บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีทั่วไปของการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow)

2.1.1. สมการแห่งการเปลี่ยนแปลงของระบบซึ่งอุณหภูมิเท่ากัน (Isothermal system)

2.1.1.1 สมการแห่งความต่อเนื่อง (The equation of continuity)

สามารถเขียนได้ว่า

ในพิกัดสี่เหลี่ยม (rectangular coordinates) (x,y,z)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

โดยที่ ρ = ความหนาแน่นของของไหล

t = เวลา

x = ระยะทางในแนวแกน x

y = ระยะทางในแนวแกน y

z = ระยะทางในแนวแกน z

v_x = ความเร็วของของไหลในแนวแกน x

v_y = ความเร็วของของไหลในแนวแกน y

v_z = ความเร็วของของไหลในแนวแกน z

2.1.1.2 สมการแห่งการเคลื่อนที่ (The equation of motion)

สามารถเขียนได้ว่า

ในพิกัดสี่เหลี่ยม (rectangular coordinates)(x,y,z)

เมื่อ ρ และ μ เป็นค่าคงที่

ในแนวแกน x (x - component)

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \varrho g_x$$

ในแนวแกน y (y - component)

$$\varrho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \varrho g_y$$

ในแนวแกน z (z - component)

$$\varrho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \varrho g_z$$

โดยที่ ϱ = ความหนาแน่นของของไหล

μ = ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity) ของของไหล

x = ระยะทางในแนวแกน x

y = ระยะทางในแนวแกน y

z = ระยะทางในแนวแกน z

t	=	เวลา
v_x	=	ความเร็วของของไหลในแนวแกน x
v_y	=	ความเร็วของของไหลในแนวแกน y
v_z	=	ความเร็วของของไหลในแนวแกน z
P	=	ความดันซึ่งเกิดขึ้นกับของไหล
g_x	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน x
g_y	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน y
g_z	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวแกน z

2.1.2. <u>สมการแห่งการเปลี่ยนแปลงของระบบซึ่งอุณหภูมิไม่เท่ากัน</u>

2.1.2.1 <u>สมการแห่งพลังงาน (The equation of energy)</u>

ในพิกัดสี่เหลี่ยม (rectangular coordinate)(x,y,z)

เมื่อ ρ และ k มีค่าคงที่

สามารถเขียนได้ว่า

$$\rho C_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right] = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$+ 2\mu\left[\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2\right] + \mu\left[\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]^2\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right]^2\right]$$

โดยที่ ρ	=	ความหนาแน่นของของไหล
k	=	ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ของ

ของไหล

C_p = ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) ที่ความดันคงที่ของของไหล

T = อุณหภูมิของของไหล

x = ระยะทางในแนวแกน x

y = ระยะทางในแนวแกน y

z = ระยะทางในแนวแกน z

t = เวลา

v_x = ความเร็วของของไหลในแนวแกน x

v_y = ความเร็วของของไหลในแนวแกน y

v_z = ความเร็วของของไหลในแนวแกน z

μ = ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity) ของของไหล

2.2 การวิเคราะห์โดยทางทฤษฎีของงานวิจัยในอดีต

2.2.1. M.S. Bhatti (1983) ได้เสนองานวิจัยเกี่ยวกับการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ที่ปากทางเข้าของท่อวงรี (hydrodynamic entrance region) ไม่มีการถ่ายเทความร้อน ของไหลเป็นแบบนิวโตเนียน (Newtonian fluid) การไหลไม่ขึ้นกับเวลา (steady) โดยวิเคราะห์โดยทางทฤษฎี ดังนี้

จากสมการสมดุลย์โมเมนตัมในแนวแกน (axial momentum balance equation) จะได้ว่า

$$\rho\left[u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{dP}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

และจากสมการแห่งความต่อเนื่อง (continuity equation) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dw}{\partial z} = 0$$

เมื่อ ρ = ความหนาแน่นของของไหล

u, v, w = ความเร็วของของไหลในทิศทางตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

x, y, z = ระยะทางในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

P = ความดันสถิต (static pressure) ของของไหลในท่อ

μ = dynamic viscosity ของของไหล

โดยวิธี Karman - Pohlhansen Integral method ได้คำตอบว่า

$$16\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\right]Z = \left[\eta^2 - 1 - 2\ln\eta\right]$$

เมื่อ λ = b/a , aspect ratio ของท่อ

Z = $[(z/\sqrt{ab})/Re]$,dimensionless streamwise coordinate

Re = $(W_o\sqrt{ab}/\gamma)$, Reynolds number

W_o = ความเร็วสม่ำเสมอที่ปากทางเข้าของท่อ

γ = kinematic viscosity ของของไหล

a = semi-major axis ของท่อวงรี

b = semi-minor axis ของท่อวงรี

η = dimensionless boundary layer thickness parameter

คำตอบของระยะทางเข้าไฮโดรไดนามิก (hydrodynamic entrance length, Z_e) เป็น

$$Z_e = 0.5132\left[\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right]$$

เมื่อ Z_e = $[(z_e/\sqrt{ab})/Re]$

z_e = ระยะทางเข้าไฮโดรไดนามิก

คำตอบของการสูญเสียความดันในแนวแกน (axial pressure drop, P) เป็น

$$P = \frac{2(1 - \eta)(1 + 3\eta) - 3(1 + \eta)^2 \ln\eta}{3(1 + \eta)^2}$$

เมื่อ $P = [(p_o - p)/(1/2\rho w_o^2)]$, dimensionless axial pressure drop

p_o = ความดันสถิตที่ปากทางเข้าท่อ

คำตอบของสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (friction coefficient , f , $\bar{f}$) เป็น

$$\left[\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right] f\mathrm{Re} = \frac{8(3\eta^3 + 9\eta^2 + 25\eta + 3)}{3(1 - \eta^2)(1 + \eta)^3}$$

เมื่อ f = สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเฉพาะแห่ง (local friction coefficient)

และ

$$\left[\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right] \bar{f}\mathrm{Re} = \frac{16}{3}\left[\frac{2(1 - \eta)(3 + \eta) - 3(1 + \eta)^2 \ln\eta}{(1 + \eta)^2(\eta^2 - 1 - 2\ln\eta)}\right]$$

เมื่อ $\bar{f}$ = สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเฉลี่ย (average friction coefficient)

2.2.2. N.T. Dunwoody (1962) ได้เสนองานวิจัยเกี่ยวกับการพาความร้อนในท่อหน้าตัดรูปวงรี โดยสนใจที่ระยะปากทางเข้าความร้อน (thermal entrance region) โดยมีเงื่อนไขว่า การไหลเป็นแบบราบเรียบ และไม่ขึ้นกับเวลา (steady laminar) การไหลพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully developed flow) อุณหภูมิของผนังท่อด้านในมีค่าคงที่ และมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิของของไหลที่ก่อนจะไหลเข้าท่อ คุณสมบุติทางกายภาพของของไหลมีค่าคงที่ ไม่คิดการกำเนิดความร้อนภายใน (internal heat generation) การนำความร้อนในแนวแกนถูกตัดทิ้ง เมื่อเทียบกับการพาความร้อนในแนวแกน

จากสมการแห่งพลังงาน (The equation of energy) สามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y_1^{\,2}} = \frac{v\partial\theta}{v_o\partial z}$$

และเขียนสมการในเทอมของ v ได้ว่า

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^{\,2}} = -\frac{D^2{}_H P}{\mu L}$$

โดยที่ $\theta = \dfrac{T - T_w}{T_i - T_w}$ การกระจายอุณหภูมิเฉพาะแห่ง (local temperature distribution)

x_1 = x / D_H

y_1 = y / D_H

x = ระยะทางในแนวแกน x

y = ระยะทางในแนวแกน y

z = ระยะทางในแนวแกน z

v = ความเร็วของของไหลเฉพาะแห่ง (local fluid velocity)

v_o = ความเร็วเฉลี่ยของของไหลทั่วหน้าตัดของท่อ

D_H = เส้นผ่าศูนย์กลางไฮดรอลิกของท่อ (hydraulic diameter)

μ = ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity) ของของไหล

P/L = ความลาดเอียงทางความดันของของไหล

T = อุณหภูมิของของไหลในท่อ

T_i = อุณหภูมิขาเข้าของของไหล

T_w = อุณหภูมิที่ผนังท่อของของไหล

ในงานวิจัยนี้ได้เสนอว่า โดยการคำนวณโดยวิธีการทางเชิงเลข (numerical method) จะได้ว่า

$$Nu(\infty) = \lambda_{1,0} / 4$$

โดยที่ $Nu(\infty)$ = ค่านัสเซลท์นัมเบอร์ (Nusselt number) ที่การไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully developed flow)

$\lambda_{1,0}$ = ค่า eigenvalues ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า aspect ratio ของท่อวงรี

ϵ = ค่า aspect ratio ของท่อวงรี (b/a)

b = semi-minor axis ของท่อวงรี

a = semi-major axis ของท่อวงรี

ซึ่งค่า eigenvalue และค่า aspect ratio ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของค่า eigen value และค่า aspect ratio

ϵ	0.0625	0.1250	0.2500	0.5000	0.8000
$\lambda_{1,0}$	14.59	14.90	15.17	14.97	14.67

และ $$Nu(z)/Nu(\infty) = 1 + CGz$$

โดยที่ $Nu(z)$ = ค่านัสเซลท์นัมเบอร์เฉลี่ยแบบ log (mean logarithmic Nusselt number)

Gz = เกรต์ซนัมเบอร์ (Graetz number)

C = ค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับค่า aspect ratio

ตารางที่ 2.2 ความสัมพันธ์ของค่า C กับค่า aspect ratio

ϵ	0.0625	0.1250	0.2500	0.5000	1.2500
C	0.0578	0.0388	0.0239	0.0158	0.0138

2.2.3. J. Schenk และ Bong Swy Han (1967) ได้เสนองานวิจัยเกี่ยวกับการไหลในท่อวงรี โดยมีจุดประสงค์ที่จะขยายการคำนวณของ Dunwoody (1962) ออกไปที่ค่า aspect ratio เป็น 0.25 และ 0.8 เพื่อตรวจสอบความแม่นยำของการคำนวณ โดยในงานวิจัยนี้มีเงื่อนไขคือ การไหลของของไหลเป็น แบบราบเรียบ (laminar flow) ของไหลเป็นแบบนิวโตเนียน (Newtonian fluid) อุณหภูมิของของไหลในท่อ มีค่าสูงกว่าอุณหภูมิของผนังท่อด้านใน คุณสมบัติทางกายภาพของของไหลไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ ไม่มีการนำความร้อนในทิศทางแนวแกนของท่อ ไม่คิดการกระจายความหนืด ไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายใน

จากสมการแห่งพลังงาน (The equation of energy) เขียนได้ว่า

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]$$

ความเร็วในแนวแกนของท่อ สามารถเขียนได้ว่า

$$v_z = 2v_o\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) คือ

$$T = T_i \quad \text{เมื่อ} \quad z = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} < 1$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T - T_w) \quad \text{เมื่อ} \quad z > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} = 1$$

โดยที่ ρ = ความหนาแน่นของของไหลในท่อ

C_p = ค่า specific heat ที่ความดันคงที่ของของไหล

v_z = ความเร็วของของไหลในแนวแกน z

T = อุณหภูมิของของไหล

x = ระยะทางตามแนวแกน x

y = ระยะทางตามแนวแกน y

z = ระยะทางตามแนวแกน z

k = ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหลในท่อ

v_o = ความเร็วเฉลี่ยของของไหล

a = semi-major axis ของท่อวงรี

b = semi-minor axis ของท่อวงรี

T_i = อุณหภูมิขาเข้าของของไหล

T_∞ = อุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

η = พิกัดซึ่งตั้งฉากกับผนังท่อ

จากการแก้สมการโดยวิธีทางเชิงเลข (numerical method) จะได้ว่า

$$Nu_\infty = \lambda_{1,1}/4$$

โดยที่ Nu_∞ = นัสเซลส์นัมเบอร์ (Nusselt number) เมื่อการไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully developed flow)

$\lambda_{1,1}$ = ค่า eigenvalue

ความสัมพันธ์ของค่า eigen value และค่า aspect ratio สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ความสัมพันธ์ของค่า eigen value และค่า aspect ratio (ϵ)

ϵ	0.25	0.80
$\lambda_{1,1}$	15.168	14.674

และ

$$\theta_o = \Sigma_n A_n^2 \exp\left[\frac{-\lambda_n}{Gz}\right]$$

$$Nu = \frac{1}{4\theta_o} \Sigma_n A_n^2 \lambda_n \exp\left[\frac{-\lambda_n}{Gz}\right]$$

โดยที่ θ_o = อุณหภูมิผสมเฉลี่ย (cup-mixing mean temperature) ของของไหล

A_n และ λ_n = เป็นค่าคงที่ในตารางที่ 2.4

Nu = ค่านัสเซลล์นัมเบอร์ (Nusselt number) ที่การไหลยังไม่พัฒนาเต็มที่

ตารางที่ 2.4 ค่าของ A_n และ λ_n เมื่อค่า aspect ratio (ϵ) เป็น 0.25 และ 0.8

ϵ	0.25	0.80
λ_1	15.168	14.675
λ_2	31.72	74.15
λ_3	57.6	100.7
A_1	+0.834	0.903
A_2	+0.356	0.219
A_3	+0.215	-0.228

2.2.4. S. Someswara Rao , N.CH. Pattabhi Ramacharyulu และ V.V.G. Krishnamurty (1969) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการพาความร้อนในท่อวงรีสั้น ซึ่งมีการไหลแบบราบเรียบ อุณหภูมิที่ผนังท่อมีค่าคงที่ การไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว ของไหลเป็นแบบนิวโตเนียน (Newtonian) อัดตัวไม่ได้ ไม่มีการกำเนิดความร้อนภายใน และไม่นำการนำความร้อนในแนวแกนมาคิดเพื่อเปรียบเทียบกับการพาความร้อนในแนวเดียวกัน โดยมีการวิเคราะห์ดังนี้

จากสมการแห่งพลังงาน (The equation of energy) สามารถเขียนได้ว่า

$$c^2(\cosh^2\xi + \cos^2\theta)\, v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

การกระจายความเร็วจะเป็น

$$v_z = 2v \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]$$

โดยที่ $c = ae$ = ระยะระหว่างจุดโฟกัส (focus)

ξ, θ, z = พิกัดของกระบอกวงรี (elliptic cylindrical coordinates)

C_p = ค่า specific heat ที่ความดันคงที่ของของไหล

v_z = ความเร็วเฉพาะแห่งซึ่งอุณหภูมิเท่ากัน (isothermal)

T = อุณหภูมิของของไหล

α = thermal diffusivity, $k/\rho C_p$ ของของไหลในท่อ

k = ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหลในท่อ

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

C_p = specific heat ของของไหล

v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหล

x = ระยะทางตามแนวแกน x

y = ระยะทางตามแนวแกน y

z = ระยะทางตามแนวแกน z

x = $C \cosh \xi \cos \theta$

y = $C \sinh \xi \sin \theta$

z = z

a = semi-major axis ของท่อวงรี

b = semi-minor axis ของท่อวงรี

$$e = \text{eccentricity ของท่อวงรี}$$

จากการวิเคราะห์โดยใช้ Lévêque theory จะได้ว่า ค่านัสเซลท์ นัมเบอร์เฉลี่ยทั้งหมด (overall everage Nusselt number) เป็น

$$Nu = 2.16\Psi(e)(Gz)^{1/3}\left[\frac{\mu_b}{\mu_w}\right]^{0.14}$$

โดยที่

$$\Psi(e) = E(e)^{-4/3}\int_0^{\pi/2}(1 - e^2\cos\theta)^{2/3}d\theta$$

$$e = 1 - \left[\frac{b}{a}\right]^2$$

μ_b = ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity) เฉลี่ยของของไหล

μ_w = ความหนืดไดนามิก (dynamic viscosity) เฉลี่ยของของไหลที่อุณหภูมิผนังท่อ

E(e) = complete elliptic integral of the second kind ,

$$= \int_0^{\pi/2}(1 - e^2\sin^2\theta)^{1/2}d\theta$$

Gz = ค่าเกรต์ซนัมเบอร์ (Graetz number) เฉลี่ย

ความสัมพันธ์ของค่า aspect ratio (b/a) , eccentricity (e) และค่า $\Psi(e)$ สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.5

<u>ตารางที่ 2.5</u> ความสัมพันธ์ของค่า b/a , ค่า e และค่า Ψ(e)

b/a	e	Ψ(e)
0	1	0.91074
0.0625	0.99804	0.90720
0.1	0.99498	0.90371
0.1254	0.99215	0.90119
0.25	0.96824	0.88846
0.3	0.95393	0.88389
0.4	0.91651	0.87613
0.5	0.86602	0.87025
0.6	0.80000	0.86603
0.7	0.71414	0.86318
0.8	0.60000	0.86142
0.9	0.43588	0.86052
1.0	0.0	0.86024

ค่าคงที่ซึ่งได้จากการคำนวณ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.6

ตารางที่ 2.6 ค่าคงที่ที่ b/a = 0.0625, 0.125, 0.25, 0.5 และ 0.8

b/a	$K = \dfrac{Nu}{Gz^{1/3}\left[\dfrac{\mu_b}{\mu_w}\right]^{0.14}}$
0.0625	1.9595
0.125	1.9465
0.25	1.9190
0.5	1.8797
0.8	1.8606

2.2.5 P.A. James (1970) ได้ทำการคำนวณหาค่าการถ่ายเทความร้อนในช่องทางแคบ ๆ ซึ่งมีการไหลเป็นแบบราบเรียบ โดยสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับท่อวงรีได้ ท่อวงรีนั้นควรจะมีค่า b/a น้อย ๆ อุณหภูมิที่ผนังท่อมีค่าคงที่ และท่อที่ใช้เป็นท่อสั้น

ในการพิจารณาให้ท่อมีความเป็นวงรีมาก ๆ จนเข้าใกล้แผ่นขนาน ภายใต้เงื่อนไข

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

โดยที่ T = อุณหภูมิของของไหล

x = ระยะทางตามแนวแกน x

y = ระยะทางตามแนวแกน y

จะได้ว่าที่ระยะพัฒนาทางความร้อนเต็มที่แล้ว (thermal fully developed region) ได้คำตอบว่า

$$Nu_{\infty} \quad = \quad 3.488 \quad \text{ที่} \quad b/a = 0$$

โดย $\quad Nu_{\infty} \quad = \quad$ ค่านัสเซลท์นัมเบอร์ (Nusselt number) ที่การไหลที่ระยะพัฒนาทางความร้อนเต็มที่แล้ว

สำหรับระยะปากทางเข้าความร้อน (thermal entrance region) ใช้ Lévêgue theory ในการวิเคราะห์ จะได้ว่า

$$Nu = \frac{\left[\dfrac{\pi b}{9E^{4}a}\right]^{1/3}}{\Gamma\left[\dfrac{4}{3}\right]} \int_{0}^{1} \sqrt{1 + \frac{b^{2}}{a^{2}}\left[\frac{dy^{*}}{dx^{*}}\right]_{w}^{2}}\;\theta^{1/3}\,dx^{*} \left[\frac{1}{Gz}\right]^{-1/3}$$

โดยที่

$$\theta = 4\left[\frac{x^{*}}{\sqrt{1 + \dfrac{a^{2}}{b^{2}}\left[\dfrac{dx^{*}}{dy^{*}}\right]_{w}^{2}}} + \frac{\dfrac{a\,y^{*}}{b}}{\sqrt{1 + \dfrac{b^{2}}{a^{2}}\left[\dfrac{dy^{*}}{dx^{*}}\right]_{w}^{2}}}\right]$$

$$\left[\frac{dy^{*}}{dx^{*}}\right]_{w} = \frac{-\,x^{*}}{\sqrt{1 - x^{*2}}}$$

$Nu \quad = \quad$ ค่านัสเซลท์นัมเบอร์ (Nusselt number) เฉลี่ย

E	=	elliptic integral of the second kind
a	=	semi-major axis ของท่อวงรี
b	=	semi-minor axis ของท่อวงรี
Γ	=	gamma function
x^*	=	x/a
y^*	=	y/b
x	=	ระยะทางตามแนวแกน x
y	=	ระยะทางตามแนวแกน y
w	=	ทิศทางตั้งฉากกับผนังท่อ
Gz	=	เกรต์ซนัมเบอร์ (Graetz number)

ถ้าให้

$$\frac{\left[\dfrac{\pi b}{9E^4 a}\right]^{1/3}}{\Gamma\left[\dfrac{4}{3}\right]} \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left[\frac{dy^*}{dx^*}\right]^2}\, \theta^{1/3} dx^* \quad = \quad K$$

ซึ่ง K เป็นค่าคงที่ โดยมีความสัมพันธ์กับค่า aspect ratio (b/a) ของท่อวงรี ดังแสดงในตารางที่ 2.7

ตารางที่ 2.7 ความสัมพันธ์ของค่า b/a และค่า K

b/a	$K = Nu\ (1/Gz)^{1/3}$
1.00000	1.070
0.50000	1.086215

ตารางที่ 2.7 (ต่อ)

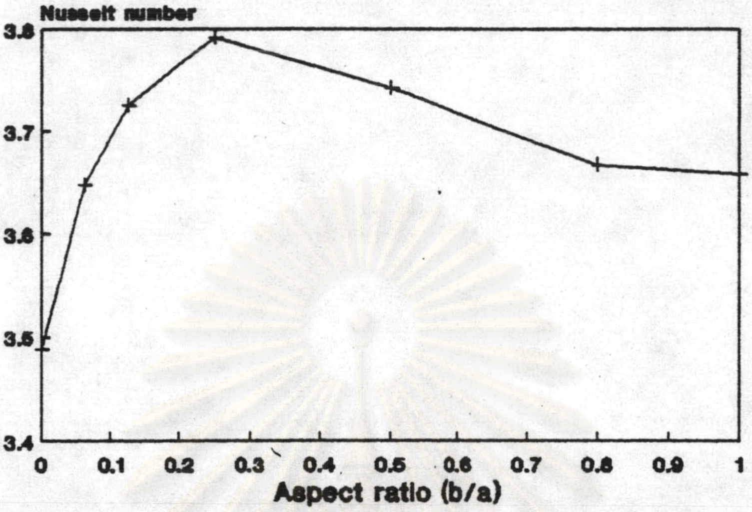
b/a	$K = Nu\ (1/Gz)^{1/3}$
0.40000	1.093
0.25000	1.11
0.12500	1.127
0.06250	1.135
0.03125	1.138
0.01000	1.14
0.00000	1.1408

เปรียบเทียบค่านัสเซลท์นัมเบอร์ ที่มีการไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว จากการคำนวณของ Dunwoody (1962), Schenk (1967) และ James (1970) ดังแสดงในตารางที่ 2.8

ตารางที่ 2.8 แสดงค่าความสัมพันธ์ของค่านัสเซลท์นัมเบอร์กับค่า aspect ratio

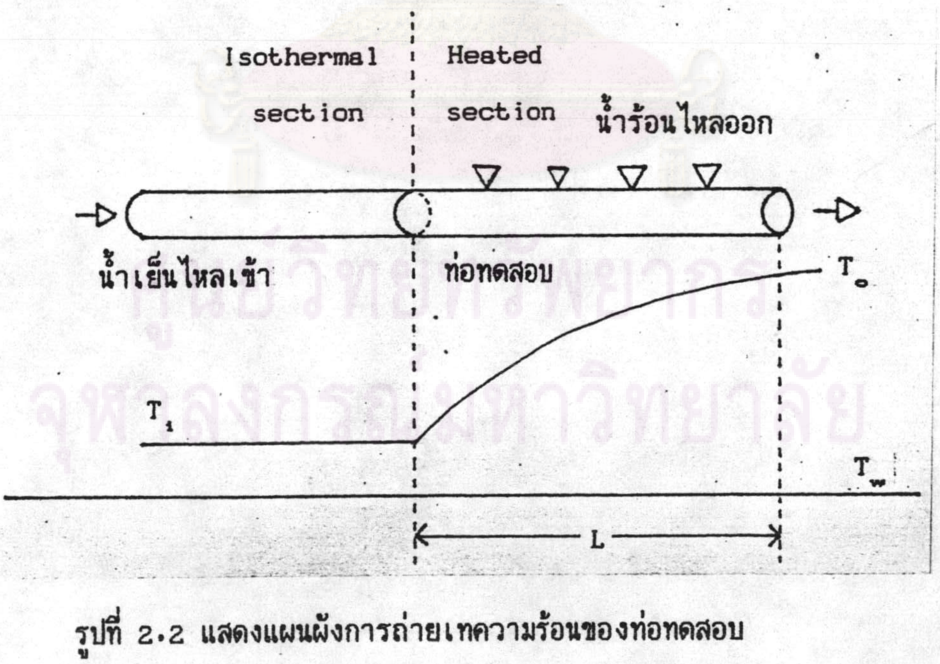
b/a	Nu
0.0000	3.488
0.0625	3.647
0.1250	3.725
0.2500	3.7925
0.5000	3.742
0.8000	3.667
1.0000	3.658

ซึ่งสามารถแสดงเป็นรูปกราฟได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่านัสเซลท์นัมเบอร์ และค่า aspect ratio

2.3 <u>การหาค่า Nusselt number โดยการคำนวณจากข้อมูลซึ่งได้จากการทดลอง</u>



รูปที่ 2.2 แสดงแผนผังการถ่ายเทความร้อนของท่อทดสอบ

ทำการสมดุลย์พลังงานตลอดช่วงของท่อทดสอบซึ่งมีการให้ความร้อน เมื่ออยู่ในสภาวะ steady state สามารถเขียนได้ว่า

$$Q = wC_p(T_o - T_i) \qquad ...(2.3.1)$$

โดยที่ Q = ปริมาณความร้อนซึ่งถ่ายเทเข้าสู่ของไหล

w = อัตราการไหลของมวลของของไหลในท่อ

C_p = specific heat ที่ความดันคงที่

T_w = อุณหภูมิของผนังท่อด้านใน

T_i = อุณหภูมิขาเข้าของของไหล

T_o = อุณหภูมิขาออกของของไหล

จาก Newton's law of cooling สามารถเขียนได้ว่า

$$Q = hA(T_w - T_b)_{ln} \qquad ..(2.3.2)$$

โดยที่ h = สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน (heat transfer coefficient)

A = พื้นที่ผิวการถ่ายเทความร้อน

T_b = อุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลภายในท่อ

$(T_w - T_b)_{ln}$ = logarithmic mean temperature difference

$$= \frac{(T_w - T_o) - (T_w - T_i)}{\ln \frac{(T_w - T_o)}{(T_w - T_i)}}$$

จากสมการ (2.3.1) และ (2.3.2) จะได้

$$wC_p(T_o - T_i) = hA(T_w - T_b)_{ln}$$

ดังนั้น

$$h = \frac{wC_p(T_o - T_i)}{A(T_w - T_b)_{ln}}$$

จากปริมาณไร้มิติ (dimensionless number)

$$Nu = hD_H / k$$

โดยที่ Nu = นัสเซลส์นัมเบอร์ (Nusselt number)

D_H = เส้นผ่าศูนย์กลางไฮดรอลิกของท่อ (hydraulic diameter)

k = ค่าความนำความร้อนของของไหล (thermal conductivity)

ดังนั้น

$$Nu = \frac{D_H w C_p (T_o - T_i)}{k\ A\ (T_w - T_b)_{ln}} \quad \ldots(2.3.3)$$

เนื่องจากท่อที่ใช้เป็นท่อวงรี ดังนั้น

จาก $D_H = 4\ B/P$

โดยที่ B = พื้นที่หน้าตัดของท่อวงรี, πab

a = semi-major axis

b = semi-minor axis

P = เส้นรอบรูปของหน้าตัดท่อด้านใน (perimeter), $4aE$

E = complete elliptic integral of the second kind

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin\theta)^{1/2} d\theta$$

e = eccentricity ของท่อวงรี

$$= \sqrt{1 - (b/a)^2}$$

ดังนั้น $D_H = 4(\pi ab)/4aE$

$= \pi b/E$

และจาก A = พื้นที่ผิวการถ่ายเทความร้อน

$A = PL$

L = ความยาวท่อซึ่งมีการถ่ายเทความร้อน

ดังนั้น $A = (4aE)L$

สมการ (2.3.3) สามารถเขียนได้ว่า

$$Nu = \frac{1}{k}\left[\frac{\pi b}{E}\right]\frac{wC_p \quad (T_o - T_i)}{(4aE)L(T_w - T_b)_{ln}} \qquad \ldots(2.3.4)$$

จากปริมาณไร้มิติ (dimensionless number)

จาก $$Re = vD_H/\gamma$$

โดยที่ Re = Reynolds number

v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหล

γ = kinematic viscosity ของของไหล

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$v = Re\gamma/D_H$$

และจาก $w = \rho vB$

โดยที่ w = อัตราการไหลของมวลของของไหล

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

B = พื้นที่หน้าตัดของท่อ

ดังนั้น

$$w = \rho\left[\frac{Re\gamma}{D_H}\right](\pi ab)$$

$$= \rho\left[\frac{Re\gamma}{\frac{\pi b}{E}}\right](\pi ab)$$

หรือ $$w = \rho\gamma aERe \qquad \ldots(2.3.5)$$

นำสมการ (2.3.5) ไปแทนในสมการ (2.3.4)จะได้

$$Nu = \frac{1}{k}\left[\frac{\pi b}{E}\right]\frac{(\rho\gamma aERe)C_p(T_o - T_i)}{(4aE)\ \ L\ \ (T_w - T_b)_{ln}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\rho C_p}{k}\right]\frac{b\gamma Re(T_o - T_i)}{EL\ (T_w - T_b)_{ln}}$$

แต่ $\alpha = k/\rho C_p$ = thermal diffusivity

โดยที่ k = thermal conductivity ของของไหล

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

C_p = specific heat ของของไหลที่ความดันคงที่

ดังนั้น

$$Nu = \frac{\pi b\gamma Re(T_o - T_i)}{4\alpha EL\ (T_w - T_b)_{ln}} \qquad ...(2.3.6)$$

สมการนี้สามารถนำไปหาค่านัสเซลท์นัมเบอร์จากการทดลองได้

2.4 <u>การหาค่า Graetz number โดยการคำนวณจากข้อมูลซึ่งได้จากการทดลอง</u>

จากปริมาณไร้มิติ (dimensionless number)

$$Gz = RePr/(L/D_H) \qquad ...(2.4.1)$$

โดยที่ Gz = เกรต์ซ นัมเบอร์ (Graetz number)

Re = เรย์โนลด์ นัมเบอร์ (Renolds number)

Pr = แพลนด์ นัมเบอร์(Prandtl number)

L = ความยาวของท่อ

D_H = เส้นผ่าศูนย์กลางไฮดรอลิกของท่อ (hydraulic diameter)

จาก $w = \rho v B$

โดยที่ w = อัตราการไหลของมวลของของไหล

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหลในท่อ

B = พื้นที่หน้าตัดของท่อ

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$v = w/\rho B \qquad \ldots(2.4.2)$$

จาก

$$Re = vD_H/\gamma \qquad \ldots(2.4.3)$$

โดยที่ v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหลในท่อ

D_H = เส้นผ่าศูนย์กลางไฮดรอลิกของท่อ

γ = kinematic viscosity ของของไหลในท่อ

นำสมการ (2.4.2) ไปแทนในสมการ (2.4.3) จะได้ว่า

$$Re = \left[\frac{w}{\rho B}\right]\frac{D_H}{\gamma} \qquad \ldots(2.4.4)$$

นำสมการ (2.4.4) ไปแทนในสมการ (2.4.1) จะได้ว่า

$$Gz = \frac{\left[\frac{w}{\rho B}\right]\frac{D_H Pr}{\gamma}}{\left[\frac{L}{D_H}\right]}$$

ดังนั้น

$$Gz = \frac{wPrD_H^2}{\rho B\gamma L} \qquad \ldots(2.4.5)$$

สมการนี้สามารถนำไปหาค่า เกรต์ซ นัมเบอร์ จากการทดลองได้

2.5 การหาค่าอุณหภูมิเฉลี่ย (bulk temperature) ของของไหลขณะกำลังไหลอยู่ในท่อซึ่งมีการถ่ายเทความร้อน โดยการคำนวณจากข้อมูลซึ่งได้จากการทดลอง

เนื่องจากในการคำนวณหาค่าอุณหภูมิแตกต่างเฉลี่ยระหว่างอุณหภูมิของผนังท่อด้านใน และอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลในท่อ ได้ยึดหลักการคำนวณแบบ logarithmic mean temperature difference ดังนั้น จึงสามารถเขียนได้ว่า

จาก

$$T_w - T_b = \frac{(T_w - T_o) - (T_w - T_i)}{\ln \dfrac{(T_w - T_o)}{(T_w - T_i)}} \qquad \ldots(2.5.1)$$

โดยที่

$(T_w - T_b)$ = logarithmic mean temperature difference

T_w = อุณหภูมิของผนังท่อด้านใน

T_b = อุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลในท่อ

T_i = อุณหภูมิของของไหลก่อนเข้าท่อถ่ายเทความร้อน

T_o = อุณหภูมิของของไหลหลังจากออกจากท่อถ่ายเทความร้อนแล้ว

เมื่อจัดรูปสมการ (2.5.1) ใหม่จะได้ว่า

$$T_b = T_w - \frac{T_i - T_o}{\ln \dfrac{(T_w - T_o)}{(T_w - T_i)}} \qquad \ldots(2.5.2)$$

สมการนี้สามารถนำไปหาค่าอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลจากการทดลองได้

2.6 การหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (friction factor) ในท่อโดยการคำนวณจากข้อมูลซึ่งได้จากการทดลอง

รูปที่ 2.3 แสดงแผนผังการวัดความดันสูญเสียของท่อทดสอบ

ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทานในท่อ สามารถหาได้จากสมการของ Darcy - Weisbach ดังนี้

$$h_f = \frac{fLv^2}{D_H 2g} \qquad \ldots(2.6.1)$$

เมื่อ h_f = การสูญเสียความดัน คิดเป็นความสูงของระดับของเหลวในหลอดมาโนมิเตอร์ (manometer)

f = สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของท่อ (friction factor)

L = ระยะห่างของจุดวัดความดันสถิต (static pressure) ของท่อ

D_H = เส้นผ่าศูนย์กลางไฮดรอลิกของท่อ (hydraulic diameter)

v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหลในท่อ

g = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ต้องการหาค่า f ดังนั้น สมการ (2.6.1) สามารถเขียนได้ว่า

$$f = \frac{h_f}{\dfrac{L\,v^2}{D_H 2g}} \qquad \ldots(2.6.2)$$

แต่จาก $w = \rho v B$

โดยที่ w = อัตราการไหลของมวลของของไหล

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

v = ความเร็วเฉลี่ยของของไหลในท่อ

B = พื้นที่หน้าตัดของท่อ

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$v = w/\rho B$$

แทนค่า v ในสมการ (2.6.2) จะได้ว่า

$$f = \frac{h_f}{\dfrac{L}{2gD_H}\left[\dfrac{w}{\rho B}\right]^2} \qquad \ldots(2.6.3)$$

สมการนี้สามารถนำไปหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของท่อ ซึ่งใช้ในการทดลองได้