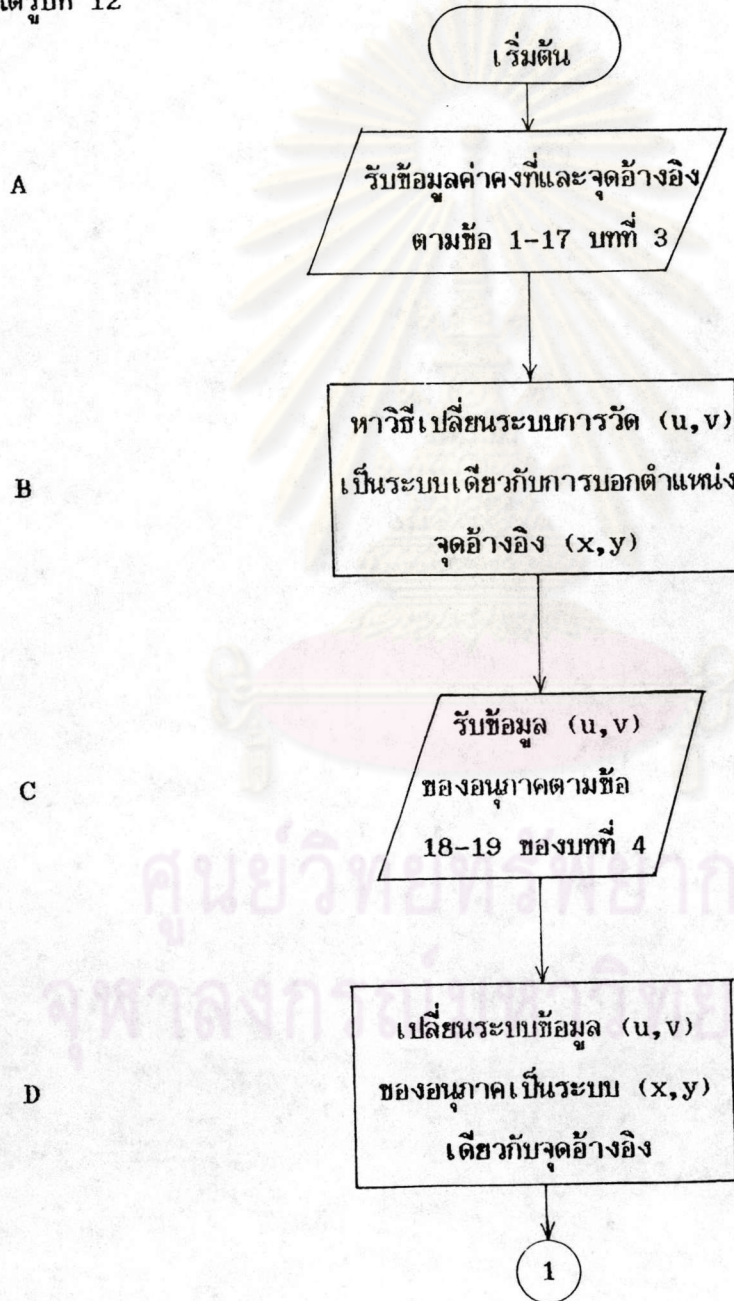


บทที่ 5

การจัดการกับข้อมูลเพื่อให้ได้ทางเดินอนุภาคใน 3 มิติ

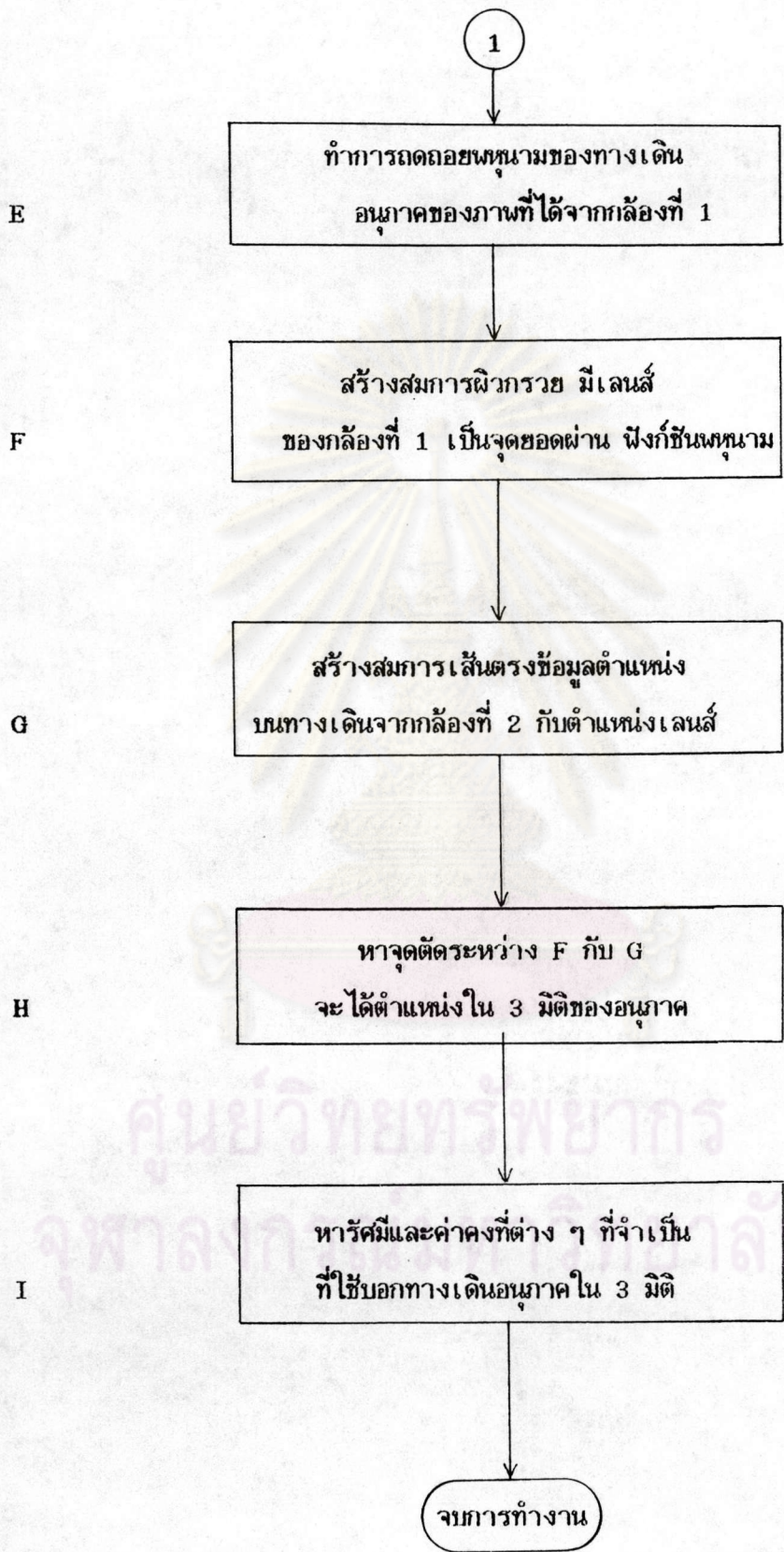
ขั้นตอนการจัดการกับข้อมูล อาจเขียนเป็นผังลำดับการทำงาน (Flow chart)

ได้รูปที่ 12



รูปที่ 1.2

ผังงานอย่างคร่าว ๆ



5.1 ขั้นตอนหาวิธีเปลี่ยนระบบการวัด (U, V) เป็นระบบเดียวกับระบบการบอกจุดอ้างอิง (x, y) โดยใช้ข้อมูลตำแหน่งจุดอ้างอิง

5.1.1 เปลี่ยนค่า (U, V) ให้เป็นระยะ (B_0B_1, B_0B_2) ทุกค่าของ (U, V) ดังนี้

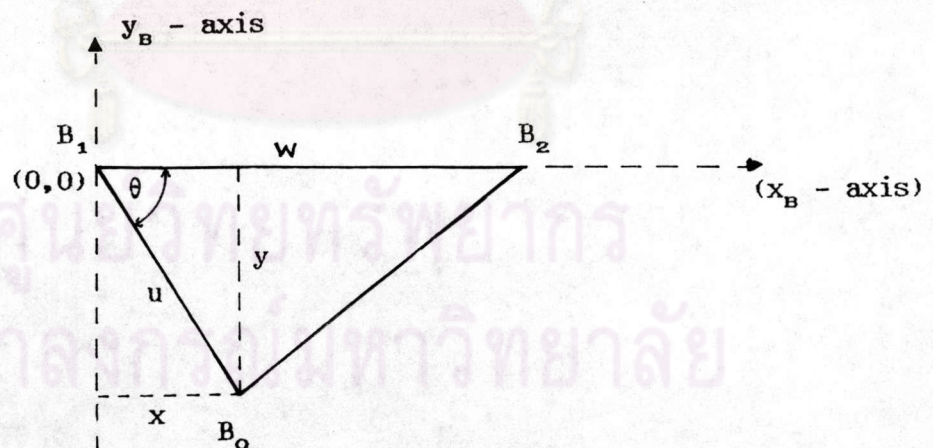
$$B_0B_1 = U - U_0 \quad (5.1)$$

$$B_0B_2 = V_0 - V \quad (5.2)$$

ต่อไปนี้จะเรียกค่า B_0B_1 ว่า u

และค่า B_0B_2 ว่า v

5.1.2 ปรับสเกลของค่า (u, v, w) ทุกค่าให้เหมาะแก่การคำนวณ โดยคูณด้วยค่าคงที่ตัวหนึ่งแล้วเปลี่ยนค่า (u, v) ให้เป็น (x, y) โดยมี B_1 เป็นจุด $(0, 0)$ แกน B_1B_2 เป็นแกน x ซึ่งระบบแกน (x, y) นี้ไม่ใช่ระบบแกนเดียวกับระบบของจุดอ้างอิง ดังนี้



รูปที่ 13

แสดงการเปลี่ยนระบบพิกัด (u, v) เป็น (x, y)

จากรูปจะเห็นว่า โดยการเปลี่ยนในขั้นตอนนี้ x ทุกค่าจะมีเครื่องหมาย + และ y ทุกค่าจะมีเครื่องหมาย -

การคำนวณหาขนาดของ x และ y

$$\cos \theta = \frac{w^2 + u^2 - v^2}{2wu} \tag{5.3}$$

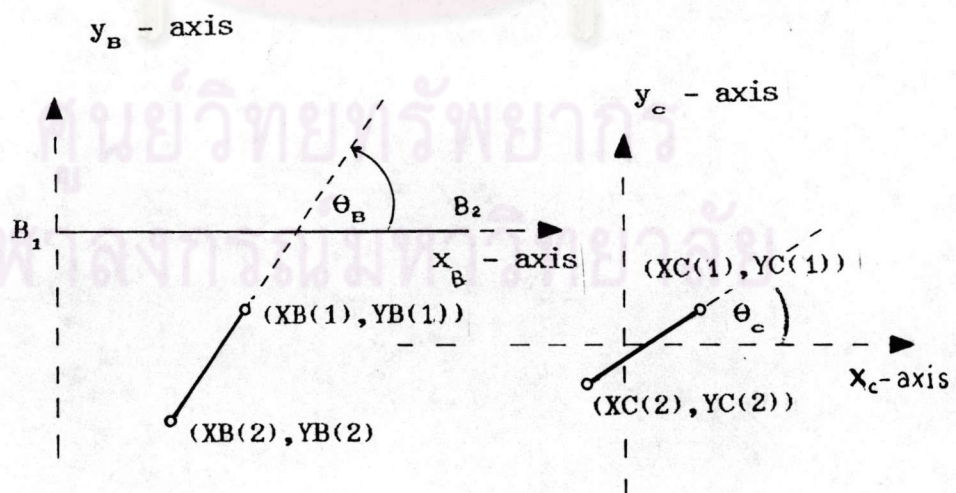
$$x = u \cos \theta \tag{5.4}$$

$$y = -u \sin \theta \tag{5.5}$$

5.1.3 หามุมที่แกน B_1B_2 ของภาพแต่ละภาพทำกับแกน x ของระบบของจุดอ้างอิง โดยคำนวณจากพิกัดของจุดอ้างอิง 2 จุดบนระนาบเดียวกันในแต่ละภาพ เทียบกับพิกัดของจุดอ้างอิงนั้น ๆ ในระบบของห้องฟอง ดังนี้

สมมติให้จุดอ้างอิง 2 จุดในอยู่บนระนาบ B (รูปที่ 11) มีพิกัด

	ระบบแกน B_1B_2	ระบบแกนของห้องฟอง
จุดที่ 1	(XB(1), YB(2))	(XC(1), YC(1))
จุดที่ 2	(XB(2), YB(2))	(XC(2), YC(2))



รูปที่ 14 ก

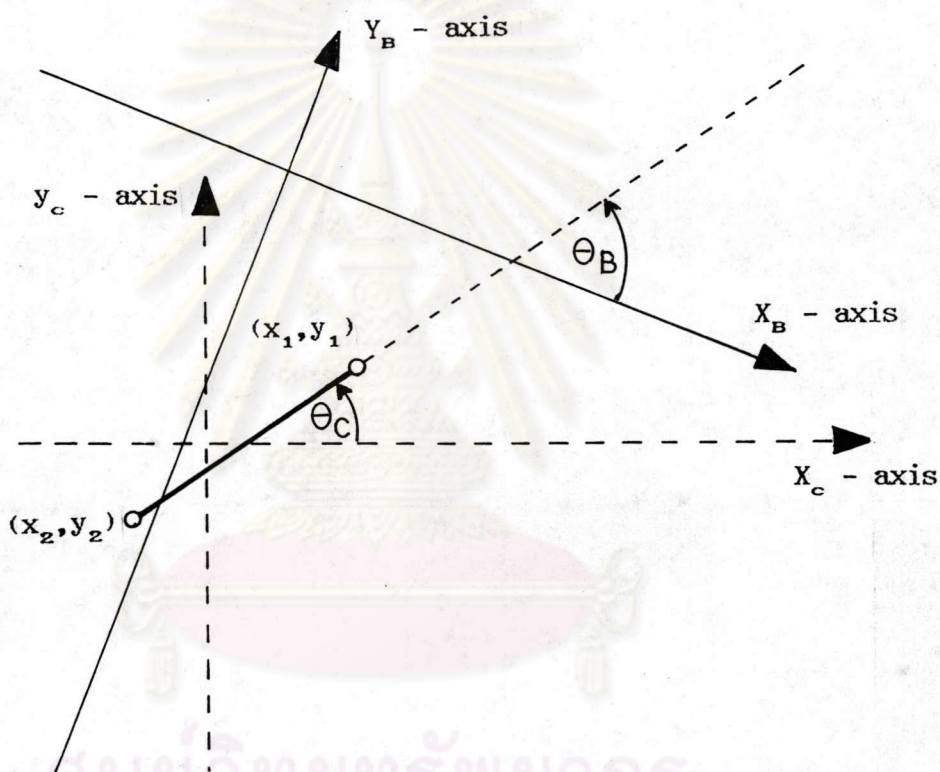
ระบบพิกัดมี B_1B_2 เป็นแกน x

รูปที่ 14 ข

ระบบพิกัดของห้องฟอง

$$\tan \theta_B = \frac{Y_B(1) - Y_B(2)}{X_B(1) - X_B(2)} \quad (5.6)$$

$$\tan \theta_C = \frac{Y_C(1) - Y_C(2)}{X_C(1) - X_C(2)} \quad (5.7)$$



รูปที่ 15

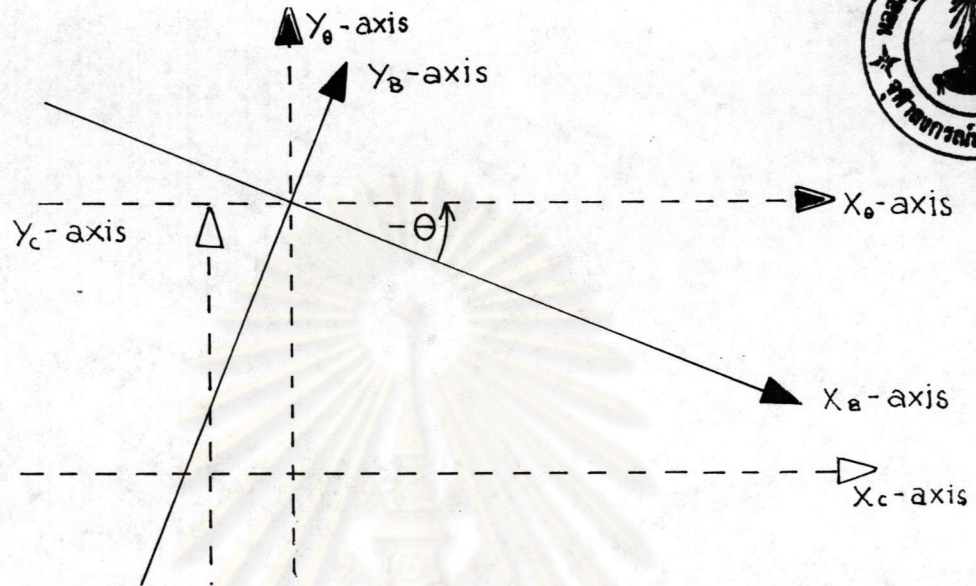
แสดงพิกัดในรูปที่ 14 ทั้ง ก และ ข พร้อม ๆ กัน

มุมที่ X_B ทำกับแกน X_C คือ

$$\theta = \theta_C - \theta_B \quad (5.8)$$

5.1.4 หมุนแกนพิกัด B_1B_2 ให้ขนานกับระบบพิกัดของห้องฟอง คือหมุนเป็นมุม ดังนี้ สมมติพิกัดเดิมคือ (X_B, Y_B) หลังหมุนแล้วจะมีพิกัดเป็น (X_θ, Y_θ) ได้โดยผ่าน เมทริกซ์การหมุน (Rotation Matrix)

$$\begin{bmatrix} X_{\theta} \\ Y_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} \quad (5.9)$$



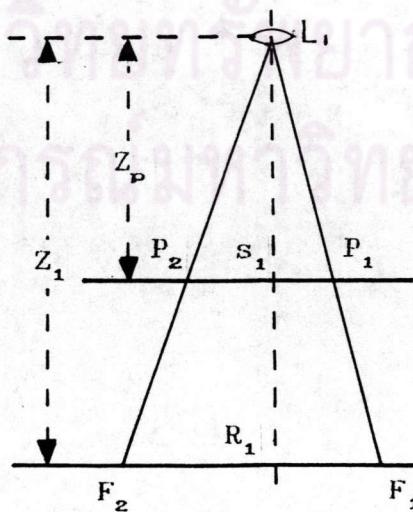
รูปที่ 16

แสดงระบบพิกัดของห้องฟอง (X_C, Y_C) และของเครื่องวัด (X_B, Y_B)

$$X_{\theta} = X_B \cos\theta - Y_B \sin\theta \quad (5.10)$$

$$Y_{\theta} = X_B \sin\theta + Y_B \cos\theta$$

5.1.5 ท้าวว่าภาพถูกฉายลงบนระนาบที่ห่างจากตำแหน่งเลนส์ของกล้องถ่ายรูปเท่าไร



รูปที่ 17

แสดงตำแหน่งในแกน Z ของเลนส์ , ภาพ และจุดอ้างอิง

สมมติว่า จุดอ้างอิงคือจุด F_1 และ F_2 บนระนาบเดียวกัน มีภาพปรากฏคือ จุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ

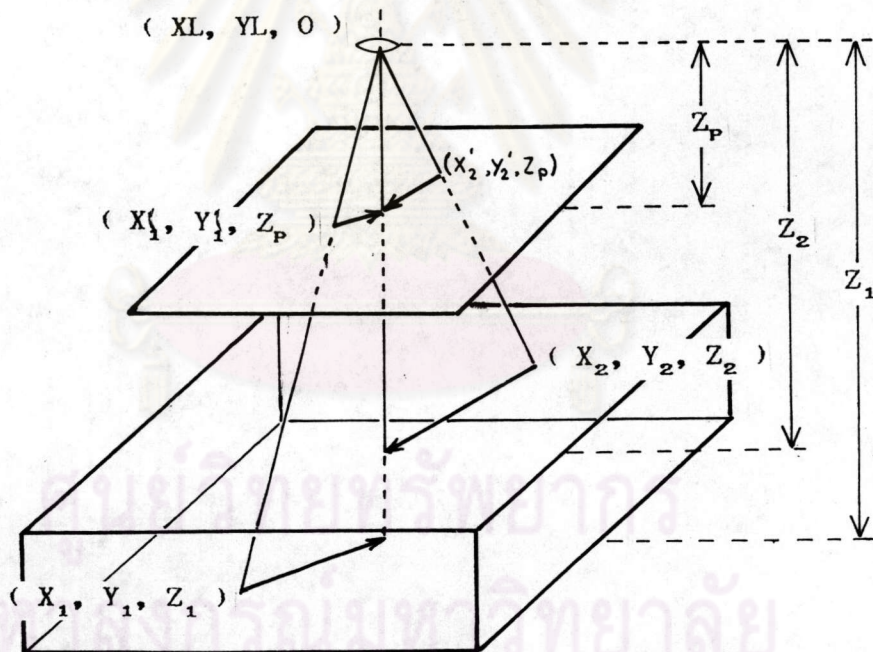
R_1 คือระยะระหว่าง F_1 และ F_2

S_1 คือระยะระหว่าง P_1 และ P_2

ดังนั้น

$$Z_p = Z_1 \frac{S_1}{R_1} \quad (5.11)$$

5.1.6 ทหาว่าระบบแกนของภาพถ่ายเลื่อนไปจากระบบแกนของจุดอ้างอิงในห้องฟองเท่าไร และตำแหน่งเส้นส์ของกล้องถ่ายภาพมีทิศทางอย่างไร



รูปที่ 18

แสดงตำแหน่งเส้นส์, ภาพจุดอ้างอิง และตำแหน่งจุดอ้างอิงใน 2 ระนาบ

กำหนดให้

เลนส์กล้องถ่ายภาพมีพิกัดในระบบของห้องฟองเป็น $(XL, YL, 0)$

พิกัดจุดอ้างอิงบนระนาบ Z_1 เป็น (X_1, Y_1, Z_1)

พิกัดจุดอ้างอิงบนระนาบ Z_2 เป็น (X_2, Y_2, Z_2)

แกนของระบบภาพถ่ายซึ่งหมุนขนานกับระบบแกนของห้องฟองแล้วมีจุดกำเนิดอยู่ที่ $(X_0, Y_0, 0)$ ของระบบแกนของห้องฟอง พิกัดของภาพของจุดอ้างอิงในระบบแกนของภาพที่หมุนขนานกันแล้วเป็น (X_1', Y_1', Z_p) และ (X_2', Y_2', Z_p) ตามลำดับ ดังนั้นพิกัดของภาพของจุดอ้างอิงในระบบแกนของห้องฟองจะเป็น $(X_1' + X_0, Y_1' + Y_0, Z_p)$ และ $(X_2' + X_0, Y_2' + Y_0, Z_p)$ ตามลำดับ

จะสร้างสมการเชิงเส้นได้ 4 สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{XL - (X_1' + X_0)}{XL - X_1} &= \frac{YL - (Y_1' + Y_0)}{YL - Y_1} = \frac{Z_p}{Z_1} \\ \frac{XL - (X_2' + X_0)}{XL - X_2} &= \frac{YL - (Y_2' + Y_0)}{YL - Y_2} = \frac{Z_p}{Z_2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

หรือดังนี้

$$\begin{aligned} 1 - \frac{Z_p}{Z_1} XL + (-1)X_0 &= X_1 - \frac{Z_p}{Z_1} X_1 \\ 1 - \frac{Z_p}{Z_2} XL + (-1)X_0 &= X_2 - \frac{Z_p}{Z_2} X_2 \\ 1 - \frac{Z_p}{Z_1} YL + (-1)Y_0 &= Y_1 - \frac{Z_p}{Z_1} Y_1 \\ 1 - \frac{Z_p}{Z_2} YL + (-1)Y_0 &= Y_2 - \frac{Z_p}{Z_2} Y_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

ก็จะแก้ระบบสมการทั้ง 4 หาค่า X_0, Y_0, XL, YL ออกมาดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้} \quad DO &= \frac{1 - \frac{Z_p}{Z_1} (-1)}{1 - \frac{Z_p}{Z_2} (-1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$D1 = \begin{vmatrix} X_1' - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right)X_1 & (-1) \\ X_2' - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right)X_2 & (-1) \end{vmatrix} \quad (5.15)$$

$$D2 = \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right) & X_1' - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right)X_1 \\ 1 - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right) & X_2' - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right)X_2 \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

$$D3 = \begin{vmatrix} Y_1 - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right)Y_1 & (-1) \\ Y_2 - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right)Y_2 & (-1) \end{vmatrix} \quad (5.17)$$

$$D4 = \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right) & Y_1' - \left(\frac{Z_P}{Z_1}\right)Y_1 \\ 1 - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right) & Y_2' - \left(\frac{Z_P}{Z_2}\right)Y_2 \end{vmatrix} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{ได้ } XL &= \frac{D1}{D0} \\ YL &= \frac{D3}{D0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} XO &= \frac{D2}{D0} \\ YO &= \frac{D4}{D0} \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.2 เปลี่ยนข้อมูลตำแหน่งบนภาพถ่ายทางเดินจากแต่ละกล้องในระบบ (u,v) ให้เป็นระบบ (x,y) เดียวกับระบบพิกัดของจุดอ้างอิงของห้องฟอง

โดยอาศัยข้อมูลที่หาได้จากหัวข้อ 5.1 ในขั้นตอนต่าง ๆ ช่วยในการเปลี่ยนระบบของการพิกัดการบอกตำแหน่งให้เข้าสู่ระบบของจุดอ้างอิงในห้องฟองดังนี้

5.2.1 เปลี่ยนระบบพิกัด (u,v) เป็นพิกัด (x,y) โดยมี B1 เป็นจุดกำเนิด และมีแกน B1B2 เป็นแกน x โดยวิธีเดียวกับหัวข้อ 5.1.1 และ 5.1.2

5.2.2 เปลี่ยนระบบพิกัดให้แกนขนานกับ แกนของระบบอ้างอิง โดยใช้มุมที่หมุนคือ มุม จากหัวข้อ 5.1.3 และ เปลี่ยนระบบไปโดยใช้ วิธีในหัวข้อ 5.1.4

5.2.3 เลื่อนระบบพิกัดให้มีจุดกำเนิดเดียวกันกับจุดกำเนิดของระบบของจุดอ้างอิง โดยใช้ข้อมูลตำแหน่ง จุดกำเนิด (X_0, Y_0) ซึ่งทราบจากหัวข้อ 5.1.6

ถ้า (X_T, Y_T) เป็นพิกัดของจุดหนึ่งที่ผ่านมาขั้นตอน 5.2.1 และ 5.2.2 มาแล้ว จะได้ ว่าพิกัดของจุดนี้ในระบบเดียวกันกับระบบที่ใช้บอกจุดอ้างอิงคือมีพิกัดเป็น $(X_T + X_0, Y_T + Y_0)$

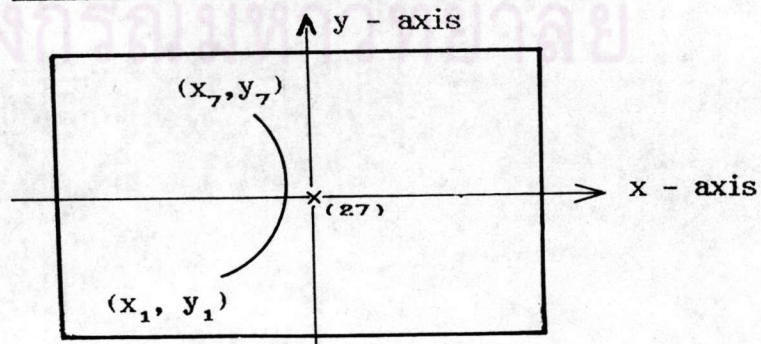
หมายเหตุ ขั้นตอน 5.1 และ 5.2 จะต้องดำเนินเช่นเดียวกับกับภาพถ่ายจากแต่ละกล้อง

5.3 เปลี่ยนข้อมูลตำแหน่งบนภาพถ่ายทางเดินจาก 2 กล้องในระบบ (x, y) เดียวกับระบบพิกัดของห้องฟองให้เป็นตำแหน่งบนทางเดินใน 3 มิติ

เนื่องจากการวิเคราะห์หาทางเดินอนุภาคใน 3 มิติจากภาพถ่ายไม่สามารถจะทำได้โดยตรงเนื่องจากตำแหน่งที่วัดได้จากภาพถ่ายจากแต่ละกล้องนั้น ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็น ตำแหน่งเดียวกันหรือไม่ (Non - corresponding points) (3) จึงต้องดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้ คือสร้างฟังก์ชันเส้นโค้งบนภาพถ่ายทางเดินอนุภาคจากกล้องที่ 1 แล้วสร้างฟังก์ชันผิวกรวย โดยมีตำแหน่งเลนส์เป็นจุดยอดกรวยผ่านฟังก์ชันเส้นโค้งที่สร้างไว้ ต่อไปก็สร้างสมการเส้นตรงแต่ละเส้นแต่ละจุดบนทางเดินผ่านตำแหน่งเลนส์จากภาพถ่ายโดยกล้องที่ 2 ไปตัดกับผิวกรวยที่สร้างไว้จากภาพโดยกล้องที่ 1 จุดตัดจะเป็นตำแหน่งบนทางเดินอนุภาคใน 3 มิติ

เมื่อได้ตำแหน่งบนทางเดินอนุภาคใน 3 มิติแล้วทำให้เราหาข้อมูลที่สำคัญ ได้คือจุดเริ่มต้นของทางเดินอนุภาค จุดศูนย์กลาง รัศมีวงวิ่งของเฮลิคซ์ และเส้นสัมผัสของจุดเริ่มต้นทางเดินอนุภาค

5.3.1 สร้างฟังก์ชันเส้นโค้งบนภาพถ่ายทางเดินอนุภาคจากกล้องที่ 1



รูปที่ 19

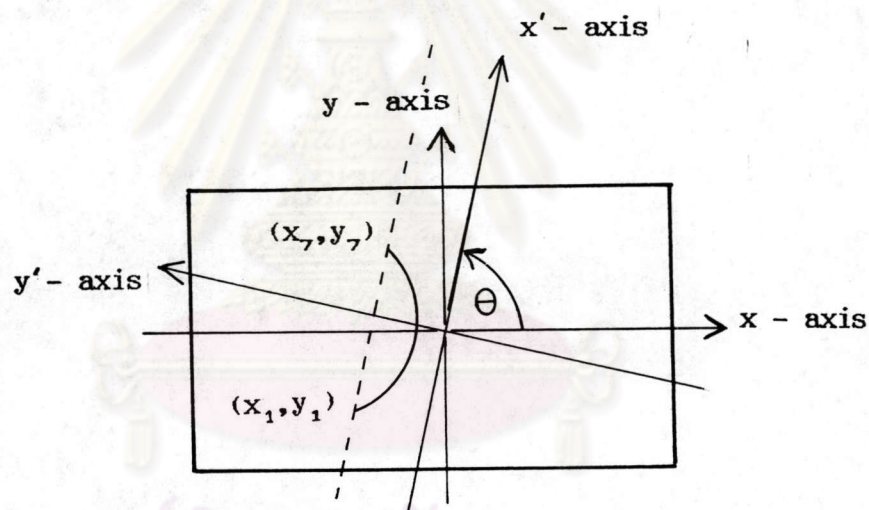
ภาพเส้นทางเดินอนุภาคและระบบแกนพิกัดที่ไม่เหมาะสมจะทำการถอยหลังออกมา

การสร้างฟังก์ชันเส้นโค้งบนทางเดินอนุภาคในภาพถ่ายนี้ จะทำโดยสร้างฟังก์ชันถดถอยพหุนาม ($Y = P(x)$: Polynomial Regression) แต่ข้อมูลโดยตรงจะไม่สามารถสร้างฟังก์ชันได้เพราะมีค่า x บางค่า ให้ค่า y มากกว่า 1 ค่า เช่นทางเดินในรูปที่ 19 ดังนั้นจะต้องมีการตัดแปลงข้อมูลเพื่อให้เหมาะสมสำหรับการสร้างฟังก์ชันก่อน ในที่นี้จะใช้การหมุนแกนไปอีกครั้งหนึ่ง โดยมุมที่หมุนแกนจะหาจาก

$$\tan \theta = \frac{Y_7 - Y_1}{X_7 - X_1} \quad (5.21)$$

จะได้ระบบแกนใหม่เป็น (x', y') ซึ่ง

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.22)$$



รูปที่ 20

แสดงการหมุนแกนจากระบบพิกัดห้องฟอง ไปให้สะดวกแก่การสร้างฟังก์ชันถดถอยพหุนาม

หลังจากเป็นระบบ (x, y) ดังรูปที่ 20 แล้วจะไม่มีค่า x ที่มีค่า y หลายค่า ก็จะกลายเป็นข้อมูลที่สร้างฟังก์ชันถดถอยพหุนามได้ ในที่นี้จะกระจายถึงกำลัง 5 ดังนี้ (เพื่อความสะดวกจะเรียก x ว่า X และ y ว่า Y)

$$\begin{aligned} Y &= P(X) \\ &= A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + A_4 X^4 + A_5 X^5 \quad (5.23) \end{aligned}$$

การหาสัมประสิทธิ์ของ X กำลังต่าง ๆ จะใช้วิธีกำลังสองต่ำสุด (Least square method) (4)

ให้ $S_r =$ ผลบวกกำลังสองของเศษเหลือ (Sum of square of residuals)

$$S_r = \sum_{i=1}^7 (Y_i - A_0 - A_1 X_i - A_2 X_i^2 - A_3 X_i^3 - A_4 X_i^4 - A_5 X_i^5)^2 \quad (5.24)$$

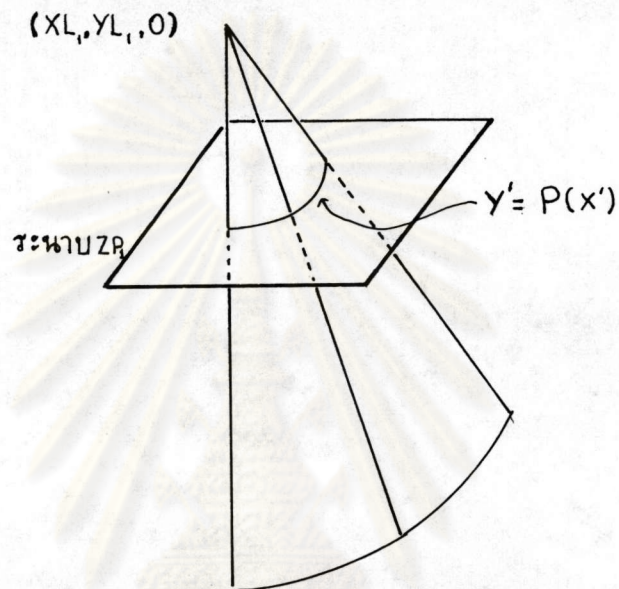
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial A_0} &= -2 \sum (Y_i - A_0 - A_1 X_i - A_2 X_i^2 - A_3 X_i^3 - A_4 X_i^4 - A_5 X_i^5) \\ \frac{\partial S_r}{\partial A_1} &= -2 \sum X_i (Y_i - A_0 - A_1 X_i - A_2 X_i^2 - \dots - A_5 X_i^5) \\ \frac{\partial S_r}{\partial A_2} &= -2 \sum X_i^2 (Y_i - A_0 - A_1 X_i - A_2 X_i^2 - \dots - A_5 X_i^5) \\ &\vdots \\ \frac{\partial S_r}{\partial A_5} &= -2 \sum X_i^5 (Y_i - A_0 - A_1 X_i - A_2 X_i^2 - \dots - A_5 X_i^5) \end{aligned} \right\} (5.25)$$

ดังนั้นจะหาค่า A_i ได้จากระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\left. \begin{aligned} A_0 n + A_1 \sum X_i + A_2 \sum X_i^2 + \dots + A_5 \sum X_i^5 &= \sum Y_i \\ A_0 \sum X_i + A_1 \sum X_i^2 + A_2 \sum X_i^3 + \dots + A_5 \sum X_i^6 &= \sum X_i Y_i \\ A_0 \sum X_i^2 + A_1 \sum X_i^3 + A_2 \sum X_i^4 + \dots + A_5 \sum X_i^7 &= \sum X_i^2 Y_i \\ &\vdots \\ A_0 \sum X_i^5 + A_1 \sum X_i^6 + A_2 \sum X_i^7 + \dots + A_5 \sum X_i^{10} &= \sum X_i^5 Y_i \end{aligned} \right\} (5.26)$$

ศูนย์วิทยุทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5.3.2 สร้างสมการผิวกรวย (Conic surface)



รูปที่ 21
รูปผิวกรวย

จากฟังก์ชันเส้นโค้งที่หาได้จากหัวข้อ 5.3.1 และ ตำแหน่งเลนส์ที่หาได้จากหัวข้อ 5.1.6 ซึ่งผ่านการแปลงระบบพิกัดให้เป็นระบบเดียวกันแล้ว มีพิกัดใด ๆ บนเส้นโค้งเป็น

$$P' = (X', Y', Z') \quad (5.27)$$

และตำแหน่งเลนส์มีพิกัด

$$PL_1 = (XL_1, YL_1, ZL_1) \quad (5.28)$$

ให้ PL_1 เป็นจุดยอดของกรวยและผิวกรวยผ่านโค้ง P' ตำแหน่งใด ๆ บนผิวกรวยเป็น

$$P = (X, Y, Z) \quad (5.29)$$

จะได้สมการผิวกรวยเป็น

$$\frac{X - XL_1}{X' - XL_1} = \frac{Y - YL_1}{Y' - YL_1} = \frac{Z - ZL_1}{Z' - ZL_1} \quad (5.30)$$

$$\text{โดยมี } (XL_1, YL_1, ZL_1) = (XL_1, YL_1, 0) \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$Z' = ZP_1 \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$\text{และ } Y' = P(X')$$

5.3.3 สร้างเส้นตรงใน 3 มิติจากตำแหน่งต่าง ๆ บนทางเดินอนุภาคจากภาพ
ถ่ายที่ 2 กับตำแหน่งเลนส์ของกล้องนั้น

ขั้นแรกต้องเปลี่ยนระบบพิกัดให้เป็นระบบเดียวกันกับระบบพิกัดที่ใช้ เขียนเส้นโค้งใน
ภาพจากกล้องที่ 1 เสียก่อน สมมติว่าจุดต่าง ๆ มีพิกัดในระบบเดียวกันเป็น

$$P_i'' = (X_i'', Y_i'', Z_i'') \quad (5.31)$$

เลนส์มีพิกัดเป็น

$$PL_2 = (PL_2, XL_2, ZL_2) \quad (5.32)$$

และพิกัดใด ๆ บนเส้นตรงคือ

$$P = (X, Y, Z) \quad (5.33)$$

จะได้สมการเส้นตรงเส้นที่ i เป็น

$$\frac{X - ZL_2}{X''_i - XL_2} = \frac{Y - YL_2}{X''_i - YL_2} = \frac{Z - ZL_2}{Z''_i - ZL_2} \quad (5.34)$$

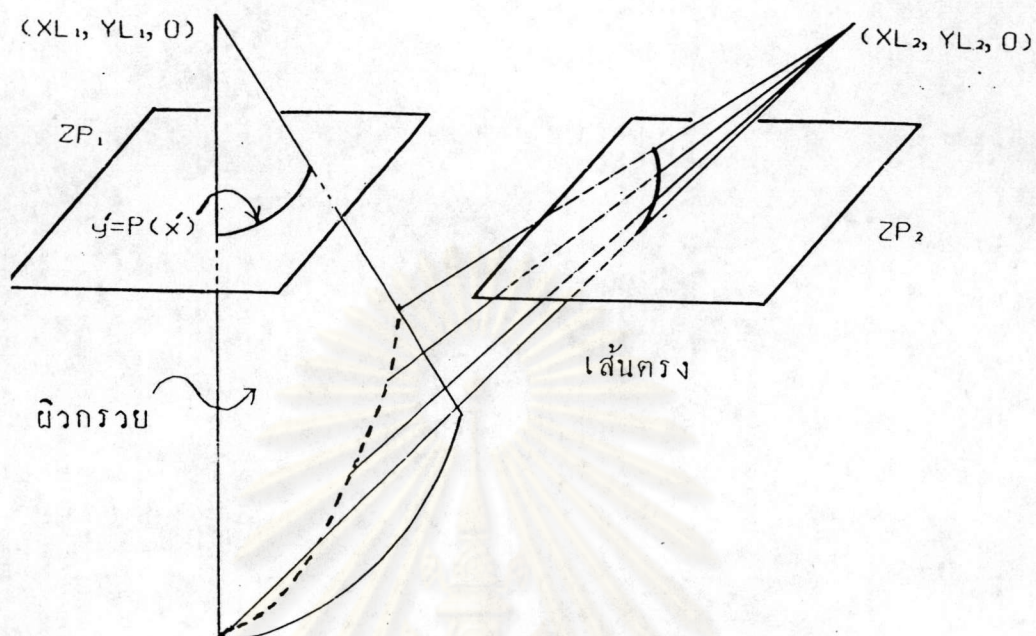
$$\text{โดยมี } (XL_2, YL_2, ZL_2) = (XL_2, YL_2, 0) \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$Z''_i = ZP_2 \text{ เป็นค่าคงที่}$$

โดยการแทนค่า X''_i, Y''_i ก็จะมีสมการเส้นตรง 7 สมการ แต่ที่สำคัญคือ 3

สมการแรก ($i = 1, 2, 3$)

5.3.4 จุดตัดของผิวกรวยกับเส้นตรง



รูปที่ 22

ภาพแสดงจุดตัดของเส้นตรงกับผิวกรวย

สมการเส้นตรงอาจเขียนใหม่เป็น

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{Z (X''_1 - XL_2) + XL_2}{ZP_2} \\ Y &= \frac{Z (Y''_1 - YL_2) + YL_2}{ZP_2} \end{aligned} \right\} (5.35)$$

และสมการผิวกรวยจะเขียนได้เป็น

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{ZP_1 (X - XL_1) + XL_1}{Z} \\ Y' &= \frac{ZP_1 (Y - YL_1) + YL_1}{Z} \end{aligned} \right\} (5.36)$$

แทนค่า X, Y ของสมการเส้นตรงลงในสมการผิวกรวยจะได้

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{ZP_1}{Z} \left[\left\{ \frac{Z (X''_1 - XL_2) + XL_2}{ZP_2} \right\} - XL_1 \right] + XL_1 \\ Y' &= \frac{ZP_1}{Z} \left[\left\{ \frac{Z (Y''_1 - YL_2) + YL_2}{ZP_2} \right\} - YL_1 \right] + YL_1 \end{aligned} \right\} (5.37)$$

แต่ X' และ Y' เป็นฟังก์ชันที่มีความสัมพันธ์กันตามสมการ

$$Y' = P(X') = \sum_{j=0}^5 A_j X'^j \tag{5.38}$$

ดังนั้นเขียนใหม่เป็น

$$\frac{ZP_1}{Z} \left\{ \frac{Z}{ZP_2} (Y''_1 - YL_2) + YL_2 - YL_1 \right\} + YL_1 = \sum_{j=0}^5 A_j \left[\frac{ZP_1}{Z} \left\{ \frac{Z}{ZP_2} (X''_1 - XL_2) + XL_2 - XL_1 \right\} + XL_1 \right]^j \tag{5.39}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรเดียวคือ $\frac{1}{Z}$ ดังนี้

$$f\left(\frac{1}{Z}\right) = \sum_{j=0}^5 b_j \left(\frac{1}{Z}\right)^j = 0 \tag{5.40}$$

มี b_j หาค่าได้จากกาการกระจายและจัดรูปฟังก์ชันพหุนามข้างต้น แต่การหารากของฟังก์ชันพหุนามกำลังสูงสุด 5 ซึ่งใช้หาตำแหน่งใน 3 มิติของทางเดินอนุภาคนั้น ไม่สามารถหาโดยวิธีตรงได้ จึงได้ใช้วิธีกระทำซ้ำ (Iteration) ในที่นี้ใช้วิธีคำนวณแบบที่ปรับปรุงจากวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Modified Newton - Raphson Method) (4:150) ซึ่งเป็นวิธีที่กระทำซ้ำและลู่เข้าสู่คำตอบ (Convergent toward true value) ได้รวดเร็วมาก มีรูปแบบ

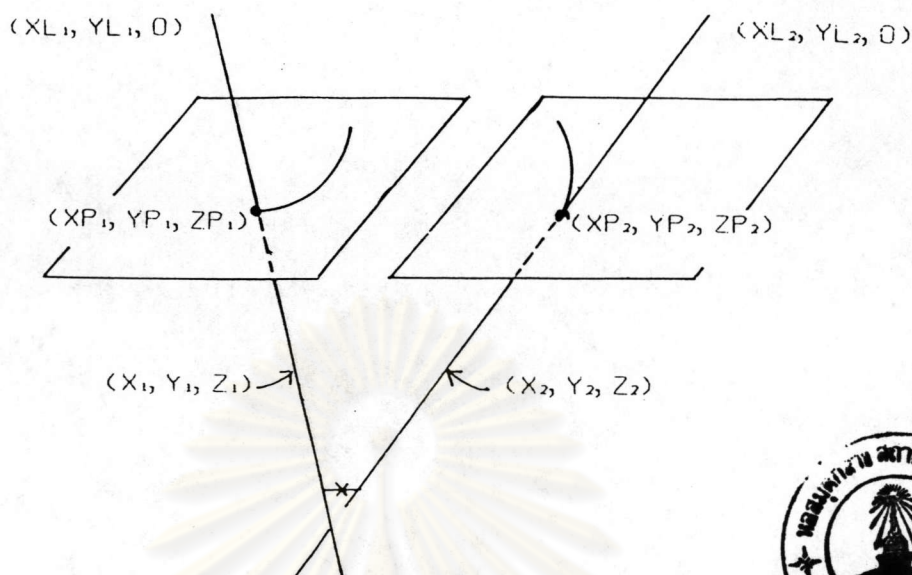
$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(x_i) f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) f''(x_i)} \tag{5.41}$$

แต่การทำซ้ำนั้นอาจไม่ได้คำตอบ หรือได้คำตอบที่ไม่ต้องการเพราะเกิดการลู่ออก (Divergent) หากการกำหนดค่าตั้งต้นห่างจากคำตอบจริงมากเกินไป

5.3.5 การหาค่าตั้งต้นก่อนการทำซ้ำ เพื่อให้เกิดการลู่เข้าสู่คำตอบอย่างรวดเร็ว สามารถกระทำได้โดยข้อมูลที่เบ็นจุดตั้งต้นของทางเดินของอนุภาคที่ปรากฏในภาพถ่ายแต่ละภาพที่ใช้ นั่นอาจถือได้ว่าเป็นภาพของจุดเดียวกัน (Corresponding point) หรือใกล้เคียงกับจุดเดียวกันมากที่สุด ดังนั้นเราจะใช้วิธีหาค่าตั้งต้นโดยวิธีสร้างสมการเส้นตรงใน 3 มิติขึ้นมา 2 เส้น โดยใช้จุดเริ่มต้นทางเดินอนุภาคในภาพถ่ายแต่ละภาพแล้วลากเส้นตรงผ่านตำแหน่งเลนส์กล้อง

ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ลากโดยภาพของกล้องที่ 1

L_2 เป็นเส้นตรงที่ลากโดยภาพของกล้องที่ 2



รูปที่ 23

หาจุดเริ่มต้นของทางเดินอนุภาคใน 3 มิติ

โดยการลากเส้นตรงจากจุดในภาพผ่านตำแหน่งเลนส์ของแต่ละกล้อง

ให้ $(XL_1, YL_1, 0)$ และ $(XL_2, YL_2, 0)$ เป็นตำแหน่งเลนส์ของกล้องที่ 1 และกล้องที่ 2 ตามลำดับ

ให้ (XP_1, YP_1, ZP_1) และ (XP_2, YP_2, ZP_2) เป็นตำแหน่งจุดเริ่มต้นของภาพทางเดินอนุภาคที่ได้จากกล้องที่ 1 และกล้องที่ 2 ตามลำดับ

และให้ (X_1, Y_1, Z_1) และ (X_2, Y_2, Z_2) เป็นตำแหน่งใด ๆ บนเส้นตรง \vec{L}_1 และเส้นตรง \vec{L}_2 ตามลำดับ

จะมีสมการพาราเมตริกของ L_1 และ L_2 เป็น

$$\vec{L}_1 = (XL_1 + t_1(XP_1 - XL_1), YL_1 + t_1(YP_1 - YL_1), t_1 ZP_1) \quad (5.42)$$

$$\vec{L}_2 = (XL_2 + t_2(XP_2 - XL_2), YL_2 + t_2(YP_2 - YL_2), t_2 ZP_2) \quad (5.43)$$

แต่เส้นตรง L_1 และ L_2 อาจไม่มีจุดตัดก็ได้ ด้วยการวัดตำแหน่งต่าง ๆ อาจมีความคลาดเคลื่อนและโดยการทดลองหาจริงก็มักพบว่าเป็นเช่นนั้น ดังนั้นเราจะแก้ไข ณ จุดนี้โดยแทนที่จะหาจุดตัดแต่กลับหาจุดที่ใกล้กันระหว่างเส้นตรง \vec{L}_1 และ \vec{L}_2 ให้มากที่สุดแทน ซึ่งถ้ามีจุดตัดจุดนี้ก็จะ เป็นจุดตัดไปโดยทันที

ให้ s = ระยะระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

$$s = |\vec{L}_1 - \vec{L}_2| \quad (5.44)$$

$$s^2 = (\vec{L}_1 - \vec{L}_2) \cdot (\vec{L}_1 - \vec{L}_2) \quad (5.45)$$

ค่า t_1 และ t_2 ที่ทำให้ s^2 น้อยที่สุดหาได้จาก

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial t_1} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial (s^2)}{\partial t} = 0 \quad (5.46)$$

จากค่า t_1 และ t_2 ที่ได้ (ดูวิธีคำนวณในภาคผนวก) จะหาค่า Z_1 และ Z_2 ซึ่งเป็นค่า Z ของจุดบนเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ใกล้กันที่สุดคือ

$$Z_1 = t_1 Z P_1 \quad \text{และ}$$

$$Z_2 = t_2 Z P_2$$

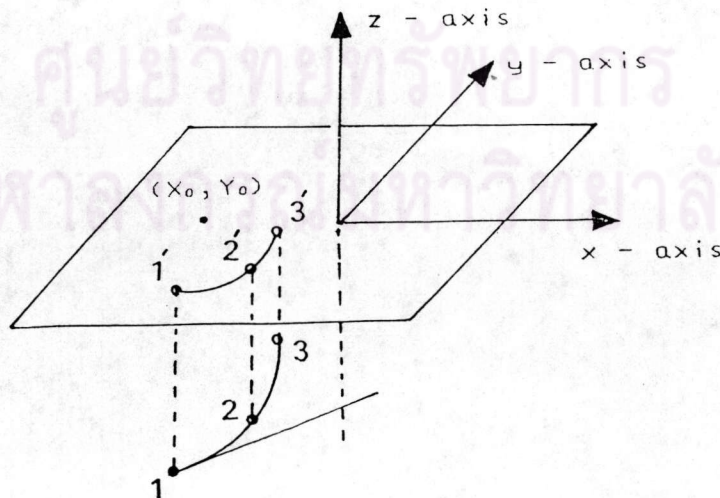
ค่า 1 ที่จะนำไปเป็นค่าเริ่มต้นของการทำซ้ำเพื่อหาดำแหน่งจุดตัดบนผิวกรวยใน

3 มิติคือ

$$\frac{1}{Z} = \frac{2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.47)$$

โดยวิธีนี้ สามารถหาจุดตัดบนผิวกรวยโดยการทำซ้ำจุดแรก ทำซ้ำเพียง 2-3 ครั้ง และจุดตัดถัดไปใช้จุดตัดจุดก่อนเป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำ (เป็นการทำซ้ำเพื่อหาจุดตัดที่ 2 ใช้จุดตัดที่ 1 เป็นจุดเริ่มต้น) ทั้งนี้เพราะจุดตัดเหล่านี้อยู่บนทางเดินอนุภาคเดียวกันซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันอยู่แล้ว มีผลทำให้การทำซ้ำมีการลู่เข้าเร็วมาก

5.3.6 หาจุดศูนย์กลาง , รัศมี และเส้นสัมผัส ณ จุดเริ่มต้นทางเดินอนุภาค



รูปที่ 24

ฉายเงาทางเดินอนุภาคขนานแกน Z ลงบนระนาบ Z ค่าคงที่

เมื่อได้ตำแหน่งใน 3 มิติแล้ว ตำแหน่งเหล่านี้ยังเป็นตำแหน่งในระบบพิกัดที่ใช้สร้างฟังก์ชันพหุนาม (x', y') ดังนั้นต้องเปลี่ยนระบบพิกัดให้อยู่ในระบบเดียวกับระบบพิกัดของจุดอ้างอิงในห้องฟอง (x, y) เสียก่อน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

โดย θ คือมุมที่หาจากหัวข้อ 5.3.1

แล้วย้ายจุดกำเนิดแกน Z ซึ่งเคยถือว่า ตำแหน่งเลนส์ของกล้องถ่ายรูปเป็น 0 มาไว้ที่จุดอ้างอิงที่ 27

ให้ Z เป็นระยะบนแกน Z วัดจากจุดอ้างอิงที่ 27 ถึงทางเดินอนุภาค

Z' เป็นระยะบนแกน Z วัดจากตำแหน่งเลนส์ของกล้องถึงทางเดินอนุภาค

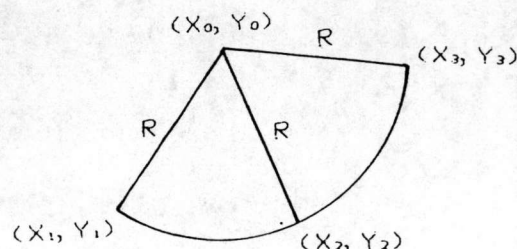
Z_1 เป็นระยะบนแกน Z วัดจากตำแหน่งเลนส์ถึงระนาบที่จุดอ้างอิงที่ 27

อยู่ (ตามรูปที่ 28)

$$Z = Z_1 - Z' \quad (5.49)$$

จะเห็นว่า Z ทุกค่าบนทางเดินอนุภาคจะมีค่าเป็น $(-)$ ทั้งสิ้น

ต่อมาฉายเงา (Project) ตำแหน่งบนทางเดินอนุภาค 3 จุดแรก (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) และ (X_3, Y_3, Z_3) ให้ขนาดกับแกน Z ลงบนระนาบ Z ที่เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จุดที่เป็นภาพฉายนี้จะจุดบนส่วนโค้งวงกลม 3 จุด (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) และ (X_3, Y_3) คือจุด 1', 2' และ 3' ดังรูปที่ 24 ตามลำดับให้ (X_0, Y_0) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



รูปที่ 25

แสดงการหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

จะหาได้ว่า

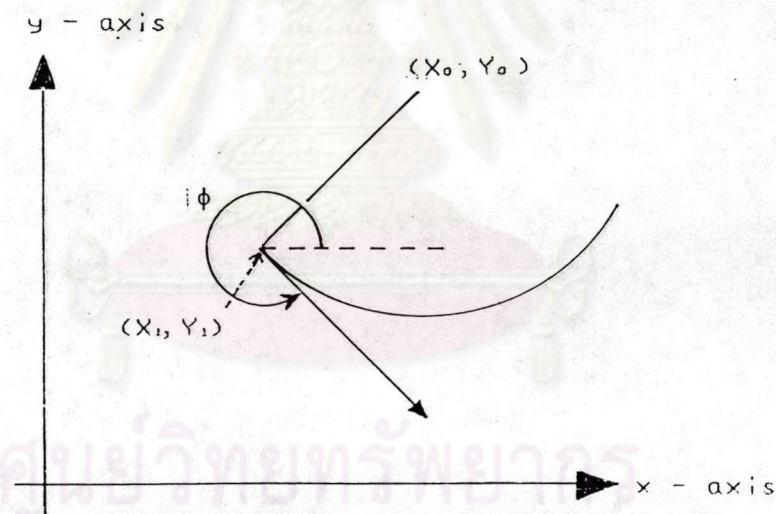
$$\begin{aligned} R^2 &= (X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 \\ &= (X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2 \\ &= (X_3 - X_0)^2 + (Y_3 - Y_0)^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

ให้ $K = R^2 - X_0^2 - Y_0^2$ แล้วจัดใหม่ได้ระบบสมการเชิงเส้นเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2X_1 & 2Y_1 \\ 1 & 2X_2 & 2Y_2 \\ 1 & 2X_3 & 2Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^2 + Y_1^2 \\ X_2^2 + Y_2^2 \\ X_3^2 + Y_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

เมื่อแก้ระบบสมการได้จุดศูนย์กลางที่ (X_0, Y_0) และรัศมี

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + K} \quad (5.52)$$



รูปที่ 26

แสดงมุมอาซิมุทของเส้นสัมผัสทางเดิน

มุมอาซิมุท (Azimuthal angle) ของเส้นสัมผัสหาได้จาก

$$\tan \phi = \frac{X_1 - X_0}{Y_1 - Y_0} \quad (5.53)$$

และท้ายที่สุดก็คือ หามุมที่เส้นสัมผัสเอียงทำกับแกน Z หรือมุมซินิท (Zenith) มี

วิธีการดังนี้

อาศัยสมการ (2.17) แล้วจัดใหม่ได้

$$t = \frac{Z - Z_0}{V_z}$$

$$X = X_0 - \frac{V_0}{\omega} \cos \frac{\omega(Z - Z_0)}{V_z} + 0 \quad (5.54)$$

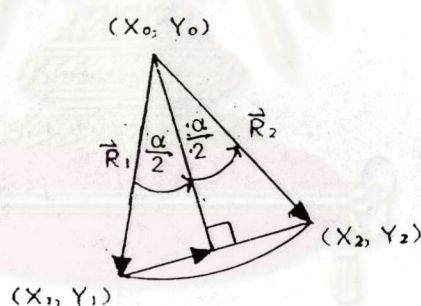
$$Y = Y_0 + \frac{V_0}{\omega} \sin \frac{\omega(Z - Z_0)}{V_z} + 0$$

หรือ

$$X = X_0 - R \cos k(Z - Z_0) + 0 \quad (5.55)$$

$$Y = Y_0 + R \sin k(Z - Z_0) + 0$$

จาก 2 จุดแรกบนทางเดินอนุภาค (X_1, Y_1, Z_1) และ (X_2, Y_2, Z_2) ดังรูปที่ 27



รูปที่ 27

หาค่า k จาก 2 จุดแรกบนทางเดินอนุภาค

จะหามุมระหว่าง \vec{R}_1 และ \vec{R}_2 ได้จาก

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\left\{ \left(\frac{X_2 - X_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{2} \right)^2 \right\}^{1/2}}{R} \quad (5.56)$$

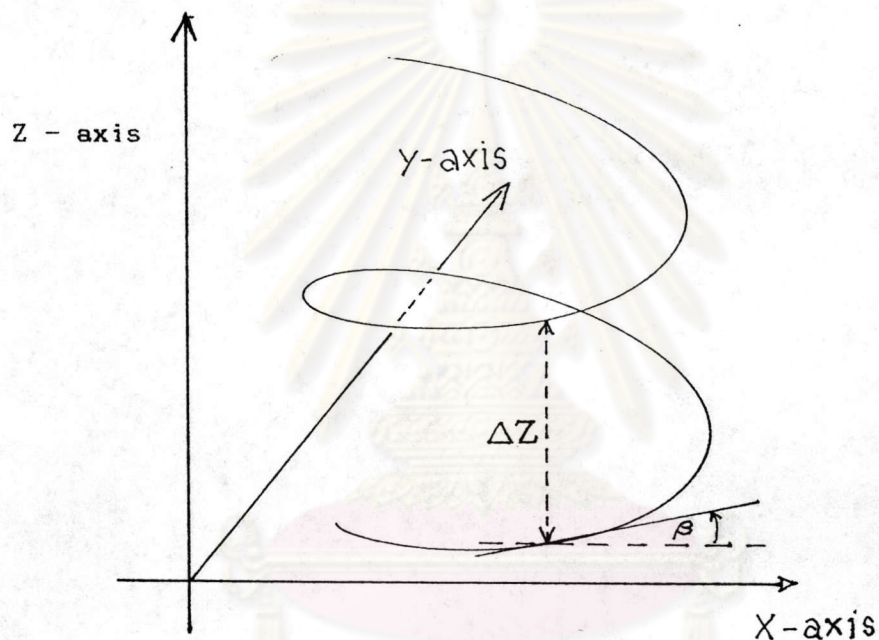
จากสมการ (4.55) จะหามุม α ได้

$$\alpha = k(Z_2 - Z_1) \quad (5.57)$$

ดังนั้นโดยมุม α ที่หาได้จาก (5.56) และ (5.57) จะได้

$$k = \frac{\alpha}{z_2 - z_1} \quad (5.58)$$

ถ้ามีเฮลิคซครบ 1 เกลียวดังรูปที่ 28



รูปที่ 28

การหามุมกับระนาบ x-y จากเส้นสัมผัสทางเดินอนุภาค

มุมที่เส้นสัมผัสเฮลิคซ์ทำกับระนาบ z = ค่าคงที่เป็น หาได้จาก

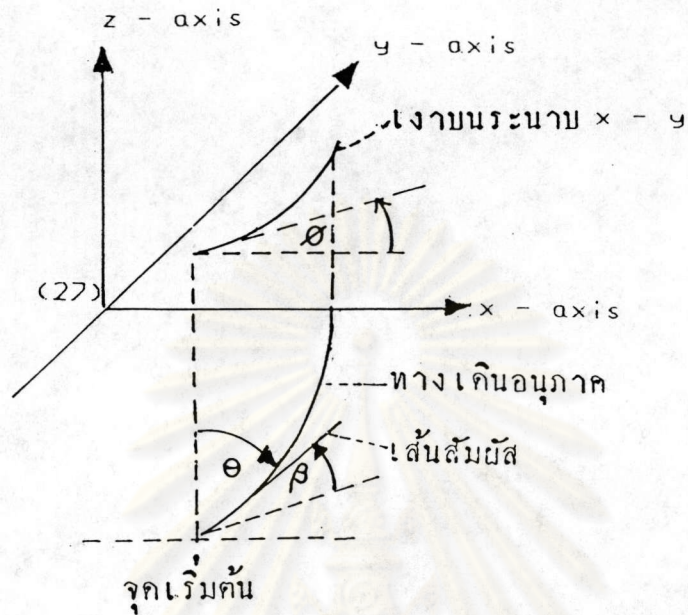
$$\tan \beta = \frac{\Delta z}{2\pi R} \quad (5.59)$$

โดย (5.58) จะหา Δz ที่ทำให้ $\alpha = 2\pi$ ได้

$$\Delta z = \frac{2\pi}{k} \quad (5.60)$$

ดังนั้นจะได้มุม β เป็น

$$\beta = \arctan \left(\frac{1}{kR} \right) \quad (5.61)$$



รูปที่ 29
แสดงมุมซีนิตและมุมอาซิมุต

ดังนั้นมุมซีนิต (Zenith) จะมีค่าเป็น

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta \tag{5.62}$$

เป็นอันว่าตามขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมาเราวิเคราะห์หาปริมาณสำคัญของทางเดินอนุภาคแบบเฮลิคซ์ (Helix track) ได้ คือทราบจุดศูนย์กลาง จุดเริ่มต้นของทางเดิน (X_0, Y_0, Z_0) , รัศมี R มุมซีนิต θ และมุมอาซิมุต ϕ