หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทฤษฎีและแนวคิด

2.1 ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบอิลาสติก - พลาสติก (Elastic - Plastic Analysis)เป็นการวิเคราะห์ที่คำนึงถึงผลของ กำลังวัสดุ (Strength) ซึ่งมีความไม่เชิงเส้นของวัสดุ (Material Nonlinearity) เพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมของโครงสร้างทั้งในช่วงอิลาสติกและพลาสติก โดยการวิเคราะห์นี้ จะทราบถึงลำดับการเกิดจุดหมุนพลาสติก(Plastic Hinge) และสถานะภาพของโครงสร้างที่ถูกน้ำหนักบรรทุกกระทำจนกระทั่งโครงสร้างเกิดการวิบัติ(Collapse)ซึ่งสามารถแบ่งการวิเคราะห์ออกได้ดังนี้(ปณิธาน ลักคุณประสิทธิ์ ,2533)

- การวิเคราะห์อันดับที่หนึ่ง(First - Order Analysis) เป็นการวิเคราะห์โดยมีสมมุติฐานให้โครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งน้อยมาก และสามารถเขียนสมการสมดุลย์โดยใช้รูปร่างที่ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลง(Undeformed Geometry)

- การวิเคราะห์อันดับที่สอง(Second- Order Analysis)เป็นการวิเคราะห์โดยมีสมมุติฐานให้โครงสร้างมีค่าการเปลี่ยนตำแหน่งมาก และสร้างสมการสมดุลย์โดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (Deformation) ของโครงสร้างจากอิทธิพลของ แรงกระทำซึ่งจะยังผลให้เกิดการคู่ควบ(Coupling) กันของแรงกระทำกับระยะการเปลี่ยนตำแหน่งหรืออนุพันธ์ของตัวแปรนี้

พฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อใช้วิธีการวิเคราะห์แบบต่างๆ จะได้ผลการตอบสนองดังรูปที่ 2.1 และมีสมมุติฐานต่างๆ ดังรูปที่ 2.2

จากการศึกษาถึงพฤติกรรมที่แท้จริงของโครงสร้างพบว่า ข้อต่อที่ใช้งานอยู่ในปัจจุบันจะมีพฤติกรรมอยู่ระหว่างข้อต่อแบบแข็งและข้อต่อแบบหมุน ดังนั้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กให้ได้ผลการวิเคราะห์ใกล้เคียงกับพฤติกรรมของโครงสร้างจริงนั้นจึงจำเป็นต้องพิจารณาผลกระทบเนื่องจากความอ่อนตัว(Flexibility)ของข้อต่อในการวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กด้วย ซึ่งผลของการยึดรั้งของข้อต่อ ในโครงสร้างเหล็กไม่เพียงแต่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของการกระจายของโมเมนต์ในคานและเสาเท่านั้นแต่ยังทำให้มีผลต่อการเพิ่มผลกระทบของ P - Δ เนื่องจากการเพิ่มของ Frame Drift ในการวิเคราะห์อีกด้วย

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างเหล็กข้อต่อกึ่งแข็งเชิงอิลาสติก - พลาสติกอันดับที่สอง โดยนำผลการสร้างสตีฟเนสขององค์อาคารคาน - เสา ตามวิธีการของ Goto and Chen ,1989 มาสร้างใหม่ โดยจะได้สตีฟเนสขององค์อาคารคาน - เสา ที่พิจารณาถึงผลกระทบของข้อต่อที่ปลายทั้งสองขององค์อาคาร สตีฟเนสที่ได้นั้น จัดอยู่ในรูปสมการที่เรียกว่าฟังกชันเสถียรภาพ(Stability Functions) ที่เป็นฟังกชันตรีโกณมิติและฟังกชันไฮเปอร์โบลิค จากนั้นจึงนำมาจัดรูปให้สมการอยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้ฟังก์ชั่นที่ต่างกันของแรงอัดและแรงดึงและลดความไม่เสถียรภาพเชิงเลข(Numerical Instability) ในกรณีที่แรงแนวแกนมีค่าต่ำ

การคำนึงถึงผลกระทบของข้อต่อที่ปลายทั้งสองขององค์อาคาร ต่อพฤติกรรมการรับน้ำหนักบรรทุกของโครงสร้างเหล็กนั้น โดยพิจารณาเลือกใช้รูปแบบของข้อต่อแบบ Three Parameter Power Model (Kishi and Chen ,1991) เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และมุมเปลี่ยนที่ข้อต่อต่างๆที่เชื่อมต่อระหว่างคานกับเสา ซึ่งรูปแบบข้อต่อชนิดนี้ จะให้ค่าทางกายภาพที่เหมาะสม และให้ผลการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำ เมื่อสร้างสตีฟเนสขององค์อาคารคาน - เสา เสร็จแล้วจึงนำมารวมกันโดยวิธีรวมสตีฟเนสตรง(Direct Stiffness Method) แก้ ระบบสมการไม่เชิงเส้นหลายตัวแปรโดยใช้การกำจัดแบบเกาซ์ และ วิธี การทำซ้ำ โดยนิวตัน - แรพสัน และเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นเรื่อยๆ(Direct Load Factor Increment) จนถึงระดับของตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้โครงสร้างเหล็กไร้เสถียรภาพ(Instability)

2.2 สมมุติฐาน

2.2.1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุเป็น แบบอิลาสติก - พลาสติกสมบูรณ์ (Elastic - Perfectly Plastic Material)

2.2.2. แรงกระทำเป็นแรงสถิตย์ และกระทำที่ข้อต่อเท่านั้น

2.2.3. ค่าแรงในแนวแกนมีผลต่อค่าโมเมนต์พลาสติก

2.2.4. องค์อาคารรับโมเมนต์มีพฤติกรรมตามสมมุติฐานของเบอร์นูลลี - ออยเลอร์ (Bernoulli - Euler Hypothesis)

2.2.5. ความสัมพันธ์ของโมเมนต์กับการโก่งเป็น Bilinear

2.2.6. มีการป้องกันการเกิดการโค้งงอเฉพาะที่ (Local Buckling) , การโค้งงอด้านข้าง (Lateral Buckling) และการบิดงอ (Twist Buckling) อย่างเพียงพอ

2.2.7. ไม่คำนึงถึงความไม่เชิงเส้นของสตีฟเนสแนวแกน (Bowing Effect)

2.2.8. องค์อาคารเกิดการเปลี่ยนรูปร่าง(Deformation) ,เกิดความเครียด(Strain) และมีการเคลื่อนที่ของวัตถุแกร่ง(Rigid Body) น้อยมาก

2.2.9. ข้อต่อทุกชนิดจะมีพฤติกรรมระหว่าง Perfectly Pinned และ Fully Rigid และมีการตอบสนองต่อแรงกระทำแบบไม่เชิงเส้น(Nonlinear)

2.2.10. หน้าตัดเป็นรูป Wide Flange

2.3 พฤติกรรมของข้อต่อ(Behavior of Connection)

ข้อต่อเป็นตัวกลางที่สำคัญ ทำหน้าที่ส่งถ่ายแรงต่างอาทิเช่น แรงตามแนวแกน , แรงเฉือน ,โมเมนต์ดัด และแรงบิด จากองค์อาคารหนึ่งไปยังอีกองค์อาคารหนึ่ง ในการพิจารณาข้อต่อระหว่างคานกับเสาในโครงข้อกึ่งแข็งระนาบ พบว่าไม่ต้องพิจารณาผลของแรงบิด และข้อต่อส่วนใหญ่มักจะมีการเปลี่ยนรูปร่างตามแรงแนวแกนและแรงเฉือนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากโมเมนต์(Lui and Chen ,1987)

จากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมา พฤติกรรมของข้อต่อจะแสดงออกมาในรูปความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์และมุมเปลี่ยน ดังรูปที่ 2.3 จะแสดงให้เห็นลักษณะ การเปลี่ยนรูปร่างของข้อต่อระหว่างคานกับเสา เมื่อข้อต่อได้รับโมเมนต์กระทำจะเกิดการเปลี่ยนรูปร่างขึ้น ซึ่งลักษณะ การเปลี่ยนรูปร่างที่สามารถสังเกตุได้ชัดเจนคือมุมเปลี่ยน(Relative Angle Change) หรือมุม θ_r ดังรูปที่ 2.4 แสดงความสัมพันธ์ของโมเมนต์และมุมเปลี่ยนของข้อต่อในแบบต่างๆ ซึ่งนิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยมีข้อสังเกตดังนี้(Chen and Lui ,1991)

2.3.1. ข้อต่อทุกชนิดจะมีพฤติกรรมอยู่ระหว่าง Ideally Pinned (แกนนอน) และ Fully Rigid (แกนตั้ง)

2.3.2. ณ.จุดที่โมเมนต์มีค่าเท่ากัน ข้อต่อที่มีความอ่อนตัวสูง จะให้ค่ามุมเปลี่ยนที่สูงกว่าข้อต่อที่มีความอ่อนตัวน้อย

2.3.3. ค่าโมเมนต์สูงสุดที่ข้อต่อรับได้ จะแปรผันตาม ความแข็งแรงของข้อต่อ

2.3.4. ข้อต่อจะมีพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear)

ในช่วงแรกของกราฟพบว่าจะเป็นเส้นตรง ซึ่งสามารถนำไปออกแบบโครงสร้างเหล็กในช่วงน้ำหนักบรรทุกใช้งาน(Serviceability Limit State) แต่ไม่สามารถนำไปใช้กับช่วงน้ำหนักบรรทุกสูงสุด(Ultimate Limit State)

ข้อควร พิจารณาที่สำคัญของ พฤติกรรมของข้อต่อคือ เมื่อมีโมเมนต์กระทำที่ข้อต่อ ข้อต่อจะหมุนดังรูปที่ 2.5 แต่ถ้าทิศทางของแรงโมเมนต์กระทำกลับทิศทาง ทำให้ ข้อต่ออยู่ในสภาพลดน้ำหนัก(Unload)และมุมเปลี่ยนจะลดลงตามเป็นเส้นตรงโดยมีความชันเท่ากับความชันเริ่มต้น(Initial Slope)จากพฤติกรรมข้างต้นสามารถแสดงให้ชัดเจนโดยใช้ Portal Frame ดังรูปที่2.6.aจะมีเฉพาะน้ำหนักบรรทุกในแนวดิ่งเท่านั้น ทำให้เกิดโมเมนต์ที่ข้อต่อเท่ากับ Mg และ ถ้าเพิ่มน้ำหนักบรรทุกในแนวราบ กระทำต่อโครงสร้าง ข้อต่อด้านใต้ลม(Leeward) จะถูกโมเมนต์กระทำเพิ่มขึ้น แต่ข้อต่อด้านเหนือลม(Windward) จะถูกโมเมนต์กระทำลดลง (Unload) ดังรูปที่ 2.6b จากผลลัพธ์ที่ได้ พบว่าค่าสตีฟเนสของ ข้อต่อ ภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุกในแนวราบจะมีพฤติกรรมที่แตกต่างกัน ซึ่งจะเห็นผลต่างชัดเจนมาก

ในกรณีที่น้ำหนักบรรทุกในแนวดิ่งทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดที่ข้อต่อและมีน้ำหนักบรรทุกในแนวราบมากระทำเพิ่ม ทำให้ข้อต่อด้านใต้ลมจะมีพฤติกรรมเป็นข้อต่อแบบหมุน แต่ในข้อต่อด้านเหนือลมจะมีพฤติกรรมในช่วงอิลาสติก (Linear Elastic) โดยมีสตีฟเนสเท่ากับสตีฟเนสเริ่มต้น(Initial Stiffness)

รอยต่อที่จะทำการศึกษาประกอบไปด้วยข้อต่อ 4 ประเภทดังนี้

ก. ข้อต่อแบบ Single Web Angle

ข. ข้อต่อแบบ Double Web Angle

ค. ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle

ง. ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle with Double Web Angles

ก. <u>ข้อต่อแบบ Single Web Angle</u>

ในการใช้ข้อต่อเพื่อรับแรงเฉือนเพียงอย่างเดียว โดยปกติผู้ออกแบบมักจะใช้ข้อต่อแบบ Double Web Angle แต่ในการออกแบบบางครั้งถ้าคำนึงถึงความประหยัดและความเหมาะสมในการประกอบติดตั้ง การใช้รอยต่อแบบ Single Web Angle จะเหมาะสมกว่าข้อต่อแบบ Double Web Angle (สถาพร ,2531)

การออกแบบคานที่ปลายเป็นข้อต่อแบบ Single Web Angle มักสมมุติให้เป็นข้อต่อแบบหมุน ซึ่งรับแรงเฉือนที่ปลายคาน ข้อต่อ แบบนี้ จะมีค่า ความต้านทานการหมุนต่อโมเมนต์น้อย(Moment - Rotation Rigidity) และมีความอ่อนตัว(Flexibility) สูง

ลักษณะของรอยต่อแบบนี้ประกอบด้วยเหล็กฉากยึดด้วยสลักเกลียว(Bolt) หรือเชื่อมติดกับเสาและก้านคาน(Beam Web) ดังรูปที่ 2.7 a

ข. <u>ข้อต่อแบบ Double Web Angle</u>

ประกอบด้วยเหล็กฉาก 2 ชิ้น เชื่อมหรือยึดด้วยสลักเกลียว ติดกับเสาและก้านคาน ดังรูปที่ 2.7c จากการทดสอบ พบว่าข้อต่อชนิดนี้สามารถรับ โมเมนต์สูงสุดได้ประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์ของข้อต่อแบบข้อแข็งในช่วงน้ำหนักบรรทุกใช้งาน (Lewitt et al. ,1966)

ข้อต่อแบบนี้ ถูกจัดอยู่ในรอยต่อ ประเภทที่สอง(Simple Connection or Shear Connection) ตามข้อกำหนดของ AISC - ASD (1989)

ค. <u>ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle</u>

มีลักษณะของข้อต่อ ดังรูปที่ 2.7e ตามข้อกำหนดของ AISC - ASD (1989) ได้กำหนดให้รอยต่อแบบ Top and Seat Angle เป็นไปตามข้อกำหนดดังนี้

1. Seat Angle จะรับเฉพาะแรงเฉือนเท่านั้น

2. Top Angle ไม่สามารถรับน้ำหนักบรรทุกแนวดิ่งได้ แต่จะใช้เพื่อรักษาเสถียรภาพด้านข้างของข้อต่อเท่านั้น

จากการทดสอบพบว่ารอยต่อชนิดนี้สามารถจะต้านทานโมเมนต์ที่ปลายคานได้บางส่วนและได้ถูกจัดอยู่ในประเภท PR ตามข้อกำหนดของ AISC - LRFD (1986)

ง. <u>ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle With Double Web Angle</u>

มีลักษณะของข้อต่อ ดังรูปที่ 2.7f และข้อต่อแบบนี้ได้จัดอยู่ในประเภทที่สาม ตามข้อกำหนดของ AISC- ASD(1989)และจัดอยู่ในประเภทPRตามข้อกำหนดของ AISC - LRFD(1986) ซึ่ง Double Web Angle ได้ถูกใช้เพื่อช่วยการยึดรั้งของรอยต่อแบบ Top and Seat Angle และช่วยต้านทานแรงเฉือน

2.4 รูปแบบของข้อต่อ (Modeling of Connections)

จากการศึกษาพฤติกรรมของข้อต่อ โดยการทดสอบและนำมาสร้างสมการ โดยอาศัยการ Fit - Curve ได้มีการเสนอรูปแบบต่างๆ เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับมุมเปลี่ยน ได้แก่ Linear Model(Rathbun ,1936 ,Monforton and Wu ,1963) ,Bilinear Model (Tarpy and Cadinal ,1981 ,Lui and Chen ,1983) ,Polynomial Model(Frye and Morris ,1976) ,B - spline Model(Jones et al. ,1982) ,Exponential Model(Lui and Chen ,1986) และ Power Model(Colson and Louvear ,1983 , Ang and Morris ,1984 ,Kishi and Chen ,1990) ซึ่งโมเดลต่างๆ มีส่วนที่ดีและเหมาะสมแตกต่างกันไปตามสภาพการใช้งาน(D.A. Nethercot and W.F. Chen ,1988) ดังรูปที่ 2.8 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของโมเมนต์กับมุมเปลี่ยนในรูปแบบต่างๆ

โดยงานวิจัยนี้ พิจารณาเลือกใช้รูปแบบข้อต่อแบบ Three Parameter Power Model ซึ่งเสนอโดย Kishi and Chen (1990) ซึ่งเป็นรูปแบบ Semi - Empirical Connection Model โดยมีตัวแปร 3 ตัวแปรดังนี้

ก. Initial Stiffness (Rki)

ข. Ultimate Moment Capacity (Mu)

ค. Shape Function (n)

ซึ่งค่า Initial Stiffness และ Ultimate Moment Capacity คำนวนจากการวิเคราะห์ลักษณะทางกายภาพและค่า Shape Function หาได้จากการทำ Curve Fitting Technique ถึงแม้ว่า สมการ Three Parameter Power Model จะไม่ได้พิจารณาถึงช่วง Strain Hardening แต่ให้ค่าที่แทนคุณสมบัติทางกายภาพ (Physically Meanigful) และให้ผลการวิเคราะห์ที่รวดเร็วและมีความแม่นยำ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.4.1 รูปแบบ Three Parameter Power Model

สมการทั่วไปของ Power Model (Kishi and Chen ,1990) จัดอยู่ในรูป

$$m = \frac{\theta}{\left(1+\theta^n\right)^{1/n}}$$ สำหรับ $\theta > 0$ และ $m > 0$ (2.1)

$$\theta = \frac{m}{\left(1-m^n\right)^{1/n}}$$ สำหรับ $\theta > 0$ และ $m > 0$ (2.2)

โดย $m = M / Mu$

$\theta = \theta_r / \theta_0$

$\theta_o = Mu / Rki$, The reference plastic rotation

ค่า Connection Tangent Stiffness (Rkt) ณ.ค่ามุมเปลี่ยนใดๆ สามารถหาค่าได้จากทำการ Differrentiating ค่าโมเมนต์เทียบกับค่าสัมบูรณ์ของมุมเปลี่ยน ($|\theta r|$) ซึ่งจัดรูปได้ดังนี้

$$R_{kt} = \frac{dM}{d|\theta_r|}\bigg|_{|\theta_r|} = \frac{Mu}{\theta_0\left(1+\theta^n\right)^{1+1/n}}$$, เมื่อข้อต่อรับน้ำหนักบรรทุก (2.3)

$$R_{kt} = \frac{dM}{d|\theta_r|}\bigg|_{\theta_r=0} = \frac{Mu}{\theta_0} = R_{ki}$$, เมื่อข้อต่อลดน้ำหนักบรรทุก (2.4)

สมการ 2.1 หรือ 2.2 สามารถแสดงในรูปกราฟของความสัมพันธ์ ระหว่าง m กับ θ ดังรูปที่ 2.9

จากรูปแบบสมการ Three Parameter Power Model นั้นจะช่วยให้ผู้ออกแบบสามารถคำนวนหาค่า Connection Tangent Stiffness และ ค่ามุมเปลี่ยนจากสมการ 2.1 ถึงสมการ2.4 ได้โดยตรงไม่ต้องทำการทำซ้ำ(Iteration)ซึ่งจะทำการวิเคราะห์โครงสร้างไม่เชิงเส้นได้อย่าง รวดเร็วและแม่นยำ

2.4.2.ค่าตัวแปรมาตฐานสำหรับข้อต่อใช้เหล็กฉาก (Standardized Parameter for Angle Connection)

เพื่อความสะดวกในการออกแบบจึงสร้างตัวแปรไร้หน่วย(Nondimensional Parameter) แทนค่าทางกายภาพของข้อต่อใช้เหล็กฉาก ดังรูปที่ 2.10

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\beta = g_c/l \qquad \gamma = l/t \qquad \delta = d/t$$
$$\kappa = k/t \qquad \omega = W/t \qquad \rho = t_w/t_t$$

โดย

g_c = ระยะจากขอบเหล็กฉากถึงจุดศูนย์กลางของแนวสลักเกลียว

t = ความหนาของเหล็กฉาก

k = ระยะจาก Angle heel ถึง Toe ของ Fillet

l = ความยาวของเหล็กฉาก

d = ความลึกของคาน

W = เส้นผ่าศูนย์กลางของน๊อต

ตัวแปรความสัมพันธ์ของสตีฟเนสและกำลัง(Strengh) ของขาเหล็กฉาก มีดังนี้

$$I_0 = \frac{t^3}{12}$$

$$M_0 = \frac{F_y t^3}{4}$$

$$V_0 = \frac{F_y t}{2}$$

$$\zeta = V/V_0$$

โดย I_0 = ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยต่อหน่วยความยาว

M_0 = ค่าโมเมนต์พลาสติกต่อหน่วยความยาว

V_0 = ค่า Plastic Shear Capacity ต่อหน่วยความยาวของขาเหล็กฉาก

V = ค่าแรงเฉือนของขาเหล็กฉาก

ζ = ค่าแรงเฉือนไร้หน่วย

ตัวแปร Subscripts t = top , s = seat and w = web angle

2.4.3 สมการของ Initial Stiffness และ Ultimate Moment Capacity ของข้อต่อ

2.4.3.1 ข้อต่อแบบ Single and Double Web Angle

2.4.3.1.1. Initial Connection Stiffness

จากผลการทดสอบรอยต่อโดย Bell et al.(1958) และ Lewitt et al.(1966) โดยใช้ข้อต่อแบบ Double Web Angle ค่า Initial Elastic Stiffness ของ Web Angle โดยอาศัยสมมุติฐานดังต่อไปนี้(Lui and Chen ,1991)

ก. ไม่คำนึงถึงผลกระทบการเปลี่ยนรูปร่าง(Deformation) ของข้อต่อจากแรงเฉือน

ข. ส่วนของเหล็กฉากที่ยึดติด กับ ปีกของเสา (Column Flange)จะมีพฤติกรรมในช่วงอิลาสติก และ ขาของเหล็กฉากที่ยึดติดกับคานจะมีพฤติกรรมเป็นวัตถุแกร่ง(Rigid Body)

ค. การเปลี่ยนรูปร่างของข้อต่อมีค่าน้อยมาก

ง.ส่วนของเหล็กฉากที่ยึดติดกับปีกของเสามีพฤติกรรมคล้ายกับ Moderately Thick Plate โดยกำหนดให้มี Fixed Support ที่ Fastener Nut edge ด้านที่ติดกับก้านของคานและอยู่ในสภาวะสมดุลระหว่างแรงบิดกับโมเมนต์ดังรูปที่ 2.11

โดยอาศัยสมมุติฐานข้างต้นและใช้ทฤษฎี Elastic Bending - Torsion สำหรับชิ้นส่วนของเหล็กฉากที่ยึดติดกับเสา ซึ่งจะได้สมการของสตีฟเนสเริ่มต้น(Initial Stiffness) ของSingle Web Angle Connection ดังนี้

$$\frac{R_{kiw}}{EI_{ow}} = \frac{12\alpha\cosh(\alpha\beta'_w)}{7.8\left[(\alpha\beta'_w)\cosh(\alpha\beta'_w)-\sinh(\alpha\beta'_w)\right]} \tag{2.5}$$

โดย EI_{ow} = โมเมนต์สตีฟเนสต่อหน่วยความยาวของขาเหล็กฉากที่ยึดติดกับเสา

α = 4.2967 เมื่อ Poisson's Ratio เท่ากับ 0.30

$$\beta'_w = \beta_w - \frac{1}{\gamma_w}\left[\kappa_w - \frac{\omega_w}{2}\right] \tag{2.6}$$

จากสมการ 2.5 นำมาสร้างกราฟดังรูปที่ 2.12 สำหรับ β'_w ในช่วง 0.0 ถึง 0.5 ซึ่งค่ามีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ในช่วงที่ β'_w มากกว่า 0.5

2.4.3.1.2.Ultimate Connection Moment Capacity

โดยอาศัย Elastic - Plastic Collapse Mechanism เพื่อหาค่าUltimate Moment Capacity ของข้อต่อแบบ Web Angle

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์พลาสติกกับแรงเฉือน เป็นไปตาม Tresca Yield Criterian และ Plastic Yield Line Theory ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการจัดรูปของสมการกำลังสี่ ดังนี้

$$\zeta_w^{\,4} + \beta^*_w - 1 = 0 \tag{2.7}$$

โดย

$$\beta^*_w = \beta'_w\gamma_w + \frac{\omega_w}{2} \tag{2.8}$$

แทนค่า β'_w จากสมการ 2.6 ในสมการ 2.8 จะได้

$$\beta^*_w = \beta_w\gamma_w - \kappa_w \tag{2.9}$$

และ โดยสมมุติฐานที่ให้แรงเฉือนกระจายเป็นเส้นตรงตลอดความสูงของเหล็กฉาก จะได้

$$\frac{M_{uw}}{M_{ow}t_w} = \frac{(2\zeta_w + 1)}{3}\gamma_w^2 \qquad (2.10)$$

ค่า Initial Stiffness และ Ultimate Moment Capacity จากสมการ 2.5 และสมการ 2.10 นั้นเป็นค่าของข้อต่อแบบ Single Web Angle โดยเมื่อพิจารณาข้อต่อแบบ Double Web Angle จะได้ค่าเป็น 2 เท่าของสมการข้างต้น

2.4.3.2 ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle

2.4.3.2.1.Initial Connection Stiffness

จากการพิจารณาผลการทดสอบของ Hechtman and Johnston(1947) ,Altman et al.(1982) และ Azizinamini et al.(1985) พบว่าณ.จุดเสียหาย ข้อต่อมีการหมุนรอบ Critical Section ของ Seat Angle(จุด c ในรูป 2.13) และ Top Angle มีความต้านทานต่อโมเมนต์ที่ปลายคาน

ดังนั้นเพื่อหาค่า Initial Elastic Stiffness โดยใช้สมมุติฐานดังต่อไปนี้

ก. จุดหมุนของข้อต่ออยู่ที่ขาของเหล็กฉาก ใกล้ๆกับ Compressive - Beam Flange ที่จุดปลายคาน (จุด c)

ข. Top Angle มีพฤติกรรมคล้ายกับคานยื่น โดยมีการยึดแน่นที่ขอบน๊อตที่ติดกับเสาดังรูปที่ 2.14

ค. ไม่คำนึงผลการต้านทานโมเมนต์ ณ.จุดศูนย์กลางการหมุน (จุด c)

ซึ่งจะได้สมการของ Initial Connection Stiffness ดังนี้

$$D_{ts} = \frac{R_{kits}}{EI_{ot}}\frac{1}{(1+\delta_t)^2} = \frac{3}{\beta_t'(\gamma_t^2\beta_t'^2 + 0.78)} \qquad (2.11)$$

โดย

$$\beta_t' = \beta_t - \frac{1}{2\gamma_t}(1+\omega_t) \qquad (2.12)$$

พิจารณาสมการ 2.11 โดยสร้างกราฟดังรูปที่ 2.15 สำหรับ β'_t ในช่วง 0.0 ถึง 0.5 และสำหรับ γ_t จาก 3.0 ถึง 21.0

2.4.3.2.2.Ultimate Connection Moment Capacity

โดยอาศัย Work Equation และจากสมมุติฐานให้ Mechanism เป็นไปตาม Drucker's Yield Criterian (ดังรูปที่ 2.16)สำหรับ Flexural - Shear interaction จะได้สมการกำลังสี่ในรูปของ ζ_t= V / Vo ดังนี้

$$\zeta_t^4 + \beta_t^* \zeta_t - 1 = 0 \tag{2.13}$$

โดย

$$\beta_t^* = \beta_t' \gamma_t - \kappa_t \tag{2.14}$$

ค่า Ultimate Moment Capacity พิจารณาจากการรวมผลของโมเมนต์รอบจุดหมุนของข้อต่อ ซึ่งสามารถเขียนสมการแบบไร้หน่วย ดังนี้

$$\frac{M_{uts}}{M_{ot} t_t} = \gamma_t \left(1 + \zeta_t \left[1 + \beta_t^* + 2(\kappa_t + \delta_t)\right]\right) \tag{2.15}$$

2.4.3.3 ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle with Double Web Angles

2.4.3.3.1.Initial Connection Stiffness

จากการพิจารณาผลการทดสอบของAltman et al.(1982) และ Azizinamini et al.(1985) ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐาน (ดังรูปที่ 2.17)ดังต่อไปนี้

ก. คานและขาของเหล็กฉาก ที่ยึดติดกับคานมีพฤติกรรมเป็น Rigid Member

ข.จุดหมุนของข้อต่ออยู่ที่จุดสัมผัสระหว่างขาเหล็กฉากที่ติดกับ Compressive Flange ของคานและที่จุดปลายของคาน

ค. Top Angle มีพฤติกรรมแบบคานยื่น

ง. Web Angle มีพฤติกรรมแบบคานยื่น เช่นเดียวกับ Top Angle

จ. ไม่คำนึงถึงผลของ Resisting Moment ของเหล็กฉากที่จุดหมุนของข้อต่อ

จากสมมุติฐานข้างต้น จะได้ค่า Initial Connection Stiffness , Rki ดังนี้

$$\frac{R_{ki}}{EI_{ot}} = \frac{R_{kits}}{EI_{ot}} + \frac{R_{kiw}}{EI_{ot}} \tag{2.16}$$

โดยเทอมแรกด้านขวาของสมการ 2.16 คือค่า Initial Connection Stiffness ของ Top and Seat Connection โดยพิจารณาจากสมการ 2.11

เทอมที่สองด้านขวามือของสมการ 2.16 คือค่า Initial Connection Stiffness ที่กระจายการรับโดย Double Web Angle ดังสมการ

$$D_w = \frac{R_{kiw}}{EI_{ot}} \frac{1}{\rho\,(1+\delta_t)^2} = \frac{3}{2\beta'_w\left(\gamma_w^2 \beta'^2_w + 0.78\right)} \tag{2.17}$$

โดย
$$\beta'_w = \beta_w - \frac{1}{2\gamma_w(1+\omega_w)} \tag{2.18}$$

จากสมการ 2.11 ,2.16 , 2.17 สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{R_{ki}}{EI_{ot}} = (D_{ts} + \rho D_w)\,(1+\delta_t)^2 \tag{2.19}$$

จากสมการความสัมพันธ์ข้างต้นนำไปสร้าง Characteristic Curves ดังรูปที่ 2.18 และรูปที่ 2.19

2.4.3.3.2.Ultimate Connection Moment Capacity

พิจารณาถึง Collapse Mechanism ของ Top and Seat Angle Connection with Double web Angles โดยเกิดจากการรวม Collapse Mechanism (รูปที่ 2.20) ของ Double Web Angle Connection กับ Top and Seat Angle Connection ซึ่งจะได้สมการของ Ultimate Moment Capacity , Mu ดังนี้

$$\frac{M_u}{M_{ot} t_t} = \frac{M_{uts}}{M_{ot} t_t} + \frac{M_{uw}}{M_{ot} t_t} \tag{2.20}$$

โดยเทอมแรกด้านขวาของสมการ 2.20 สามารถหาค่าได้จากสมการ 2.15

เทอมที่สองด้านขวาของสมการเป็นค่า Ultimate Connection Capacity สำหรับ Double Web Angle ซึ่งเป็นส่วนร่วมกันของเหล็กฉาก ดังนี้

$$\frac{M_{uw}}{M_{ot} t_t} = \gamma_w (1+\zeta_w)\rho^3 \left(\frac{\gamma_w \zeta_w - 1}{3(\zeta_w + 1)} + \delta_w + \frac{1}{\rho} \right) \tag{2.21}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.4.4 สมการ Shape Parameter , n

ค่า Shape Parameter สามารถหาได้จากการ Best Fit จากข้อมูลผลการทดสอบ

Kishi et al. (1991 a&b) ได้สร้างสมการการวิเคราะห์ทางสถิติ ของผลการทดสอบเพื่อสร้างค่า Shape Parameter โดยแยกตามชนิดของข้อต่อ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.4.4.1. ข้อต่อแบบ Single Web Angle

สร้างสมการของShape Parameterจากการทำ Least Mean Square ของผลการทดสอบ 16 ชิ้น(Kishi et al. (1991 a&b))ได้สมการดังนี้

$$n = 0.520 \log_{10} \theta_0 + 2.291 \geq 0.60 \qquad (2.22)$$

โดย θ_0 = Mu / Rki

2.4.4.2. ข้อต่อแบบ Double Web Angle

จากการพิจารณาผลการทดสอบ 14 ชิ้น (Kishi et al. (1991 a&b))ได้สมการดังนี้

$$n = 1.322 \log_{10} \theta_0 + 3.952 \geq 0.60 \qquad (2.23)$$

2.4.4.3. ข้อต่อแบบ Top and Seat Angle

จากการพิจารณาผลการทดสอบ 15 ชิ้น (Kishi et al. (1991 a&b))ได้สมการดังนี้

$$n = 2.003 \log_{10} \theta_0 + 6.070 \geq 0.40 \qquad (2.24)$$

2.4.4.4. ข้อต่อแบบ Top and Seat angle With Double Web Angles

จากการพิจารณาผลการทดสอบ 22 ชิ้น (Kishi et al. (1991 a&b))ได้สมการดังนี้

$$n = 5.483 \log_{10} \theta_0 + 14.745 \geq 0.80 \qquad (2.25)$$

รูปที่ 2.21 แสดงผลของการคำนวนจากสมการที่เสนอโดย Kishi et al.(1991 a&b) เปรียบเทียบกับผลการทดสอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.5 สตีฟเนสขององค์อาคาร

พิจารณาองค์อาคารมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A โมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากับ I และความยาวเท่ากับ L มีแรงกระทำที่ปลาย s_1 ถึง s_6 และ มีค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง v_1 ถึง v_6 ที่สอดคล้องกับแรงกระทำที่ปลาย s_1 ถึง s_6 ตามลำดับ และโดยคำนึงถึงผลของ Connection Flexibility ในสตีฟเนสขององค์อาคารดังรูปที่ 2.22

โดยรวมผลของ Connection Flexibility ในสตีฟเนสขององค์อาคารที่ปลายของคานโดยใช้ Equilibrium และ Compatibility ของข้อต่อ

พิจารณารูป 2.23

สมการ $M-\theta_r$ ของข้อต่อที่ปลาย A มีค่าดังนี้

$$\begin{pmatrix} r_{1nA} \\ r_{2nA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{kA} & -R_{kA} \\ -R_{kA} & R_{kA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1cnA} \\ d_{2cnA} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

สมการ $M-\theta_r$ ของข้อต่อที่ปลาย B มีค่าดังนี้

$$\begin{pmatrix} r_{1nB} \\ r_{2nB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{kB} & -R_{kB} \\ -R_{kB} & R_{kB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1cnB} \\ d_{2cnB} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

โดย

θ_r = $d_{1cn} - d_{2cn}$

R_k = Instantaneous Stiffness โดยพิจารณาจาก $M-\theta_r$

พิจารณาสมการสตีฟเนสของคานซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกกระทำที่ขั้วต่อ ดังนี้

$$r = k\ d \tag{2.28}$$

โดย

r = เวกเตอร์ของแรงที่ปลายองค์อาคาร

d = เวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ของปลายองค์อาคาร

k = เมตริกซ์สตีฟเนส

$$\begin{pmatrix} r_{1cnA} \\ r_{2cnA} \\ r \\ r_{1cnB} \\ r_{2cnB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{kA} & -R_{kA} & & & \\ -R_{kA} & R_{kA} & & & \\ & & k & & \\ & & & R_{kB} & -R_{kB} \\ & & & -R_{kB} & R_{kB} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_{1cnA} \\ d_{2dnA} \\ d \\ d_{1cnB} \\ d_{2cnB} \end{pmatrix}$$

(2.29)

10 x 1 10 x 10 10 x 1

โดยสามารถแทนด้วยสัญญลักษณ์ดังนี้

$$r_{aug} = k_{aug} d_{aug} \tag{2.30}$$

10x1 10x10 10x1

จากความสัมพันธ์ทาง Kinematic ระหว่างรูป 2.23 a แลรูป 2.23 b ซึ่งมี ค่า การเคลื่อนที่น้อยมาก สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{pmatrix} d_{1cnA} \\ d_{2cnA} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_{1cnB} \\ d_{2cnB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_{1int} \\ d_{2int} \\ d_{3int} \\ d_{4int} \\ d_{5int} \\ d_{6int} \\ d_{7int} \\ d_{8int} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยสามารถแทนด้วยสัญญลักษณ์ดังนี้

$$d_{aug} = T\, d_{int} \tag{2.32}$$

จาก Contragredient Law จะได้

$$r_{int} = T^T r_{aug} \tag{2.33}$$

ดังนั้นจะได้

$$r_{int} = T^{T} k_{aug} T \, d_{int} \tag{2.34}$$

หรือ $r_{int} = k_{int} d_{int}$

โดย

$$k_{int} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} & 0 & . & k_{13} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & 0 & k_{24} & k_{25} & 0 & . & k_{23} & k_{26} \\ 0 & 0 & R_{kA} & 0 & 0 & 0 & . & -R_{kA} & 0 \\ k_{14} & k_{24} & 0 & k_{44} & k_{45} & 0 & . & k_{34} & k_{56} \\ k_{15} & k_{25} & 0 & k_{45} & k_{55} & 0 & . & k_{35} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{kB} & . & 0 & -R_{kB} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . & \cdots & \cdots \\ k_{13} & k_{23} & -R_{kA} & k_{34} & k_{35} & 0 & . & R_{kA}+k_{33} & k_{36} \\ k_{16} & k_{26} & 0 & k_{46} & k_{56} & -R_{kB} & . & k_{36} & R_{kB}+k_{66} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

พิจารณารูปที่ 2.23 c จัดรูป Statically Condensation เพื่อหาสตีฟเนสขององค์อาคาร Hybrid ดังนี้

$$\begin{pmatrix} r_{int\,a_{6x1}} \\ \cdots\cdots \\ r_{int\,b_{2x1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{int\,aa_{6x6}} & . & k_{int\,ab_{6x2}} \\ \cdots\cdots & . & \cdots\cdots \\ k_{int\,ba_{2x6}} & . & k_{int\,bb_{2x2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{int\,a_{6x1}} \\ \cdots\cdots \\ d_{int\,b_{2x1}} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

ซึ่ง $r_{int\,b} = \mathbf{0} = k_{int\,ba} d_{int\,a} + k_{int\,bb} d_{int\,b}$ (2.37)

จะได้ $d_{int\,b} = -k_{int\,bb}^{-1} \left(k_{int\,ba} d_{int\,a} \right)$ (2.38)

แทนค่าสมการ 2.38 ในสมการ 2.36 จะได้

$$r_{int\,a} = \left(k_{int\,aa} - k_{int\,ab} k_{int\,bb}^{-1} k_{int\,ba} \right) d_{int\,a} \tag{2.39}$$

หรือ $r_{hyb_{6x1}} = k_{hyb_{6x6}} d_{hyb_{6x1}}$ (2.40)

โดย $r_{hyb} = r_{inta}$

$d_{hyb} = d_{inta}$

$k_{hyb} = k_{intaa} - k_{intab} k_{intbb}^{-1} k_{intba}$

และ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$
k_{ij} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix}
\frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\
 & \frac{12}{L^2}\Phi_1 & -\frac{6}{L}\Phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\Phi_1 & -\frac{6}{L}\Phi_2 \\
 & & 4\Phi_3 & 0 & \frac{6}{L}\Phi_2 & 4\Phi_4 \\
 & & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\
 & \text{sym.} & & & \frac{12}{L^2}\Phi_1 & \frac{6}{L}\Phi_2 \\
 & & & & & 4\Phi_3
\end{bmatrix} \tag{2.41}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= 1-\frac{1}{10}N-\frac{1}{8400}N^2+\ldots \\
\Phi_2 &= 1-\frac{1}{60}N-\frac{1}{8400}N^2+\ldots \\
\Phi_3 &= 1-\frac{1}{30}N-\frac{11}{25200}N^2+\ldots \\
\Phi_4 &= 1+\frac{1}{60}N+\frac{13}{25200}N^2+\ldots
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

โดยที่ Φ_i = ฟังก์ชันเสถียรภาพ ; i=1 - 4

$$N = \frac{PL^2}{EI}$$

เมื่อ P = แรงในแนวแกน

E = Modulus of Elasticity

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายละเอียดของการหาความสัมพันธ์ตามสมการ (2.42) แสดงในภาคผนวก ค สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้อนุกรมเทเลอร์ตามสมการ (2.42) จำนวน 3 เทอม (Goto and Chen, 1987) สมการ (2.42) สามารถเขียนในรูปของสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$[k(v)]\{v\} = \{s\} \tag{.2.43}$$

เมื่อ $[k(v)]$ เป็นเมตริกซ์สตีฟเนสขององค์อาคาร

$\{v\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง

$\{s\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงกระทำ

2.6 <u>การรวมสตีฟเนส</u>

ในกรณีที่องค์อาคารไม่ได้วางอยู่ในแกนราบหรือโคออดิเนตประจำตัว(Local Coordinate) ไม่ได้วางแกนอยู่ตรงกับแกนของโคออดิเนตโกลบอล (Global Coordinate) จำเป็นต้องมีการหมุนเพื่อเปลี่ยนตำแหน่งและแรงกระทำที่กำหนดซึ่งอยู่ในในโคออเนต ประจำตัวให้อยู่ในโคออดิเนตโกลบอลเสียก่อนการหมุนโคออดิเนตกระทำได้โดยการพิจารณาองค์อาคาร i อยู่ในระนาบ ดังรูปที่ 2.24

จากรูปโคออดิเนตโกลบอลเป็น XY และโคออดิเนตประจำตัวเป็น xy ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล กับโคออดิเนตประจำตัวเป็น

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

เมื่อ

v_i เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตประจำตัว

r_i เป็นเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล

α เป็นมุมระหว่างแกนแนวราบในโคออดิเนตประจำตัวกับแกนแนวราบในโค - ออดิเนตโกลบอล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{v\} = [a]\{r\} \quad (2.45)$$

สมการ (2.45) เป็นความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตประจำตัวกับการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำในโคออดิเนตประจำตัวกับแรงกระทำในโคออดิเนตโกลบอลได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T\{s\} \quad (2.46)$$

เมื่อ $\{s\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในโคออดิเนตประจำตัว

$\{R\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในโคออดิเนตโกลบอล

ดังนั้นจะสามารถหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอลขององค์อาคาร i ได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T[k(v)][a]\{r\}$$

หรือ $$\{R\} = [K_g]^i\{r\} \quad (2.47)$$

เมื่อ $[K_g]^i$ เป็นเมตริกซ์สตีฟเนสขององค์อาคาร i ในโคออดิเนตโกลบอล

ถ้าพิจารณาองค์อาคารทั้งหมด n ชิ้นส่วนในโครงสร้างจะได้

$$\{R\} = \left(\sum_{i=1}^{n}[K_g]^i\right)\{r\}$$

โดย $$[K] = \left(\sum_{i=1}^{n}[K_g]^i\right)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อ $[K]$ เป็นเมตริกซ์สตีฟเนสของโครงสร้าง

จะได้ $\{R\} = [K]\{r\}$ (2.48)

เมตริกซ์ $[K]$ ในสมการ (2.48) จะเป็นซิงกูลาร์(Singular Matrix) เนื่องจากมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง(Rigid Body Motion) อยู่ จำเป็นต้องใส่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เพียงพอที่จะไม่เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งจะได้เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ (Non - Singular Matrix) สามารถแก้สมการได้โดยการกำจัดแบบเกาซ์ (Gauss Elimination)

2.7 วิธีวิเคราะห์อันดับที่สองโดยวิธีนิวตัน - แรพสัน

จากสมการ (2.43) และ (2.48) จะเห็นว่าความสัมพันธ์ของแรงกระทำ และการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจะไม่เป็นเชิงเส้นทั้งองค์อาคารในโคออดิเนตประจำตัวตามสมการ (2.43) และในโกลบอลโคออดิเนตในตามสมการ (2.48) การแก้ระบบสมการลักษณะนี้ จำเป็นต้องใช้วิธีทำซ้ำ วิธีการนิวตัน - แรพสัน เป็นวิธีการหนึ่งในการเข้าหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น วิธีการจะกระทำได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการ(2.48)สมมุติให้ $\{\Psi\}$เป็นเวคเตอร์เหลือจากการทำซ้ำ ในการวิเคราห์โครงสร้างจะหมายถึงเวคเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced Force Vector, $\{Q\}$)หลักการก็คือ กำจัด $\{\Psi\}$ ให้มีค่าเข้าใกล้ $\{0\}$เพื่อกำจัดค่าแรงคงค้างให้เหลือน้อยที่สุด ซึ่งจะได้

$$\Psi\left(a_{n+1}^{i+1}\right) \cong \Psi\left(a_{n+1}^{i}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)_{n+1}^{i} \delta_{a_n}^{i} = 0 \qquad (2.49)$$

เมื่อ a ตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน f(a) ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง , $\{r\}$

f(a) ฟังก์ชันของ a ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวคเตอร์ของแรง, $\{R\}$

เมื่อการทำซ้ำเริ่มที่รอบที่ 1สมการการทำซ้ำรอบที่ 1 จะเป็น

$$a_{n+1}^{1} = a_n \qquad (2.50)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} = K_T = K \qquad (2.51)$$

เมื่อ K_T เป็นความชันของฟังก์ชัน f(a)

ถ้าเขียนในรูปการทำซ้ำหลายๆ ครั้งจะได้

$$K_T^i da_n^i = -\Psi_{n+1}^i \qquad (2.52)$$

$$da_n^i = -(K_T)^{-1}\{\Psi\}_{n+1}^i \qquad (2.53)$$

$$a_{n+1}^{i+1} = a_n + \Delta a_n^i = a_{n+1}^i + da_n^i \qquad (2.54)$$

$$\Delta a_n^i = \sum_{k=1}^{i} da_n^k \qquad (2.55)$$

ขั้นตอนการวิเคราะห์อันดับที่สองโดยวิธีนิวตัน - แรพสัน แสดงดังรูปที่ 2.25

2.8 <u>การแก้สมการโดยใช้การกำจัดแบบเกาซ์วิธี Active Column และ วิธีการเก็บข้อมูลแบบ Skyline</u>

พิจารณาสมการ (2.48) เมตริกซ์ $[K]$สามารถที่จะกำจัด ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix, S)และเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง(Lower Triangular Matrix, L) ได้เป็น

$$L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\ldots\ldots L_2^{-1}L_1^{-1}[K] = S \qquad (2.56)$$

$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & \cdot & & \\ & & -l_{i+2,i} & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & -l_{ni} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad ; l_{i+j,i} = \frac{k_{i+j,i}^{i}}{k_{ii}} \tag{2.57}$$

$$[K] = L_1 L_2 \ldots\ldots L_{n-1} S \tag{2.58}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{i+1,i} & \cdot & & \\ & & l_{i+2,i} & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & l_{ni} & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

หรือ $[K] = LS$ (2.60)

เนื่องจากเมตริกซ์ $[K]$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น

$$S = [D]L^{T} \tag{2.61}$$

เมื่อ $[D]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเฉพาะสมาชิกในแนวทะแยงที่ไม่เป็นศูนย์(Diagonal Matrix)

ศูนย์วิทยทรัพยากร

สมการ (2.60) เขียนใหม่ได้เป็น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[K] = L[D]L^{T} \tag{2.62}$$

สมมุติให้ $[D]L^{T}\{r\} = \{V\}$ (2.63)

แทนค่าสมการ (2.62) และสมการ (2.63) ลงในสมการ (2.48) จะได้

$$L\{V\} = \{R\} \qquad (2.64)$$

หาค่าของ $\{R\}$ ในรูปของ $\{V\}$ตามสมการ (2.65) ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน Forward Reduction (Bathe and Wilson, 1976)

$$\{V\} = L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \ldots . L_2^{-1} L_1^{-1} \{R\} \qquad (2.65)$$

แทนค่า$\{V\}$ ลงในสมการ (2.63) ตามสมการ (2.66) ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน Back Substitution (Bathe and Wilson, 1976) จะได้

$$L^T\{r\} = [D]^{-1}\{V\} \qquad (2.66)$$

จากสมการ (2.26) จะสามารถหาเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง $\{r\}$ได้

2.9 <u>การเกิดจุดหมุนพลาสติก</u>

การเกิดจุดหมุนพลาสติกในองค์อาคารซึ่งมีข้อต่อที่ปลายเป็นข้อต่อกึ่งแข็งนั้นจะต้องพิจารณาการเกิดจุดหมุนพลาสติกออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนแรกจะเกิดที่ข้อต่อและส่วนที่สองจะเกิดที่ชิ้นส่วนขององค์อาคารทั้งนี้การที่จะเกิดจุดหมุนพลาสติกในส่วนไหนนั้นขึ้นอยู่กับผู้ออกแบบจะพิจารณาออกแบบให้ส่วนไหนมีค่าโมเมนต์พลาสติก(Mp) มากกว่ากันดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

2.9.1 การเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ข้อต่อ

เมื่อข้อต่อรับโมเมนต์กระทำจะเกิดการหมุนเป็นไปดังรูป 2.5 เมื่อเพิ่มโมเมนต์ขึ้นไปเรื่อยๆ จนมีค่าเท่ากับ Ultimate Connection Moment Capacity นั้น ข้อต่อจะมีพฤติกรรมเหมือนกับข้อต่อแบบหมุนหรือเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ข้อต่อ โดยถ้าเพิ่มโมเมนต์กระทำขึ้นไป โมเมนต์ที่ข้อต่อต้านทานได้จะมีค่าคงที่ ซึ่งจะต้องนำผลการเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ข้อต่อ ไปพิจารณาการเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนต่อไป

2.9.2 การเกิดจุดหมุนพลาสติกที่องค์อาคาร

เมื่อคานรับน้ำหนักหน้าตัดคานจะเกิดการโก่งตัว และที่หน้าตัดคานตำแหน่งใด ๆ จะมีการกระจายของหน่วยแรง ดังรูป 2.26 (a) เมื่อเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปเรื่อย ๆ ที่ผิวบน และ ล่าง

สุดจะถึงจุดคลาก ดังรูป 2.26 (b) เมื่อเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปอีกลักษณะการกระจายของ หน่วยแรงจะเปลี่ยนไปเป็นรูป 2.26 (c) ซึ่งตลอดหน้าตัดมีการคลากของหน้าตัดบางส่วนเรียกว่า

Partial Yielded ถ้าเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปอีก จนถึงรูป 2.26 (d) ตลอดหน้าตัดคานจะคลากทั้งหน้าตัด เรียกว่า Fully Yielded

ความสามารถในการรับโมเมนต์ที่คานเริ่มคลาก เรียกว่า Yielded Moment (M_y) ตามรูป 2.26 (b) ความสามารถในการรับโมเมนต์ที่คานคลากอย่างสมบูรณ์ เรียกว่า โมเมนต์พลาสติก(M_p) อัตราส่วนของโมเมนต์นี้เรียกว่าตัวประกอบหน้าตัด (Shape Factor , SF)

$$SF = \frac{M_p}{M_y} \qquad (2.67)$$

สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมี SF = 1.50

สำหรับงานวิจัยนี้องค์อาคารที่มีหน้าตัดรูป I หรือ WF ซึ่งจะมี SF ประมาณ 1.10 - 1.12

พิจารณาความสัมพันธ์ของโมเมนต์ - การโก่ง ตามรูปที่ 2.27 ในการเปลี่ยนแปลงของกราฟช่วงที่หน้าตัดเป็น Partial Yielded ความสัมพันธ์ที่เป็นเส้นโค้งขึ้นกับรูปร่างของหน้าตัด อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้จะสมมุติให้ ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และการโก่งเป็นไปตามเส้น Idealized ซึ่งมีลักษณะเป็น Bilinear

2.10 <u>ผลของแรงในแนวแกนต่อค่าโมเมนต์พลาสติก (Mp) และการย้อนกลับของโมเมนต์</u>

ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ในกรณีที่แรงในแนวแกนภายในองค์อาคารมีค่าสูงจะมีผลทำให้ค่าความสามารถในการรับโมเมนต์พลาสติก (Plastic Moment Capacity , Mpc) มีค่าเปลี่ยนแปลงไปดังแสดง ในรูปที่ 2.28 AISC ได้สร้างสมการความสัมพันธ์สำหรับความสามารถในการรับโมเมนต์พลาสติกกับแรงในแนวแกนโดยประมาณสำหรับหน้าตัดรูปต่าง ๆตามสมการ (2.68) ,(2.69) และ (2.70)

สำหรับหน้าตัดรูปตัว I รอบแกนเอก

$$M_{pc} = M_p \qquad ;0 \le P/P_y \le 0.15$$

$$M_{pc} = 1.18\left(1 - P/P_y\right)M_p \qquad ;0.15 \le P/P_y \le 1.0 \qquad (2.68)$$

สำหรับหน้าตัดรูปตัว I รอบแกนโท

$$M_{pc} = M_p \qquad ;0 \le {}^{P}\!/_{P_y} \le 0.40$$
$$M_{pc} = 1.19\left(1-\left({}^{P}\!/_{P_y}\right)^2\right)M_p \qquad ;0.40 \le {}^{P}\!/_{P_y} \le 1.0 \qquad (2.69)$$

สำหรับหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$M_{pc} = \left(1-\left({}^{P}\!/_{P_y}\right)^2\right)M_p \qquad (2.70)$$

เมื่อ $P_y = A\, f_y$ ซึ่งคือแรงคลากของหน้าตัด

2.11 การเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วน เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก

เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นที่ส่วนใด ๆ ในโครงสร้าง จะทำให้ความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนเปลี่ยนไป นั่นคือ จะมีการเปลี่ยนแปลงค่าเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นตามเงื่อนไขการเกิดจุดหมุนพลาสติกตามสมการ (2.68) ซึ่งจะสามารถพิจารณาได้ดังนี้

จากสมการ (2.48) ถ้าเขียนในรูปของการเพิ่มของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง (Incremental Form) เพื่อให้สอดคล้องกับวิธีการเชิงเลขที่ใช้ในการวิเคราะห์ สามารถเขียนได้เป็น

$$[K]\Delta\{r\} = \Delta\{R\} \qquad (2.71)$$

โดย $\Delta\{R\}$ = Incremental Force

$\Delta\{r\}$ = Incremental Displacement

หรือเขียนเป็นรูปขยายได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{sym} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix} \qquad (2.72)$$

เมื่อ $K_{ij}\,(i = 1\text{-}6,\ j = 1\text{-}6)$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์สตีฟเนส

พิจารณารูปที่ 2.29 เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นด้านปลาย A ตามรูป 2.29 (ก) จะได้ $\Delta R_3 = 0$

$$\Delta r_3 = \frac{1}{K_{33}}\left(-K_{31}\Delta r_1 - K_{32}\Delta r_2 - K_{34}\Delta r_4 - K_{35}\Delta r_5 - K_{36}\Delta r_6\right) \qquad (2.73)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ 0 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}-\dfrac{K_{13}^2}{K_{33}} & K_{12}-\dfrac{K_{13}K_{32}}{K_{33}} & 0 & K_{14}-\dfrac{K_{13}K_{34}}{K_{33}} & K_{15}-\dfrac{K_{13}K_{35}}{K_{33}} & K_{16}-\dfrac{K_{13}K_{36}}{K_{33}} \\ & K_{22}-\dfrac{K_{23}^2}{K_{33}} & 0 & K_{24}-\dfrac{K_{23}K_{34}}{K_{33}} & K_{25}-\dfrac{K_{23}K_{35}}{K_{33}} & K_{26}-\dfrac{K_{23}K_{36}}{K_{33}} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{44}-\dfrac{K_{43}^2}{K_{33}} & K_{45}-\dfrac{K_{43}K_{35}}{K_{33}} & K_{46}-\dfrac{K_{43}K_{36}}{K_{33}} \\ & \text{sym} & & & K_{55}-\dfrac{K_{53}^2}{K_{33}} & K_{56}-\dfrac{K_{53}K_{36}}{K_{33}} \\ & & & & & K_{66}-\dfrac{K_{63}^2}{K_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

(2.74)

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นด้านปลาย B ตามรูป 2.29 (ข) จะได้ $\Delta R_6 = 0$

$$\Delta r_6 = \frac{1}{K_{66}}\left(-K_{61}\Delta r_1 - K_{62}\Delta r_2 - K_{63}\Delta r_3 - K_{64}\Delta r_4 - K_{65}\Delta r_5\right) \qquad (2.75)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}-\dfrac{K_{16}^2}{K_{66}} & K_{12}-\dfrac{K_{16}K_{62}}{K_{66}} & K_{13}-\dfrac{K_{16}K_{63}}{K_{66}} & K_{14}-\dfrac{K_{16}K_{64}}{K_{66}} & K_{15}-\dfrac{K_{16}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & K_{22}-\dfrac{K_{26}^2}{K_{66}} & K_{23}-\dfrac{K_{26}K_{63}}{K_{66}} & K_{24}-\dfrac{K_{26}K_{64}}{K_{66}} & K_{25}-\dfrac{K_{26}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & K_{33}-\dfrac{K_{36}^2}{K_{66}} & K_{34}-\dfrac{K_{36}K_{64}}{K_{66}} & K_{35}-\dfrac{K_{36}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & & K_{44}-\dfrac{K_{46}^2}{K_{66}} & K_{45}-\dfrac{K_{46}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & \text{sym} & & & K_{55}-\dfrac{K_{53}^2}{K_{33}} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

(2.76)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลายตามรูปที่ 2.29(ค)จัดรูปของเมตริกซ์สตีฟเนส ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{13} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{23} & K_{26} \\ & & K_{34} & K_{35} & K_{33} & K_{36} \\ & & & K_{45} & K_{43} & K_{46} \\ & \text{sym} & & & K_{53} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta R_3 = \Delta R_6 = 0 \qquad (2.77)$$

หรือจัดอยู่ในรูปเมตริกซ์ย่อยได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta\{R\}_a \\ \Delta\{R\}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\{r\}_a \\ \Delta\{r\}_b \end{Bmatrix} \qquad (2.78)$$

เมื่อ $\Delta\{R\}_a$ เวคเตอร์ของแรงกระทำที่ไม่เป็นศูนย์

$\Delta\{R\}_b$ เวคเตอร์ของแรงกระทำที่เป็นศูนย์ได้แก่ ΔR_3 และ ΔR_6

$$\Delta\{R\}_b = 0$$

$$\Delta\{R\}_b = [K]_{ba}\Delta\{r\}_a + [K]_{bb}\{r\}_b = 0 \qquad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \Delta\{r\}_b &= -[K]_{bb}^{-1}\left([K]_{ba}\Delta\{r\}_a\right) \\ \Delta\{R\}_a &= \left([K]_{aa} - [K]_{ab}[K]_{bb}^{-1}[K]_{ba}\right)\Delta\{r\}_a \end{aligned} \qquad (2.80)$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\Delta\{R\}_a = -[K]'\Delta\{r\}_a \qquad (2.81)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วน เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกดังที่กล่าวข้างต้นโดยกำหนดให้ค่าUltimate Moment Capacity ของข้อต่อมีค่าต่ำกว่าขององค์อาคารคานทำให้เกิด Connection Hinge ก่อนการเกิด Plastic Hinge นั้น จะต้องพิจารณาผลของ Connection Hinge ในเมตริกซ์สตีฟเนสของชิ้นส่วนในสมการ 2.71 ถึงสมการ 2.72 ดังนี้

ก. ถ้าองค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกในข้อต่อ(Connection Hinge) เฉพาะที่ปลาย A กำหนดให้ Rka = 0

ข. ถ้าองค์อาคารเกิดจุดหมุนพลาสติกในข้อต่อ(Connection Hinge) เฉพาะที่ปลาย B กำหนดให้ Rkb = 0

ค. ถ้าองค์อาคารเกิด จุดหมุนพลาสติกใน ข้อต่อ (Connection Hinge) ทั้งสองปลาย กำหนดให้ Rka = Rkb = 0

2.12 การวิเคราะห์อิลาสติก - พลาสติกอันดับที่สอง

การวิเคราะห์นี้เป็นการวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สอง ดังรูปที่ 2.30 มาพิจารณาร่วมกับความอ่อนตัวของข้อต่อและเพิ่มช่วงการรับน้ำหนักบรรทุกจนกระทั่งถึงช่วงพลาสติก โดยมีรายละเอียดดังนี้

ขั้นตอนการวิเคราะห์จะกระทำดังนี้

ก. ที่ขั้นตอนใด ๆ ที่ตัวประกอบน้ำหนักมีค่าเป็น λ_i หาแรงภายในของชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วน ทีละชิ้นส่วน

ข. นำผลของแรงภายในที่ได้ไปปรับปรุงค่าสตีฟเนสของข้อต่อและสตีฟเนสของชิ้นส่วนตามลำดับ

ค. ทำการสร้างเมตริกซ์สตีฟเนสสัมผัสของโครงสร้างโดยวิธีการรวมสตีฟเนสโดยตรง

ง. เพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นเป็น λ_{i+1}

จ.ทำการวิเคราะห์ด้วยโดยการกำจัดแบบเกาซ์เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายใน แล้วหาผลต่างระหว่างแรงภายในขั้นตอนที่ i และ ขั้นตอนที่ i+1 ได้เวคเตอร์ของแรงคงค้างในการทำซ้ำรอบแรก

ฉ. คำนวณค่ายูคลีเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced Force Vector) โดยคำนวณได้จากสมการ (Bathe and Wilson, 1976)

$$\| Q \|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2} \qquad (2.82)$$

เมื่อ $\| Q \|_e$= ยูคลีเดียนนอร์มของเวคเตอร์ $\{Q\}$

q_i = สมาชิกของเวคเตอร์ $\{Q\}$

n = จำนวนของดีกรีของความอิสระ

ซ.เปรียบเทียบค่ายูคลีเดียนนอร์มของแรงคงค้างกับยูคลีเดียนนอร์มของแรงเริ่มต้นโดยงานวิจัยนี้ใช้เงื่อนไขการลู่เข้าหาคำตอบดังนี้ (Zienkiewics and Taylor, 1991)

$$\|Q\|_e \leq \frac{0.1}{100}\|\Delta R\|_e \qquad (2.83)$$

หากค่ายูคลีเดียนนอร์มของแรงคงค้างเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.83) ก็จะทำในขั้นตอนที่ 8 ต่อไป แต่ถ้าหากค่ายูคลีเดียนนอร์มไม่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.83)จะต้องกระทำในขั้นตอนที่ 1 ถึง 7 ใหม่โดยให้เวคเตอร์ของแรงกระทำคือเวคเตอร์ของแรงคงค้าง

ซ. ตรวจสอบการเกิดจุดหมุนพลาสติกของข้อต่อและชิ้นส่วนณ.จุดใดๆ โดยอาศัยสมการความสัมพันธ์ของแรงในแนวแกนกับความสามารถในการรับพลาสติกโมเมนต์ของ AISC ตามสมการ 2.68 ในกรณีที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นก็ทำการปรับค่าสตีฟเนสขององค์อาคารนั้นและทำการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น λ_{i+2} เป็นขั้นตอนถัดไป

ฌ. หลังจากการกำจัดแบบเกาซ์ของส่วนเมตริกซ์สตีฟเนสของโครงสร้างทุกครั้งจะต้องทำ การตรวจสอบเสถียรภาพของโครงสร้างโดยการตรวจสอบค่าของสมาชิกแต่ละตัวตามแนวทะแยง(Diagonal Elements) ของเมตริกซ์สตีฟเนสของโครงสร้าง ถ้าโครงสร้างมีเสถียรภาพค่าของสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สตีฟเนสทุกตัวจะมีค่ามากกว่าศูนย์แต่ถ้าหากสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สตีฟเนสตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีค่าเปลี่ยนเป็นค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โครงสร้างจะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง (Rigid Body Motion) เสถียรภาพของโครงสร้างจะหมดไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย