หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ระเบียบวิธีวิจัย

2.1 การสร้างเลขสุ่ม

2.1.1 การสร้างเลขสุ่มให้มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform distribution) โดยใช้วิธี MULTIPLICATIVE CONGRUENTIAL ดังนี้

$$R_i = R_{i-1}\,(2^P + K) \bmod (2^{31})$$

โดยที่ P เป็นค่าจำนวนเต็มบวกที่มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 30

K เป็นค่าจำนวนเต็มคี่

R_o เป็นค่าเริ่มต้น ซึ่งเป็นค่าจำนวนเต็มคี่

ตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ซึ่งมีค่าระหว่าง 0 กับ 1 หาได้จาก

$$U_i = \frac{R_i}{2^{31}-1}$$

2.1.2 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย = 0 และความแปรปรวน = 1 โดยใช้วิธี direct Transformation ของ Box กับ Muller (1958)

$$X_1 = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2)$$

$$X_2 = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2)$$

ดังนั้นเลขสุ่ม ที่มีการแจกแจงแบบปกติและมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ คือ $\sigma X_i + \mu$ เช่น ถ้าต้องการ $Y \sim N\ (50,100)$ สามารถสร้างได้ดังนี้ คือ

$$Y = 10X_i + 50$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.2 แวเรียนซ์คอมโพเนนท์

2.2.1 แบบจำลองทั่วไป

$$Y = X\beta + U_1\varepsilon_1 + U_2\varepsilon_2 + \ldots + U_{p-1}\varepsilon_{p-1} + U_p\varepsilon_p$$

โดยที่ Y คือ เวคเตอร์ของค่าสังเกต n จำนวน ขนาด nx1

X คือ เมทริกซ์ ขนาด nxq ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบคงที่ในแบบจำลอง ; $q < n$

β คือ เวคเตอร์ขนาด qx1 ของผลกระทบคงที่ที่ไม่ทราบค่า

U_i คือ เมทริกซ์ขนาด nxm_i ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่ม ,

$m_i < n$; $i = 1,2,\ldots,p-1$

ε_i คือ เวคเตอร์ขนาด m_ix1 ของผลกระทบเชิงสุ่ม

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2 I_{m_i})$; $i = 1,2,\ldots,p-1$

U_p คือ identity matrix

ε_p คือ เวคเตอร์ nx1 ของผลกระทบเชิงสุ่ม (ความคลาดเคลื่อน)

$\varepsilon_p \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่

$E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1,\ldots,P$

$Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 I_{m_i}$, $i = 1,\ldots,P$; $\sigma_p^2 = \sigma_\varepsilon^2$; $m_p = n$

$COV(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$; $j = 1,,\ldots,p$

ฉะนั้น

$E(Y) = X\beta$

$$Var(Y) = V = \sum_{i=1}^{P-1} \sigma_i^2 V_i + \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

โดยที่ $V_i = U_i U_i'$, $i = 1, \ldots, P-1$

σ_i^2 , σ_ε^2 เรียกว่า แวเรียนซ์คอมโพเนนท์

2.2.2 <u>แบบจำลองเชิงสุ่มเมื่อข้อมูลมีการแจกแจง 2 ทาง</u>

$$Y = X\beta + U_1\varepsilon_1 + U_2\varepsilon_2 + U_3\varepsilon_3 + U_4\varepsilon_4$$

หรือ $$\underset{\sim}{Y} = X\mu + U_1\underset{\sim}{\alpha} + U_2\underset{\sim}{\beta} + U_3\underset{\sim}{\alpha\beta} + U_4\underset{\sim}{\varepsilon}$$

$\underset{\sim}{Y}$ คือ nxl เวคเตอร์ของค่าสังเกต n จำนวน

X คือ nxl เมทริกซ์ที่สมาชิกเป็น 1

μ คือ ค่าคงที่ที่เป็นค่าเฉลี่ยที่ไม่ทราบค่า

U_i คือ $n x m_i$ เมทริกซ์ ที่สมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่ม , i=1,2,3

U_4 คือ identity matrix

$\underset{\sim}{\alpha}$ คือ $m_1 xl$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม A

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ $m_2 xl$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่ม B

$\underset{\sim}{\alpha\beta}$ คือ $m_3 xl$ เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มร่วม A และ B

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือ nxl เวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มของความคลาดเคลื่อน

โดยที่

$$\underset{\sim}{\alpha} \sim N(0, \sigma_\alpha^2 I_{m_1})$$

$$\underset{\sim}{\beta} \sim N(0, \sigma_\beta^2 I_{m_2})$$

$$\underset{\sim}{\alpha\beta} \sim N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2 I_{m_3})$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$$

ฉะนั้น

$$E(\underset{\sim}{\alpha}) = E(\underset{\sim}{\beta}) = E(\underset{\sim}{\alpha\beta}) = E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{0}$$

$$\mathrm{Var}\ (\underset{\sim}{\alpha}) = \sigma_{\alpha}^{2}\ I_{m_1}$$

$$\mathrm{Var}\ (\underset{\sim}{\beta}) = \sigma_{\beta}^{2}\ I_{m_2}$$

$$\mathrm{Var}\ (\underset{\sim}{\alpha\beta}) = \sigma_{\alpha\beta}^{2}\ I_{m_3}$$

$$\mathrm{Var}\ (\underset{\sim}{\varepsilon}) = \sigma_{\varepsilon}^{2}\ I_{n}$$

$$\mathrm{COV}(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta}) = \mathrm{COV}(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\alpha\beta}) = \mathrm{COV}(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\varepsilon}) = \mathrm{COV}(\underset{\sim}{\beta},\alpha\beta) = \mathrm{COV}(\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{\varepsilon}) = \mathrm{COV}(\underset{\sim}{\alpha\beta},\underset{\sim}{\varepsilon}) = 0$$

$$E(\underset{\sim}{Y}) = X\mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\underset{\sim}{Y}) = V = \sigma_{\alpha}^{2}V_{1} + \sigma_{\beta}^{2}V_{2} + \sigma_{\alpha\beta}^{2}V_{3} + \sigma_{\varepsilon}^{2}I_{n}$$

$$= \Sigma\ \sigma_{i}^{2}V_{i}$$

$$V_{i} = U_{i}U_{i}' \ ; \ i = 1,\ldots,4$$

$$\sigma_{1}^{2} = \sigma_{\alpha}^{2}$$

$$\sigma_{2}^{2} = \sigma_{\beta}^{2}$$

$$\sigma_{3}^{2} = \sigma_{\alpha\beta}^{2}$$

$$\sigma_{4}^{2} = \sigma_{\varepsilon}^{2}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบจำลองเชิงสุ่ม ของการทดลองเมื่อข้อมูลมีการแจกแจง 2 ทางในรูปค่าสังเกต

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\alpha_i \sim N(0, \sigma^2_\alpha) \quad ; \quad i = 1,\ldots,m_1$$

$$\beta_i \sim N(0, \sigma^2_\beta) \quad ; \quad j = 1,\ldots,m_2$$

$$\alpha\beta_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\alpha\beta}) \quad ; \quad m_1 x m_2 = m_3$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon) \quad ; \quad k = 1,\ldots,n_{ij}$$

และ $E(Y) = \mu$

$$Var(Y) = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_\varepsilon$$

ฉะนั้นแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ คือ σ^2_α, σ^2_β , $\sigma^2_{\alpha\beta}$ และ σ^2_ε

2.3 แผนแบบไม่สมดุลย์ (Unbalanced Design)

หมายถึง แผนการทดลองที่มีจำนวนค่าสังเกตไม่เท่ากันในแต่ละ cell

2.4 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Mean Square Error)

$$MSE\ (estimator) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(estimator - Parametor)^2}{k}$$

โดยที่ k = จำนวนครั้งที่ทำการทดลองในแต่ละสถานการณ์

2.5 วิธีการประมาณค่าแวเรียนซ์คอมโพเนนท์

2.5.1 วิธี ANOVA

การประมาณค่าแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ โดยวิธี ANOVA นี้เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากในกรณีที่ข้อมูลมีลักษณะสมดุลย์ ซึ่งหาได้จากการสร้างสมการโดยให้ค่า mean square เท่ากับค่าประมาณของค่าคาดหวังของ mean square ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าประมาณของแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ที่ต้องการประมาณ ดังนี้จากตาราง ANOVA

SOV	DF	SS	MS	EMS
Factor A	a-1	SSA	MSA	$nb\sigma^2_\alpha + n\sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_\varepsilon$
Factor B	b-1	SSB	MSB	$na\sigma^2_\beta + n\sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_\varepsilon$
Interaction AB	(a-1)(b-1)	SSAB	MSAB	$n\sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_\varepsilon$
Error	ab(n-1)	SSE	MSE	σ^2_ε
Total	nab-1	SST		

ดังนั้น ค่าประมาณแวเรียนซ์คอมโพเนนท์คือ

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{(MSA - MSAB)}{bn}$$

$$\hat{\sigma}^2_\beta = \frac{(MSB - MSAB)}{an}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{(MSAB - MSE)}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = MSE$$

ในกรณีข้อมูลไม่สมดุลย์ก็สามารถหาค่าประมาณแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ได้ในทำนองเดียวกัน คือ หาได้จากการสร้างสมการโดยให้ค่า mean square เท่ากับค่าประมาณของค่าคาดหวังของ mean square ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าประมาณของแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ที่ต้องการประมาณ วิธีการนี้ค้นคิดขึ้นโดย Henderson จึงเรียกวิธีการประมาณค่าแบบนี้ว่า เป็นวิธี Henderson's Method 1 หรือวิธี ANOVA ตัวประมาณหาได้ดังนี้

แผนแบบการทดลองแบบสุ่มสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบ 2 ทาง คือ

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \ldots, a$$
$$j = 1, \ldots, b$$
$$k = 1, \ldots, n_{ij}$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$n_{ij} > 0$ สำหรับ $S(i,j)$ cells และ $\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} = N$

ค่าผลบวกกำลังสอง (sum of squares) สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกับกรณีข้อมูลสมดุลย์คือ

$$SSA = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}} - \frac{Y_{...}^2}{n_{..}}$$

$$SSB = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{n_{.j}} - \frac{Y_{...}^2}{n_{..}}$$

$$SSAB = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}} - \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{n_{.j}} + \frac{Y_{...}^2}{n_{..}}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Uncorrected sums of squares คือ

$$T_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}}$$

$$T_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{n_{.j}}$$

$$T_{AB} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

$$T_u = \frac{Y_{...}^2}{n_{..}}$$

$$T_o = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}^2$$

$$SSA = T_A - T_u$$

$$SSB = T_B - T_u$$

$$SSAB = T_{AB} - T_A - T_B + T_u$$

$$SSE = T_o - T_{AB}$$

ค่าคาดหวังหาได้ดังนี้

$$E(SSA) = E(T_A) - E(T_u)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}}\right) - E\left(\frac{Y_{...}^2}{n_{..}}\right)$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk} = n_{i.}\mu + n_{i.}\alpha_i + \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\beta_j + \sum_{j=1}^{b} n_{ij}(\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{i..}$$

$$\frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}} = n_{i.}\mu^2 + n_{i.}\alpha_i^2 + \sum_{j=1}^{b} \frac{n_{ij}^2\beta_j^2}{n_{i.}} + \sum_{j=1}^{b} \frac{n_{ij}^2(\alpha\beta)_{ij}^2}{n_{i.}} + \frac{\varepsilon_{i..}^2}{n_{i.}}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$+ \frac{\sum\limits_{j=1}^{b} \sum\limits_{j' \neq j}^{b} n_{ij}\, n_{ij'}\; \beta_j \beta_{j'}}{n_{i.}} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{b} \sum\limits_{j=j'}^{b} n_{ij}\, n_{ij'} (\alpha\beta)_{ij} (\alpha\beta)_{ij'}}{n_{i.}}$$

$$+ \; 2 \left[\mu n_{i.} \alpha_i + \mu \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \beta_j + \mu \sum_{j=1}^{b} n_{ij} (\alpha\beta)_{ij} + \mu\, \varepsilon_{i..} + \alpha_i \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \beta_j \right.$$

$$+ \; \alpha_i \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, (\alpha\beta)_{ij} + \alpha_i\, {}_{i..} + \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij} \beta_j \right) \left(\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij} (\alpha\beta)_{ij} \right)}{n_{i.}}$$

$$\left. + \; \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij}\, \beta_j \right) {}_{i..}}{n_{i.}} + \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij}\, (\alpha\beta)_{ij} \right) \varepsilon_{i..}}{n_{i.}} \right]$$

ค่าคาดหวังภายใต้แผนแบบการทดลองแบบสุ่ม ผลคูณของ μ กับตัวอื่น ๆ มีค่าเป็น 0

$$E\left(\frac{Y_{i..}^2}{n_i} \right) = n_{i.} \mu^2 + n_{i.} \sigma_\alpha^2 + \sum_{j=1}^{b} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} \sigma_\beta^2 + \sum_{j=1}^{b} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$E\, (T_A) = \sum_{i=1}^{a} E \left(\frac{Y_{i..}^2}{n_{i.}} \right)$$

$$= N\mu^2 + N\sigma_\alpha^2 + \sum_{i=1}^{a} \frac{\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}} \sigma_\beta^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{a} \frac{\sum\limits_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}} \sigma_{\alpha\beta}^2 + a\, \sigma_\varepsilon^2$$

$$Y_{...} = N\mu + \sum_{i=1}^{a} n_{i.} \alpha_i + \sum_{j=1}^{b} n_{.j} \beta_j + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{...}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$E(T_u) = E\left(\frac{Y_{...}^2}{N}\right)$$

$$= N\mu^2 + \frac{\sum_{i=1}^{a} n_{i.}^2}{N}\sigma_\alpha^2 + \frac{\sum_{j=1}^{b} n_{.j}^2}{N}\sigma_\beta^2 + \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{N}\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(SSA) = E(T_A) - E(T_u)$$

$$= N - \left(\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{i.}^2}{N}\right)\sigma_\alpha^2 + \left(\sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}} - \frac{\sum_{j=1}^{b} n_{.j}^2}{N}\right)\sigma_\beta^2$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{N}\right)\sigma_{\alpha\beta}^2 + (a-1)\,\sigma_\varepsilon^2$$

ในทำนองเดียวกัน E(SSB) และ E(SSAB) คือ

$$E(SSB) = N - \left(\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{.j}^2}{N}\right)\sigma_\beta^2 + \left(\sum_{j=1}^{b}\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{ij}^2}{n_{.j}} - \frac{\sum_{i=1}^{a} n_{i.}^2}{N}\right)\sigma_\alpha^2$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{b}\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{ij}^2}{n_{.j}} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{N}\right)\sigma_{\alpha\beta}^2 + (b-1)\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(SSAB) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{i.}^2}{N} - \sum_{j=1}^{b}\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{ij}^2}{n_{.j}}\right)\sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{.j}^2}{N} - \sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}}\right)\sigma_\beta^2$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
012069

$$+ \; N - \left(\sum_{i=1}^{a} \frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{n_{i.}} - \sum_{j=1}^{b} \frac{\sum_{i=1}^{a} n_{ij}^2}{n_{.j}} + \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{N} \right) \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$+ \; (S-a-b+1) \; \sigma_{\varepsilon}^2$$

$$E(SSE) = (N - S) \; \sigma_{\varepsilon}^2$$

ถ้าให้

$$k_1 = \sum_{i=1}^{a} n_{i.}^2$$

$$k_2 = \sum_{j=1}^{b} n_{.j}^2$$

$$k_3 = \sum_{i=1}^{a} \left(\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2 \right) / \, n_{i.}$$

$$k_4 = \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{i=1}^{a} n_{ij}^2 \right) / \, n_{.j}$$

$$k_{23} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2$$

และ $k_r' = k_r / N \; ; \quad r = 1,2,3,4,23$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แล้วตัวประมาณ ANOVA สำหรับแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ ซึ่งหาได้จากการสร้างสมการโดยให้ค่า mean square เท่ากับคาดหวังของ mean square คือ

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = (T_o - T_{AB}) \, / \, (N-S)$$

$$\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\alpha}^2 \\ \hat{\sigma}_{\beta}^2 \\ \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} T_A - T_u - (a-1) \, \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \\ T_B - T_u - (b-1) \, \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \\ T_{AB} - T_A - T_B + T_u - (S-a-b+1) \, \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{โดยที่} \quad P = \begin{bmatrix} N-k_1' & k_3-k_2' & k_3-k_{23}' \\ k_4-k_1' & N-k_2' & k_4-k_{23}' \\ k_1'-k_4 & k_2'-k_3 & N-k_3-k_4+k_{23}' \end{bmatrix}$$

2.5.2 <u>วิธี MAXIMUM LIKELIHOOD (ML)</u>

Maximum Likelihood Estimation เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่นิยมใช้กันมากวิธีหนึ่ง คือเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ที่ทำให้ได้ Likelihood function มีค่าสูงที่สุด และในปี ค.ศ. 1967 Hartley กับ Rao ได้นำวิธี Maximum Likelihood มาใช้ในการประมาณค่าแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ แต่ต้องมีข้อจำกัดว่าค่าประมาณที่ได้ต้องเป็นบวกเสมอ ดังนั้นจึงมีผลทำให้ตัวประมาณ ML เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง (bias) และตัวประมาณ ML สามารถหาได้ดังนี้

จากแบบจำลองในรูปของค่าสังเกตคือ $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

และแบบจำลองในรูปทั่วไป คือ $\underset{\sim}{Y} = X\mu + U_1\underset{\sim}{\alpha} + U_2\underset{\sim}{\beta} + U_3\underset{\sim}{(\alpha\beta)} + U_4\underset{\sim}{\varepsilon}$

$$E(\underset{\sim}{Y}) = X\mu$$

$$Var(\underset{\sim}{Y}) = V = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i^2 V_i$$

โดยที่ $V_i = U_i U_i' \quad ; \quad i = 1,\ldots,4$

$$\sigma_1^2 = \sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_\beta^2$$

$$\sigma_3^2 = \sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$\sigma_4^2 = \sigma_\varepsilon^2$$

สมการสภาวะน่าจะเป็นคือ

$$L(Y;\mu,V) \quad = \quad (2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{Y}-X\mu)' V^{-1}(\underset{\sim}{Y}-X\mu)\right]$$

ให้ $\lambda \quad = \quad \ell nL$

$$\lambda \quad = \quad -\frac{1}{2}\left[n \log 2\pi + \log |V| + (\underset{\sim}{Y} - X\mu)' V^{-1} (\underset{\sim}{Y}-X\mu)\right]$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \quad = \quad X'V^{-1}\underset{\sim}{Y} - (X'V^{-1}X)\mu \quad = \quad 0$$

$$\mu \quad = \quad (X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}\underset{\sim}{Y}) \text{ --- (1)}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma_i^2} \quad = \quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(V^{-1}U_iU_i') + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{Y}-X\mu)' V^{-1}V_iV^{-1}(\underset{\sim}{Y}-X\mu) \quad = \quad 0$$

ให้ $V_i \quad = \quad U_iU_i'$

$$V^{-1} \quad = \quad V^{-1}VV^{-1}$$

$$\therefore\ \mathrm{tr}(V^{-1}U_iU_i') \quad = \quad \mathrm{tr}(V^{-1}V_i)$$

$$= \quad \mathrm{tr}\,(V^{-1}VV^{-1}V_i)$$

$$= \quad \mathrm{tr}\,(V^{-1}(\sum_{j=1}^{4}\sigma_j^2 V_j)V^{-1}V_i)$$

$$= \quad \sum_{j=1}^{4}\sigma_j^2\ \mathrm{tr}\,(V^{-1}V_jV^{-1}V_i)$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{4}\sigma_j^2\ \mathrm{tr}\,(V^{-1}V_jV^{-1}V_i) \quad = \quad (\underset{\sim}{Y}-X\mu)' V^{-1}V_iV^{-1}(\underset{\sim}{Y}-X\mu) \qquad \text{----- (2)}$$

$$\begin{bmatrix} tr(V^{-1}V_1V^{-1}V_1) & tr(V^{-1}V_2V^{-1}V_1) & tr(V^{-1}V_3V^{-1}V_1) & tr(V^{-1}V_4V^{-1}V_1) \\ tr(V^{-1}V_1V^{-1}V_2) & tr(V^{-1}V_2V^{-1}V_2) & tr(V^{-1}V_3V^{-1}V_2) & tr(V^{-1}V_4V^{-1}V_2) \\ tr(V^{-1}V_1V^{-1}V_3) & tr(V^{-1}V_2V^{-1}V_3) & tr(V^{-1}V_3V^{-1}V_3) & tr(V^{-1}V_4V^{-1}V_3) \\ tr(V^{-1}V_1V^{-1}V_4) & tr(V^{-1}V_2V^{-1}V_4) & tr(V^{-1}V_3V^{-1}V_4) & tr(V^{-1}V_4V^{-1}V_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \\ \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{Y} - X\mu)' V^{-1}V_1V^{-1}(\underset{\sim}{Y} - X\mu) \\ (\underset{\sim}{Y} - X\mu)' V^{-1}V_2V^{-1}(\underset{\sim}{Y} - X\mu) \\ (\underset{\sim}{Y} - X\mu)' V^{-1}V_3V^{-1}(\underset{\sim}{Y} - X\mu) \\ (\underset{\sim}{Y} - X\mu)' V^{-1}V_4V^{-1}(\underset{\sim}{Y} - X\mu) \end{bmatrix} \qquad \text{--------(3)}$$

เนื่องจากสมการที่ (2) หรือ (3) ไม่สามารถแก้สมการหาคำตอบได้โดยตรง จึงต้องใช้วิธีการประมาณค่าสมการที่ (2) หรือ (3) ซึ่งมีวิธีการประมาณหลายวิธีคือ Newton-Raphson, Method of Scoring , W-transformation, STEPEST ASCENT และ Successive approximation ในที่นี้จะเลือกใช้วิธี Successive approximation ซึ่งจะต้องมีค่าสมมติเบื้องต้นสำหรับแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ แทนลงในสมการที่ (1) แล้วแก้สมการหาค่า μ ได้ จากนั้นก็นำค่า μ ที่ได้แทนลงในสมการที่ (2) ก็จะสามารถหาค่าประมาณของแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ได้ และจะกระทำซ้ำ ๆ กันต่อไปโดยนำค่าประมาณของแวเรียนซ์-คอมโพเนนท์ที่ได้เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป แต่ถ้าค่าประมาณตัวใดมีค่าน้อยกว่าศูนย์ จะให้ค่าประมาณตัวนั้นมีค่าเป็นศูนย์แทนก่อนที่จะเริ่มต้นรอบใหม่ กระทำซ้ำ ๆ กันไปจนกว่าจะได้ค่าประมาณที่ทำให้ค่าของสมการสภาวะน่าจะเป็นมีค่าน้อยกว่าค่าของสมการสภาวะน่าจะเป็นสูงที่สุด 2 ค่า และค่าประมาณที่ได้ก็คือค่าประมาณที่ทำให้ค่าของสมการสภาวะน่าจะเป็นสูงที่สุดนั่นเอง

2.5.4 วิธี MINIMUM NORM QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR (MINQUE) และวิธี MINIMUM VARIANCE QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR (MIVQUE)

ทั้ง 2 วิธีนี้ C RADHAKRISHNA RAO ได้คิดขึ้นสำหรับการประมาณค่าแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ในแผนการทดลองทุกรูปแบบ ทั้งสองวิธีนี้มีข้อแตกต่างกันเล็กน้อย คือ วิธี MINIMUM NORM QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR นั้น ไม่จำเป็นต้องทราบการกระจายของข้อมูล แต่วิธี MINIMUM VARIANCE QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR นั้นจำเป็นต้องทราบการกระจายของข้อมูลว่ามีการกระจายเป็นปกติ ฉะนั้นภายใต้การแจกแจงแบบปกติ ทั้งสองวิธีนี้จะให้ผลเหมือนกัน[1] วิธีการประมาณค่าโดยวิธี MINIMUM VARIANCE QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR ดังนี้

จากแบบจำลองทั่วไป

$$Y = X\mu + U_1\varepsilon_1 + \ldots + U_{k-1}\varepsilon_{k-1} + U_k\varepsilon_k$$

$$E(Y) = X\mu$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 V_i$$

โดยที่ $V_i = U_iU_i' \; ; \; i = 1,\ldots,k$

ต้องการประมาณค่า linear combination ของแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ $p_1\sigma_1^2+\ldots+p_k\sigma_k^2$ ด้วย quadratic function $Y'AY$ ซึ่ง $Y'AY$ จะต้องมีคุณสมบัติของความไม่เอนเอียง INVARIANCE และมีแวเรียนซ์น้อยที่สุด ดังนั้นจะต้องมีข้อกำหนดว่า A เป็นเมทริกซ์ที่

---

[1] Ibid, P.48.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$AX = 0$ และ $tr(AV_i) = p_i$ แล้วจะได้ว่าค่า MIVQUE ของ $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2$ คือ $S^{-}q$

S เป็น $k \times k$ เมตริกซ์ที่สมาชิกตัวที่ ij คือ S_{ij}

$$S_{ij} = tr(QV_iQV_j)$$

$$Q = V^{-1} - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}$$

S^{-} หมายถึง generalized inverse ของ S

q เป็น $k \times 1$ เวคเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวคือ $\underset{\sim}{Y}'QV_i\underset{\sim}{Q}Y$

$$\therefore \quad S\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 = q$$

หรือ
$$\sum_{i=1}^{k} tr(QV_iQV_j)\,\sigma_j^2 = \underset{\sim}{Y}'QV_iQ\underset{\sim}{Y} \quad ; i = 1,\ldots,k \quad \text{------}(6)$$

กรณี แผนการทดลองเป็นแบบสุ่มมีการจำแนก 2 ทาง จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{4} tr(QV_iQV_j)\,\hat{\sigma}_j^2 = \underset{\sim}{Y}'QV_iQ\underset{\sim}{Y} \quad ; i = 1,\ldots,4 \quad \text{-------}(7)$$

หรือ

$$\begin{pmatrix} tr(QV_1QV_1) & tr(QV_1QV_2) & tr(QV_1QV_3) & tr(QV_1QV_4) \\ tr(QV_2QV_1) & tr(QV_2QV_2) & tr(QV_2QV_3) & tr(QV_2QV_4) \\ tr(QV_3QV_1) & tr(QV_3QV_2) & tr(QV_3QV_3) & tr(QV_3QV_4) \\ tr(QV_4QV_1) & tr(QV_4QV_2) & tr(QV_4QV_3) & tr(QV_4QV_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\beta^2 \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{Y}'QV_1Q\underset{\sim}{Y} \\ \underset{\sim}{Y}'QV_2Q\underset{\sim}{Y} \\ \underset{\sim}{Y}'QV_3Q\underset{\sim}{Y} \\ \underset{\sim}{Y}'QV_4Q\underset{\sim}{Y} \end{pmatrix}$$

------------- (8)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แก้สมการที่ (7) หรือ สมการที่ (8) โดยให้ค่าสมมติเบื้องต้น (prior) สำหรับแวเรียนซ์-คอมโพเนนท์แต่ละตัว ก็จะสามารถหาค่าประมาณของแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ได้ ถ้าค่าประมาณตัวใดติดลบจะให้ค่าประมาณนั้นมีค่าเป็น 0 แทน

2.5.5 วิธี ITERATED MINIMUM NORM QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR และวิธี ITERATED MINIMUM VARIANCE QUADRATIC UNBIASED ESTIMATOR (I-MINQUE และ I-MIVQUE)

ทั้ง 2 วิธี เป็นวิธีที่ทำต่อจากวิธี MINQUE หรือวิธี MIVQUE โดยจะทำรอบใหม่ โดยให้ค่าประมาณที่ได้จากวิธี MIVQUE เป็นค่าสมมติเบื้องต้นในรอบถัดไป แต่ถ้าการประมาณในรอบใดมีค่าแวเรียนซ์คอมโพเนนท์ตัวใดติดลบ จะให้ค่าประมาณตัวนั้นมีค่าเป็นศูนย์ก่อนที่จะเริ่มรอบใหม่ และจะกระทำซ้ำ ๆ กันไปจนกว่าจะได้ค่าประมาณของแวเรียนซ์-คอมโพเนนท์ทุกคอมโพเนนท์มีค่าคงที่ ในที่นี้จะถือว่าค่าความแตกต่างระหว่างแต่ละคอมโพเนนท์ในรอบที่ i กับรอบที่ i+1 น้อยกว่า 0.05จะถือว่าค่าประมาณที่ได้นั้นคงที่แล้ว

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย