่วนกับจำนวนพนักงาน (stock) ในแต่ละระดับ โดยทั่ว ๆ ไปการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการรับพนักงานเพิ่ม (recruitment flows) ไม่สามารถปฏิบัติโดยวิธีดังกล่าวได้

4.1 <u>หลักการเบื้องต้นของรูปแบบของลูกโซ่มาร์คอฟ</u> (The Basic Markov chain Model)

แต่ละบุคคลมีโอกาสหรือความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลง (probability transition) เท่ากัน ถ้าระบบแบ่งออกเป็น K ระดับ โดยการสูญเสีย (wastage) ของพนักงานจะพิจารณาในแต่ละระดับ ดังนั้นความน่าจะเป็นในการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition probabilities) ในแต่ละระดับ (grades) สามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cccc}
P_{11} & P_{12} \cdots & P_{1K} & W_1 \\
P_{21} & P_{22} \cdots & P_{2K} & W_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
P_{K1} & P_{K2} & P_{KK} & W_K
\end{array}
$$

เมื่อสมาชิกของ $P_{ij}$ คือความน่าจะเป็นของแต่ละบุคคลในระดับตำแหน่ง i ที่จุดเริ่มต้นไปสิ้นสุดที่ระดับตำแหน่ง j ของแต่ละช่วงเวลา ในขณะที่ $W_i$ คือความน่าจะเป็นของสมาชิกในระดับตำแหน่ง i (grade i) จากจุดเริ่มต้นไปสิ้นสุดที่จุดสุดท้ายของช่วงเวลานั้น สมมุติฐานของลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain) คือแต่ละบุคคลมีการเปลี่ยนแปลงสภาวะที่เป็นอิสระและมีโอกาสเป็นไปได้เหมือนกันโดยไม่ขึ้นกับเวลา อาจกล่าวได้ว่าแต่ละบุคคลจะมีทั้งคงอยู่ที่ตำแหน่งเดิมและเลื่อนตำแหน่งไปยังตำแหน่งอื่น ๆ หรือออกไปจากระบบ ดังนั้นผลรวมของแถวนอน (row) ทั้งหมดจะเป็นดังนี้

$$\sum_{J=1}^{K} P_{iJ} + W_i = 1 \qquad (4.1)$$

เมตริกซ์ (matrix) $P = \{P_{iJ}\}$ นี้เรียกว่า เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (the transition matrix) และแถวนอนของเวคเตอร์ (row vector) $W = (W_1, W_2, \ldots, W_k)$ ถูกเรียกว่า เวคเตอร์ของการสูญเสีย (wastage vector) อาจจะอธิบายเฉพาะเจาะจงลงไปว่าเวลาที่เป็นช่วง ๆ (time is discrete) นั้น ช่วงของเวลาแต่ละช่วงในทางปฏิบัติอาจเป็นปีหรือเดือนก็ได้

ข้อสมมุติฐานของแบบจำลอง (Model) นี้ส่วนใหญ่ค่อนข้างจะแน่นอน แต่ก็มีบางส่วนค่อนข้างยุ่งยากต่อการทดสอบอย่างง่าย ๆ (Empirically) แต่มันไม่ได้เป็นเนื้อหาที่ว่าข้อสมมุติฐานนี้จะต้องเป็นสิ่งที่ถูกต้องที่สุด เพียงแต่ว่าข้อสมมุติฐานนั้นใกล้เคียงกับความจริงเพียงพอสำหรับรูปแบบของการจำลองซึ่งมีประโยชน์ในการปฏิบัติ

สมาชิกของ P และ W จะถูกกำหนดเป็นค่าตัวเลข จึงอาจทำสมมุติฐาน (Hypothetical assumptions) หรือประมาณความเป็นไปได้จากข้อมูลในอดีต (empirical assumptions)

ข้อกำหนดของมาร์คอฟ (Markov) ดังกล่าวมาแล้วนี้ ก็ยังไม่สมบูรณ์ เพราะว่าไม่ได้กล่าวถึงเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวหรือการเปลี่ยนแปลงกำลังคนอันเนื่องมาจากการรับบุคคลากรเพิ่ม (recruitment flows) สมมุติว่า R(T) คือผลรวมของการรับบุคคลากร (recruit) ในช่วงเวลา T ถ้ากำหนดให้การรับบุคคลากรในแต่ละระดับตำแหน่งด้วยความน่าจะเป็น $r_1, r_2, \ldots, r_3$ $\left(\sum_{i=1}^{K} r_1 = 1\right)$ ดังนั้น $r = \{r_i\}$ ซึ่งเรียกว่าเวคเตอร์ของการรับพนักงานเพิ่ม (recruitment vector)

4.2 <u>สมการเบื้องต้นเมื่อการรับพนักงานเพิ่ม {R(T)} คงที่</u>

(The Basic Equation When {R(T)} is Fixed)

รูปแบบของมาร์คอฟสำหรับระบบกำลังคน (กำหนดโดย Bartholomew)* โดยการบันทึกจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานแต่ละระดับ ซึ่งแสดงเป็นสมการได้ดังนี้ (จากสมการ 3.1)

$$n_J(T) = \sum_{i=1}^{K} n_{iJ}(T-1) + n_{0J}(T) \quad (J = 1,2,\ldots,K) \quad (4.2)$$

---

*Bartholomew David J., and Forbes andrew F. Statistical technical for Manpower Planning, printed in great britain by page Bros (Norwich) LTD., 3rd edition, INC., 1982.

ระดับตำแหน่งของพนักงานต้องสัมพันธ์กับจุดของเวลาดังกล่าวและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานแต่ละระดับตำแหน่ง ยกเว้นการรับพนักงานเพิ่มจะต้องอ้างอิงกับหน่วยของช่วงเวลาที่จุดเริ่มต้นเช่นเดียวกัน การเปลี่ยนแปลงในรูปแบบสโตคาสติค (stochastic model) จะเกี่ยวข้องโดยความน่าจะเป็น (probabilities) ของสมการ (4.2) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (random variables) อย่างไรก็ตาม สมการจะมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง (linear) โดยถือหลักค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวัง (average or expected values) ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\bar{n}_J(T) = \sum_{i=1}^{K} \bar{n}_{iJ}(T-1) + \bar{n}_{0J}(T) \quad \text{เมื่อ} \quad j = 1,2,\ldots,K \qquad (4.3)$$

เมื่อ $\bar{n}$ แสดงค่าคาดหวังของจำนวนพนักงานระดับต่าง ๆ ในช่วงเวลา T กำหนดให้ $\bar{n}_i(T - 1)$ เป็นจำนวนคาดหวัง (expected) ของพนักงานแต่ละระดับที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา และ R(T) คือจำนวนการรับพนักงานเพิ่มแต่ละระดับทั้งหมด ซึ่งได้ว่า

$$\bar{n}_{0J} = R(T)r_j$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ldots,\ K)$$

$$\bar{n}_{iJ}(T-1) = \bar{n}_i(T-1)P_{iJ}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\bar{n}_j(T) = \sum_{i=1}^{K} \bar{n}_i(T-1)P_{ij} + R(T)r_j \qquad (J = 1,2,\ldots,K) \qquad (4.4a)$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์ (matrix) ได้ว่า

$$\bar{n}(T) = \bar{n}(T-1)P + R(T)r \qquad (4.4b)$$

สมการนี้เป็นสมการพื้นฐานของรูปแบบของลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain model) ที่นำมาประยุกต์ใช้ในการวางแผนกำลังคนมากที่สุด

จากสมการ (4.4) ถ้ากำหนดเป็นค่าขีดจำกัดเวคเตอร์ (limiting vector) จะได้ว่า

$$n = nP + Rr \qquad (4.5a)$$

โดยที่ R เป็นค่าขีดจำกัดของ R(T) ดังนั้นสามารถหาค่า n ได้โดย

$$n = Rr(I - P)^{-1} \quad (4.5b)$$

โดยที่อินเวอร์ เมตริกซ์ (Inverse matrix) ของเมตริกซ์ P ต้องมีผลรวมของแถวนอนไม่น้อยกว่า 1 หรือค่า n คำนวณหาได้จากสมการ (4.5b) โดยการทำซ้ำกันจนค่าของคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง (constant transition rate)

ตัวอย่างที่ 1 ในระบบงานได้แบ่งพนักงานออกเป็น 3 ระดับ ในแต่ละช่วงเวลา (Period) จะมีการเปลี่ยนแปลงพนักงาน ซึ่งการเปลี่ยนแปลงภายในระบบ (internal transition) คือการเลื่อนตำแหน่ง (promotion) ไปยังตำแหน่งที่สูงกว่า จำนวนพนักงานในระดับต่าง ๆ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา สมมุติว่าเวคเตอร์ของจำนวนพนักงานระดับต่าง ๆ เริ่มต้นคือ

$$n(0) = \begin{bmatrix} 180, & 145, & 35 \end{bmatrix}$$

และเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (transition probabity matrix) คือ

$$P = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$$

เวคเตอร์ของการรับพนักงานเพิ่มในแต่ละช่วงเวลา

$$R(T) = \begin{bmatrix} 52, & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

เราสามารถจะคาดคะเนจำนวนบุคคลากรในอนาคตได้ดังต่อไปนี้

จำนวนพนักงานแต่ละระดับในช่วงที่ 1 (N(T) = จำนวนพนักงานแต่ละระดับในช่วงที่ 1 (N(T-1)) (N(T-1) × ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (P) + การรับพนักงานเพิ่ม (R(T))

$$N(T) = \begin{bmatrix} 180 & 145 & 35 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.70 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 52 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

จำนวนพนักงานแต่ละระดับในช่วงที่ 2

ระดับ 1 = $(180 \times .70)+(145 \times 0)+(35 \times 0)+52 = 178$

ระดับ 2 = $(180 \times .10)+(145 \times .85)+(35 \times 0)+15 = 156$

ระดับ 3 = $(180 \times 0)+(145 \times .05)+(35 \times .85)+3 = 40$

และเมื่อเราคำนวณซ้ำ ๆ กันไปโดยที่นโยบายต่าง ๆ ไม่เปลี่ยนแปลงจนถึงช่วงที่ 10 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

<u>ตารางที่ 3.3</u> แสดงจำนวนพนักงานแต่ละระดับในแต่ละช่วงเวลา

| ระดับ | ช่วงที่ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 178 | 177 | 176 | 175 | 174 | 174 | 174 | 174 | 174 | 174 |
| 2 | 156 | 166 | 173 | 180 | 185 | 190 | 194 | 197 | 200 | 202 |
| 3 | 40 | 45 | 49 | 54 | 58 | 61 | 65 | 68 | 70 | 73 |

หรืออาจใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการคำนวณ ซึ่งรายละเอียดและวิธีการใช้อยู่ในภาคผนวกที่ 8 ผลการคำนวณเป็นดังต่อไปนี้

```
?RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

  K = ?3
  N = ?180,145,35
  P = ?.70,.10. 0
      ?  0,.85,.05
      ?  0,  0,.85
  R = ?52,15,3
R.R$,E?1,0.0
T.X = ?10,YES
  <*> ?RUN

 T    1         2         3     TOTAL     R

  0 180(50%) 145(40%) 35(10%) 360(100%)
  1 178(48%) 156(42%) 40(11%) 374(104%) 70
  2 177(46%) 166(43%) 45(12%) 387(108%) 70
  3 176(44%) 173(44%) 49(12%) 398(111%) 70
  4 175(43%) 180(44%) 54(13%) 409(113%) 70
  5 174(42%) 185(44%) 58(14%) 419(116%) 70
  6 174(41%) 190(45%) 61(14%) 425(118%) 70
  7 174(40%) 194(45%) 65(15%) 432(120%) 70
  8 174(40%) 197(45%) 68(15%) 439(122%) 70
  9 174(39%) 200(45%) 70(16%) 444(123%) 70
 10 174(39%) 202(45%) 73(16%) 449(125%) 70
  <*> ?T=20
 20 173(37%) 213(45%) 87(18%) 473(131%) 70
  <*> ?T=99
 99 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
  <*> ?+T=5
100 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
101 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
102 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
103 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
104 173(36%) 216(45%) 92(19%) 481(134%) 70
  <*> ?END
```



<u>**แสดงผลลัพธ์ที่ 4-1 ของตัวอย่างที่ 1**</u>

ซึ่งค่า K คือจำนวนระดับตำแหน่ง (number of grades)

N คือเวคเตอร์ของจำนวนพนักงานระดับต่าง ๆ เริ่มต้น (initial stock vector)

P คือเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition matrix)

R คือเทอมของการรับพนักงานเพิ่ม

ผลของการคำนวณทำให้สามารถทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตในช่วง 10 ข้างหน้า ในอัตรา 2-4 % ต่อปี จำนวนพนักงานระดับ 1 มีอัตราส่วนลดลง แต่จำนวนพนักงานระดับ 2 และ 3 มีอัตราส่วนเพิ่มขึ้น การรับพนักงานเพิ่มในแต่ละระดับต่าง ๆ จำนวนคงที่ 70 คน ต่อปี คือ $R(T) = (52, 15, 3)$ ถ้านโยบายการบริหารคงที่ตลอด เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงจะทำให้สัดส่วนของจำนวนพนักงานที่จะเกิดในช่วงเวลาหนึ่งจะอยู่ในลักษณะคงที่ เรียกว่า สภาวะดุลยภาพ คือจะต้องมีอยู่งวดหนึ่งในอนาคต จำนวนพนักงานในแต่ละระดับอยู่ในลักษณะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง

### 4.3 <u>รูปแบบของมาร์คอฟที่มีขนาดคงที่</u> (The Fixed-Size Model)

ในกรณีที่องค์การมีอุปสงค์ของแรงงานมากมาย (a plentiful supple of labour) จำนวนพนักงานที่ต้องการรับเพิ่มเข้ามาใหม่จะพิจารณาได้จากอัตราตำแหน่งว่างที่เกิดขึ้นในระบบขององค์การ ถ้าพิจารณาจำนวนระดับตำแหน่งทั้งหมดของพนักงานคงที่ โดยเฉพาะความสัมพันธ์รูปแบบของระดับตำแหน่งของพนักงานขึ้นอยู่กับอายุหรืออายุการทำงานของพนักงาน แต่มีสถานะการณ์อื่น ๆ ที่ทำให้จำนวนระดับตำแหน่งของพนักงานเปลี่ยนแปลงภายในจำนวนที่คงที่ทั้งหมด ซึ่งเราเรียกรูปแบบนี้ว่า รูปแบบของมาร์คอฟขนาดคงที่

จำนวนพนักงานที่รับเข้ามาใหม่จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกประกอบด้วยจำนวนพนักงานที่รับเข้ามาเนื่องจากมีตำแหน่งงานว่างเกิดขึ้นจากการขยายงานของระบบขององค์การ และส่วนที่สอง การรับพนักงานเข้ามาเพื่อทดแทนพนักงานที่

จากออกไป เราสามารถทราบค่าคาดหวังของจำนวนพนักงานที่เข้ามาใหม่ $R(T)$ ได้ดังนี้

$$\bar{R}(T) = N(T) - N(T-1) + \sum_{i=1}^{K} \bar{n}_i(T-1)W_i \qquad (4.6)$$

เมื่อ $N(T)$ เป็นจำนวนพนักงานทั้งหมดของระบบ ณ เวลา $T$

$N(T-1)$ เป็นจำนวนของพนักงานทั้งหมดของระบบ ณ เวลา $T-1$

เมื่อแทนสมการ (4.6) ลงในสมการ (4.4b) จะได้ว่า

$$\bar{n}(T) = \bar{n}(T-1)\{P + w'r\} + M(T) \qquad (4.7)$$

โดยที่ $M(T) = N(T) - N(T-1)$

$\bar{n}(T-1)P$ หมายถึง การเคลื่อนไหวกำลังคนภายในของระบบ (การเลื่อนระดับตำแหน่งภายในระบบขององค์การ)

$\bar{n}(T-1)W$ หมายถึง การรับพนักงานเข้ามาใหม่เพื่อทดแทนจำนวนพนักงานที่ออกไปจากระบบ

$M(T)$ หมายถึง การรับพนักงานเข้ามาใหม่เนื่องจากมีตำแหน่งงานว่างจากการขยายงานของระบบ

ถ้าเรากำหนดให้ $Q = P + w'r$ แล้วจะเห็นว่าสมการ (4.7) มีรูปแบบเหมือนสมการ (4.4b) โดยที่ $Q$ เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (The transition matrix) ที่มีสมาชิกเป็น $P_{ij} + w_i r_j$ ในเทอมของ $P_{ij}$ เป็นความน่าจะเป็นของแต่ละบุคคลที่มีการเลื่อนระดับตำแหน่งโดยตรงจากระดับตำแหน่ง $i$ ไป $J$ ในขณะที่เทอมของ $w_i r_J$ เป็นความน่าจะเป็นของการสูญเสียพนักงานที่เกิดขึ้นในระดับ $i$ ซึ่งมีผลทำให้ต้องรับพนักงานใหม่เข้ามาทดแทนตำแหน่งที่สูญเสียไประดับ $J$

เมื่อใดที่ผลรวมของแถวนอน (ROW) ของ $Q$ มีค่าเป็น 1 ทั้งหมด จะเรียกเมตริกซ์ $Q$ ว่าเป็นเมตริกซ์สโตคาสติค (stochastic matrix) ดังนั้นถ้า $M(T) = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของเวลา $T$ จะได้ว่าระบบมีขนาดคงที่ (constant-size

system) และในกรณีสมการ (4.7) เป็นเหมือนสมการพื้นฐานของทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ*
(the basic equation of Markov-chain theory)

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเราใช้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition matrix) ของตัวอย่างที่ 1 เมื่อ

$$Q = P + W = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.20 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 & 0 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.15 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$$

สมมุติว่าองค์การของระบบไม่มีการขยาย (no expansion) จำนวนพนักงานระดับต่าง ๆ สามารถจะคาดคะเนได้ จากการแสดงผลลัพธ์ที่ 4.2 โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเมตริกซ์ Q ใส่แทนที่ P ขณะที่ข้อมูลของค่า R ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับเทอมของ M(T) ของสมการ (4.7) ได้กำหนดเป็นค่าศูนย์ทั้งหมด

การใช้โปรแกรมเพื่อคำนวณค่า Q ในทางเลือกการรับพนักงานเพิ่ม (ดูภาคผนวกที่ 8 ข้อ (ง), (จ)) ซึ่งโปรแกรมต้องใส่ค่า P แทนที่ Q และคำนวณค่า R(T) โดยตรง จำนวนพนักงานทั้งหมดจะมีขนาดเท่าเดิม จะไม่มีการรับพนักงานเข้ามาใหม่เนื่องจากตำแหน่งงานว่างจากการขยายงานของระบบ M(T) จำนวนพนักงานในแต่ละระดับจะเท่ากับตัวอย่างที่ 2 ทุกประการ ซึ่งจะไม่แสดงผลลัพธ์ให้ แต่จะใช้กรณีเดียวกัน แต่มีการขยายงานดังตัวอย่างที่ 3

---

*จากทฤษฎีนี้สามารถที่ค้นคว้าเพิ่มเติมได้ใน Klmeny, J.G., and L. Snell (1960). Finite Markov chains, Van Nostrand, New York. Springer-Verlag, Berlin.

```
IAYW

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

 K = ?3
 N = ?180.145,35
 P = ?0.90,0.10.0
     ?0.10.0.85.0.05
     ?0.15.0   ,0.85
 R = ?0.0,0
R,R#,E?1,0.0
T,% = ?5,YES
  (#) ?RUN

 T    1        2        3    TOTAL     P

 0 180(50%) 145(40%) 35(10%) 360(100%)
 1 182(50%) 141(39%) 37(10%) 360(100%) 0
 2 183(51%) 138(38%) 39(11%) 360(100%) 0
 3 185(51%) 136(38%) 40(11%) 360(100%) 0
 4 186(52%) 134(37%) 40(11%) 360(100%) 0
 5 187(52%) 132(37%) 41(11%) 360(100%) 0
  (#) ?T=99
99 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
  (#) ?+T=5
100 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
101 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
102 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
103 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
104 191(53%) 127(35%) 42(12%) 360(100%) 0
  (#) ?END
```



<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-2 ของตัวอย่างที่ 2</u>

สำหรับตัวอย่างที่ 1 จะรับพนักงานเข้ามาเพื่อทดแทนจำนวนที่ออกไปจากระบบ ซึ่งในกรณีนี้จะไม่มีการขยายงาน เมื่อเรากำหนด Q = P + W (เท่ากับได้ทดแทนจำนวนพนักงานที่ออกไปจากระบบเข้ามา ทำให้ค่า R = 0 คือไม่มีการขยายงานเพิ่ม)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ใช้โจทย์ของตัวอย่างที่ 1 ซึ่งเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะและจำนวนพนักงานที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลาคงเดิม แต่เวคเตอร์ของการรับพนักงานเพิ่ม (0.743, 0.214, 0.043) เป็นอัตราของการขยายงานขององค์การในจำนวนทั้งหมด M(T) = 30 ของทุกช่วงเวลา จำนวนพนักงานในแต่ละระดับจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในอนาคต

```
?RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

  K = ?3
  N = ?180,145,35
  P = ?0.70,0.10,0
     ?0  ,0.85,0.05
     ?0  ,0   ,0.85
  R = ?.743,.214,0.043
R,R#,E?-1,-30
T,X = ?5,YES
  (*) ?RUN

 T    1          2          3     TOTAL      R

 0 180(50%) 145(40%) 35(10%) 360(100%)
 1 190(49%) 160(41%) 41(10%) 390(108%) 86
 2 200(48%) 174(41%) 46(11%) 420(117%) 90
 3 210(47%) 188(42%) 52(12%) 450(125%) 94
 4 220(46%) 202(42%) 58(12%) 480(133%) 99
 5 231(45%) 216(42%) 64(13%) 510(142%) 103
  (*) ?T=10
10 284(43%) 283(43%) 93(14%) 660(183%) 125
  (*) ?T=20
20 392(41%) 418(44%) 151(15%) 960(267%) 168
  (*) ?T=99
99 1246(37%) 1480(44%) 604(18%) 3330(925%) 515
  (*) ?-T=5
100 1257(37%) 1495(44%) 609(18%) 3360(933%) 518
101 1268(37%) 1507(44%) 615(18%) 3390(942%) 522
102 1279(37%) 1520(44%) 621(18%) 3420(950%) 527
103 1290(37%) 1534(44%) 626(18%) 3450(958%) 531
104 1300(37%) 1547(44%) 632(18%) 3480(967%) 575
  (*) ?END
```

<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-3 ของตัวอย่างที่ 3</u>

การรับพนักงานเพิ่มจะรับมาเพื่อทดแทนจำนวนที่ออกไปจากระบบ และเนื่องจากการขยายงานขององค์การจะรับพนักงานเพิ่มจำนวน 30 คนทุก ๆ ปี ในอัตราการรับพนักงาน (R) = .743,

.214 และ .043 จากจำนวนทั้งหมด 30 คน จะสังเกตเห็นว่าจำนวนพนักงานทั้งหมดจะเพิ่มขึ้นทุก ๆ ปี 30 คน

4.4 <u>การประยุกต์ใช้รูปแบบมาร์คอฟกับการกระจายของอายุและอายุการทำงาน</u>
(The Markov Model Applied to Age and Length-of Service Distributions)

รูปแบบของมาร์คอฟจะมีบทบาทสำคัญโดยเฉพาะในการศึกษาการกระจายอายุและอายุการทำงาน จากการกระจายของอายุพนักงานสามารถนำไปใช้ในการเลื่อนตำแหน่งของพนักงาน ด้วยเหตุที่ความขาดแคลนของพนักงานในกลุ่มโดยเฉพาะทำให้เกิดความยุ่งยากในการค้นหาคนที่เหมาะสมสำหรับการเลื่อนตำแหน่ง เมื่อพนักงานเกษียณย่อมต้องเกิดปัญหาในการรับพนักงานใหม่บรรจุในตำแหน่งที่มีอัตราว่าง จะเป็นลักษณะเช่นนี้วนเวียนกันไปเรื่อย ๆ ในทางปฏิบัติการวิเคราะห์และการคาดคะเนการกระจายอายุพนักงานที่มีการกระจายที่ผิดปกติมีความสำคัญมาก ซึ่งสามารถวิเคราะห์และคาดคะเนได้เป็นอย่างดีโดยอาศัยรูปแบบของมาร์คอฟ (Markov model) ในรูปแบบนี้สามารถเตรียมการเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น

ในช่วงนี้จะกลับไปพิจารณาระบบเป็นกลุ่มเดียวกัน (Homogeneous system) ซึ่งไม่แบ่งระดับตำแหน่ง ขั้นแรกต้องพิจารณาแบ่งจำนวนพนักงานตามอายุการทำงาน โดยให้ช่วงอายุที่แบ่งเท่า ๆ กัน การเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition) มีโอกาสเกิดได้เนื่องจากสาเหตุ 2 ประการ คือ พนักงานออกจากระบบ (ลาออก, ปลดเกษียณ) หรือพนักงานมีอายุการทำงานเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งช่วงเวลา (one time unit) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะมีค่า K × (K+1) สามารถเขียนได้เป็น

$$
\begin{matrix}
0 & P_{12} & 0 & \cdots & 0 & W_1 \\
0 & 0 & P_{23} & \cdots & 0 & W_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & P_{K-1,K} & W_{K-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}
$$

โดยที่ค่า W เป็นอัตราการสูญเสีย (ออกจากระบบ) ของอายุการทำงานของพนักงาน จะได้

$$P_{i,i+1} = 1 - W_i \qquad (i = 1,2,\ldots,k-1)$$

โดยที่ K เป็นอายุการทำงานที่มากที่สุดของพนักงาน หลังจากนั้นทุกคนจะต้องออกจากระบบ (ปลดเกษียณ) ซึ่งบางครั้งอาจต้องใช้อายุการทำงานเท่ากับ K หรือมากกว่า K ซึ่งในกรณีนี้สมาชิกสองตัวสุดท้ายในแถวนอนสุดท้าย (Final row) ของเมตริกซ์เป็น $P_{K,K}$ และ $W = (1 - P_{KK})$

ถ้าสมมุติให้อัตราการสูญเสีย (wastage rates) ของอายุการทำงานของพนักงานคงที่ตลอดช่วงเวลาแล้วรูปแบบของมาร์คอฟ (Markov Model) สามารถนำมาใช้หาโครงสร้าง ของอายุการทำงาน (the length-of-service structure) ในการประยุกต์นี้สิ่งสำคัญโดยเฉพาะจะต้องรู้โครงสร้างสภาวะที่คงที่ (steady state structure) หรือเรียกว่า โครงสร้างอุดมคติ (ideal structure) โครงสร้างอุดมคติ คุณสมบัติของตัวแปร (parameter) ต่าง ๆ จะไม่เปลี่ยนแปลงตลอดไป คือจะต้องมีอยู่งวดหนึ่งในอนาคตจำนวนพนักงานในแต่ละระดับอยู่ในลักษณะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งได้ความจริงว่า จำนวนพนักงานที่เข้ามา (inflow) และพนักงานที่ออกไป (outflow) ในแต่ละระดับต้องเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Rr_1 &= n_i \\ n_{j-1}P_{j-1} + Rr_j &= n_j \qquad (j = 2,\ldots,K-1) \\ n_{K-1}P_{K-1,K} + Rr_j &= n_K W_K \end{aligned} \tag{4.8}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> การพิจารณาการกระจายของอายุ (age distribution) ของพนักงานแบ่งออกเป็น 3 ระดับ และมีความพารามิเตอร์ (parameters) ดังต่อไปนี้

| ระดับอายุ (age class) | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| อายุ (ปี) | 20-30 | 30-55 | 55+ |
| ความน่าจะเป็นของการสูญเสีย (wastage probability) | 0.25 | 0.05 | 0.20 |

$$n(0) = (357,\ 153,\ 15)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0.93 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.80 \end{bmatrix}$$

โดยที่ n(0) คือจำนวนพนักงานในแต่ละระดับอายุ ซึ่งแบ่งระดับอายุเป็น 3 ระดับ และค่า P คือ เมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (Transition Probability Matrix) ภายใน 5 ปีข้างหน้าจะมีการขยายงานในอัตรา 15 % ต่อปี และจะคงที่คือไม่มีการขยายงานจะรับพนักงานเพิ่มเพื่อทดแทนกับพนักงานที่จากไป ต้องการทราบจำนวนพนักงานในแต่ละระดับจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร

โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณเพื่อความสะดวกและรวดเร็ว ซึ่งแสดงผลลัพธ์ที่ 4-4

```
?RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
    EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

  K = ?3
  N = ?357,153,15
  P = ?0.72,0.03,0
      ?0  ,0.95,0.02
      ?0  ,0   ,0.80
  R = ?1,0,0
R,R$,E?-1,*,1,15
T,I = ?5,YES
  (*) ?RUN

 T     1          2          3    TOTAL     R

 0 357(68%) 153(29%) 15(3%) 525(100%)
 1 436(72%) 153(25%) 15(2%) 604(115%) 179
 2 524(75%) 155(22%) 15(2%) 694(132%) 210
 3 623(78%) 160(20%) 15(2%) 798(152%) 246
 4 735(80%) 168(18%) 15(2%) 918(175%) 267
 5 862(82%) 178(17%) 16(1%) 1056(201%) 333
  (*) ?R
  R = ?1,0,0
R,R$,E?-1,*,1,0
  (*) ?+T=5
 6 848(80%) 191(18%) 16(2%) 1056(201%) 228
 7 836(79%) 203(19%) 17(2%) 1056(201%) 225
 8 824(78%) 214(20%) 17(2%) 1056(201%) 222
 9 814(77%) 224(21%) 18(2%) 1056(201%) 220
10 804(76%) 233(22%) 19(2%) 1056(201%) 218
  (*) ?T=15
15 766(73%) 265(25%) 23(2%) 1056(201%) 211
  (*) ?T=20
20 747(71%) 283(27%) 26(2%) 1056(201%) 207
  (*) ?T=30
30 727(69%) 300(28%) 29(3%) 1056(201%) 203
  (*) ?T=99
99 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
  (*) ?+T=5
100 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
101 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
102 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
103 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
104 718(68%) 308(29%) 31(3%) 1056(201%) 201
  (*) ?END
```



**แสดงผลลัพธ์ที่ 4-4 ของตัวอย่างที่ 4**

จากผลลัพธ์ที่ 4.4 จำนวนพนักงานทั้งหมดจะมีจำนวนเป็นเท่าตัวภายใน 5 ปีข้างหน้าจาก 525 คนเป็น 1,056 คน มีจำนวนเพิ่มขึ้น 201 % จะมีการรับพนักงานเพิ่มเข้ามาเพื่อทดแทนกับจำนวนที่ต้องสูญเสียไปหรือออกไปจากระบบและมีการรับเข้ามาเนื่องจากการขยายงานขององค์การ ซึ่งการขยายงานในอัตรา 15 % ต่อปี ทำให้มีการรับพนักงานเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วภายใน 5 ปีนี้ และจะลดลงเนื่องจากองค์การหยุดการขยายงาน จะรับพนักงานเข้ามาก็เพื่อทดแทนกับพนักงานที่สูญเสียไปในแต่ละระดับเท่านั้น จำนวนพนักงานทั้งหมดจะคงที่คือ 1,056 คน เนื่องจากไม่มีการขยายงาน

### 4.5 <u>รูปแบบของมาร์คอฟกับระดับตำแหน่งและอัตราการเปลี่ยนแปลง</u>

(The Markov Model with Grade and Transition Rates)

ในหัวข้อที่แล้วมาได้กล่าวถึงรูปแบบระบบกำลังคนที่มีการสูญเสียกำลังคนในแต่ละระดับและการสูญเสียเนื่องจากอายุการทำงาน (หรืออายุ) เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ในทางปฏิบัติการที่บุคคลจะออกจากงานย่อมขึ้นกับสาเหตุหลายประการ แต่ทั้งนี้ก็ย่อมขึ้นอยู่กับอายุการทำงานและระดับตำแหน่งของบุคคลนั้นด้วย เช่นเดียวกันความน่าจะเป็นของการเลื่อนระดับตำแหน่งมักจะขึ้นอยู่กับว่าบุคคลนั้นอยู่ในระดับตำแหน่งนั้นมานานเท่าใดแล้ว ในความเป็นจริงแล้วการพิจารณาแบ่งระดับของรูปแบบมักจะให้มีการเปลี่ยนแปลงได้ ในทางปฏิบัติที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่ง การนำรูปแบบของมาร์คอฟมาแบ่งระดับจะต้องเหมาะสมกับปัญหาให้ได้มากที่สุด การแบ่งระดับนี้นับว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดขั้นตอนหนึ่งในการประยุกต์ใช้รูปแบบของมาร์คอฟ (Markov Model) ตัวอย่างต่อไปนี้จะอธิบายระบบตำแหน่ง 3 ระดับ ซึ่งความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะของทั้งระบบตำแหน่งและระบบอาวุโสอยู่ร่วมกัน

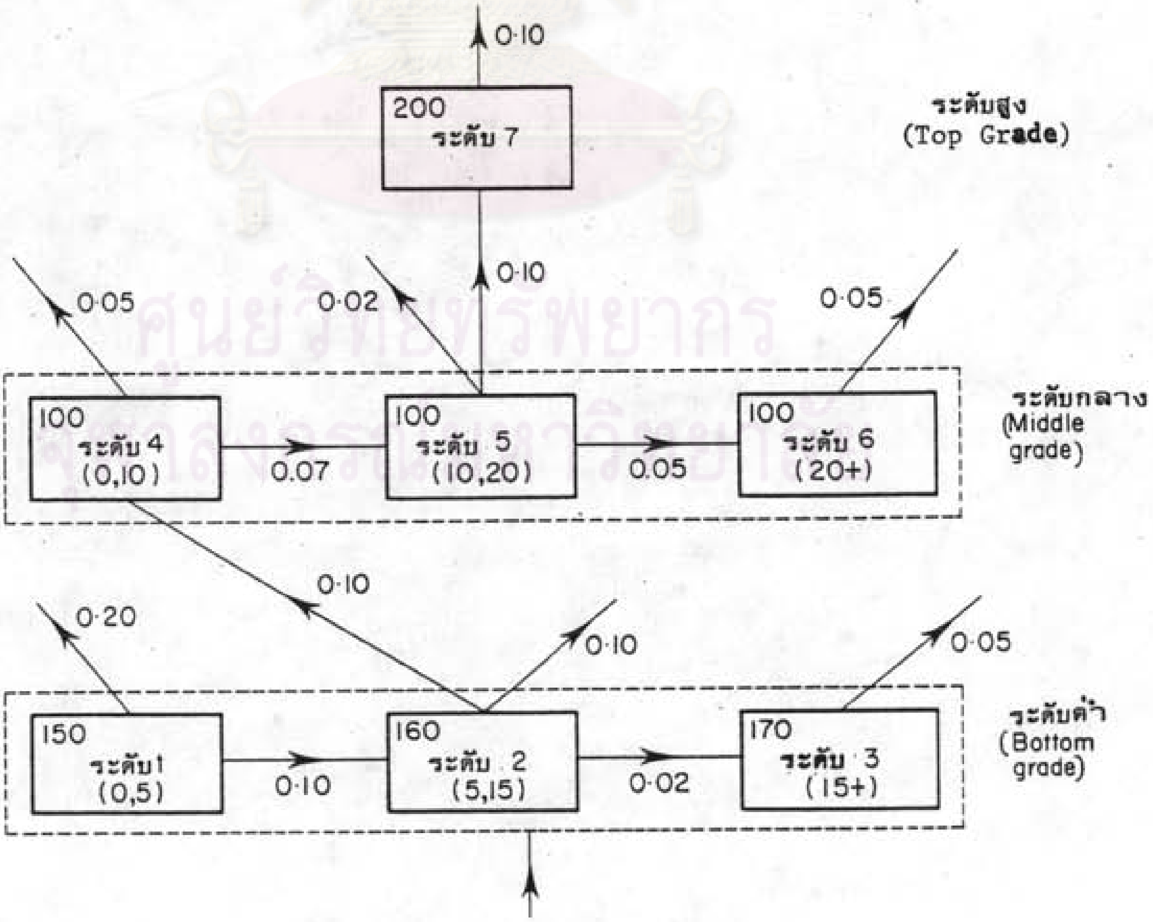
<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ข้อมูลกำหนดให้รูปที่ 3.3 ที่ซึ่งมีสัดส่วนความน่าจะเป็น (transition Probabilities) ทั้งหลายแสดงด้วยลูกศรหมายถึงการเปลี่ยนจากเนื่องมาจากเลื่อนตำแหน่งและการสูญเสียหรือการออกจากระบบ ส่วนในวงเล็บหมายถึงระบบอาวุโส (อายุการทำงานของแต่ละระดับ) โครงสร้างเริ่มของจำนวนพนักงานแต่ละระดับ

$$n(0) = (150, 160, 170 \,\vdots\, 100, 100, 100 \,\vdots\, 200)$$

จำนวนสมาชิกของแต่ละตำแหน่งก็แสดงอยู่ในช่องสี่เหลี่ยมเล็กในรูป 3.3 น่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงทั้งหลายได้รวบรวมเป็นรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
0.70 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.78 & 0.02 & 0.10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0.88 & 0.07 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0.05 & 0.10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.90
\end{array}\right]$$

ถ้าต้องการจำนวนพนักงานทั้งหมดคงที่ การรับพนักงานเข้ามาใหม่เพื่อทดแทนจำนวนพนักงานที่ออกไปจากระบบ จำนวนพนักงานในระดับต่าง ๆ จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร




รูปที่ 3.3 แสดงระบบของตัวอย่างที่ 5

```
]RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
-----------------------------------------

  K = ?7
  N = ?150.160,170,100,100,100,200
  P = ?0.70,0.10,0   ,0   ,0   ,0   ,0
      ?0   ,0.78,0.02,0.10,0   ,0   ,0
      ?0   ,0   ,0.95,0   ,0   ,0   ,0
      ?0   ,0   ,0   ,0.38,0.07,0   ,0
      ?0   ,0   ,0   ,0   ,0.83,0.05,0.10
      ?0   ,0   ,0   ,0   ,0   ,0.95,0
      ?0   ,0   ,0   ,0   ,0   ,0   ,0.90
  R = ?1   ,0   ,0   ,0   ,0   ,0   ,0
R,R$,E?-1,+,0
T,Z = ?5,NO
  <*> ?RUN

 T  1   2   3   4   5   6   7  TOTAL     R

 0 150 160 170 100 100 100 200 980(100%)
 1 192 140 165 104 90 100 190 980(100%) 87
 2 226 128 159 106 82 100 180 980(100%) 92
 3 254 123 154 106 75 99 170 980(100%) 96
 4 277 121 149 105 70 97 161 980(100%) 99
 5 296 122 144 105 65 96 152 980(100%) 103
  <*> ?T=20
20 391 171 99 126 49 72 71 980(100%) 118
  <*> ?T=99
99 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
  <*> ?+T=5
100 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
101 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
102 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
103 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
104 395 179 72 149 62 61 61 980(100%) 118
  <*> ?END
```

<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-5 ของตัวอย่างที่ 5</u>

จำนวนพนักงานทั้งหมดจะคงที่มีจำนวน ๙๘๐ คน เนื่องจากมีการรับพนักงานเพิ่ม เพื่อทดแทนจำนวนพนักงานที่สูญเสียไป (wastage) ในแต่ละระดับ จึงมีการรับพนักงาน เพิ่มในระดับตำแหน่งล่าง เท่านั้น ส่วนพนักงานระดับต่าง ๆ จะมี เพียงการ เลื่อนตำแหน่ง (pomotion) ทำให้จำนวนพนักงานแต่ละระดับ เปลี่ยนแปลง

4.6 <u>ปัญหาการใช้รูปแบบของมาร์คอฟ</u> (Problems of Implementation)

<u>การประมาณค่า</u> (Estimation)

การใช้รูปแบบของมาร์คอฟในงานต่าง ๆ จะต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์ของรูปแบบ (parameters of the Model) ในทางปฏิบัติค่าของตัวเอง (numerical values) ที่นำมาใช้จะต้องได้มาจากการทำสมมุติฐาน (hypothetical assumptions) หรือโดยการประมาณค่า (estimating) ของข้อมูลเหล่านั้น เมื่อพิจารณาช่วงของค่าพารามิเตอร์ (parameter values) ของข้อมูลเหล่านั้นเพื่อกำหนดค่าเริ่มต้น

ถ้าการยึดหลักสมมุติฐานของมาร์คอฟ (Markov assumption) จะง่ายขึ้นในการประมาณค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition probabilities) ได้มาจากข้อมูลในอดีต ซึ่งวิธีการนี้จะต้องทราบข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงพนักงานในแต่ละระดับตำแหน่ง (stock and flow data) แต่ละช่วงเวลา ถ้า $n_{ij}(T)$ เป็นจำนวนพนักงานในระดับตำแหน่ง i ในช่วงเวลา T ที่มีการเปลี่ยนแปลงหรือการเลื่อนระดับตำแหน่งเป็นระดับตำแหน่ง J ในช่วงเวลา T + 1 และถ้า $n_i(T)$ เป็นจำนวนพนักงานในระดับตำแหน่ง i ที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา T ดังนั้นค่าของ $P_{ij}$ สามารถประมาณค่าได้เป็น

$$\hat{P}_{ij} = n_{ij}(T)/n_i(T) \qquad (i,j = 1,2,\ldots,k) \qquad (4.9)$$

ถ้าทราบข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงพนักงานในแต่ละระดับตำแหน่ง (stock and flow data) มีหลาย ๆ ช่วงเวลา ซึ่งสามารถหาอัตราของการเลื่อนระดับตำแหน่งได้เช่นกัน ดังนี้

$$\hat{P}_{ij} = \sum_T n_{ij}(T) / \sum_T n_i(T) \qquad (i,j = 1,2,\ldots,k) \qquad (4.10)$$

จากข้อมูลดังกล่าวในแต่ละช่วงของเวลาที่สามารถรวบรวมข้อมูลได้ ความน่าจะเป็นของการสูญเสีย (wastage probabilities) ก็สามารถประมาณค่า (estimated) ได้เช่นเดียวกัน โดยหาความเหมาะสมของการสูญเสีย (wastage) จากข้อมูล ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นของการรับพนักงานเพิ่ม (recruitment probabilities); r สามารถประมาณค่า (estimated) จากสัดส่วนที่สังเกตได้

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ข้อมูลในตารางที่ 3.4 เป็นความสัมพันธ์ของ 3 ระดับตำแหน่ง ศาสตราจารย์, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รองศาสตราจารย์ และอาจารย์ ของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งในช่วงเวลา 2 ปี จำนวนการเปลี่ยนแปลงในแต่ละระดับแสดงค่าในแต่ละแถวนอนและแถวตั้ง (row and column) แถวตั้งถัดจากสุดท้าย (pemulimate column) ของแถวเป็นจำนวนการลาออกในแต่ละระดับ

<u>ตารางที่ 3.4</u> แสดงการเปลี่ยนแปลงของนักวิชาการในระบบมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งปี 1970-72

| ปี 1970-71 | 1 | 2 | 3 | ลาออก | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. อาจารย์ | 158 | 8 | 0 | 9 | 175 |
| 2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์และรองศาสตราจารย์ | 0 | 62 | 2 | 3 | 67 |
| 3. ศาสตราจารย์ | 0 | 0 | 55 | 1 | 56 |
| **ปี 1971-72** | **1** | **2** | **3** | **ลาออก** | **รวม** |
| 1. อาจารย์ | 168 | 3 | 0 | 8 | 179 |
| 2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์และรองศาสตราจารย์ | 0 | 64 | 2 | 7 | 73 |
| 3. ศาสตราจารย์ | 0 | 0 | 58 | 1 | 59 |

จำนวนนักวิชาการแต่ละระดับตำแหน่งที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลาได้มาจากแถวนอนรวม (suming the rows) ในปี 1970-71 (175, 67, 56) และปี 1971-72 (179, 73, 59) ดังนั้นจากข้อมูลเบื้องต้น เราสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (estimating the transition probabilities) ดังนี้

$$\hat{P}_{11} = \frac{158+168}{175+179} = 0.921 \qquad \hat{P}_{12} = \frac{8+3}{175+179} = 0.031 \qquad \hat{W}_1 = \frac{9+8}{175+179} = 0.048$$

$$\hat{P}_{22} = \frac{62+64}{67+73} = 0.900 \qquad \hat{P}_{23} = \frac{2+2}{67+63} = 0.029 \qquad \hat{W}_2 = \frac{3+7}{67+63} = 0.071$$

$$\hat{P}_{33} = \frac{55+58}{56+59} = 0.983 \qquad - \qquad \hat{W}_3 = \frac{1+1}{56+59} = 0.017$$

4.7 <u>ความเที่ยงตรงของรูปแบบ (Validation of Model)</u>

รูปแบบของมาร์คอฟ (Markov Model) จะมีความเป็นไปได้อย่างสมบูรณ์ ถ้ามีข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงของพนักงาน (stock and flow) แต่ละระดับอย่างถูกต้องหรือแม้ว่าไม่ได้อยู่ภายใต้สมมุติฐานที่ถูกต้อง ถ้าสมมุติฐานเหล่านั้นมีคุณสมบัติที่ขัดแย้งอย่างเด่นชัด ทำให้ผลที่ออกมาของรูปแบบจะเป็นการคาดคะเนอย่างกว้าง ๆ เท่านั้น แม้ว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ (parameter estimates) โดยการศึกษารายละเอียดของระบบ ในการวิเคราะห์เพื่อหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดควรทำดังนี้

(1) ทดสอบสมมุติฐานโดยวิธีการทางสถิติ (statistical test)

(2) การเปรียบเทียบค่าพยากรณ์ที่ได้จากรูปแบบของมาร์คอฟ (Prediction of the Model) กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง (ข้อมูลจริง)

(3) พิจารณารูปแบบ (Model) เพื่อให้เหมาะกับระดับตำแหน่งของพนักงาน เพื่อให้สมมุติฐานมีความเป็นไปได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด

<u>สมมุติฐานหลักที่ใช้ในการทดสอบมี 2 ข้อ ดังนี้</u>

(1) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (the transition probabilities) ไม่ขึ้นกับเวลา

(2) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (the transtion probabilities) ของแต่ละบุคคลในแต่ละระดับตำแหน่งเดียวกันจะมีความน่าจะเป็นเท่ากัน

ข้อสมมุติฐานดังกล่าวคือแต่ละบุคคลจะเป็นอิสระต่อกัน และความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (independently and transition probabilities) เป็นฟังก์ชั่น (functions) ของแต่ละบุคคลในระดับเดียวกันเท่านั้น จึงเป็นการยากในการทดสอบ และจากประสบการณ์เรามักจะไม่เอาจริงเอาจังในผลของสมมุติฐาน (1) และ (2)

สำหรับการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard errors) ของปริมาณที่ประมาณค่าไว้ จากสมมุติฐานของรูปแบบมาร์คอฟ (Markov Model) ที่บันทึกการเปลี่ยนแปลง (flows) ในแต่ละระดับตำแหน่งจะมีการกระจายในรูปแบบมัลติโนเมียม (Multinomial form) และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง (the standard errors of the flow proportions) ดังนั้นถ้าสมมุติฐานของ (2) เป็นจริง ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{P}_{ij}$ สามารถกำหนดได้จากสมการ (4.9) ได้เป็น

$$\{\hat{P}_{ij}\ (1 - P_{ij})/n_i(T)\}^{\frac{1}{2}}$$

ซึ่งสามารถประมาณค่า (estimated) โดยการแทนค่า $P_{ij}$ ด้วย $\hat{P}_{ij}$ โดย Forbes[1] (1971a), Sales[2] (1971), และคนอื่น ๆ ได้เปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยการพล็อต (plot) ค่าคาดคะเนด้วยค่าจำกัดของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (one standard error) ทั้งสองข้าง ซึ่งจะตัดค่าที่เบี่ยงเบน (deviation) ออกได้ง่าย ถ้าความน่าจะเป็น (probabilities) เป็นการประมาณค่าตลอดช่วงของเวลา (หลาย ๆ

---

[1]Forbes, A.F. (1971a). Markov chain Models in manpowers system, in Bartholomew and Smith (1971), [93-113]

[2]Sales, P.C. (1971). the Validity of the Markov chain Model for a class fo the civil Service. Statistion, [85-110]

ช่วงเวลา) เช่นเดียวกับในสมการ (4.10) การหาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) จะแทน $n_i(T)$ ด้วย $\sum_T n_i(T)$

ในการทดสอบสามารถใช้ไคร์สแคร์ (chi-square) สำหรับเปรียบเทียบมัลติโนเมียน (Mulitionomial) จากตัวอย่างหลาย ๆ กลุ่ม ตัวอย่างที่ใช้ทดสอบเกี่ยวกับเมตริกซ์ของการวางแผนกำลังคน (Manpower Matrices) ซึ่งจะพบได้ใน Forbes (1971a) และ Sale (1971)

วิธีทั้งสองดังกล่าวข้างต้นสามารถนำไปทดสอบสมมุติฐาน (1) หรือ (2) ได้ ในกรณีแรกจะเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลง (flow) จำนวนพนักงานในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน และในกรณีที่สองจะเปรียบเทียบพนักงานในระดับที่แตกต่างกันในช่วงเวลาเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition probabilities) ของเพศทั้งสองจะมีความแตกต่างกัน ซึ่งในกรณีนี้ควรเปรียบเทียบระดับตำแหน่ง (grade) ของพนักงานโดยแบ่งตามเพศเป็นหลัก จะสังเกตเห็นว่าทุกวิธีนี้เกี่ยวข้องกับจำนวนพนักงานแต่ละระดับ และสมมุติฐานในแต่ละระดับจะถูกต้องนั้นในระดับเดียวกัน แต่ไม่ใช่สมมุติฐานที่ถูกต้องสำหรับระดับอื่น ๆ

แม้ว่าจะได้ทำตามหลักการสถิติที่ถูกต้องในการพิจารณาสมมุติฐานที่ใช้ทดสอบกันซึ่งต้องพิสูจน์ว่าการทดสอบนั้นสัมพันธ์กัน การที่จะคงที่รูปแบบ (Model) ให้เหมาะสมกับข้อมูลจะต้องเข้าใจเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของระบบและจะต้องวางแผนงานที่จะทำรูปแบบ (Model) ที่จะนำมาใช้ต้องพิจารณาก่อนว่าจะประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์อย่างไร ความแตกต่างของข้อมูลหรือความเป็นอิสระระหว่างพฤติกรรมของบุคคลและปัจจัยอื่น ๆ ถ้าเหตุการณ์นั้นมีผลน้อยมากต่อการคาดคะเนจำนวนพนักงาน (Predicted Stocks) ก็สามารถตัดทิ้งได้ สาเหตุหนึ่งที่จะทำให้มีความเชื่อมั่นในการใช้รูปแบบ (Model) โดยการทดสอบกับข้อมูลเดิม (historical data) ถ้าข้อมูลดังกล่าวสามารถพยากรณ์เหตุการณ์ในอดีตที่ผ่านมาได้ถูกต้องเพียงพอ เป็นการแสดงถึงความเชื่อมั่นของรูปแบบในการพยากรณ์เหตุการณ์ในอนาคต

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> การทดสอบรูปแบบของมาร์คอฟ (Markov Model) ของตำแหน่งพนักงานนักวิทยาศาสตร์ในระบบราชการของอังกฤษ (จาก Sale (1971)[1]) มีระบบระดับตำแหน่ง 6 ระดับ และเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ (transition matrix) ที่ประมาณค่าในช่วงเวลาหนึ่งปี จากข้อมูลของการเปลี่ยนแปลง 3 ปี คือ 1963-65 จะได้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.727 & 0.178 & 0.023 & 0.004 & 0.004 & 0.002 \\ 0 & 0.826 & 0.139 & 0.001 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.008 & 0.920 & 0.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0.008 & 0.927 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0.007 & 0.003 & 0.884 & 0.030 \\ 0 & 0 & 0.007 & 0 & 0 & 0.918 \end{bmatrix}$$

(สัดส่วนความน่าจะเป็นของแต่ละสมาชิกในเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ ถ้ามีค่าน้อยมากในการคำนวณสามารถตัดค่านี้ออกได้) เวคเตอร์ของจำนวนระดับตำแหน่ง (stock vector) ในปี พ.ศ. 1965 จะได้

$$n(1965) = (231 \quad 793 \quad 1413 \quad 503 \quad 154 \quad 72)$$

และการคาดคะเนในการรับพนักงานเพิ่มที่ระดับตำแหน่งแรกเฉลี่ย 154.5 ต่อปี โดยใช้ข้อมูลนี้เพื่อพยากรณ์จำนวนพนักงานในระดับต่าง ๆ ในปี 1966-68 โดยค่าพยากรณ์ที่ได้จะเปรียบเทียบกับค่าที่เกิดขึ้นจริงในอดีต

$$n(T) = n(T-1)\,P + R$$

---

[1] Sales, P. (1971). The Validity of the Markov chain Model For a class of the civil service statistican.

$$n(1966) = (231 \quad 793 \quad 1413 \quad 503 \quad 154 \quad 72)$$

$$\begin{bmatrix} 0.727 & 0.178 & 0.023 & 0.004 & 0.004 & 0.002 \\ 0 & 0.826 & 0.139 & 0.001 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.008 & 0.920 & 0.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0.008 & 0.927 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0.007 & 0.003 & 0.884 & 0.030 \\ 0 & 0 & 0.007 & 0 & 0.007 & 0.918 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 154.5 \end{bmatrix}$$

$$n(1966) = (226 \quad 780 \quad 1439 \quad 520 \quad 157 \quad 72)$$

เมื่อเราคำนวณต่อไปอีก 2 ปีข้างหน้า และทำการเปรียบเทียบค่าที่เกิดขึ้นจริงดังแสดงใน ตารางที่ 3.5

<u>ตารางที่ 3.5</u> การเปรียบเทียบค่าสังเกต (ข้อมูลจริง) และค่าพยากรณ์จากรูปแบบมาร์คอฟ (Markov Model)

| | 1966 | | 1967 | | 1968 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ระดับ (Grade) | ค่าสังเกต | ค่าพยากรณ์ | ค่าสังเกต | ค่าพยากรณ์ | ค่าสังเกต | ค่าพยากรณ์ |
| 1 | 217 | 226 | 225 | 222 | 220 | 219 |
| 2 | 753 | 780 | 790 | 768 | 761 | 758 |
| 3 | 1411 | 1439 | 1444 | 1461 | 1461 | 1480 |
| 4 | 515 | 520 | 526 | 537 | 555 | 553 |
| 5 | 154 | 157 | 166 | 159 | 174 | 162 |
| 6 | 77 | 72 | 78 | 72 | 74 | 73 |
| รวมทั้งหมด (TOTAL) | 3127 | 3194 | 3229 | 3219 | 3249 | 3245 |

4.8 การวิเคราะห์มาร์คอฟ

การวิเคราะห์มาร์คอฟเป็นวิธีการอย่างหนึ่งที่ใช้วิเคราะห์ความเคลื่อนไหวของตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่ง เพื่อคาดคะเนล่วงหน้าถึงความเคลื่อนไหวในอนาคตของตัวแปรผันนั้น การวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่ง (First-order Markov Analysis) นั้น ตั้งอยู่บนข้อสมมุติฐานที่ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ถัดไปขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของเหตุการณ์สุดท้าย และไม่ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมซึ่งเกิดขึ้นก่อนหน้านี้แต่อย่างใด ในการนำการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับหนึ่งมาใช้นั้น มีความประสงค์ในการคาดคะเนล่วงหน้าสำหรับงวดอนาคต โดยมักจะตั้งสมมุติฐานว่า เสถียรภาพของเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (stability of transition probability matrix) ค่อนข้างจะแน่นอน และได้มีการพิสูจน์กันแล้วว่าเป็นวิธีการที่ใช้คาดคะเนล่วงหน้าเกี่ยวกับพฤติกรรม (Behavior) ในอนาคตที่เชื่อถือได้ จากรูปแบบของมาร์คอฟสำหรับการวางแผนกำลังคนจากสมการที่ ดังนี้

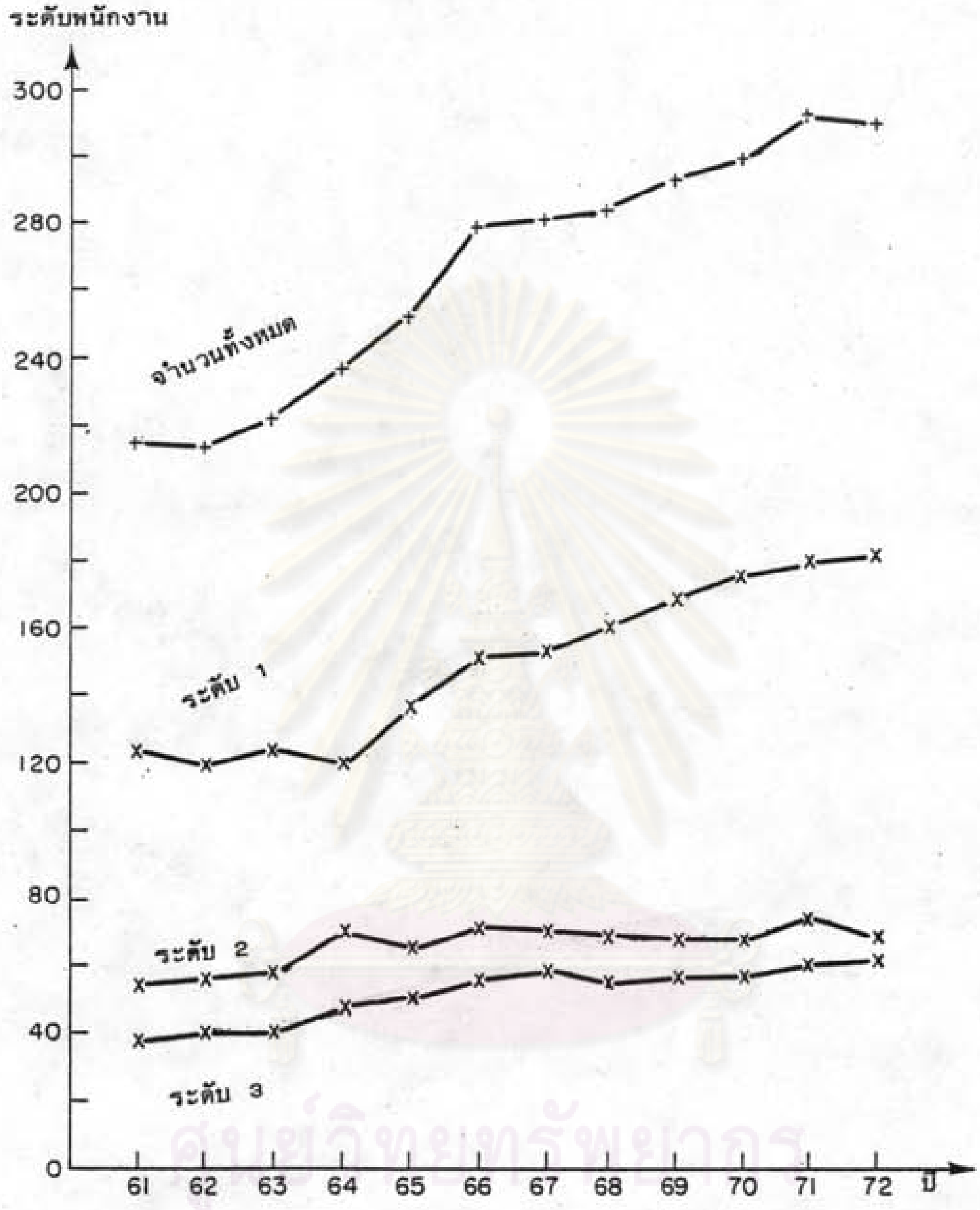
$$\bar{n}(T+1) = \bar{n}(T)P + R(T)$$

เพื่อให้เข้าใจได้โดยง่ายจะยกตัวอย่างของการวิเคราะห์มาร์คอฟอันดับที่หนึ่งมาประยุกต์กับการวางแผนกำลังคนในอนาคต ประกอบทฤษฎีในการวิเคราะห์ปัญหาดังนี้

ตัวอย่างที่ 8 ในการทำงานของพนักงานแห่งหนึ่งได้แบ่งพนักงานออกเป็น 3 ระดับ ได้แก่ ระดับ 1, 2 และ 3 ในแต่ละระดับแบ่งตามความสามารถในการทำงานในแต่ละช่วงเวลา (Period) จะมีการเปลี่ยนแปลง (flow) ของพนักงานเนื่องจากพนักงานลาออกหรือการเลื่อนระดับตำแหน่งตามความสามารถ ฉะนั้นกำลังคนของพนักงานในแต่ละระดับตำแหน่งต่าง ๆ จะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ประกอบจะต้องมีการรับพนักงานเพิ่มเพื่อทดแทนกับพนักงานที่สูญเสียไป และเนื่องจากการขยายงานในอนาคตต่อไป ซึ่งเราไม่สามารถคาดการณ์ได้ จะต้องใช้รูปแบบของมาร์คอฟสำหรับการวางแผนกำลังคนในอนาคต จากตารางที่ 3.6 เป็นข้อมูลในอนาคตของจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงพนักงานแต่ละระดับ (stock and flow) ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1961-1972 ได้แก่ จำนวนพนักงานแต่ละระดับ, การลาออก, การเลื่อนระดับตำแหน่ง และการรับพนักงานเพิ่ม

ตารางที่ 3.6 ข้อมูลจำนวนพนักงานและการเปลี่ยนแปลงของพนักงานในระบบ

| | | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| จำนวนพนักงาน | 1 | 123 | 119 | 124 | 120 | 137 | 151 | 153 | 161 | 169 | 175 | 179 | 181 |
| แต่ละระดับ | 2 | 54 | 56 | 58 | 70 | 65 | 71 | 70 | 68 | 67 | 67 | 73 | 67 |
| | 3 | 38 | 39 | 40 | 47 | 50 | 56 | 58 | 54 | 56 | 56 | 59 | 61 |
| | รวมทั้งหมด | 215 | 214 | 222 | 237 | 252 | 278 | 281 | 283 | 292 | 298 | 311 | 309 |
| การลาออก | 1 | | 5 | 6 | 9 | 8 | 6 | 10 | 9 | 17 | 18 | 9 | 8 |
| | 2 | | 1 | 2 | 8 | 7 | 1 | 7 | 6 | 1 | 5 | 3 | 7 |
| | 3 | | 4 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 7 | 5 | 3 | 1 | 1 |
| การรับพนักงาน | 1 | | 8 | 16 | 32 | 30 | 28 | 18 | 21 | 28 | 29 | 21 | 13 |
| | 2 | | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| | 3 | | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| | รวมทั้งหมด | | 9 | 18 | 34 | 32 | 33 | 21 | 24 | 32 | 32 | 26 | 14 |
| การเลื่อนตำแหน่ง | 1 | | 7 | 5 | 27 | 5 | 8 | 6 | 4 | 3 | 5 | 8 | 3 |
| | 2 | | 5 | 3 | 7 | 4 | 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 |




รูปที่ 3.4 จำนวนพนักงานระดับต่าง ๆ ตั้งแต่ 1961-72

<u>ในขั้นแรกจะต้องตรวจสอบข้อมูล</u> : โดยการพล็อต (plot) จำนวนพนักงานทั้งหมด และพนักงานในแต่ละระดับตำแหน่งในแต่ละปีทั้งหมด ประกอบการคำนวณ และถ้าจำเป็นอาจจะต้องพล็อต (plot) อัตราการเลื่อนตำแหน่ง (promotion rates) อัตราการลาออก (leaving rates) และการรับพนักงานเพิ่ม (inflow) (จากรูปที่ 3.4 แสดงให้เห็นจำนวนพนักงานแต่ละระดับและจำนวนพนักงานทั้งหมดจะเปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงเวลา (period) 1961-72 จะเห็นได้ว่าจำนวนพนักงานทั้งหมดมีแนวโน้ม (trend) เพิ่มขึ้น)

<u>การหาอัตราส่วนการลาออก (leaving rate), $\hat{W}$</u>

$$P_{io} = n_{io}(T)/n_i(T)$$

$P_{io}$ = อัตราส่วนการลาออกของพนักงานในช่วงเวลาหนึ่ง

$n_{io}(T)$ = จำนวนพนักงานที่ออกจากระบบในช่วงเวลาหนึ่ง

$n_i(T)$ = จำนวนพนักงานที่จุดเริ่มต้นของช่วงเวลา

จากตารางที่ 3.6 มีจำนวนพนักงาน 3 ระดับ เมื่อต้นปี ค.ศ. 1961 มีจำนวนพนักงาน 123, 54 และ 38 จากพนักงานระดับ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ เมื่อสิ้นปี 1961 (สิ้นสุดของช่วงเวลา) มีพนักงานลาออก 5, 1 และ 4 ในแต่ละระดับ สามารถหาอัตราส่วนการลาออก (leaving rate) ในแต่ละระดับดังนี้

$$\hat{W}_1 = 5/123$$
$$= 0.0406 = 4.1\ \%$$
$$\hat{W}_2 = 1/54$$
$$= 0.0185 = 1.9\ \%$$
$$\hat{W}_3 = 4/38$$
$$= 0.1053 = 10.5\ \%$$

การหาอัตราส่วนการเลื่อนตำแหน่ง (promotion rate), $\hat{P}$

$\hat{P}$ = $n_{ij}(T)/n_i(T)$

$\hat{P}_{ij}$ = อัตราส่วนการเลื่อนตำแหน่งในช่วงเวลาหนึ่ง

$n_{ij}(T)$ = จำนวนพนักงานที่เลื่อนตำแหน่งจากระดับ i ไป j ในช่วงเวลาหนึ่ง (T, T+1)

$n_i(T)$ = จำนวนพนักงานที่จุดเริ่มในของช่วงเวลา

จากตารางที่ 3.6 เมื่อสิ้นปี 1961 (สิ้นสุดของช่วงเวลา) มีพนักงานเลื่อนตำแหน่ง (promotion) จากระดับ 1 ไประดับ 2 จำนวน 7 คน และระดับ 2 ไประดับ 3 จำนวน 5 คน สามารถหาอัตราส่วนการเลื่อนตำแหน่ง (promotion rate) **ในแต่ละระดับ** ดังนี้

$$P_{12} = 7/123$$

$$= 0.0569 = 5.7\ \%$$

$$P_{23} = 5/54$$

$$= 0.0926 = 9.3\ \%$$

เมื่อหาค่าอัตราส่วนการลาออกและการเลื่อนตำแหน่ง (leaving and pomotion rate) ของพนักงาน โดยวิธีดังกล่าวข้างต้นในแต่ละปี ตั้งแต่ 1961/2 ถึง 1971/2 (1961-72) จะได้ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง (flows) ของพนักงานตลอดช่วงของเวลาดังกล่าว แสดงค่าต่าง ๆ เหล่านั้นในตารางที่ 3.7

มีบ่อยครั้งที่ยากต่อการตัดสินใจจากการสังเกตการขึ้น ๆ ลง ๆ (fluctuations observed) ของอัตราการเปลี่ยนแปลง (flow rate) ของพนักงานตลอดช่วงเวลา (overall) โดยการพล็อต (plot) อนุกรมเวลาของการเปลี่ยนแปลงด้วยช่วงของความเชื่อมั่น (ดูรูป 3.5, 3.6, 3.7) เพื่อประมาณค่าตลอดช่วงของเวลาและค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด (average error) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการที่ 4.10

ประมาณค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงของเวลา (the estimate for the overall flow rate) คือ

$$\hat{P}_{ij} = \sum_T n_{ij}(T) / \sum_T n_i(T)$$

การประมาณค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด (average estimate for error)

$$\left[\hat{P}_{ij}(1-\hat{P}_{ij}) / \{k^{-1} \sum_T n_i(T)\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

การประมาณค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงของเวลา และค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดดังนี้

<u>การประมาณค่าอัตราการลาออกตลอดช่วงของเวลา</u>

(estimate for the overall leaving rate)

$$\hat{P}_{io} = \sum_T n_{io}(T) / \sum_T n_i(T)$$

<u>อัตราการลาออกจากระดับ 1</u>

$$\sum_T n_{io}(T) = (5+6+9+8+6+10+9+17+18+9+8)$$

$$= 105$$

$$\sum_T n_i(T) = (123+119+124+120+137+151+153+161+169+179)$$

$$= 1611$$

$$\hat{P}_{10} = 105/1611 = 0.0652$$

∴ อัตราการลาออกของระดับ 1 = 6.5 %

<u>อัตราการลาออกจากระดับ 2</u>

$$\sum_T n_{io}(T) = (1+2+8+7+1+7+6+1+5+3+7)$$

$$= 48$$

$$\sum_T n_i(T) = (54+56+58+70+65+71+70+68+67+67+73)$$

$$= 719$$

$$\hat{P}_{20} = 48/719 = 0.0667$$

$\therefore$ อัตราการลาออกของระดับ 2 = 6.7 %

<u>อัตราการลาออกจากระดับ 3</u>

$$\sum_T n_{io}(T) = (4+2+2+2+0+1+7+5+3+1+1)$$

$$= 28$$

$$\sum_T n_i(T) = (38+39+40+47+50+56+58+54+56+56+59)$$

$$= 553$$

$$\hat{P}_{30} = 28/553 = 0.0506$$

$\therefore$ อัตราการลาออกของระดับ 3 = 5.1 %

<u>การประมาณค่าการเลื่อนตำแหน่งตลอดช่วงของเวลา</u>

(estimate for the overall promotion rates)

$$\hat{P}_{ij} = \sum_T n_{ij}(T) / \sum_T n_i(T)$$

<u>อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 1 ไประดับ 2</u>

$$\sum_T n_{12}(T) = (7+5+27+5+8+6+4+3+5+8+3)$$

$$= 81$$

$$\hat{P}_{12} = \frac{81}{1611} = 0.00503$$

$\therefore$ อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 1 ไประดับ 2 = 5.0 %

อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 2 ไประดับ 3

$$\sum_T n_{23}(T) = (5+3+7+4+4+0+2+3+1+2+2)$$

$$= 32$$

$$\hat{P}_{23} = 32/719 = 0.0445$$

$\therefore$ อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 2 ไประดับ 3 = 4.5 %

การประมาณค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด (การลาออก)

(average estimate of error (leaving))

$$\hat{P}_{io}(E) = \left[\hat{P}_{io}(1-\hat{P}_{io})/(K^{-1} \sum_T n_i(T))\right]^{\frac{1}{2}}$$

อัตราการลาออกจากระดับ 1

$$\hat{P}_{10}(E) = \left[0.065(1-0.065)/(1611/11)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0203 = 2.0 \%$$

อัตราการลาออกจากระดับ 2

$$\hat{P}_{20}(E) = \left[0.067(1-0.067)/(719/11)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0309 = 3.1 \%$$

อัตราการลาออกจากระดับ 3

$$\hat{P}_{30}(E) = \left[0.051(1-0.051)/553/11)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0310 = 3.1 \%$$

<u>การประมาณค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด (การเลื่อนตำแหน่ง)</u>

(average estimate of error (promotion))

$$\hat{P}_{ij}(E) = \left[\hat{P}_{ij}(1-\hat{P}_{ij})/(K^{-1} \sum_{T} n_i(T))\right]^{\frac{1}{2}}$$

อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 1 ไประดับ 2

$$\hat{P}_{12}(E) = \left[0.05(1-0.05)/(1611/11)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.018 = 1.8\ \%$$

อัตราการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 2 ไประดับ 3

$$\hat{P}_{23}(E) = \left[0.045(1-0.045)/(719/11)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.0256 = 2.6\ \%$$

ซึ่ง K เป็นจำนวนปี (ช่วงของเวลา) ของข้อมูล ดังนั้นจึงต้องนำมาหารเฉลี่ยจำนวนพนักงานในแต่ละระดับ โดยสมมุติข้อผิดพลาดเป็นรูปแบบไบโนเมี่ยน (binomial model) ซึ่งมีความอิสระ (independently) และมีอัตราการเปลี่ยนแปลง (flow rate) ค่าเดียวกัน เส้นความเชื่อมั่นจะไม่เหมาะสมถ้าจำนวนพนักงานแต่ละระดับมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วภายในปีต่อปี การประมาณช่วงของการผิดพลาดนี้ได้เป็น $P_{ij}$ + ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด)

การประมาณค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด (average estimate error) จะอยู่ในช่วง

$$\hat{P}_{ij} \pm \text{ ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด}$$

ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดของการลาออก, ระดับ 1

$$.065 \pm .02 \left\langle \begin{array}{l} .085 \\ \\ .045 \end{array} \right.$$

ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดของการลาออก, ระดับ 2

$$.067 \pm .031 \begin{cases} .098 \\ .036 \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดของการลาออก, ระดับ 3

$$.051 \pm 0.031 \begin{cases} 0.82 \\ 0.02 \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดของการเลื่อนตำแหน่งจากระดับ 1 ไประดับ 2

$$.05 \pm .018 \begin{cases} .068 \\ .032 \end{cases}$$

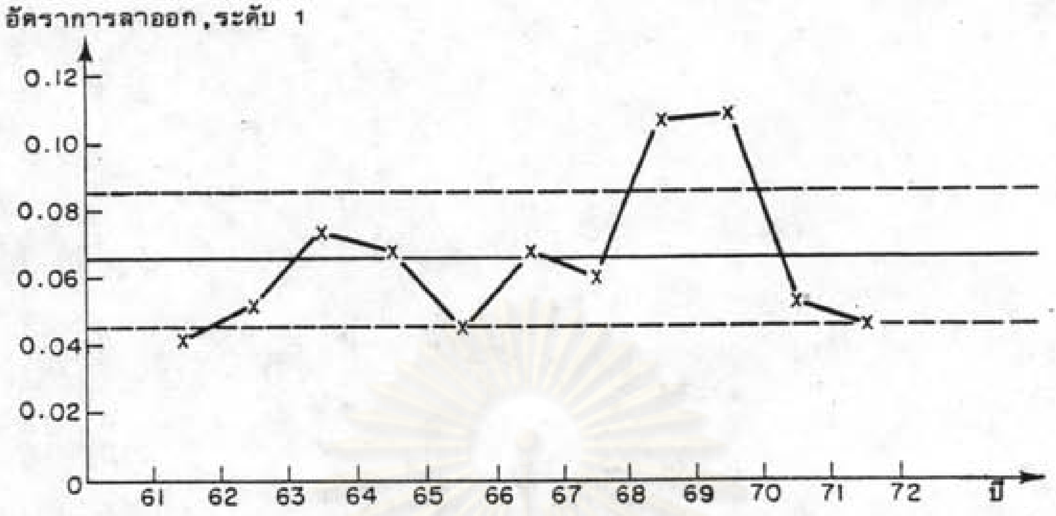
ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาดของการเลื่อนตำแหน่ง, จากระดับ 2 ไประดับ 3

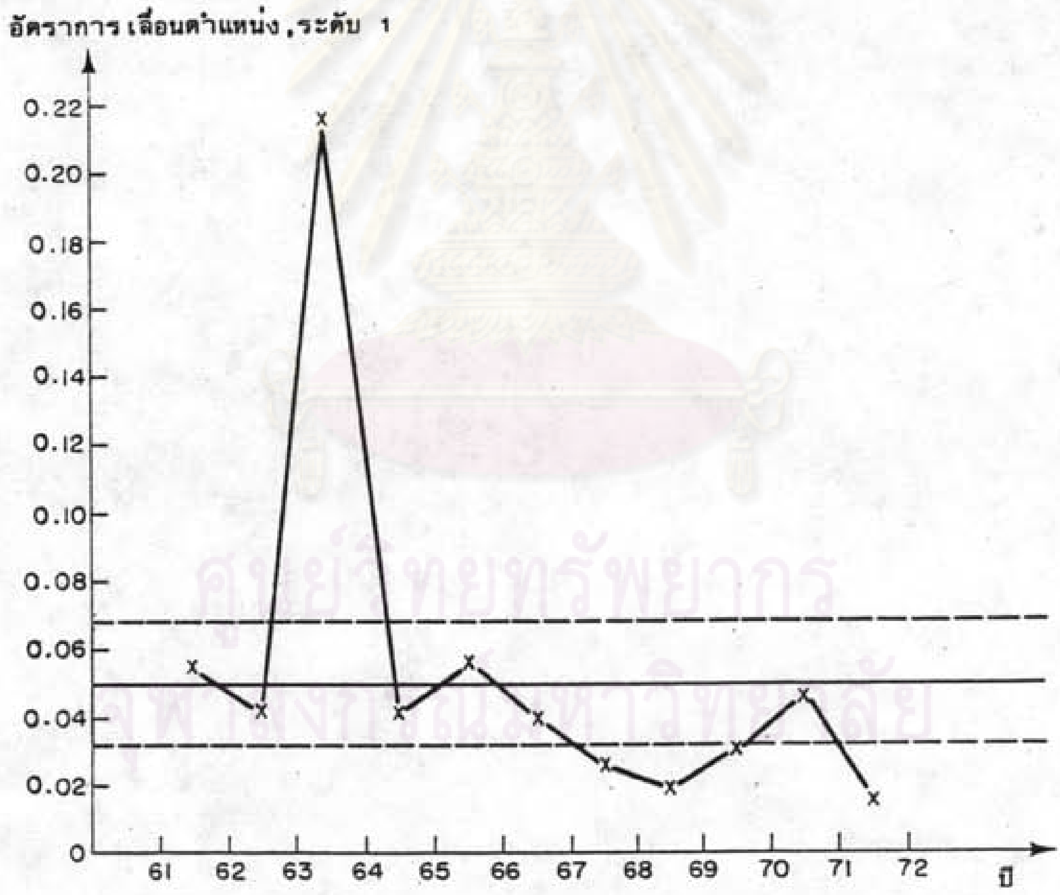
$$.045 \pm .026 \begin{cases} .071 \\ .019 \end{cases}$$

ตารางที่ 3.7 จำนวนของพนักงานจากออกไป และการเลื่อนตำแหน่ง (percent) ตั้งแต่ปี 1961 - 1972

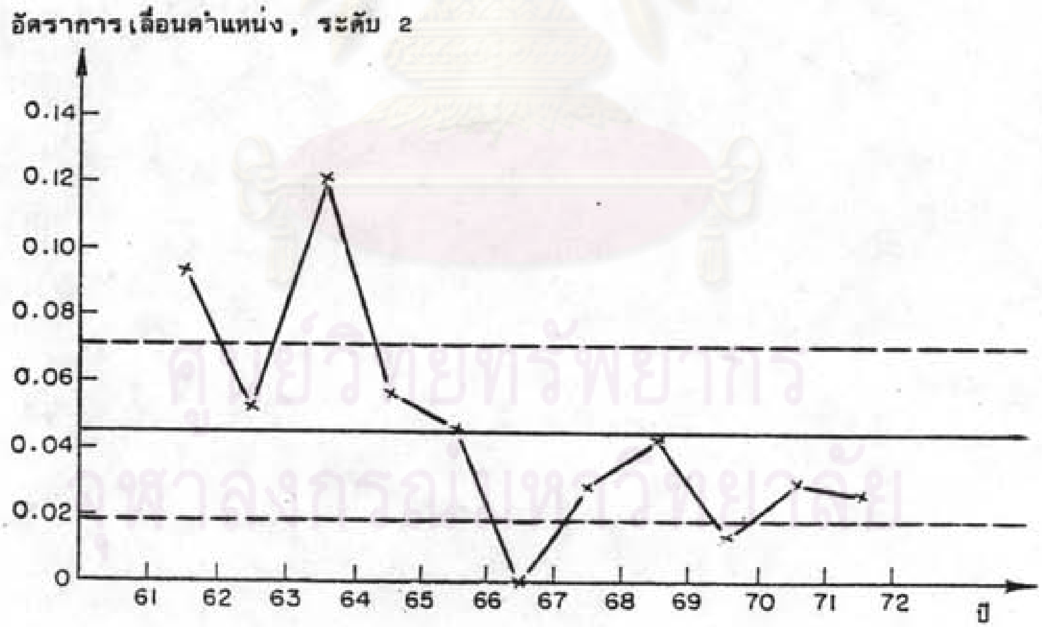
| | | 61/2 | 62/3 | 63/4 | 64/5 | 65/6 | 66/7 | 67/8 | 68/9 | 69/70 | 70/1 | 71/2 | 1961-72 overall* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| อัตราการลาออกจากระดับที่ | 1 | 4.1 | 5.1 | 7.3 | 6.7 | 4.4 | 6.6 | 5.9 | 10.6 | 10.7 | 5.1 | 4.5 | 6.5(2.0) |
| (Leaving rate from | 2 | 1.9 | 3.6 | 13.8 | 10.0 | 1.5 | 9.9 | 8.6 | 1.5 | 7.5 | 4.5 | 9.6 | 6.7(3.1) |
| grade) | 3 | 10.5 | 5.1 | 5.0 | 4.3 | 0 | 1.8 | 12.1 | 9.3 | 5 4 | 1.8 | 1.7 | 5.1(3.1) |
| อัตราการเลื่อนตำแหน่งจาก | | | | | | | | | | | | | |
| (promotion rates from | 1 | 5.7 | 4.2 | 21.8 | 4.2 | 5.8 | 4.0 | 2.6 | 1.9 | 3.0 | 4.6 | 1.7 | 5.0(1.8) |
| grade) | 2 | 9.3 | 5.4 | 12.1 | 5.7 | 4.6 | 0 | 2.9 | 4.4 | 1.5 | 3.0 | 2.7 | 4.5(2.6) |

* จำนวนในวงเล็บจะเป็น "ค่าเฉลี่ยของการผิดพลาด" (average error)

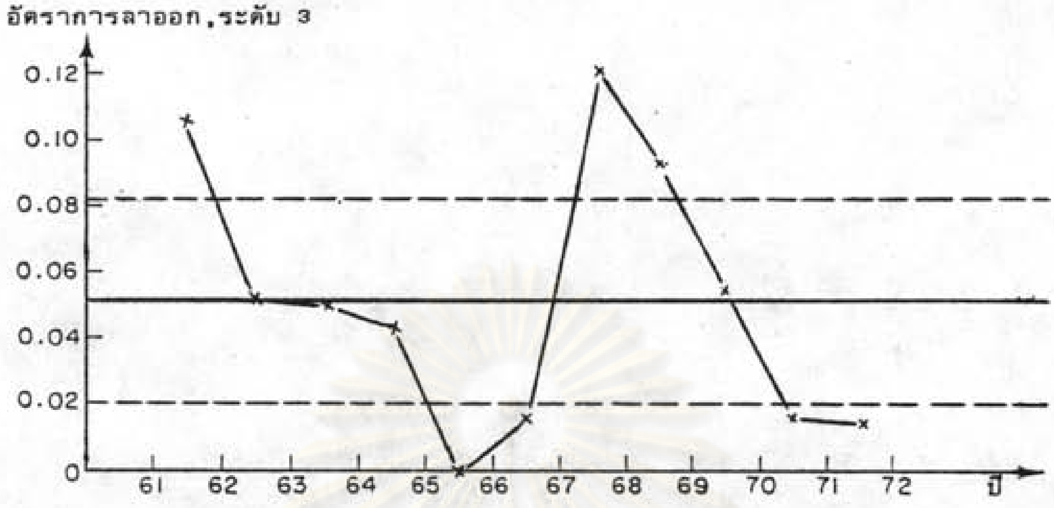



<u>รูปที่ 3.5</u> อัตราการ เลื่อนตำแหน่งและการลาออกของพนักงานระดับ 1


<u>รูปที่ 3.6</u> อัตราการเลื่อนตำแหน่งและการลาออกของพนักงานระดับ 2




รูปที่ 3.7 อัตราการลาออกของพนักงานระดับ 3

ในขั้นที่สองคือการหารูปแบบ (validation of the model) : โดยการหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลหลาย ๆ ช่วงเวลาเพื่อประมาณค่าเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงสภาวะ, P (transition matrix) และการรับพนักงานเข้ามา; R (inflow numbers) และใช้พารามิเตอร์ (parameter) จากจุดเริ่มต้นจากปี 1961 ของข้อมูลจำนวนพนักงานเพื่อหาค่าสำหรับปี 1962 - 1971 เพื่อทดสอบรูปแบบโดยการเปรียบเทียบกับจำนวนพนักงานในแต่ละระดับจากข้อมูลจริง

ตารางที่ 3.8 แสดงการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงของเวลา (1961-1971)

| ถึง / จาก | 1 | 2 | 3 | ลาออก (leavers) | รวมทั้งหมด |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,425 | 81 | 0 | 105 | 1,611 |
| 2 | 0 | 638 | 32 | 48 | 719 |
| 3 | 0 | 0 | 525 | 28 | 553 |

ตารางที่ 3.9 แสดงการเปลี่ยนแปลงบุคลากรตลอดช่วงเวลา (1961 - 1971)

| ระดับ | การเลื่อนตำแหน่ง | ลาออก |
|---|---|---|
| 1 | 81/1,611 | 105/1,611 |
| 2 | 32/719 | 48/719 |
| 3 | 0 | 28/553 |

ตารางที่ 3.10 แสดงเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงกำลังคน (เศษส่วน)

| ถึง / จาก | 1 | 2 | 3 | ลาออก |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,425/1,611 | 81/1,611 | 0 | 105/1,611 |
| 2 | 0 | 638/719 | 32/719 | 48/719 |
| 3 | 0 | 0 | 525/553 | 28/553 |

ตารางที่ 3.11 แสดงเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงกำลังคน (ทศนิยม)

| ถึง / จาก | 1 | 2 | 3 | ลาออก |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.8845 | 0.0503 | 0 | 0.0652 |
| 2 | 0 | 0.8887 | 0.0445 | 0.0668 |
| 3 | 0 | 0 | 0.9494 | 0.0506 |

ตารางที่ 3.12 แสดงสัดส่วนการรับบุคลากรทั้งหมด 11 ปี และค่าเฉลี่ย

| ระดับ | การรับพนักงานทั้งหมด | โดยเฉลี่ย | ทิศนิยม |
|---|---|---|---|
| 1 | 244 | 244/11 | 22.2 |
| 2 | 12 | 12/11 | 1.1 |
| 3 | 20 | 20/11 | 1.8 |

จากข้อมูลตลอดช่วงเวลาตั้งแต่ 1961-71 ในตารางที่ 3.11, 3.12

สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์

$$P = \begin{bmatrix} 0.8845 & 0.0503 & 0 \\ 0 & 0.8887 & 0.0445 \\ 0 & 0 & 0.9494 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 22.2 \\ 1.1 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$n(T+1) = n(T) \times P + R(T+1)$$

$$n(T+1) = \begin{bmatrix} 123 & 54 & 38 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.8845 & 0.0503 & 0 \\ 0 & 0.8887 & 0.0445 \\ 0 & 0 & 0.9494 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.2 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix}$$

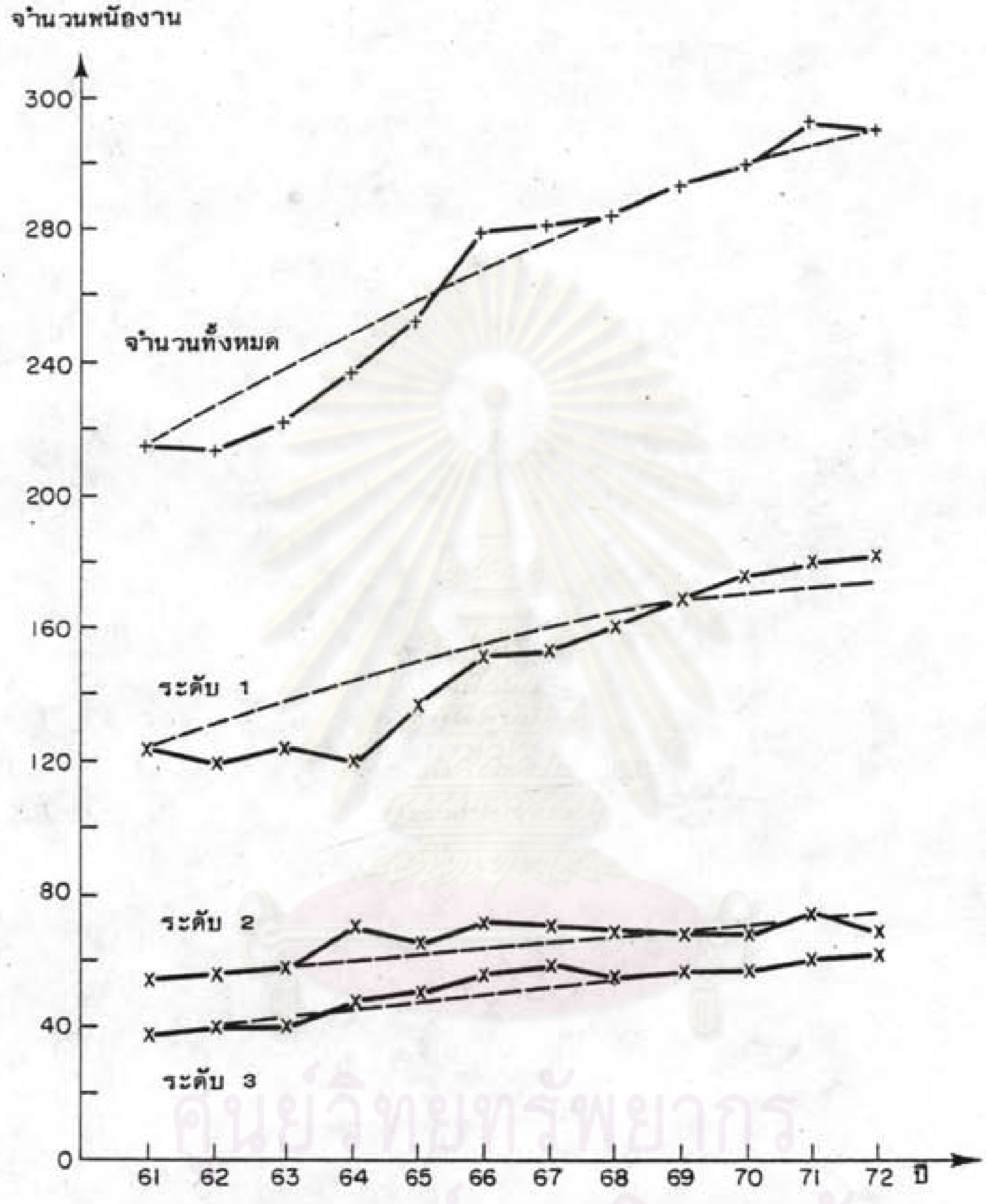
โดยใช้พารามิเตอร์ดังกล่าวในการพยากรณ์และเปรียบเทียบข้อมูลจริงในอดีต ตั้งแต่ปี 1961-72 จากการแสดงผลลัพธ์ที่ 4-6 ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ดังรูปที่ 3.8 แสดงค่าพยากรณ์ด้วยเส้นประเพื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลจริงในอดีต ซึ่งวิธีการนี้จะไม่ให้ค่าพยากรณ์ที่ดีนักในแต่ละช่วงของเวลา แต่จะให้ค่าพยากรณ์โดยทั่ว ๆ ไปของค่าแนวโน้มที่ดี อย่างไรก็ตามที่จุดสุดท้ายของช่วงเวลาของข้อมูลจริงกับความพยากรณ์เท่ากัน จำนวนพนักงานทั้งหมด และในระดับที่ 1 ไม่สามารถที่จะหลีกเลี่ยงการรับพนักงานเข้ามา (inflow) ดังนั้นเราสามารถคาดหวังการจำลองรูปแบบของข้อมูลจะใกล้เคียงถ้ากำหนดค่า R คงที่เท่ากับค่าจริง

```
]RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

  K = ?3
  N = ?123,54,38
  P = ?0.8845,0.0503,0
      ?0      ,0.8887,0.0445
      ?0      ,0      ,0.9494
  R = ?22,2   ,1,1    ,1,8
R,R$,E?1,0,0
T,% = ?10,YES
  (*) ?RUN
```

| T | 1 | 2 | 3 | TOTAL | R1 | R2 | R3 | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 123(57%) | 54(25%) | 38(18%) | 215(100%) | | | | |
| 1 | 131(58%) | 55(24%) | 40(18%) | 227(105%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 2 | 138(58%) | 57(24%) | 43(18%) | 237(110%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 3 | 144(58%) | 59(24%) | 45(18%) | 248(115%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 4 | 150(58%) | 60(23%) | 47(18%) | 257(120%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 5 | 155(58%) | 62(23%) | 49(18%) | 266(124%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 6 | 159(58%) | 64(23%) | 51(19%) | 274(128%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 7 | 163(58%) | 66(23%) | 53(19%) | 282(131%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 8 | 166(57%) | 68(24%) | 55(19%) | 290(135%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 9 | 169(57%) | 70(24%) | 57(19%) | 296(138%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 10 | 172(57%) | 72(24%) | 59(20%) | 303(141%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| (*) ?+T=10 | | | | | | | | |
| 11 | 174(56%) | 74(24%) | 61(20%) | 309(144%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 12 | 176(56%) | 75(24%) | 63(20%) | 315(146%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 13 | 178(56%) | 77(24%) | 65(20%) | 320(149%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 14 | 180(55%) | 78(24%) | 67(21%) | 325(151%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 15 | 181(55%) | 80(24%) | 69(21%) | 330(153%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 16 | 182(55%) | 81(24%) | 71(21%) | 334(156%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 17 | 184(54%) | 82(24%) | 73(21%) | 339(158%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 18 | 185(54%) | 84(24%) | 74(22%) | 343(159%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 19 | 185(54%) | 85(24%) | 76(22%) | 346(161%) | 22 | 1 | 2 | 25 |
| 20 | 186(53%) | 86(24%) | 78(22%) | 350(163%) | 22 | 1 | 2 | 25 |

```
  (*) ?END
```

<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-6 ค่าพยากรณ์โดยคงที่ค่า R</u>




รูปที่ 3.8 แสดงการเปรียบเทียบค่าพยากรณ์กับข้อมูลจริงในอดีต

จากการสังเกตอัตราการเลื่อนตำแหน่ง (promotion rate) ในปี 1963/4 มีอัตราสูงผิดปกติ ควรจะตัดข้อมูลช่วงนี้ออกไปแล้วพิจารณาข้อมูลใหม่ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ (parameter) โดยไม่รวมข้อมูลข้อปี 1963/4 เข้าไป ด้วยวิธีการเดียวกันจะได้ข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 3.13

ตารางที่ 3.13 แสดงการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลา

| ระดับ | จำนวนพนักงาน ที่จุดเริ่มต้นช่วงเวลา | การเลื่อนตำแหน่ง | การออก | การเข้ามา |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,487 | 54 | 97 | 212 |
| 2 | 661 | 25 | 40 | 12 |
| 3 | 513 | 0 | 26 | 18 |

ตารางที่ 3.14 แสดงเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงกำลังคน (เศษส่วน)

| จาก \ ถึง | 1 | 2 | 3 | การออก |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,336/1,487 | 54/1,487 | 0 | 97/1,487 |
| 2 | 0 | 596/661 | 25/661 | 40/661 |
| 3 | 0 | 0 | 487/513 | 26/513 |

<u>ตารางที่ 3.15</u> แสดง เมตริกซ์ความน่าจะ เป็นของการ เปลี่ยนแปลงกำลังคน (ทศนิยม)

| ถึง / จาก | 1 | 2 | 3 | การออก |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.8985 | 0.0363 | 0 | 0.0652 |
| 2 | 0 | 0.9017 | 0.0378 | 0.0605 |
| 3 | 0 | 0 | 0.9493 | 0.0507 |

<u>ตารางที่ 3.16</u> แสดงสัดส่วนการรับบุคคลากรทั้งหมด 10 ปี และค่าเฉลี่ย

| ระดับ | การรับพนักงานทั้งหมด | โดย เฉลี่ย | ทศนิยม |
|---|---|---|---|
| 1 | 212 | 212/10 | 21.2 |
| 2 | 12 | 12/10 | 1.2 |
| 3 | 18 | 18/10 | 1.8 |



จากตารางที่ 3.15 และ 3.16 สามารถประมาณ (estimate) ได้ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.8985 & 0.0363 & 0 \\ 0 & 0.9017 & 0.0378 \\ 0 & 0 & 0.9483 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 12.2 & 1.2 & 1.8 \end{bmatrix}$$

จาก $n(T+1) = n(T) \times P + R(T+1)$

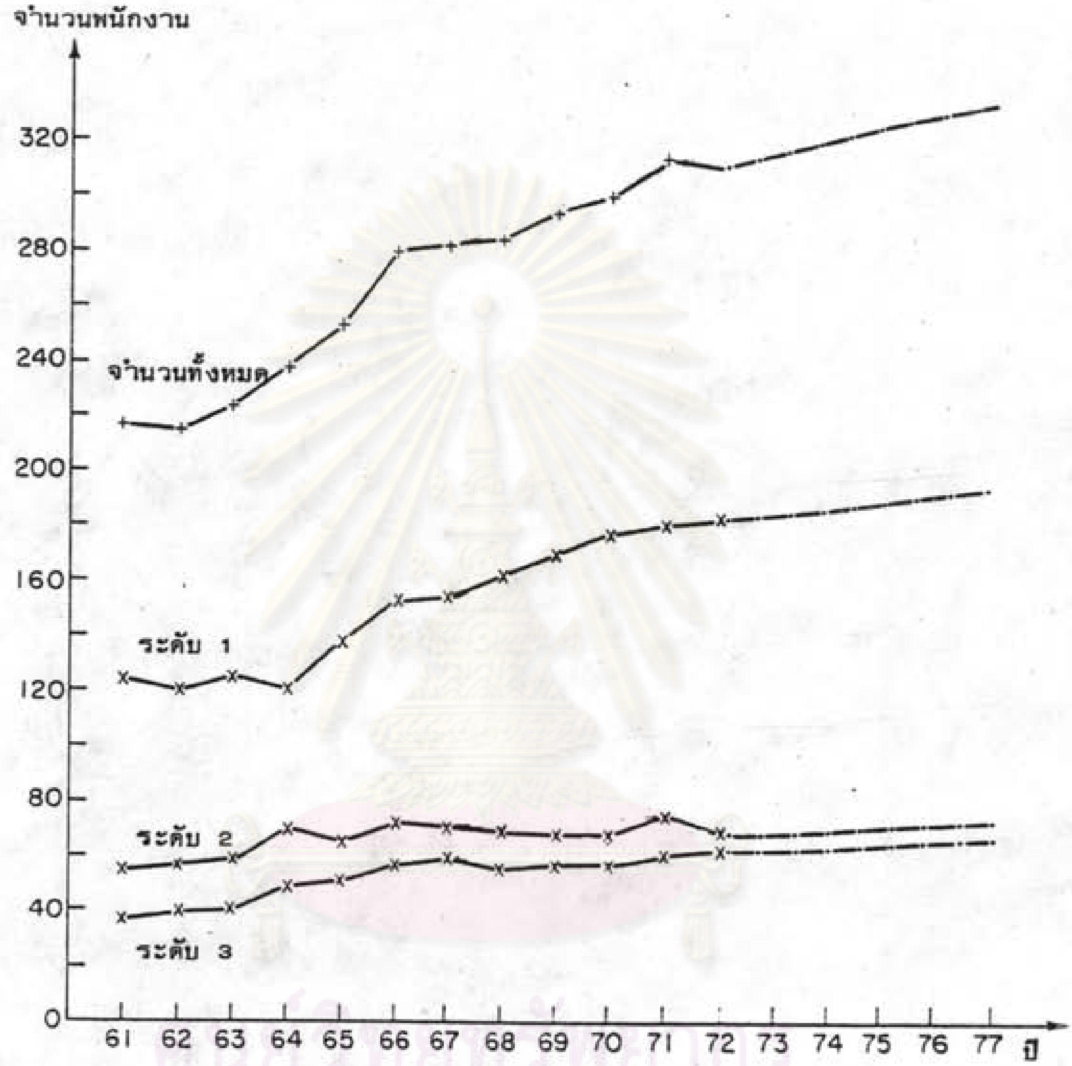
$$n(T+1) = \begin{bmatrix} 181 & 67 & 61 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} .8985 & 0.0363 & 0 \\ 0 & 0.9017 & 0.0378 \\ 0 & 0 & 0.9493 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12.2 & 1.2 & 1.8 \end{bmatrix}$$

```
]RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
-----------------------------------------

 K = ?3
 N = ?181,67,61
 P = ?0.8985,0,0263,0
     ?0     ,0.9017,0.0378
     ?0     ,0      ,0.9493
 R = ?21,1  ,1,2   ,1,8
A,R#,E?1,0,1
T,X = ?20,YES
 (*) ]RUN

T    1         2         3       TOTAL        R1      R2      R3     R

0  181(59%)  67(22%)  61(20%)  309(100%)
1  184(58%)  68(22%)  62(20%)  314(102%)      21      1       2      24
2  186(58%)  69(22%)  63(20%)  319(103%)      21      1       2      24
3  189(58%)  71(22%)  65(20%)  324(105%)      21      1       2      24
4  191(58%)  72(22%)  66(20%)  329(106%)      21      1       2      24
5  193(58%)  73(22%)  67(20%)  332(108%)      21      1       2      24
6  194(58%)  74(22%)  68(20%)  336(109%)      21      1       2      24
7  196(58%)  75(22%)  69(20%)  340(110%)      21      1       2      24
8  197(57%)  76(22%)  70(21%)  343(111%)      21      1       2      24
9  198(57%)  77(22%)  72(21%)  346(112%)      21      1       2      24
10 199(57%)  77(22%)  73(21%)  349(113%)      21      1       2      24
11 200(57%)  78(22%)  74(21%)  352(114%)      21      1       2      24
12 201(57%)  79(22%)  75(21%)  355(115%)      21      1       2      24
13 202(57%)  80(22%)  76(21%)  357(116%)      21      1       2      24
14 203(56%)  80(22%)  77(21%)  360(116%)      21      1       2      24
15 203(56%)  81(22%)  78(21%)  362(117%)      21      1       2      24
16 204(56%)  82(22%)  79(22%)  364(118%)      21      1       2      24
17 204(56%)  83(22%)  79(22%)  366(118%)      21      1       2      24
18 205(56%)  83(23%)  80(22%)  368(119%)      21      1       2      24
19 205(56%)  83(23%)  81(22%)  370(120%)      21      1       2      24
20 206(55%)  84(23%)  82(22%)  371(120%)      21      1       2      24
 (*) ?T=99
99 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)      21      1       2      24
 (*) ?+T=5
100 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)     21      1       2      24
101 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)     21      1       2      24
102 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)     21      1       2      24
103 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)     21      1       2      24
104 209(52%)  89(22%) 102(25%)  400(129%)     21      1       2      24
 (*) ?END
```

<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-7  ค่าพยากรณ์โดยคงที่ค่า  R (YES)</u>

```
]RUN

TRANSITION MODEL BASED ON MARKOV CHAINS
     EVALUATES N(T+1)=N(T)*P + R
---------------------------------------

  K = ?3
  N = ?181,67,61
  P = ?0.8985,0.0363,0
      ?0      ,0.9017,0.0378,
      ?0      ,0      ,0.9493
  R = ?21.2  ,1.2   ,1.8
R,R$,E?1,0,0
T,% = ?20,YES0
  <*> ?RUN

 T    1          2         3        TOTAL        R1      R2      R3      R

 0 181(100%) 67(100%) 61(100%) 309(100%)
 1 184(102%) 68(102%) 62(102%) 314(102%)        21       1       2      24
 2 186(103%) 69(104%) 63(104%) 319(103%)        21       1       2      24
 3 189(104%) 71(105%) 65(106%) 324(105%)        21       1       2      24
 4 191(105%) 72(107%) 66(108%) 328(106%)        21       1       2      24
 5 193(106%) 73(109%) 67(110%) 332(108%)        21    .. 1       2      24
 6 194(107%) 74(110%) 68(112%) 336(109%)        21       1       2      24
 7 196(108%) 75(112%) 69(114%) 340(110%)        21       1       2      24
 8 197(109%) 76(113%) 70(115%) 343(111%)        21       1       2      24
 9 198(110%) 77(114%) 72(117%) 346(112%)        21       1       2      24
10 199(110%) 77(116%) 73(119%) 349(113%)        21       1       2      24
11 200(111%) 78(117%) 74(121%) 352(114%)        21       1       2      24
12 201(111%) 79(118%) 75(122%) 355(115%)        21       1       2      24
13 202(112%) 80(119%) 76(124%) 357(116%)        21       1       2      24
14 203(112%) 80(120%) 77(126%) 360(116%)        21       1       2      24
15 203(112%) 81(121%) 78(127%) 362(117%)        21       1     . 2      24
16 204(113%) 82(122%) 79(129%) 364(118%)        21       1       2      24
17 204(113%) 82(123%) 79(130%) 366(118%)        21       1       2      24
18 205(113%) 83(124%) 80(132%) 368(119%)        21       1       2      24
19 205(113%) 83(124%) 81(133%) 370(120%)        21       1       2      24
20 206(114%) 84(125%) 82(134%) 371(120%)        21       1       2      24
  <*> ?T=99
99 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
  <*> ?+T=5
100 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
101 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
102 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
103 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
104 209(115%) 89(133%) 102(167%) 400(129%)        21       1       2      24
  <*> ?END
```

<u>แสดงผลลัพธ์ที่ 4-8 ค่าพยากรณ์โดยคงที่ค่า R (YES)</u>




<u>รูปที่ 3.9 แสดงค่าพยากรณ์สำหรับปี 1972-77</u>

ตารางที่ 3.17 แสดงจำนวนของพนักงานในแต่ละช่วงของเวลา

| ช่วงที่ / ปี / ระดับ | 0<br>1972 | 1<br>1973 | 2<br>1974 | 3<br>1975 | 4<br>1976 | 5<br>1977 | 6<br>1978 | 7<br>1979 | 8<br>1980 | 9<br>1981 | 10<br>1982 | 20<br>1992--- | 99<br>-2071 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 181 | 184 | 186 | 189 | 191 | 193 | 194 | 196 | 197 | 198 | 199 | 206 | 209 |
| 2 | 67 | 68 | 69 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 77 | 84 | 89 |
| 3 | 61 | 62 | 63 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 72 | 73 | 82 | 102 |
| TOTAL | 309 | 314 | 319 | 324 | 328 | 332 | 336 | 340 | 343 | 346 | 349 | 371 | 400 |

จากรูปที่ 3.9 แสดงค่าพยากรณ์ถึงปี 1977 จากการสังเกตค่าแนวโน้มตลอดช่วงเวลา 1961-72 (ไม่รวมข้อมูลปี 1963/4 เข้าไป) ถ้านโยบายการบริหารคงที่ตลอดเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจะทำให้สัดส่วนของจำนวนพนักงานที่เกิดในช่วงเวลาหนึ่งอยู่ในลักษณะคงที่เรียกว่า สภาวะดุลยภาพ (stady state) คือจะต้องมีงวดหนึ่งในอนาคตจำนวนพนักงานในแต่ละระดับอยู่ในลักษณะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง จากการแสดงผลลัพธ์ที่ 4-7 หรือตารางที่ 3.17

$$T = 99 , \quad n(2071) = \left[209(52\%), 89(22\%), 102(25\%)\right]$$

จำนวนพนักงานทั้งหมด 400 คน และจำนวนพนักงานระดับที่ 1, 2 จะอยู่ในลักษณะคงที่แล้วแต่จำนวนพนักงานระดับที่ 3 จะเพิ่มขึ้นอย่างช้าตั้งแต่ $T = 50$ ขึ้นไป

จากการแสดงผลลัพธ์ที่ 4-8 จะได้คำตอบเท่ากับผลลัพธ์ที่ 4-7 ทุกประการ แต่จะต่างกันตรงที่ว่า ผลลัพธ์ที่ 4-8 จะบอกเปอร์เซนต์การขยายแต่ละปีให้ (โดยใช้ทางเลือก YESO แทน YES รายละเอียดดูจากภาคผนวกที่ 8) ทำให้ทราบจำนวนพนักงานแต่ละระดับมีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงจากเดิมเป็นเปอร์เซนต์เท่าใด จากผลลัพธ์ 4-8 จำนวนพนักงานแต่ละระดับในช่วงเวลา $T = 0$ จะมี 100 % ช่วงเวลาต่อไปจำนวนพนักงานแต่ละระดับจะเพิ่มขึ้นรวมทั้งจำนวนรวมของพนักงานด้วย