

กรุ๊ปที่ให้โครงสร้างของสีกวเซมิฟิลต์

นางสาวณัฐนาถ ไตรภพ



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย


พ.ศ. 2532

ISBN 974-576-271-7

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

15644

GROUPS ADMITTING SKEW-SEMIFIELD STRUCTURE



Miss Nuttanard Triphop

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1989

ISBN 974-576-271-7

Thesis Title Groups Admitting Skew-Semifield Structure
By Miss Nuttanard Triphop
Department Mathematics
Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in
partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya
..... Dean of Graduate School
(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Sidney S. Mitchell
..... Chairman
(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

ยูปกรณ์ เที่ยงประสิทธิ์
..... Thesis Advisor
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

อนันต์ วัฒนกุล
..... Member
(Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D.)



พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมเพียงแผ่นเดียว

ชื่อนานา ไตรภพ : กลุ่มที่ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ (GROUPS ADMITTING SKEW-SEMI-FIELD STRUCTURE) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.บุพการณ ธีมประสิทธิ์, 54 หน้า.

เราเรียกเซมิริง $(S, +, \cdot)$ ซึ่งลึกลับที่ใต้ภายใต้การบวกและมีศูนย์ 0 ว่า สกีวเซมิฟิลด์ ถ้า $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ เป็นกรุป

เรากล่าวว่าการกรุป G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ [ฟิลด์] ถ้ามีโอเปอเรชัน $+$ บน G° ที่ทำให้ $(G^\circ, +, \cdot)$ เป็นสกีวเซมิฟิลด์ [ฟิลด์] โดยที่ G° คือกรุป G ผนวกศูนย์ 0

สำหรับฟิลด์ F และจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ $G_n(F), U_n(F), L_n(F), P_n(F), O_n(F), V_n(F), W_n(F)$ และ $G_n'(F)$ แทนกรุปของเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ทั้งหมด, กรุปของเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ที่เป็นสามเหลี่ยมบน [สามเหลี่ยมล่าง] ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ทั้งหมด, กรุปของเมตริกซ์การเรียงสับเปลี่ยนขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ทั้งหมด, กรุปของเมตริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ทั้งหมด, กรุปของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ที่มีตัวกำหนดเป็น 1 ทั้งหมด, กรุปของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F ที่มีตัวกำหนดเป็น 1 หรือ -1 ทั้งหมด และสับกรุปตัวลึกลับของ $G_n(F)$ ตามลำดับ

สำหรับเซต X ใด ๆ ให้ S_X, A_X, K_X และ S_X' แทนกรุปสมมาตรบนเซต X , กรุปออเพอเรเตอร์เชิงบนเซต X , กรุปของการเรียงสับเปลี่ยนที่เกือบเป็นเอกลักษณ์ของเซต X ทั้งหมด และสับกรุปตัวลึกลับของ S_X ตามลำดับ

ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ F เป็นฟิลด์และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

- (1) ถ้า $G = G_n(F), V_n(F)$ หรือ $W_n(F)$ แล้ว G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ $n = 1$
- (2) ถ้า $G = U_n(F), L_n(F), O_n(F)$ หรือ $G_n'(F)$ แล้ว G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ $n = 1$ หรือ $n = 2$ และ $|F| = 2$
- (3) $G_n(F)/V_n(F)$ และ $G_n(F)/G_n'(F)$ ให้โครงสร้างของฟิลด์
- (4) ถ้า F เป็นฟิลด์จำกัด แล้ว $G_n(F)/W_n(F)$ ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ อันดับของ F เท่ากับ $2p^m - 1$ สำหรับจำนวนเฉพาะ p และจำนวนเต็มบวก m บางตัว
- (5) ถ้าค่าลักษณะเฉพาะของ F เท่ากับ 2 แล้ว $G_n(F)/W_n(F)$ ให้โครงสร้างของฟิลด์
- (6) ถ้า F เป็นฟิลด์ที่เป็นอันดับ แล้ว $G_n(F)/W_n(F)$ ให้โครงสร้างของเซมิฟิลด์

ทฤษฎีบท 2 ให้ X เป็นเซตใด ๆ

- (1) ถ้า $G = S_X$ หรือ K_X แล้ว G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leq 2$
- (2) ถ้า $G = A_X$ หรือ S_X' แล้ว G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ $|X| \leq 3$
- (3) ถ้า $G = S_X/A_X$ หรือ S_X/K_X แล้ว G ให้โครงสร้างของสกีวเซมิฟิลด์ เมื่อและต่อเมื่อ X เป็นเซตจำกัด
- (4) S_X/S_X' ให้โครงสร้างของฟิลด์

ภาควิชา คณิตศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2531

ลายมือชื่อนิสิต ณัฐรนาถ ไตรภพ
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา บุพการณ ธีมประสิทธิ์

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสี่เหลี่ยมนี้เพียงแผ่นเดียว

NUTTANARD TRIPHOP : GROUPS ADMITTING SKEW-SEMI-FIELD STRUCTURE.
THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. YUPAPORN KEMPRASIT, PH.D., 54 PP.

An additively commutative semiring $(S, +, \cdot)$ with zero 0 is called a skew-semifield if $(S - \{0\}, \cdot)$ is a group.

A group G is said to admit a skew-semifield [field] structure if there exists an operation $+$ on G^0 such that $(G^0, +, \cdot)$ is a skew-semifield [field] where G^0 is the group G with the zero 0 adjoined.

For any field F and any positive integer n , let $G_n(F)$, $U_n(F)$ [$L_n(F)$], $P_n(F)$, $O_n(F)$, $V_n(F)$, $W_n(F)$ and $G'_n(F)$ denote the group of all $n \times n$ nonsingular matrices over F , the group of all $n \times n$ upper [lower] triangular nonsingular matrices over F , the group of all $n \times n$ permutation matrices over F , the group of all $n \times n$ orthogonal matrices over F , the group of all $n \times n$ unimodular matrices over F , the group of all $n \times n$ matrices over F whose determinants are equal to 1 or -1 and the commutator subgroup of $G_n(F)$, respectively.

For any set X , let S_X , A_X , K_X and S'_X denote the symmetric group on X , the alternating group on X , the group of all almost identical permutations of X and the commutator subgroup of S_X , respectively.

The main results of this research are as follows :

Theorem 1. Let F be a field and n a positive integer.

(1) If $G = G_n(F)$, $V_n(F)$ or $W_n(F)$, then G admits a skew-semifield structure if and only if $n = 1$.

(2) If $G = U_n(F)$, $L_n(F)$, $O_n(F)$ or $G'_n(F)$, then G admits a skew-semifield structure if and only if either $n = 1$ or $n = 2$ and $|F| = 2$.

(3) $G_n(F)/V_n(F)$ and $G_n(F)/G'_n(F)$ admit a field structure.

(4) If F is a finite field, then $G_n(F)/W_n(F)$ admits a skew-semifield structure if and only if the order of F is equal to $2p^m - 1$ for some prime p and positive integer m .

(5) If the characteristic of F is equal to 2, then $G_n(F)/W_n(F)$ admits a field structure.

(6) If F is an ordered field, then $G_n(F)/W_n(F)$ admits a semifield structure.

Theorem 2. Let X be a set.

(1) If $G = S_X$ or K_X , then G admits a skew-semifield structure if and only if $|X| \leq 2$.

(2) If $G = A_X$ or S'_X , then G admits a skew-semifield structure if and only if $|X| \leq 3$.

(3) If $G = S_X/A_X$ or S_X/K_X , then G admits a skew-semifield structure if and only if X is finite.

(4) S_X/S'_X admits a field structure.

ภาควิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์
สาขาวิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2531

ลายมือชื่อนิสิต ณัฐธนาถ ไตรภาพ

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา อนุชานันท์ เกษมวงษ์

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Assoc. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my father, mother and brother for their encouragement throughout my graduate study.



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	v
ACKNOWLEDGEMENT	vi
INTRODUCTION	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES	3
II GENERAL PROPERTIES	9
III MATRIX GROUPS AND QUOTIENT GROUPS OF MATRIX GROUPS	15
IV PERMUTATION GROUPS AND QUOTIENT GROUPS OF PERMUTATION GROUPS	46
REFERENCES	53
VITA	54

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย