บทที่ 2

ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เรื่องที่ต้องการศึกษาในการวิจัยครั้งนี้คือ การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อการพยากรณ์ ด้วยเทคนิคการวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายเมื่อความคลาดเคลื่อนมีปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ ดังนั้นจึงขอเริ่มด้วยการกล่าวถึงลักษณะทั่วไปของความคลาดเคลื่อน แล้วจึงกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นลำดับต่อไป

2.1 <u>คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน</u>

ในการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาลักษณะความคลาดเคลื่อนตามรูปแบบของอัตตสหสัมพันธ์แล็ก* (ตำแหน่ง) ที่ 1 เขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + v_t \quad ,t = 1,2,...,n$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ และ v_t คือ ค่าคลาดเคลื่อนสุ่ม สมมติว่าไม่มีสหสัมพันธ์กัน มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนมีค่าคงที่ σ^2

เราสามารถกำหนดโครงสร้างของ ε_t ให้เป็นฟังก์ชันของ v_t โดยอาศัยการแทนค่าซ้ำ ๆ ได้ดังนี้

จากสมการ $\qquad \varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + v_t$

ถ้าเราแล็ก (lag) ε_t ไปคราวละ 1 คาบเวลาจะพบว่า

---

* คำว่าแล็ก หมายถึง ย้อนเวลาไปในอดีต

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1} \qquad (2.1.1)$$

$$\varepsilon_{t-2} = \rho\varepsilon_{t-3} + v_{t-2} \qquad (2.1.2)$$

$$\varepsilon_{t-3} = \rho\varepsilon_{t-4} + v_{t-3} \qquad (2.1.3)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{t-r} = \rho\varepsilon_{t-(r+1)} + v_{t-r} \qquad (2.1.r)$$

ดังนั้นจากสมการ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ แทนที่ $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \ldots,$ ε_{t-r} จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \rho\,(\rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1}) + v_t \\
&= \rho^2\varepsilon_{t-2} + (\rho\, v_{t-1} + v_t) \\
&= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2(\varepsilon_{t-3} + v_{t-2}) \\
&= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \rho^3(\varepsilon_{t-4} + v_{t-3}) \\
&\cdots \\
\varepsilon_t &= v_t + \rho\, v_{t-1} + \rho^2\, v_{t-2} + \rho^3\, v_{t-3} + \ldots \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r\, v_{t-r}
\end{aligned}$$

2.1.1 <u>ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน</u>

จาก

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r\, v_{t-r} \\
&= v_t + \rho\, v_{t-1} + \rho^2\, v_{t-2} + \rho^3\, v_{t-3} + \ldots
\end{aligned}$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t) = E(v_t) + \rho\, E(v_{t-1}) + \rho^2\, E(v_{t-2}) + \ldots$$

แต่ $E(v_t) = 0 \;;\; t = 1,2,\ldots,n$

ดังนั้น $E(\varepsilon_t) = 0 \;;\; t = 1,2,\ldots,n$

2.1.2 <u>ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน</u>

จาก

$$\varepsilon_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r v_{t-r}$$

$$= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \rho^3 v_{t-3} + \ldots$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t^2) = E[\sum_{r=0}^{\infty} \rho^r v_{t-r}]^2$$

$$= E[v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \ldots]^2$$

$$= E[(v_t^2 + \rho^2 v_{t-2}^2 + \rho^4 v_{t-2}^2 + \ldots) +$$

$$(2\rho v_t v_{t-1} + 2\rho v_t v_{t-2} + \ldots)]$$

แต่ $E(v_t^2) = \sigma^2$ และ $E(v_s v_{s-t}) = 0 \; ; \; s \neq t$

$; \; t = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น

$$E(\varepsilon_t^2) = (\sigma^2 + \rho^2\sigma^2 + \rho^4\sigma^2 + \rho^6\sigma^2 + \ldots) +$$

$$(0 + 0 + 0 + \ldots + 0)$$

$$= \sigma^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \ldots)$$

$$= \frac{\sigma^2 \, 1}{1 - \rho^2} \quad , \quad |\rho| < 1$$

และฉะนั้น

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\sigma^2 \, 1}{1 - \rho^2}$$ เป็นค่าคงที่

2.2 <u>วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์</u>

ในการวิจัยครั้งนี้จะเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธีคือ วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป และวิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัต ซึ่งมีรายละ

เอียดแต่ละวิธีการเป็นดังนี้

2.2.1 วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ (Ordinary Least Squares Method) หลักการของวิธีนี้ก็คือ หาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าต่ำสุด

จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , t = 1,2,3,\ldots,n$$

เพื่อให้การพิจารณาสมการ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ เป็นรูปแบบทั่วไปจะเขียนสมการถดถอยให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (2.2.1.1)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{Y}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรตาม

X คือ เมตริกซ์ของตัวแปรอิสระ

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวคเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณ

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ เวคเตอร์ของความคลาดเคลื่อน

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งเมื่อแทนที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ในสมการ (2.2.1.1) จะได้

$$\underset{\sim}{Y} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{\sim}{e}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{e} = \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

พิจารณาผลบวกของกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum Square of Residual) : SSE

$$
\begin{aligned}
SSE &= \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \\
&= \underset{\sim}{e}'\,\underset{\sim}{e} \\
&= (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'\,(\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \\
&= (\underset{\sim}{Y}' - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X')\,(\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}} \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}\,X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}
\end{aligned}
$$

การหาค่าต่ำสุดของผลบวกของกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของผลบวกของกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเทียบกับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 ดังนี้

$$
\frac{\partial\, \underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e}}{\partial \hat{\underset{\sim}{\beta}}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\underset{\sim}{\beta}}}(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X'X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = 0
$$

และเมื่อทำการหาอนุพันธ์ จะได้สมการปกติ คือ

$$
(X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}
$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$ คือ ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\underset{\sim}{\beta}$

2.2.2 <u>วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป</u> (Generalized Least Squares Method) ในสถานการณ์ทางปฏิบัติพบว่า $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) \neq 0$ ในทุกค่าของ $s \neq t$ นั่นคือ ค่าคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กัน ซึ่งลักษณะที่ไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถดถอย ในสถานการณ์เช่นนี้ $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')$ จะมิใช่ $\sigma^2 I_n$ แต่กลับพบว่า $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$ โดยที่ Ω เป็น Symmetric Positive Definite Matrix* ขนาด n x n

โดยอาศัยเทคนิคการแปลงข้อมูล (Transformation Technique) เพื่อหาตัวประมาณกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไปได้ดังนี้

เนื่องจาก $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$ โดยที่ Ω เป็น Symmetric Positive Definite Matrix ขนาด n x n ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & & 1 \end{bmatrix}$$

---

* Positive Definite Matrix คือ เมตริกซ์ที่ให้ค่า Characteristic Values เป็นบวกทุกค่า โดยปกติใน GLS ถือว่า σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขณะที่ Ω เป็นเมตริกซ์ที่ต้องทราบค่าสมาชิกทุกตัว แต่ในทางปฏิบัติมักไม่ทราบค่าสมาชิกของ Ω การวิเคราะห์ผลโดยใช้ค่าประมาณ Ω เรียกว่า Estimated Generalized Least Square: EGLS สำหรับในการวิจัยครั้งนี้จะทำการประมาณค่าของสมาชิก Ω ทุกตัวก่อน โดยใช้สหสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อนของสมการถดถอยที่ได้จากวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ ε_t ; $t = 1,2,\ldots,n$

จะสามารถหาเมตริกซ์ T ที่ทำให้ $T'T = \Omega^{-1}$ ได้ ทำให้สามารถแปลงรูปสมการ $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ ที่ $E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$ ได้ดังนี้

จากสมการ $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$

คูณด้านหน้าตลอดด้วย T จะได้

$$T\underset{\sim}{Y} = TX\underset{\sim}{\beta} + T\underset{\sim}{\varepsilon}$$

หรือ $$\underset{\sim}{Y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^* \qquad (2.2.2.1)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{Y}^* = T\underset{\sim}{Y}$, $X^* = TX$ และ $\underset{\sim}{\varepsilon}^* = T\underset{\sim}{\varepsilon}$

จากสมการ (2.2.2.1) จะพบว่า

$$\begin{aligned} E(\underset{\sim}{\varepsilon}^*\underset{\sim}{\varepsilon}^{*\prime}) &= E(T\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}'T') \\ &= T\,E(\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{\varepsilon}')\,T' \\ &= \sigma^2\,T\Omega T' \\ &= \sigma^2\,I_n \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ $\underset{\sim}{Y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}^*$ มีคุณสมบัติสอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นของสมการถอยที่ว่า $E(\varepsilon_s\varepsilon_t) = 0$; $s \neq t$ และ $E(\varepsilon_s\varepsilon_t) = \sigma^2$; $s = t$ จึงสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้ด้วยวิธี OLS ดังที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นนี้

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^*$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}$ และเมื่อแทนที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^*$ ลงในสมการ (2.2.2.1) จะได้

$$\underset{\sim}{Y}^* = X^*\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* + \underset{\sim}{e} \text{ และ } \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y}^* - X^*\hat{\underset{\sim}{\beta}}^*$$

โดยอาศัยเทคนิคการหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน จะพบว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} = (X^{*'} X^{*})^{-1}(X^{*'} \underset{\sim}{Y}^{*})$$

$$= [(TX)'(TX)]^{-1}(TX)'(T\underset{\sim}{Y})$$

$$= (X'T'T\,X)^{-1}(X'T')(T\underset{\sim}{Y})$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'T'T\underset{\sim}{Y})$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\underset{\sim}{Y})$ คือ ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$
เมื่อ

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & \cdot & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\rho = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}$$

2.2.3 <u>วิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัต</u> (Cochrane-Orcutt Transformation Method) คอคแครนและออร์คัตได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์ โดยอาศัยเทคนิคการแล็กตัวแปร

จากสมการ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ (2.2.3.1)

แล็กสมการ (2.2.3.1) ไป 1 คาบเวลา

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (2.2.3.2)$$

คูณตลอดสมการ (2.2.3.2) ด้วย ρ

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho\,\varepsilon_{t-1} \qquad (2.2.3.3)$$

(2.2.3.2) - (2.2.3.3)

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0 - \rho\beta_0 + \beta_1 X_t - \rho\beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (1-\rho)\beta_0 + (X_t - \rho X_{t-1})\beta_1 + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1} \qquad (2.2.3.4)$$

จากรูปแบบ AR(1)

$$\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + v_t \quad ; t = 1,2,\ldots,n$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ และ v_t คือ ค่าคลาดเคลื่อนสุ่ม สมมติว่าไม่มีสหสัมพันธ์ มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนคงที่

จะได้ว่า

$$v_t = \varepsilon_t - \rho\,\varepsilon_{t-1}$$

แทน v_t ลงในสมการ (2.2.3.4)

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (1-\rho)\beta_0 + (X_t - \rho X_{t-1})\beta_1 + v_t \qquad (2.2.3.5)$$

เพราะฉะนั้น ด้วยสมการ (2.2.3.5) จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม v_t ไม่มีปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ ดังนั้นเมื่อดำเนินการวิเคราะห์สมการถดถอยโดยใช้สมการ (2.2.3.5) ก็สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ ในรูปแบบ AR(1) ได้

เขียนสมการ (2.2.3.5) ให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y}^{*} = X^{*}\underset{\sim}{\beta}^{*} + \underset{\sim}{v} \qquad (2.2.3.6)$$

โดยที่

$$\underset{\sim}{Y}^{*} = \begin{bmatrix} Y_2-\rho Y_1 \\ Y_3-\rho Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_t-\rho Y_{t-1} \end{bmatrix} \qquad X^{*} = \begin{bmatrix} 1-\rho & X_2-\rho X_1 \\ 1-\rho & X_3-\rho X_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1-\rho & X_t-\rho X_{t-1} \end{bmatrix}$$

จากนี้ประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}^{*}$ ได้โดยวิธี OLS ดังนี้

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}^{*}$ จะได้

$$\underset{\sim}{Y}^{*} = X^{*}\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} + \underset{\sim}{e} \quad \text{และ} \quad \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y}^{*} - X^{*}\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*}$$

โดยอาศัยเทคนิคการหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน จะได้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}^{*}$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{*} = (X^{*\prime} X^{*})^{-1}(X^{*\prime} \underset{\sim}{Y}^{*})$$