บทที่ 2

การสร้างกลไกวิบัติแบบอิสระโดยอัตโนมัติ
(Automatic Generation of Independent Mechanism)

สมการสมดุลย์จะถูกพัฒนาเพื่อไปใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธีพลาสติก สมการนี้หาได้จากการพิจารณาสมการสมดุลย์ของแต่ละกลไกวิบัติแบบอิสระของโครงสร้าง โดยที่หลักการหากลไกวิบัติแบบอิสระโดยอัตโนมัติ หาจากหลักการของ Watwood (4)

2.1 <u>ข้อสมมุติฐาน</u> (Assumptions)

ข้อสมมุติฐานทั่วไปเหมือนทฤษฎีพลาสติกอย่างง่าย (Simple Plastic Theory) แต่จะเน้นที่สำคัญมีดังนี้

1. คำนึงเฉพาะการเปลี่ยนรูปร่างอันดับที่หนึ่ง (First Order Deformation) กล่าวคือ สภาวะสมดุลย์สามารถคำนวณได้จากรูปร่างของโครงสร้างเดิม (Undeformed Structure)

2. โครงสร้างสามารถรับน้ำหนักบรรทุกประลัยได้ โดยไม่เกิดการสูญเสียเสถียรภาพ (Instability)

3. ข้อต่อ (Connections) ต่าง ๆ ในโครงสร้างมีความแข็งแรงพอที่จะยอมให้การกระจายใหม่ของโมเมนต์ (Redistribution of Moment) เกิดขึ้นได้อย่างสมบูรณ์

2.2 <u>สมการสมดุลย์ทั่วไป</u> (General Equilibrium Equations)

ในขณะที่โครงสร้างเกิดกลไกวิบัติ (Mechanism) ทุกชิ้นส่วนในโครงสร้างจะเกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง (Rigid Body) ยกเว้นตำแหน่งที่เกิดจุดหมุนพลาสติก

(Plastic Hinge) หรือชิ้นส่วนที่เกิดกลไกวิบัติโดยแรงในแกน (Axial Collapse) ดังนั้นจึงต้องหาสมการซึ่งบังคับ (Enforce) ให้เกิดการเคลื่อนที่แบบนี้ได้

ก. <u>การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว</u>

(Local Coordinate System)

พฤติกรรมของโครงข้อแข็งระนาบสามารถอธิบายได้ ด้วยการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวซึ่งผ่านแนวแกนของชิ้นส่วน 6 ตัว คือ การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในแนวสองแกน (แกน X , Y) และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนรอบแนวตั้งฉากกับระนาบ (แกน z) ดังแสดงในรูปที่ (2.1)

รูปที่ 2.1 การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

จากการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด (Total Displacement) = การเปลี่ยนรูปร่าง (Deformation) + การเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแข็ง (Rigid Body Displacement)

พิจารณารูปที่ 2.1 จะมีการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวัตถุแข็งที่อิสระ 3 แบบ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้น 2 แบบ และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุน 1 แบบ

รูปที่ 2.2 ก. การเปลี่ยนรูปร่าง (อิสระ) ในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

ข. การเปลี่ยนตำแหน่งในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

เลือกการเปลี่ยนรูปร่างอิสระ (Independent Deformation) ดังแสดงในรูปที่ 2.2 (ก) คือการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้น (การเปลี่ยนรูปร่างจากแรงในแนวแกน) การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนเทียบกับคอร์ดที่ปลาย i และการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุนเทียบกับคอร์ดที่ปลาย j พิจารณารูปที่ 2.2 (ข) สามารถเขียนการเปลี่ยนรูปร่าง (อิสระ) ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวได้ดังนี้

การเปลี่ยนตำแหน่งในแกน X

$$V_1 = -\bar{V}_1 + \bar{V}_4$$

การหมุนรอบปลาย i

$$V_2 = \bar{V}_3 + (\bar{V}_5 - \bar{V}_2)/L = (-\bar{V}_2)/L + \bar{V}_3 + \bar{V}_5/L$$

การหมุนรอบปลาย j

$$V_3 = \bar{V}_6 + (\bar{V}_5 - \bar{V}_2)/L = -\bar{V}_2/L + \bar{V}_5/L + \bar{V}_6$$

สามารถเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้ดังนี้ คือ

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{V}_4 \\ \bar{V}_5 \\ \bar{V}_6 \end{bmatrix}$$

หรือเขียนในรูปสัญญลักษณ์ได้

$$V_p = \bar{a}_p \bar{V}_p \qquad (2.1)$$

โดยที่ V_p = เวกเตอร์การเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วนย่อย P ในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

$\bar{V}_p$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อย P ในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

a_p = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งเป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วนย่อย p ในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

รวมสมการที่ 2.1 สำหรับทุกชิ้นส่วนในโครงสร้างได้

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_J \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bar{a}_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \bar{a}_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & \bar{a}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{a}_J
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{V}_J \end{bmatrix}
$$

หรือเขียนเป็นสัญญลักษณ์ได้

$$V = \bar{a}\,\bar{V} \qquad (2.3)$$

ข. <u>การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล</u>

(Global Coordinate System)

เนื่องจากระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวของชิ้นส่วนแต่ละอันในทิศทางต่าง ๆ กัน จำเป็นต้องนิยามการเปลี่ยนตำแหน่งของแต่ละชิ้นส่วนในระบบแกนร่วมกัน ในที่นี้ใช้ระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล พิจารณารูปที่ 2.3 (ก.) 2.3 (ข.) แสดงระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวและระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล โดยที่ θ เป็นมุมวัดจากระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลไปยังระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแกนทั้งสองได้ โดยใช้หลักการแปลงแกน (Transformation of Axes) โดยใช้ทิศทางโคซายน์ (Direction Cosines) ได้

โดยที่ l_1 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน XX = $\cos\theta$

m_1 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน YX = $\cos(90 - \theta) = \sin\theta$

l_2 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน XY = $\cos(90 + \theta) = -\sin\theta$

m_2 = โคซายน์แสดงทิศทางของแกน YY = $\cos\theta$

ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$\bar{V}_p = \begin{bmatrix} \bar{V}_p^{\,i} \\ \bar{V}_p^{\,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} \bar{\bar{V}}_p^{\,i} \\ \bar{\bar{V}}_p^{\,j} \end{bmatrix} = Q_p \, \bar{\bar{V}}_p \qquad (2.4)$$

โดยที่ $\lambda_p = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{\bar{V}}_p$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อย p ในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล

Q_p = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อย p ในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล เป็นระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว

รวมสมการที่ 2.4 สำหรับทุกชิ้นส่วน J ในโครงสร้างได้

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \cdot \\ \bar{V}_{J-1} \\ \bar{V}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & Q_{J-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & Q_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{V}}_1 \\ \bar{\bar{V}}_2 \\ \cdot \\ \bar{\bar{V}}_{J-1} \\ \bar{\bar{V}}_J \end{bmatrix}$$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้

$$\bar{V}_p = Q \, \bar{\bar{V}} \qquad (2.5)$$

ค. <u>ดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่</u> (Displacement Degree Of Freedom)

ชิ้นส่วนย่อยที่ประกอบกันเป็นโครงสร้างเมื่อเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งต้องสอดคล้อง (Compatibility) กับของชิ้นส่วนย่อยอื่นที่มีประกอบกันที่จุดต่อนั้นและต้องสอดคล้องกับสภาพ

ขอบ ดังนั้นจึงต้องเขียนความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลกับดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่ซึ่งจะมี 3 ตัวต่อหนึ่งข้อต่อยกเว้นข้อต่อซึ่งถูกบังคับ (Constraint) ซึ่งจะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{a}}\, r \qquad (2.6)$$

โดยที่ r = เวกเตอร์ดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่

$\bar{\bar{a}}$ = เมตริกซ์แปลงจากเวกเตอร์ดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่เป็นเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลเมตริกซ์ a อาจเรียกว่าเมตริกซ์สอดคล้อง (Compatibility Matrix)

จากสมการที่(2.3),(2.4) และ(2.6) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนรูปร่างกับดีกรีของความอิสระในการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$V = \bar{a}\bar{V} = \bar{a}Q\bar{\bar{a}}r \qquad (2.7)$$

หรือ

$$V = ar \qquad (2.8)$$

$$a = \bar{a}Q\bar{\bar{a}} = \text{เมตริกซ์แปลงการเปลี่ยนตำแหน่ง} \qquad (2.9)$$

ขนาดของเมตริกซ์ a เท่ากับ $(3m \times n)$ โดยที่ m คือจำนวนชิ้นส่วนและ n คือดีกรีของความอิสระ

จากสมการที่ (2.7) $V = \bar{a}Q\bar{\bar{V}}$

$$
\bar{a}Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

จะได้

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta/L & -\cos\theta/L & 1 & -\sin\theta/L & \cos\theta/L & 0 \\ \sin\theta/L & -\cos\theta/L & 0 & -\sin\theta/L & \cos\theta/L & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \bar{\bar{V}}_1 \\ \bar{\bar{V}}_2 \\ \bar{\bar{V}}_3 \\ \hline \bar{\bar{V}}_4 \\ \bar{\bar{V}}_5 \\ \bar{\bar{V}}_6 \end{array}\right] \qquad (2.10)
$$

สมการที่ 2.10 เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์การเปลี่ยนรูปร่างในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัว ($\bar{V}_P$) กับเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล ($\bar{\bar{V}}_P$) ซึ่งอาจเรียกว่าสมการความสอดคล้องหรือสมการการเคลื่อนที่ (Compatibility or Kinematics Equations) ของชิ้นส่วนย่อยสำหรับข้อแข็งในระนาบ ส่วนเมตริกซ์ $\bar{a}$ พิจารณาจากสภาวะความต่อเนื่อง (Continuity) ของการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายชิ้นส่วนแต่ละอันกับข้อต่อโดยพิจารณาทีละข้อต่อว่ามีชิ้นส่วนย่อยอันไหนบ้างมาต่อที่ข้อต่อนั้นแทนการเขียนเมตริกซ์ a อย่างชัดเจน

2.3 หลักการปลดในชิ้นส่วนย่อย (Release in a Member)

ก. รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน (Include Axial Collapse Mechanism)

การหากลไกวิบัติทำได้โดยให้การเปลี่ยนรูปร่าง (V) ในสมการที่ (8) เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$ar = 0 \qquad (2.11)$$

แต่สมการที่ (2.11) เราไม่สามารถหาคำตอบได้เว้นเสียแต่โครงสร้างเกิดกลไกวิบัติแล้วเท่านั้น และถ้าพิจารณาในแง่พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) สมการที่ 2.11 ก็ไม่สามารถหาคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์หมดได้เช่นกัน เพราะมีสมการ (3m) มากกว่าตัวไม่ทราบค่า (n)

เนื่องจากกลไกวิบัติจะเกิดขึ้นไม่ได้ ถ้าไม่เกิดจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) หรือการวิบัติโดยแรงในแนวแกน (Axial Collapse) ดังนั้น จึงใส่จุดหมุนที่แต่ละปลายของทุกชิ้นส่วนย่อยในโครงสร้าง และตัดขาดชิ้นส่วนย่อยออกจากกัน (ในกรณีเฉพาะการวิบัติโดยแรงในแนวแกน) ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ซึ่งเป็นการปลดการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วนย่อยด้วย ดังนั้นเมื่อใส่จุดหมุนที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนย่อยและตัดให้ชิ้นส่วนย่อยแยกจากกันแล้ว ชิ้นส่วนย่อยในโครงสร้างจะเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งและหมุนรอบจุดหมุนของแต่ละปลายและยืดหรือหดตามแนวแกนชิ้นส่วนย่อย เมื่อกลไกวิบัติถูกค้นพบ

ในการทำให้ชิ้นส่วนย่อยเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเป็นระบอบนั้น แต่ละชิ้นส่วนย่อยจะถูกปลด 3 ตัว คือ ใส่จุดหมุนแต่ละปลายของชิ้นส่วนย่อยและตัดขาดสิ้นส่วนย่อย (ในทิศทางแรงในแนวแกน) ข้างปลายด้านไกล (ปลาย j) ออกจากข้อต่อ ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ค. พึงสังเกตุว่าการปลดจะเท่ากับการเพิ่มดีกรีของความอิสระพิเศษ (Extra Degree of Freedom) ของชิ้นส่วนย่อยด้วย

รวมสมการที่ (2.5) และ (2.6) เข้าด้วยกันจะได้

$$\bar{V} = Q\bar{\bar{V}} = Q\bar{\bar{a}}r = Gr \qquad 2.12$$

โดยที่ $G = Q\bar{\bar{a}}$

การปลดจะทำในระบบโคออร์ดิเนตประจำตัวดังนี้ ให้แถวของเมตริกซ์ G ของแต่ละ

ชิ้นส่วนย่อยซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่ง $\bar{V}_3$, $\bar{V}_4$ และ $\bar{V}_6$ (ดูรูปที่ 2.1) ถูกแทนที่ด้วยศูนย์ซึ่งเท่ากับปลดให้สอดคล้องกับดีกรีของความอิสระ และเพิ่มแนวตั้งของเมตริกซ์ G โดยใส่หนึ่งตรงแถวที่ถูกแทนที่ด้วยศูนย์ ดังนั้นเมตริกซ์ r จะขยายเพิ่มขึ้นด้วยตามแนวตั้งที่เพิ่มให้กับเมตริกซ์ G ซึ่งเท่ากับเป็นการบังคับระดับขั้นความเสรี ในการปลดชิ้นส่วนให้ไปรวมกับระดับขั้นความเสรีภายนอก (4)

ตัวอย่างเมื่อมีการปลดในชิ้นส่วนโดยรวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกนด้วย เมื่อทำตามหลักการที่กล่าวมา สมการที่ (2.10) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0^{*} & 0^{*} & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0^{*} & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 0 \\ (\sin\theta)/L & (-\cos\theta)/L & 0 & (-\sin\theta)/L & (\cos\theta)/L & 0^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

โดยเครื่องหมาย * หมายถึง ตัวที่เปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับสมการที่ (2.10) และจะได้ดีกรีความอิสระพิเศษที่เพิ่มขึ้นสัมพันธ์กับการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ให้เมตริกซ์ G ที่ดัดแปลงและขยายเพิ่มเป็น G_1 และเมตริกซ์ r ที่ขยายเพิ่มขึ้นเป็น r_e แทนค่าเมตริกซ์ G_1 และ r_e ในสมการที่ 2.8 จะได้

$$V = a\bar{G}_1 r_e = a_1 r_e \quad (2.15)$$

โดยที่เมตริกซ์ r_e คือดีกรีของความอิสระภายนอกบวกด้วยจำนวนการปลดในชิ้นส่วน(สามเท่าของชิ้นส่วน)

จากสมการที่ (2.15) ขณะนี้สามารถให้ V เท่ากับศูนย์และหาคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์หมดของ r_e ได้ นั่นคือ

$$a_1 r_e = 0 \tag{2.16}$$

โดยที่ขนาดของเมตริกซ์ a_1 คือ (3m) x (n + 3m) พึงสังเกตุว่ามีจำนวนตัวไม่ทราบค่า (n + 3m) มากกว่าจำนวนสมการ (3m)

ข. <u>ไม่รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน</u> (Not Include Axial Collapse Mechanism)

ในการวิเคราะห์โครงเหล็กข้อแข็งในระนาบโดยวิธีพลาสติกส่วนใหญ่จะไม่คิดกลไกวิบัติ - โดยแรงในแนวแกน ดังนั้นจึงกำจัดดีกรีของอิสระพิเศษซึ่งสอดคล้องกับกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน (4) หลักการจะเหมือนข้างต้นทุกประการ ยกเว้นเพียงการปลดในชิ้นส่วนย่อย โดยปลดเฉพาะการหมุนที่ปลายของชิ้นส่วนย่อยซึ่งสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่ง V_3 และ V_6 เท่านั้น (ดูรูปที่ 2.1) ดังนั้นเมตริกซ์ a_1 จะเปลี่ยนไปและลดขนาดเป็น (3m) x (n + 2m) และสมการที่ (2.13) และ (2.14) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta/L & -\cos\theta/L & 0^* & -\sin\theta/L & -\cos\theta/L & 0 \\ \sin\theta/L & -\cos\theta/L & 0 & -\sin\theta/L & -\cos\theta/L & 0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{V}}_1 \\ \bar{\bar{V}}_2 \\ \bar{\bar{V}}_3 \\ \bar{\bar{V}}_4 \\ \bar{\bar{V}}_5 \\ \bar{\bar{V}}_6 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\text{และ} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

ในการวิจัยนี้จะไม่รวมกลไกวิบัติโดยแรงในแนวแกน

2.4 <u>การหาคำตอบของสมการ</u> (Equation Solution)

จากสมการที่ (2.16) สดมภ์เมตริกซ์ (column matrix) r_e มีชื่อว่า เคอเนล (Kernel) ของเมตริกซ์ a_1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฐานอิสระ (independent bases) ได้หรือคำตอบของ r_e สามารถหาได้จากการรวมกันเชิงเส้นของฐานอิสระ โดยจำนวนฐานอิสระเท่ากับจำนวนกลไกวิบัติแบบอิสระซึ่งเท่ากับผลต่างของตัวไม่ทราบค่า

$(n + 2m) - (3m) = n-m$

การหาฐานอิสระ ทำได้โดยการกำจัดแบบเก๊าส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination) จน a_1 อยู่ในแบบมาตรฐาน เว้นเสียแต่เป็นการกระทำตามสดมภ์ (Column Operations) แทนการกระทำตามแนวแถว ตามแบบมาตรฐานให้เมตริกซ์ a_1 มีขนาด m x n (โดยที่ n มีค่ามากกว่า m) จัดอยู่ในแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$Kr_e = 0 \qquad (2.19)$$

โดยที่

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{m สดมภ์} & \text{n-m สดมภ์} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & d_{1,m+1} & d_{1,m+2} & . & . & d_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & d_{2,m+1} & d_{2,m+2} & . & . & d_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & d_{m,m+1} & d_{m,m+2} & . & . & d_{m,n} \end{array}\right] \end{array} \qquad (2.20)$$

หลังจากวิธีการกำจัดแบบเก๊าส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination) สัมประสิทธิ์ d_{ij} ก็จะได้รับออกมา สมการ (2.20) เทียบเท่ากับ a_1

แทนค่า r_e $=(r_1, r_2, \ldots\ldots r_m \;\; r_{m+1} \ldots\ldots r_n)$ เข้าไปในสมการ (2.19) จะเขียนได้รูปใหม่ในรูป

$$
\begin{array}{llllllll}
r_1 = -d_{1,m+1} \times r_{m+1} & -d_{1,m+2} \times r_{m+2} & - & . & . & -d_{1,n} \times r_n & & \\
r_2 = -d_{2,m+1} \times r_{m+1} & -d_{2,m+2} \times r_{m+2} & - & . & . & -d_{2,n} \times r_n & & \\
. \quad . & . \quad . & . & . & . & . & & (2.21) \\
. \quad . & . \quad . & . & . & . & . & & \\
r_m = -d_{m,m+1} \times r_{m+1} & -d_{m,m+2} \times r_{m+2} & - & . & . & -d_{m,n} \times r_n & &
\end{array}
$$

จัดรูปใหม่ในรูปสมการเมตริกซ์จะได้

$$
\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ r_m \\ r_{m+1} \\ . \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-d_{1,m+1} \times r_{m+1} & -d_{1,m+2} \times r_{m+2} & & . & . & -d_{1,n} \times r_n \\
-d_{2,m+1} \times r_{m+1} & -d_{2,m+2} \times r_{m+2} & & . & . & -d_{2,n} \times r_n \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
-d_{m,m+1} \times r_{m+1} & -d_{m,m+2} \times r_{m+2} & . & . & . & -d_{m,n} \times r_n \\
r_{m+1} & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & r_{n-1} & . \\
0 & 0 & . & . & . & r_n
\end{bmatrix}
\quad (2.22)
$$

หรือ

$$
\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_m \\ r_{m+1} \\ r_{m+2} \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix}
= r_{m+1} \begin{bmatrix} -d_{1,m+1} \\ -d_{2,m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ -d_{m,m+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ r_{m+2} \begin{bmatrix} -d_{1,m+2} \\ -d_{2,m+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ -d_{m,m+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ \ldots\ldots\ldots + r_n \begin{bmatrix} -d_{1,n} \\ -d_{2,n} \\ \cdot \\ \cdot \\ -d_{m,n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\tag{2.23}
$$

สมการที่ (2.23) สมการเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ

$$r_e = r_{m+1}e_1 + r_{m+2}e2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r_n e_{n-m} \tag{2.24}$$

โดยที่

e_1, e_2, e_3,........และ e_{n-m} คือสดมภ์เมตริกซ์ทั้งหมด เมตริกซ์ฐานอิสระ - สามารถแสดงได้ในรูปสมการใหม่ คือ

$$r_e = (e_1 , e_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots e_{n-m}) \; r_x = E_1 r_x \tag{2.25}$$

โดยที่

$$r_x = (r_{m+1} \quad r_{m+2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots r_n)$$

และ

$$E_1 = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e_{n-m})$$

โดยที่ E_1 คือ เมตริกซ์ฐานอิสระหรือ คือเมตริกซ์การเกิดกลไกวิบัติ โดยที่แต่ละสดมภ์แทนการเกิดกลไกวิบัติแบบอิสระ และ r_x คือ สดมภ์เมตริกซ์ขนาดการเปลี่ยนรูปร่างกลไกวิบัติ

(Column Matrix of Mechanism Deformation Amplitudes)

จากสมการที่ (2.16) และ (2.25) สามารถเขียนได้ว่า

$$a_1 r_e \quad = \quad a_1 E_1 r_x \quad = \quad 0$$

แต่ r_x จะไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$a_1 E_1 \quad = \quad 0 \qquad (2.26)$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า ไม่มีชิ้นส่วนใด ๆ ในโครงสร้างซึ่งมีการปลด (Released Structure) มีการเปลี่ยนรูปร่างจากกลไกวิบัติแบบอิสระ

เนื่องจากดีกรีของความอิสระภายนอก (r) เป็นสับเซ็ทของดีกรีของความอิสระซึ่งขยายออก (Extended Degree of Freedom , r_e) ดังนั้นแถวของ E_1 ซึ่งสอดคล้องกันสามารถตัดตอนมา (Extract) เฉพาะดีกรีของความอิสระภายนอกเริ่มแรกในการอธิบายกลไกวิบัติ ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$r \;=\; E r_x \qquad (2.27)$$

ซึ่งกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนตำแหน่งในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัล สามารถจะหาได้จากการรวมกันเชิงเส้นของเวกเตอร์อิสระซึ่งสัมประสิทธิ์สอดคล้องกับ r_x

2.5 <u>การคำนวณงานภายนอกและงานภายใน</u> (Calculation of External and Internal Works)

หลักการของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งสมมติ (Principle Of Virtual Displacement) กล่าวว่า โครงสร้างอยู่ในสถานะสมดุลย์ภายใต้แรงกระทำที่กำหนด ถ้า

ในการขยับให้โครงสร้างเคลื่อนที่ด้วยระยะสมมติใด ๆ (du) ออกไปจากสถานะการเปลี่ยนรูปร่าง ซึ่งสอดคล้องทางเรขาคณิตแล้ว งาน (สมมติ) ภายนอกเท่ากับงาน (สมมติ) ภายใน (ความเครียดสมมติ) ทฤษฎีของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติให้ใช้เงื่อนไขของการสมดุลย์โดยไม่ขึ้นกับชนิดของวัสดุ

ก. <u>งานภายนอก</u> (External Work)

งานกระทำโดยแรงภายนอกระหว่างเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งของแบบอิสระ สามารถหาได้ดังนี้

$$\text{งานภายนอก} = P^t r = P^t E r_x \qquad (2.28)$$

โดยที่ P เท่ากับเมตริกซ์สดมภ์ของแรงภายนอกซึ่งสัมพันธ์ (Associate) กับดีกรีอิสระภายนอก

ข. <u>งานภายใน</u> (Internal Work)

ก่อนจะหางานกระทำโดยแรงภายใน จะต้องกำหนดให้มีการเปลี่ยนรูปร่างของแต่ละชิ้นส่วนย่อยในโครงสร้างซึ่งไม่มีการปลด (Unreleased Structure) จากการรวมกันเชิงเส้นของกลไกวิบัติแบบอิสระจากสมการที่ (2.8) และ (2.7) สามารถเขียนได้ว่า

$$V = ar = aEr_x = c^t r_x \qquad (2.29)$$

โดยที่ $C^t = aE$ คือ เมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระโดยที่แต่ละสดมภ์คือกลไกวิบัติแบบอิสระ 1 กลไก กล่าวว่าได้ว่าเมตริกซ์การเปลี่ยนรูปร่าง (V) อธิบายในระบบโคออร์ดิเนตโกลบัลได้ว่าเกิดจากเมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระ (C^t) จะมีเฉพาะจุดหมุนพลาสติกที่ปลายของชิ้นส่วน

ย่อย

ให้ M เท่ากับ สดมภ์เมตริกซ์ของแรงดัดโมเมนต์ภายใน (Column Matrix Internal Moments) ที่ปลายแต่ละข้างของชิ้นส่วนย่อย สามารถหางานภายในได้ดังนี้

งานภายใน $= M^{t} V = M^{t}aEr_{x}$

จากหลักการของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติเราจะได้

งานภายนอก = งานภายใน

$$P^{t} Er_{x} = M^{t} aEr_{x}$$

หรือ

$$P^{t} E = M^{t} aE$$

ให้ $P_{o}^{t} = P^{t} E$ และจาก $C^{t} = aE$ (2.30)

จะได้สมการที่ (2.30) เป็น

$$P_{o}^{t} = M^{t}C^{t}$$

หรือ $P_{o} = CM$ (2.31)

สมการที่ 2.30 และ 2.31 คือสมการของการสมดุลย์ โดยที่ P_{o}^{t} คือ เมตริกซ์งานภายนอก (External Work Matrix) = $P^{t}E$, C^{t} คือ เมตริกซ์กลไกวิบัติแบบอิสระหรือคือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์สมการสมดุลย์ โดยที่แต่ละชิ้นส่วนย่อยขึ้นกับรูปร่างของโครงสร้างเดิม (Undeformed Structure) แต่ละสดมภ์ของ C^{t} (แต่ละแถวของ C) แทนสัมประสิทธิ์สมการสมดุลย์ซึ่งสอดคล้องกับกลไกวิบัติแบบอิสระ 1 กลไก