

บทที่ 3

ระบบชักตัวอย่างข้อมูล

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่นำมาใช้กับระบบชักตัวอย่างข้อมูลตลอดจนแบบจำลองที่ใช้ในการแก้ปัญหาของระบบชักตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสม ส่วนแบบจำลองฟังก์ชันสเปซและแบบจำลองดิสคริตจัมพ์จะแสดงไว้ในภาคผนวก ก. และในตอนท้ายของบทนี้จะแสดงตัวอย่างเพื่อให้มีความเข้าใจในระบบชักตัวอย่างข้อมูลมากขึ้น

3.1 ความนำ

ปัจจุบันงานวิจัยเกี่ยวกับการออกแบบระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูลได้รับความสนใจอย่างมาก เนื่องจากความเจริญก้าวหน้าในเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์ทำให้มีการนำเอาคอมพิวเตอร์เข้ามาใช้ในการสร้างรูปแบบการวิเคราะห์และการออกแบบ ซึ่งคอมพิวเตอร์ที่นำมาใช้เปรียบเสมือนเป็นตัวควบคุมเชิงเลขที่ต้องการควบคุมดัชนีสมรรถนะ (performance index) ของกระบวนการที่อยู่ในโดเมนเวลาต่อเนื่องมาต่อเชื่อมกันโดยผ่านตัวชักตัวอย่างและโฮล เราเรียกระบบดังกล่าวว่า ระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูล (Sampled-Data Control System)

การออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขมีด้วยกัน 3 วิธีการดังนี้

1. Discretized synthesis (DTS)

โดยเริ่มจากการประมาณกระบวนการในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องไปยังระบบเวลาเต็มหน่วย หลังจากนั้นจึงทำการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขซึ่งใช้ทฤษฎีออกแบบในเวลาเต็มหน่วย

2. Continuous-based synthesis (CBS)

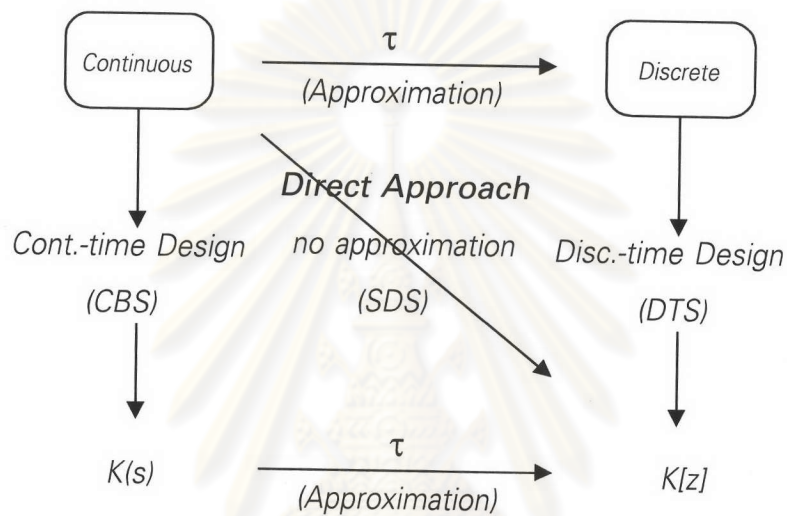
โดยเริ่มจากการออกแบบตัวควบคุมเชิงอุปมานจากกระบวนการในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่อง หลังจากนั้นทำการประมาณตัวควบคุมเชิงอุปมандังกล่าวไปยังตัวควบคุมเชิงเลข วิธีการประมาณตัวควบคุมในระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องไปยังระบบในเวลาเต็มหน่วยที่นิยมใช้ได้แก่การแปลงทัสติน (Tustin transformation)

3. Sampled-Data synthesis (SDS)

โดยทำการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขโดยตรงจากกระบวนการในโดเมนเวลาต่อ

เนื่อง ซึ่งวิธีการนี้มีการพิจารณาพฤติกรรมระหว่างคาบการซึกตัวอย่างพร้อมกันกับพฤติกรรมขณะการซึกตัวอย่าง

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขมากขึ้น เราสามารถแสดงการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขได้ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 วิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขแบบต่าง ๆ

ลักษณะเฉพาะและผลของวิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขในวิธีการต่าง ๆ

1. การออกแบบโดยใช้วิธี DTS

สามารถรับประกันเสถียรภาพวงรอบปิดได้และพิจารณาพฤติกรรมขณะคาบการซึกตัวอย่างเท่านั้น แต่ไม่คำนึงถึงในพฤติกรรมระหว่างคาบการซึกตัวอย่างซึ่งอาจแสดงปรากฏการณ์การแกว่งกวัด (oscillatory phenomena) ที่ไม่พึงประสงค์ในระหว่างคาบการซึกตัวอย่าง

2. การออกแบบโดยใช้วิธี CBS

ไม่สามารถรับประกันสมรรถนะวงรอบปิด ถ้าใช้คาบการซึกตัวอย่างที่มากเกินไป บางครั้งทำให้ระบบวงรอบปิดอาจขาดเสถียรภาพ

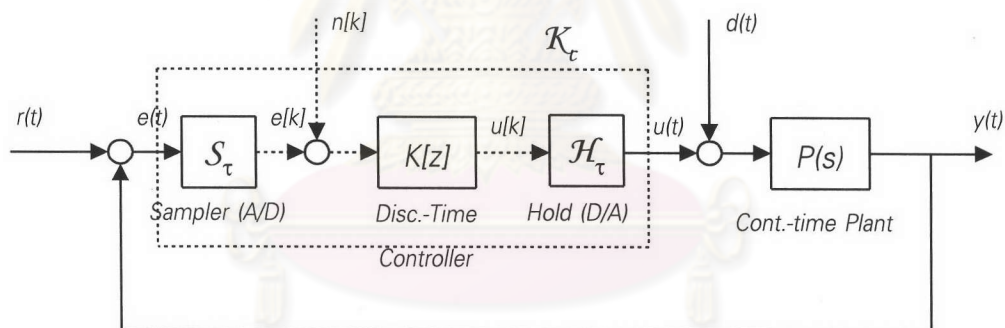
3. การออกแบบโดยใช้วิธี SDS

จะเห็นว่าทั้ง DTS และ CBS ต่างออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขโดยใช้ผลจากการ

ประมาณ (Discretized) แต่สำหรับ SDS สามารถทำการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขได้โดยไม่ต้องทำการประมาณ แต่ทำการออกแบบจากกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องได้โดยตรง ทั้งยังสามารถพิจารณาผลของสัญญาณในลักษณะลูกผสม (hybrid signal) ที่ประกอบด้วยสัญญาณเชิงอุปมานและสัญญาณเชิงเลขในแต่ละคาบการซักรตัวอย่าง แต่ผลที่ทำให้การวิเคราะห์และออกแบบระบบซักรตัวอย่างข้อมูลมีความยุ่งยากในการพิจารณานั้นคือ ระบบซักรตัวอย่างข้อมูลมีคุณลักษณะที่แปรผันตามเวลาแบบรายคาบ (periodic time-varying) แม้ว่ากระบวนการและตัวควบคุมจะมีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาก็ตาม

3.2 ระบบซักรตัวอย่างข้อมูล

พิจารณาระบบซักรตัวอย่างดังรูปที่ 2 โดยประกอบด้วย $P(s)$ และ $K[z]$ เป็นกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่ต้องการควบคุมและตัวควบคุมเชิงเลขที่ต้องการทำการออกแบบ



รูปที่ 3.2 ระบบซักรตัวอย่างข้อมูล

โดยสัญญาณ $u(t), y(t), r(t), e(t)$ และ $d(t)$ เป็นสัญญาณเชิงอุปมานของสัญญาณเข้าควบคุม, สัญญาณอ้างอิง, สัญญาณออกของกระบวนการ, สัญญาณความคลาดเคลื่อนและสัญญาณรบกวน ตามลำดับ ขณะที่ $e[k], n[k]$ และ $u[k]$ เป็นสัญญาณเชิงเลขของสัญญาณความคลาดเคลื่อนขณะซักรตัวอย่าง, สัญญาณรบกวนเนื่องจากการวัด (measurement noise) และสัญญาณออกของตัวควบคุมสำหรับ $n[k]$ เป็นผลจากความคลาดเคลื่อนควอนไทซ์ (quantization error) ที่เกิดจากการเปลี่ยนจากสัญญาณเชิงอุปมานไปยังสัญญาณเชิงเลข หรือ A/D conversion กำหนดให้ S_τ เป็นตัวดำเนินการซักรตัวอย่าง (Ideal Sampler) ที่มีคาบการซักรตัวอย่าง τ ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$S_\tau e(t) = e(k\tau) := e[k]; k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

และ \mathcal{H}_τ เป็นตัวดำเนินการโฮลด์ (Hold) โดยมีคาบการซั๊กตัวอย่าง τ ฟังก์ชันโฮลด์ที่มีลักษณะรายคาบ $\mathcal{H}_\tau(t) = \mathcal{H}_\tau(t + \tau)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้

$$(\mathcal{H}_\tau u)(k\tau + \sigma) = \mathcal{H}_\tau(\sigma)u[k] := u(k\tau + \sigma) : 0 \leq \sigma < \tau \quad (3.2)$$

โดยสังเกตว่าเมื่อ $\mathcal{H}_\tau(\sigma) = I$ ตัวดำเนินการโฮลด์ก็คือกรณีของโฮลด์อันดับที่ศูนย์ (zeroth order hold)

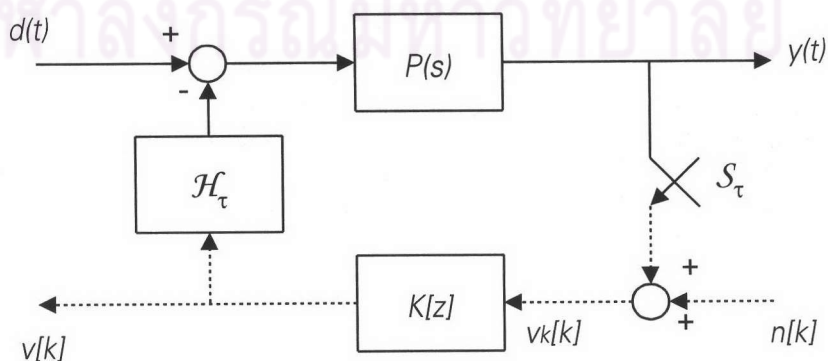
จุดประสงค์ในการออกแบบระบบควบคุมแบบซั๊กตัวอย่างข้อมูลคือ การหาตัวควบคุมเชิงเลขที่สามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และให้คุณสมบัติการติดตามที่ต้องการ เมื่อมีสัญญาณเข้ารบกวนและความคลาดเคลื่อนควอนไทซ์ โดยใช้เครื่องมือต่าง ๆ เป็นเกณฑ์สมรรถนะ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น สำหรับการศึกษาระบบควบคุมแบบซั๊กตัวอย่างข้อมูลมีผู้เสนอแบบจำลองสำหรับทฤษฎีการวิเคราะห์และออกแบบรวม 3 แบบ คือ

1. แบบจำลองระบบลูกผสม (Hybrid System Model)
2. แบบจำลองฟังก์ชันสเปซ (Function Space หรือ Lifting Model)
3. แบบจำลองดิสครีตจัมป์ (Discrete Jump Model)

สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึง ทฤษฎีการวิเคราะห์และการสังเคราะห์โดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมเป็นหลัก ส่วนแบบจำลองฟังก์ชันสเปซและแบบจำลองดิสครีตจัมป์จะแสดงรายละเอียดในภาคผนวก ก.

3.3 แบบจำลองระบบลูกผสม

พิจารณาระบบซั๊กตัวอย่างข้อมูลชนิดป้อนกลับดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ระบบควบคุมแบบซั๊กตัวอย่างข้อมูลชนิดป้อนกลับ

กำหนดให้

$$P(s): \begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$K[z]: \begin{cases} x_d[k+1] = A_k x_d[k] + B_k v_k[k] \\ v[k] = C_k x_d[k] + D_k v_k[k] \end{cases} \quad (3.4)$$

โดยที่

$P(s)$: ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

$K[z]$: ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมในเวลาเต็มหน่วย

$u(t)$: สัญญาณควบคุมขาเข้าของกระบวนการ $y(t)$: สัญญาณขาออกของกระบวนการ

$d(t)$: สัญญาณรบกวนของกระบวนการ $v_k[k]$: สัญญาณควบคุมขาเข้าของตัวควบคุม

$v[k]$: สัญญาณขาออกของตัวควบคุม $n[k]$: สัญญาณรบกวนของตัวควบคุม

\mathcal{H}_τ : โฮลด์ (hold)

S_τ : ตัวซีกตัวอย่าง (sampler)

จะเห็นได้ว่าสมการสถานะและสมการสัญญาณออกของระบบควบคุมแบบซีกตัวอย่าง ข้อมูลชนิดป้อนกลับในแต่ละคาบการซีกตัวอย่างสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p(t) \\ x_d[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p - B_p \mathcal{H}_\tau(t) D_k S_\tau C_p & -B_p \mathcal{H}_\tau(t) C_k \\ B_k S_\tau C_p & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_p & -B_p \mathcal{H}_\tau(t) D_k \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ n[k] \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

โดยที่ตัวแปรสถานะคือ $(x_c^T(t) \ x_d^T[k])^T$ และสัญญาณออกคือ

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ v[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_p & 0 \\ D_k S_\tau C_p & C_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ n[k] \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

โดย $k\tau \leq t < (k+1)\tau$

จากสมการสถานะและสมการสัญญาณออกของระบบซีกตัวอย่าง ข้อมูลชนิดป้อนกลับจะ
ได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้

- มีสัญญาณลูกผสมอยู่ 3 ลักษณะคือตัวแปรสถานะ $(x_p^T(t) \ x_d^T[k])^T$, สัญญาณเข้า $(d^T(t) \ n^T[k])^T$ และสัญญาณออก $(y^T(t) \ v^T[k])^T$
- มีสมการการเคลื่อนย้ายสถานะ (state transition equation) อยู่ 2 ลักษณะคือสมการ

เชิงอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะเชิงอุปมานและสมการความแตกต่าง (difference equation) ของตัวแปรสถานะเชิงเลข

3. ในสมการสถานะและสมการสัญญาณออกประกอบด้วยตัวดำเนินการชักตัวอย่างและตัวดำเนินการไฮล

ดังนั้นเราสามารถแสดงแบบจำลองระบบลูกผสม ให้อยู่ในลักษณะเช่นเดียวกันกับรูปแบบ (A, B, C, D) ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและในเวลาเต็มหน่วยได้ดังนี้ โดยพิจารณาประเภท (class) ของระบบลูกผสมได้ดังนี้

$$\mathcal{T}_s : \begin{cases} D_h X_h = A(t) X_h + B(t) W_h \\ Z_h = C(t) X_h + D(t) W_h \end{cases} \quad (3.7)$$

และ $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ โดยที่ X_h, W_h และ Z_h เป็นสัญญาณลูกผสมที่ประกอบด้วยตัวแปรสถานะ, สัญญาณเข้าและสัญญาณออกตามลำดับ ซึ่งกำหนดได้ดังนี้

$$X_h = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix}, \quad W_h = \begin{pmatrix} w_c(t) \\ w_d[k] \end{pmatrix}, \quad Z_h = \begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix}$$

และ \mathcal{D}_h เป็นตัวดำเนินการที่สอดคล้องกับ

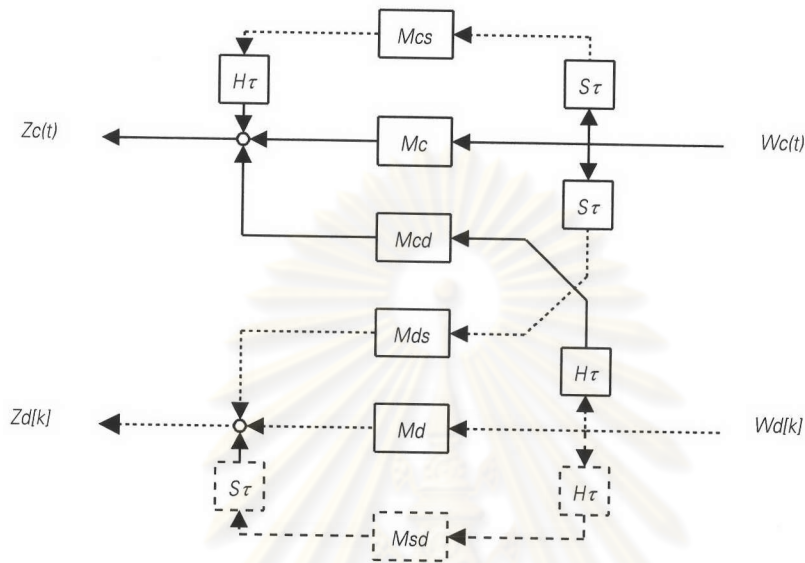
$$\mathcal{D}_h \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ x_d[k+1] \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$A(t), B(t), C(t)$ และ $D(t)$ อยู่ภายในประเภทของ \mathcal{M} ซึ่งกำหนดให้ดังนี้

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} C_c \cup \mathcal{TS}_\tau & \mathcal{T}_\tau \\ CS_\tau & C_d \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

โดย

- C_c : ตัวดำเนินการเมตริกซ์คงที่ (constant matrix operator)
(สัญญาณเชิงอุปมาน \rightarrow สัญญาณเชิงอุปมาน)
- \mathcal{TS}_τ : ตัวดำเนินการเมตริกซ์แบบรายคาบ (periodic matrix operator) $\times S_\tau$
(สัญญาณเชิงอุปมาน \rightarrow สัญญาณเชิงอุปมาน)
- \mathcal{T}_τ : ตัวดำเนินการเมตริกซ์แบบรายคาบ
(สัญญาณเชิงเลข \rightarrow สัญญาณเชิงอุปมาน)
- CS_τ : ตัวดำเนินการเมตริกซ์แบบรายคาบ $\times S_\tau$
(สัญญาณเชิงอุปมาน \rightarrow สัญญาณเชิงเลข)
- C_d : ตัวดำเนินการเมตริกซ์คงที่
(สัญญาณเชิงเลข \rightarrow สัญญาณเชิงเลข)



รูปที่ 3.4 ตัวดำเนินการของสัญญาณลูกผสม

รูปที่ 3.4 แสดงเหตุผลที่ต้องพิจารณาประเภทของ \mathcal{M} ซึ่งเป็นตัวดำเนินการที่กระทำจากสัญญาณลูกผสมหนึ่งไปยังสัญญาณลูกผสมหนึ่ง โดย $\mathcal{M}_c \in C_c$ และ $\mathcal{M}_d \in C_d$ แทนตัวดำเนินการที่กระทำจากสัญญาณเชิงอุปมานไปยังสัญญาณเชิงอุปมานและสัญญาณเชิงเลขไปยังสัญญาณเชิงเลขตามลำดับ ตัวดำเนินการ $\mathcal{M}_{cd}H_\tau$ กระทำจากสัญญาณเชิงเลข $w_d[k]$ ไปยังสัญญาณเชิงอุปมาน $z_c(t)$ อยู่ใน \mathcal{T}_τ ขณะที่ตัวดำเนินการ $\mathcal{M}_{ds}S_\tau$ กระทำจากสัญญาณเชิงอุปมาน $w_c(t)$ ไปยังสัญญาณเชิงอุปมาน $z_d[k]$ อยู่ใน $\mathcal{C}\mathcal{S}_\tau$ และในกรณีนี้ทั่วไป เราจำเป็นต้องมีตัวดำเนินการมากกว่าหนึ่งซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้คือ ตัวปฏิบัติการที่กระทำจากสัญญาณเชิงอุปมานไปยังสัญญาณเชิงอุปมานโดยผ่านตัวซັกดตัวอย่างและโฮลคือ $H_\tau\mathcal{M}_{cs}S_\tau$ อยู่ใน $\mathcal{T}\mathcal{S}_\tau$ ดังในรูปที่ 3.4 และตัวดำเนินการที่กระทำจากสัญญาณเชิงเลขไปยังสัญญาณเชิงเลขโดยผ่านโฮลและตัวซັกดตัวอย่าง ซึ่งมีลักษณะดังนี้ $S_\tau\mathcal{M}_{sd}H_\tau$ อยู่ใน $\mathcal{C}\mathcal{d}$ แต่ไม่อาจนำมาตัวดำเนินการประเภทนี้มารวมได้อย่างอิสระ

เนื่องจากกำหนดให้ $A(t), B(t), C(t)$ และ $D(t)$ ทั้งหมดอยู่ภายในประเภทของ \mathcal{M} ดังนั้นเราสามารถแสดงแบบจำลองระบบลูกผสม \mathcal{T}_τ ได้ดังนี้

$$T_s := \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c + A_{cs}(t)S_\tau & A_{cd}(t) \\ A_{ds}S_\tau & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_c + B_{cs}(t)S_\tau & B_{cd}(t) \\ B_{ds}S_\tau & B_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(t) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_c + C_{cs}(t)S_\tau & C_{cd}(t) \\ C_{ds}S_\tau & C_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_c + D_{cs}(t)S_\tau & D_{cd}(t) \\ D_{ds}S_\tau & D_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(t) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.10)$$

โดย $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ และ $x_c(t) \in \mathcal{R}^{n_c}$ และ $x_d[k] \in \mathcal{R}^{n_d}$ เป็นตัวแปรสถานะเชิงอุปมาน และเชิงเลขตามลำดับ $w_c(t) \in \mathcal{R}^{m_c}$ และ $w_d[k] \in \mathcal{R}^{m_d}$ เป็นสัญญาณเข้าเชิงอุปมานและเชิงเลขตามลำดับ $z_c(t) \in \mathcal{R}^{p_c}$ และ $z_d[k] \in \mathcal{R}^{p_d}$ เป็นสัญญาณออกเชิงอุปมานและเชิงเลขตามลำดับ พิจารณา A_c, A_{cd} และ A_d ใน $A(t)$ เป็นเมตริกซ์คงที่มีมิติเหมาะสม $A_{cs}(t)$ และ $A_{cd}(t)$ ใน $A(t)$ เป็นเมตริกซ์รายคาบที่มีมิติเหมาะสม ซึ่งในเมตริกซ์ $B(t), C(t)$ และ $D(t)$ สามารถพิจารณาในลักษณะเช่นเดียวกับ $A(t)$

3.4 ตัวอย่างของระบบลูกผสม

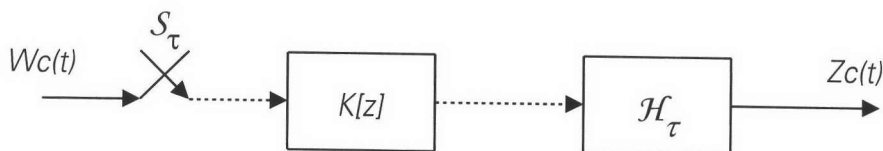
ในการพิจารณาระบบลูกผสมนั้นมีตัวปฏิบัติการอนุกรม, ขนาน และป้อนกลับของระบบลูกผสมสามารถใช้ได้เหมือนกันกับกรณีของระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องซึ่งรายละเอียดสามารถหาได้จาก Hara et al. (1994) ในส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างของแบบจำลองระบบลูกผสมโดยพิจารณาระบบซีกตัวอย่างข้อมูลใน รูปที่ 3.3 สามารถแทนได้ด้วยแบบจำลองระบบลูกผสมดังในสมการที่ (3.10) กำหนดให้

$$X_h = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix}, \quad W_h = \begin{pmatrix} d(t) \\ n[k] \end{pmatrix}, \quad Z_h = \begin{pmatrix} y(t) \\ v[k] \end{pmatrix}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงระบบซีกตัวอย่างข้อมูลในรูปที่ 3.3 อยู่ในแบบจำลองระบบลูกผสมได้ดังนี้

$$\begin{cases} A(t) = \begin{pmatrix} A_p - B_p \mathcal{H}_\tau(t) D_k C_p S_\tau & -B_p \mathcal{H}_\tau(t) C_k \\ B_k C_p S_\tau & A_k \end{pmatrix}, & B(t) = \begin{pmatrix} B_p & -B_p \mathcal{H}_\tau(t) D_k \\ 0 & B_k \end{pmatrix} \\ C(t) = \begin{pmatrix} C_p & 0 \\ D_k C_p S_\tau & C_k \end{pmatrix}, & D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_k \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.11)$$

จะเห็นว่าแบบจำลองในสมการที่ (3.10) อยู่ในรูปทั่วไป โดยแบบจำลองประกอบด้วยระบบโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยเป็นกรณีเฉพาะเช่น ถ้าพิจารณาระบบวงรอบเปิดของระบบซีกตัวอย่างข้อมูลดังในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ระบบวงรอบเปิดของระบบซีกตัวอย่างข้อมูล

โดยประกอบด้วยตัวซีกตัวอย่าง, โฮล และตัวควบคุมเชิงเลข $K[z]$ จะได้แบบจำลองระบบลูกผสมดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} A(t) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & A_k \end{pmatrix}, & B(t) = \begin{pmatrix} * & * \\ B_k S_\tau & * \end{pmatrix} \\ C(t) = \begin{pmatrix} * & H_\tau C_k \\ * & * \end{pmatrix}, & D(t) = \begin{pmatrix} H_\tau D_k S_\tau & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.5 คุณสมบัติโดยทั่วไปของระบบลูกผสม

3.5.1 พฤติกรรมระหว่างคาบการซีกตัวอย่าง (Intersampling behavior)

ก่อนจะพิจารณาถึงคุณสมบัติของเสถียรภาพ (stability), การเข้าถึงได้ (reachability) และการสังเกตได้ (observability) ของระบบ \mathcal{T}_τ ที่ประกอบด้วยแบบจำลองระบบลูกผสมดังในสมการที่ (3.10) โดยเริ่มการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะเชิงอุปมาน $x_c(t)$ ในสมการที่ (3.10) และจะเห็นได้ว่าตัวแปรสถานะลูกผสม (hybrid state variable) ขณะที่ทำการซีกตัวอย่างจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_c(k+1)\tau \\ x_d[k+1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{A_c\tau} + \int_0^\tau e^{A_c(t-\xi)} A_{cs}(\xi) d\xi & \int_0^\tau e^{A_c(t-\xi)} A_{cd}(\xi) d\xi \\ A_{ds} & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(k\tau) \\ x_d[k] \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \int_0^\tau e^{A_c(t-\xi)} B_c w_c(k\tau + \xi) d\xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \int_0^\tau e^{A_c(t-\xi)} B_{cs}(\xi) d\xi & \int_0^\tau e^{A_c(t-\xi)} B_{cd}(\xi) d\xi \\ B_{ds} & B_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(k\tau) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

และพฤติกรรมระหว่างคาบการซีกตัวอย่างของตัวแปรสถานะเชิงอุปมานที่ได้จากแก้สมการเชิง

อนุพันธ์ $x_c(k\tau + \sigma)$ โดยที่ $0 \leq \sigma \leq \tau, k = 0, 1, 2, \dots$ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x_c(k\tau + \sigma) = & \left(e^{A_c \sigma} + \int_0^\sigma e^{A_c(\sigma-\xi)} A_{cs}(\xi) d\xi \quad \int_0^\sigma e^{A_c(\sigma-\xi)} A_{cd}(\xi) d\xi \right) \begin{pmatrix} x_c(k\tau) \\ x_d[k] \end{pmatrix} \\ & + \int_0^\sigma e^{A_c(\sigma-\xi)} B_c w_c(k\tau + \xi) d\xi \\ & + \left(\int_0^\sigma e^{A_c(\sigma-\xi)} B_{cs}(\xi) d\xi \quad \int_0^\sigma e^{A_c(\sigma-\xi)} B_{cd}(\xi) d\xi \right) \begin{pmatrix} w_c(k\tau) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

สัญญาณออกเชิงอุปมาน $z_c(k\tau + \sigma)$ ในแต่ละช่วงของคาบการซีกตัวอย่าง τ โดยที่ $0 \leq \sigma \leq \tau, k = 0, 1, 2, \dots$ และสัญญาณออกเชิงเลขขณะซีกตัวอย่าง $z_d[k]$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z(k\tau + \sigma) \\ z_d[k] \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} C_{cc}(\sigma) & C_{cd}(\sigma) \\ C_{ds} & C_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(k\tau) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_c w_c(k\tau + \sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} D_{cs}(\sigma) & D_c(\sigma) \\ D_{ds} & D_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(k\tau) \\ w_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_c(k\tau + \sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

โดยที่

$$B_c(t) = C_c \int_0^\sigma e^{A_c(t-\xi)} B_c w_c(k\tau + \xi) d\xi \quad (3.15)$$

$$C_{cc}(t) = C_c \left(e^{A_c t} + \int_0^\sigma e^{A_c(t-\xi)} A_{cs}(\xi) d\xi \right) + C_{cs}(t) \quad (3.16)$$

$$C_{cd}(t) = C_c \int_0^\sigma e^{A_c(t-\xi)} A_{cd}(\xi) d\xi + C_{cd}(t) \quad (3.17)$$

และ
$$D_c(t) = C_c \int_0^\sigma e^{A_c(t-\xi)} B_{cd}(\xi) d\xi + D_{cd}(t) \quad (3.18)$$

จากผลเฉลยข้างต้นของแบบจำลองระบบลูกผสมในสมการที่ (3.12)-(3.18) ประกอบด้วยตัวแปรสถานะและสัญญาณออกทั้งเชิงอุปมานและเชิงเลขพร้อม ๆ กัน เราสามารถนำผลเฉลยดังกล่าวมาใช้ในการวิเคราะห์คุณสมบัติของเสถียรภาพ, การเข้าถึงได้ และการสังเกตได้ที่จะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

3.5.2 เสถียรภาพ (Stability)

ระบบลูกผสมในสมการที่ (3.10) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponential stable) ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรสถานะที่ส่วนหนึ่งเป็นเชิงอุปมานและตัวแปรอีกส่วนหนึ่งเป็นเชิงเลขสามารถพิจารณาคุณสมบัติของเสถียรภาพได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 3.1 ระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ในสมการที่ (3.10) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง ถ้ามีค่าคงที่บวก $\alpha_c, \beta_c, \alpha_d$ และ β_d ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\|x_c(t)\| \leq \beta_c e^{-\alpha_c t} \|X_h(0)\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\|x_d[k]\| \leq \beta_d e^{-\alpha_d k} \|X_h(0)\|, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3.20)$$

สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น $X_h(0) = \begin{pmatrix} x_c^T(0) & x_d^T[0] \end{pmatrix}^T$ ใด ๆ เมื่อ $w_c(t) \equiv 0$ และ $w_d[k] \equiv 0$

ในการพิจารณาว่าระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ในสมการที่ 3.10 มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังได้ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ค่าเฉพาะ (eigenvalue) ของเมตริกซ์ A_d ต่อไปนี้

$$A_d = \begin{pmatrix} e^{A_c \tau} + \int_0^\tau e^{A_c(\tau-\xi)} A_{cs}(\xi) d\xi & \int_0^\tau e^{A_c(\tau-\xi)} A_{cd}(\xi) d\xi \\ A_{ds} & A_d \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

อยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)

ข้อสังเกต

- ระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง $\dot{x}_c(t) = A_c x(t)$ มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponential stable) ได้ก็ต่อทุก ๆ ค่าเฉพาะของ $e^{A_c \tau}$ อยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยนั่นก็คือทุก ๆ ค่าเฉพาะของ A_c อยู่ภายในด้านซ้ายมือของระนาบเชิงซ้อน
- ระบบในเวลาเต็มหน่วย $x_d[k+1] = A_d x_d[k]$ มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังก็ต่อเมื่อทุก ๆ ค่าเฉพาะของ A_d อยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย

3.4.3 การเข้าถึงได้ (Reachability)

การเข้าถึงได้หมายถึงความสามารถในการเคลื่อนย้ายตัวแปรสถานะของระบบจากเงื่อนไขเริ่มต้นหรือจุดกำเนิด (origin) ไปยังเงื่อนไขสุดท้ายที่เจาะจง (specified final condition) ภายในระยะเวลาจำกัด ดังนั้นระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ในสมการที่ 3.10 ที่ประกอบด้วยตัวแปรสถานะเชิงอุปมานและเชิงเลขก็เป็นไปตามนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 3.2 ตัวแปรสถานะลูกผสม $\begin{pmatrix} x_{cf}^T & x_{df}^T \end{pmatrix}^T$ ของระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ในสมการที่ 3.10 เรียกว่า *Sample Time Reachable (STR)* ถ้ามีจำนวนเต็มบวก $k, u_c(t)$ ในช่วง $[0, k\tau]$ และ $u_d[l], 0 \leq l \leq k$ ซึ่งทำให้ระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ถูกเคลื่อนย้ายด้วย $u_c(t), u_d[l]$ จากเงื่อนไขเริ่มต้น

ดังนั้น $x_c(t) = 0, x_d[0] = 0$ ไปยังเงื่อนไขสุดท้าย $(x_c(k\tau) \ x_d[k])^T = (x_{cf} \ x_{df})^T$ ถ้าให้ทุก ๆ ตัวแปรสถานะมีคุณสมบัติ STR ทำให้ระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ (3.10) มีคุณสมบัติ *sample time reachable*

สำหรับการตรวจสอบคุณสมบัติของ *Sample Time Reachable* สามารถพิจารณาได้จากผลดังต่อไปนี้ โดยเริ่มจากการพิจารณาคู่ของ $(\mathcal{A}_d, \mathcal{B}_d)$ โดยที่เมตริกซ์ \mathcal{A}_d หาได้จากสมการที่ (3.21) และ \mathcal{B}_d กำหนดให้เป็นอย่างนี้

$$\mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} \int_0^{\tau} e^{A_c(\tau-\xi)} B_{cs}(\xi) d\xi & \int_0^{\tau} e^{A_c\xi} B_c B_c^T e^{A_c^T \xi} D \xi & \int_0^{\tau} e^{A_c\xi} B_{cd}(\xi) d\xi \\ B_{ds} & 0 & B_d \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

ดังนั้นระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ (3.10) มีคุณสมบัติ *sample time reachable* ก็ต่อเมื่อคู่ของ $(\mathcal{A}_d, \mathcal{B}_d)$ สามารถเข้าถึงได้

3.5.4 การสังเกตได้ (Observability)

การสังเกตได้หมายถึงความสามารถในการหาเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบเอกพันธ์ (homogeneous system) จากสัญญาณออก ซึ่งสามารถพิจารณาในทำนองเดียวกับการเข้าถึงได้และเป็นไปตามนิยามต่อไปนี้

นิยามที่ 3.3 ตัวแปรสถานะลูกผสม $(x_{c0}^T \ x_{d0}^T)^T$ ของระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ (3.10) ไม่สามารถสังเกตได้ (unobservable) ถ้ามีเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_c(0) \ x_d[0])^T = (x_{c0} \ x_{d0})^T$ และสัญญาณเข้า $u_c(t), (t > 0), u_d[k] = 0, (k = 0, 1, 2, \dots)$ บางค่าที่ทำให้สัญญาณออก $z_c(t) = 0$ สำหรับเกือบทุก ๆ $t \geq 0$ และ $z_d[k] = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots$ ถ้ามีเพียงตัวแปรสถานะเดียวเท่านั้นคือจุดกำเนิด (origin) ที่ไม่สามารถสังเกตได้เราบอกว่าระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ (3.10) สามารถสังเกตได้ (observable)

การตรวจสอบคุณสมบัติการสังเกตได้นั้นสามารถกระทำได้จากผลดังต่อไปนี้ กำหนดให้เมตริกซ์ \mathcal{M} เป็นเมตริกซ์บวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite) ดังต่อไปนี้

$$\mathcal{M} = \int_{\tau} \begin{pmatrix} C_{cc}^T(\sigma) \\ C_{cd}^T(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{cc}(\sigma) & C_{cd}(\sigma) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{ds}^T \\ C_d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{ds} & C_d \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

และสามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\mathcal{M} = C_d^T C_d \quad (3.24)$$

โดยทั้ง $C_{cc}(\sigma)$, $C_{cd}(\sigma)$ สามารถหาได้จากสมการที่ (3.16) และ (3.17) ตามลำดับ ซึ่งระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ 3.10 สามารถสังเกตได้ก็ต่อเมื่อคู่ของ (\mathcal{A}_d, C_d) สามารถสังเกตได้

ข้อสังเกต จากคุณสมบัติการเข้าถึงได้และการสังเกตได้ของระบบลูกผสมมีลักษณะคล้ายกับคุณสมบัติการเข้าถึงได้และการสังเกตได้ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วย

3.6 นอร์ม H_2 ของระบบชักรัดตัวอย่างข้อมูล

การวิเคราะห์นอร์ม H_2

ในส่วนนี้จะพิจารณานอร์ม H_2 ของแบบจำลองระบบลูกผสม \mathcal{X}_s ในสมการที่ (3.10) และแสดงการคำนวณนอร์ม H_2 เริ่มจากการกำหนดให้ L_{2e} เป็นฟังก์ชันปริพันธ์รากที่สองต่อเนื่องเป็นช่วง (piece-wise continuous square integrable function) และนอร์ม L_2 ของ $z_c(t)$ ที่อยู่ใน L_{2e} กำหนดให้ เป็นดังนี้

$$\|z_c(t)\|_2 = \left(\int_0^{\infty} z_c^T(t) z_c(t) dt \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

และ l_2 เป็นปริภูมิ (space) ลำดับผลรวมรากที่สอง (square summable sequence) และนอร์ม l_2 ของ $z_d[k]$ กำหนดให้ เป็นดังนี้

$$\|z_d[k]\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_d^T[k] z_d[k] \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

และเมื่อรวมผลของนอร์มทั้งสอง โดยกำหนดให้นอร์ม L_2 ของสัญญาณลูกผสม (hybrid signal)

$$\begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix} \text{ มีลักษณะดังในนิยามต่อไปนี้}$$

นิยามที่ 3.4

$$\left\| \begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\|z_c(t)\|_2^2 + \|z_d[k]\|_2^2} \quad (3.27)$$

เนื่องจาก \mathcal{X}_s มีคุณลักษณะที่แปรผันตามเวลาแบบรายคาบทำให้ไม่สามารถใช้นิยามของ

นอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่มีคุณลักษณะของโดเมนความถี่ได้ เราจะทำการกำหนดนอร์ม H_2 ของระบบลูกผสมที่มีความสัมพันธ์กับโดเมนเวลาแทน โดยพิจารณานิยามของนอร์ม H_2 ที่ใช้กับระบบรายคาบ (periodic system) ได้ถูกเสนอโดย Khargonekar และ Sivashankar (1991) หรือ Bamiah และ Pearson (1991) ที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

3.6.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์นอร์ม H_2

นิยามที่ 3.5 นอร์ม H_2 ของระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ในสมการที่ (3.10) มีลักษณะดังนี้

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_s\|_2 &= \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{i=1}^{m_c} \left\| \mathcal{T}_s \begin{pmatrix} \delta(t-v)e_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 dv + \sum_{j=1}^{m_d} \left\| \mathcal{T}_s \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{k_0} e_j \end{pmatrix} \right\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{i=1}^{m_c} \|z_{hci}\|_2^2 dv + \sum_{j=1}^{m_d} \|z_{hdj}\|_2^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

โดย $\delta(t)$ และ δ_{ij} เป็นฟังก์ชันดิแรกเดลต้า (Dirac delta function) และฟังก์ชันโครเนคเกอร์เดลต้า (Kronecker delta function) ตามลำดับ และ e_i เป็นเวกเตอร์หน่วย (unit vector) และ z_{hci} และ z_{hdj} เป็นสัญญาณออกลูกผสมโดยมีสัญญาณเข้า $w_c(t) = \delta(t-v)e_i$ และ $w_d[k] = \delta_{k_0} e_j$ ตามลำดับ

เพื่อให้นอร์ม H_2 ที่กล่าวมาแล้วสามารถหาค่าได้จะต้องมีข้อกำหนดประการเช่น $B_{cs}(t)$, $B_{ds}, D_c, D_{cs}(t)$ และ D_{ds} ในแบบจำลองระบบลูกผสมสมการที่ (3.10) โดยกำหนดให้เท่ากับศูนย์ ดังนั้นเมื่อรวมระบบลูกผสมกับข้อกำหนดดังกล่าว จะได้สมการสถานะใหม่ดังนี้ คือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ x_d[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c + A_{cs}(t)S_\tau & A_{cd}(t) \\ A_{ds}S_\tau & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_c & B_{cd}(t) \\ 0 & B_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(t) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

และสมการสัญญาณออกใหม่ดังนี้ คือ

$$\begin{pmatrix} z_c(t) \\ z_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_c + C_{cs}(t)S_\tau & C_{cd}(t) \\ C_{ds}S_\tau & C_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ x_d[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{cd}(t) \\ 0 & D_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_c(t) \\ w_d[k] \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

โดยที่ $k\tau \leq t < (k+1)\tau$

การคำนวณค่านอร์ม H_2 เริ่มจากการกำหนดให้ $C_{c1}(t)$, C_{d2} และ $\mathcal{D}_c(t)$ ในสมการที่ (3.18) เป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} C_{c1}(t) \\ C_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{cc}(t) & C_{cd}(t) \\ C_{ds} & C_d \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

โดย $C_{c1}(t)$, C_{d2} สามารถหาได้จากสมการที่ (3.16) และ (3.17) และกำหนดให้

$$\mathcal{W}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau C_c e^{A_c \xi} B_c B_c^T e^{A_c^T \xi} C_c^T d\xi \quad (3.32)$$

สามารถคำนวณได้โดยตรงจากนิยามของนอร์ม H_2 ในสมการที่ (3.28) จากผลเฉลยของสมการที่ (3.14) ดังนั้นจะได้ นอร์ม H_2 ของระบบลูกผสมดังนี้

$$\begin{aligned} \|T_s\|_2^2 = & \text{trace} \left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) \frac{X_c}{\tau} C_{c1}^T(t) + \mathcal{W}(t) \right) dt \right\} \\ & + \text{trace} \left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) X_d C_{c1}^T(t) + \mathcal{D}_c(t) \mathcal{D}_c^T(t) \right) dt \right\} \\ & + \text{trace} \left\{ C_{d2} \frac{X_c}{\tau} C_{d2}^T \right\} + \text{trace} \{ C_{d2} X_d C_{d2}^T + D_d D_d^T \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

โดย X_c และ X_d เป็นผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการลียาปูนอฟดังต่อไปนี้

$$\frac{X_c}{\tau} = \mathcal{A}_d \frac{X_c}{\tau} \mathcal{A}_d^T + \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$X_d = \mathcal{A}_d X_d \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_{d2} \mathcal{B}_{d2}^T \quad (3.35)$$

โดย \mathcal{B}_{d2} และ \hat{W} กำหนดให้เป็นดังนี้

$$\hat{W} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{A_c \xi} B_c B_c^T e^{A_c^T \xi} d\xi \quad (3.36)$$

$$\mathcal{B}_{d2} := \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{cd} \\ B_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\tau e^{A_c(\tau-\xi)} B_{cd}(\xi) d\xi \\ B_d \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

กำหนดให้ X_s เป็นดังนี้

$$X_s := \frac{X_c}{\tau} + X_d \quad (3.38)$$

ดังนั้นจะได้ X_s เป็นผลเฉลยของสมการลียาปูนอฟดังนี้

$$X_s = \mathcal{A}_d X_s \mathcal{A}_d^T + \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{d2} \mathcal{B}_{d2}^T \quad (3.39)$$

เพื่อให้การพิจารณาง่ายขึ้น เราจะได้ นอร์ม H_2 ของระบบชักรัดตัวอย่างข้อมูลโดยใช้แบบจำลองระบบลูกผสมดังนี้

$$\begin{aligned} \|T_s\|_2^2 = & \text{trace} \left\{ \int_0^\tau \left(C_{c1}(t) X_s C_{c1}^T(t) + \mathcal{D}_c(t) \mathcal{D}_c^T(t) \right) dt \right\} + \text{trace} \left\{ \int_0^\tau \mathcal{W}(t) dt \right\} \\ & + \text{trace} \{ C_{d2} X_s C_{d2}^T + D_d D_d^T \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

การพิจารณาระบบซีกต์วอย่างข้อมูลทำได้โดยการสร้างระบบเวลาเต็มหน่วยสมมูล (equivalent discrete-time system) ที่ยังคงรักษาค่าของนอร์ม H_2 ไว้เท่าเดิม

ทฤษฎีที่ 3.1 พิจารณาระบบลูกผสม \mathcal{T}_s ที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังในสมการที่ (3.29) และ (3.30) นอร์ม H_2 ที่ได้จากนิยามที่ 3.5 จะได้ดังนี้

$$\|\mathcal{T}_s\|_2 = \|\mathcal{T}_d[z]\|_2 \quad (3.41)$$

โดย $\mathcal{T}_d[z]$ เป็นระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วยมีลักษณะดังนี้

$$\mathcal{T}_d[z]: \begin{cases} \tilde{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d \tilde{x}_d[k] + \mathcal{B}_d u_d[k] \\ \tilde{z}_d[k] = \tilde{C}_d \tilde{x}_d[k] + \tilde{D}_d u_d[k] \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\text{โดย } \mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{d11} & \mathcal{A}_{d12} \\ \mathcal{A}_{ds} & \mathcal{A}_d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} \hat{B}_{d11} & \mathcal{B}_{cd} \\ 0 & B_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_d = \begin{pmatrix} \hat{C}_{d11} & \hat{C}_{d12} \\ C_{ds} & C_d \end{pmatrix}$$

$$\text{และ } \tilde{D}_d = \begin{pmatrix} \hat{D}_{d11} & \hat{D}_{d12} \\ 0 & D_d \end{pmatrix}$$

ตัวแปรสถานะคือ $\tilde{x}_d[k] = (x_c^T(k\tau) \quad x_d^T[k])^T$, สัญญาณเข้าคือ $u_d[k] = (w_c^T(k\tau) \quad w_d^T[k])^T$ และสัญญาณออกคือ $\tilde{z}_d[k] = (z_c^T(k\tau) \quad z_d^T[k])^T$ และ \mathcal{A}_d และ \mathcal{B}_d หาได้จากสมการที่ (3.21) และ (3.37) ส่วนเมตริกซ์ \hat{B}_{d11} , \hat{C}_{d11} , \hat{C}_{d12} , \hat{D}_{d11} และ \hat{D}_{d12} จะพิจารณาดังต่อไปนี้คือ

- $\hat{B}_{d11} \in \mathcal{R}^{n_c \times n_c}$ ได้จากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้

$$\hat{B}_{d11} B_{d11}^T = \hat{W} \quad (3.43)$$

- กำหนดให้

$$\tilde{M} := \int_0^{\tau} C_{cd}^T C_{cd} dt \quad (3.44)$$

โดยทำการแยกตัวประกอบ \tilde{M} ให้มีลักษณะดังนี้

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} \hat{C}_{d11}^T \\ \hat{C}_{d12}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{d11} & \hat{C}_{d12} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

โดย $\hat{C}_{d11} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d) \times n_c}$ และ $\hat{C}_{d12} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d) \times n_d}$

- กำหนดให้ Δ_1 เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n_c \times n_c$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_1 \Delta_1^T = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} C_c e^{A_c \xi} B_c B_c^T e^{A_c^T \xi} C_c d\xi dt$$

จะได้ $\hat{D}_{d11} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d) \times n_c}$ ดังต่อไปนี้

$$\hat{D}_{d11} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\hat{D}_{d12} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d) \times n_d}$ เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\text{trace}\{\hat{D}_{d12}^T \hat{D}_{d12}\} = \text{trace}\left\{\int_0^{\infty} \mathcal{D}_c^T(t) \mathcal{D}_c(t) dt\right\}$$

- กำหนดให้ Δ_2 เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $m_d \times m_d$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_2^T \Delta_2 = \text{trace}\left\{\int_0^{\infty} \mathcal{D}_c^T(t) \mathcal{D}_c(t) dt\right\}$$

จะได้ $\hat{D}_{d12} \in \mathcal{R}^{(n_c+n_d) \times m_d}$ ดังต่อไปนี้

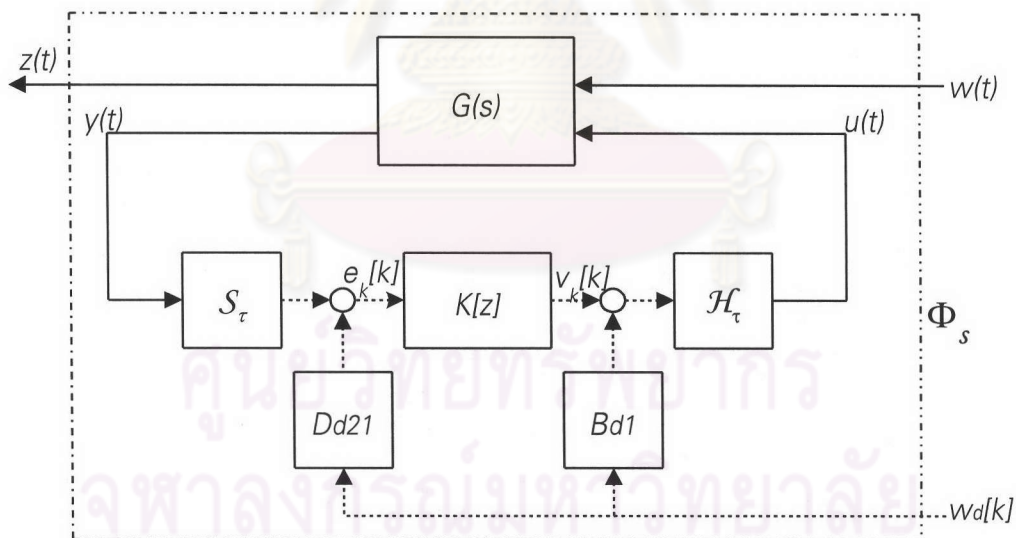
$$\hat{D}_{d12} = \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $\|T_s\|_2 = \|T_d[z]\|_2 = \text{trace}\{\tilde{C}_d \mathcal{L}_d \tilde{C}_d^T + \tilde{D}_d \tilde{D}_d^T\}$ (3.46)

โดย $\mathcal{L}_d = \mathcal{A}_d \mathcal{L}_d \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง \mathcal{L}_d เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาปูนอฟ

3.6.2 ทฤษฎีการสังเคราะห์หั่นอร์ม H_2

โดยวัตถุประสงค์ของการสังเคราะห์หั่นอร์ม H_2 คือ เมื่อกระบวนการที่เป็นโดเมนเวลาต่อเนื่อง $G(s)$ ดังในรูปที่ 3.6 จะทำการหาคำควบคุมเชิงเลข $K[z]$ ซึ่งทำให้ระบบป้อนกลับวงรอบปิดมีเสถียรภาพภายในเชิงเส้นกำกับและค่าหั่นอร์ม H_2 ของระบบรอบปิดมีค่าน้อยที่สุด (minimized)



รูปที่ 3.6 ลักษณะของระบบชั้กตัวอย่างข้อมูลโดยทั่วไป

จากรูปที่ 3.6 จะเห็นได้ว่า $w(t) \in \mathcal{R}^{m_1}$, $u(t) \in \mathcal{R}^{m_2}$, $z(t) \in \mathcal{R}^{p_1}$ และ $y(t) \in \mathcal{R}^{p_2}$ เป็นสัญญาณเข้าภายนอก, สัญญาณเข้าควบคุม, สัญญาณออกที่ต้องการควบคุม และสัญญาณที่ได้การวัดตามลำดับ ซึ่งทั้งหมดเป็นสัญญาณเชิงอุปมาน ขณะที่ $w_d[k] \in \mathcal{R}^{m_d}$, $e_k[k] \in \mathcal{R}^{p_2}$ และ $v_k[k] \in \mathcal{R}^{m_2}$ เป็นสัญญาณเข้าภายนอกในเวลาเต็มหน่วย, สัญญาณเข้าของตัวควบคุมและสัญญาณ

ญาณของตัวควบคุมตามลำดับ ซึ่งทั้งหมดเป็นสัญญาณเวลาเต็มหน่วย $G(s), K[z], \mathcal{H}_\tau(t)$ และ S_τ เป็นกระบวนการนัยทั่วไปในโดเมนเวลาต่อเนื่อง (continuous-time generalized plant), ตัวควบคุมเชิงเลขที่ต้องการออกแบบ, ฟังก์ชันโฮล และตัวซักรั่วอย่างข้อมูลที่มีคาบการซักรั่วอย่างเท่ากับ $\tau > 0$ โดย D_{d21} เป็นผลจากสัญญาณรบกวนในเวลาเต็มหน่วยที่ได้จากการวัด (measurement noise) ซึ่งเกิดจากความคลาดเคลื่อนในการขบวนการควอนไทซ์ใน A/D และ B_{d11} เป็นผลจากความคลาดเคลื่อนในการปัดเศษที่สะสมในการคำนวณเชิงเลข (round-off error accumulated in the digital computation) กำหนดให้

$$G(s) : \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$K[z] : \begin{pmatrix} x_k[k+1] \\ v_k[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k[k] \\ e_k[k] \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

โดย $x(t) \in \mathcal{R}^n, x_k[k] \in \mathcal{R}^{n_k}$ ซึ่งสัญญาณค่าเข้าควบคุม $u(t)$ และสัญญาณเข้าของตัวควบคุมเชิงเลข $e_k[k]$ กำหนดให้ดังนี้

$$u(t) = \mathcal{H}_\tau(t)(v_k[k] + B_{d1}w_d[k]) \quad (3.49)$$

$$e_k[k] = S_\tau y(t) + D_{d21}w_d[k] \quad (3.50)$$

โดยที่ $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$

ข้อกำหนดบางประการ เพื่อที่จะสามารถหาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงรอบปิดของระบบ ลูกลมสมมีเสถียรภาพ

1. (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ (stabilizable) และ (A, C_2) สามารถตรวจวัดได้ (detectable)
2. การเลือกช่วงการซักรั่วอย่าง τ ทำให้ (A_s, B_{s2}) สามารถทำให้เสถียรได้และ (A_s, C_{s2}) สามารถสังเกตได้โดย

$$A_s := e^{A\tau}, B_{s2} := \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)} B_2 \mathcal{H}_\tau(\xi) d\xi, C_{s2} := C_2 \quad (3.51)$$

เมื่อแทน (3.49) และ (3.50) ลงใน (3.47) และ (3.48) และจัดรูปใหม่ จะได้ระบบวงรอบปิด Φ_s โดยเปรียบเทียบกับแบบจำลองระบบลูกลมสม จะได้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีความสัมพันธ์กับระบบลูกลมสมดังนี้ คือ

$$\begin{aligned}
A_c &= A, \quad A_{cs}(t) = B_2 \mathcal{H}_\tau(t) D_k C_2, \quad A_{cd}(t) = B_2 \mathcal{H}_\tau(t) C_k, \quad A_{ds} = B_k C_2, \quad A_d = A_k \\
B_c &= B_1, \quad B_{cs}(t) = 0, \quad B_{cd}(t) = B_2 \mathcal{H}_\tau(t) (D_k D_{d21} + B_{d1}), \quad B_d = B_k D_{d21} \\
C_c &= C_1, \quad C_{cs}(t) = D_{12} \mathcal{H}_\tau(t) D_k C_2, \quad C_{cd}(t) = D_{12} \mathcal{H}_\tau(t) C_k \\
D_{cd}(t) &= D_{12} \mathcal{H}_\tau(t) (D_k D_{d21} + B_{d1})
\end{aligned} \tag{3.52}$$

เราสามารถพิจารณาทฤษฎีการสังเคราะห์หั่นออร์ม H_2 ได้ในลักษณะเช่นเดียวกับทฤษฎีการวิเคราะห์หั่นออร์ม H_2 ในทฤษฎีที่ 3.1 ดังในทฤษฎีต่อไปนี

ทฤษฎีที่ 3.2 พิจารณาระบบซีกตัวอย่างข้อมูล Φ_s โดยสอดคล้องกับข้อกำหนดทั้ง 2 ข้อข้างต้น ซึ่งทำให้ตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้ระบบวงรอบปิด Φ_s มีเสถียรภาพ และสามารถหั่นออร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุด (optimize) กับระบบได้ก็ต่อเมื่อตัวควบคุมเชิงเลขที่ได้จากการออกแบบสามารถทำให้กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น (fictitious discrete-time plant) มีเสถียรภาพทั้งยังสามารถหั่นออร์ม H_2 ที่เหมาะที่สุดของระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้นดังนี้ $\Phi_d[z] := \sum_d (\tilde{G}_s[z], K[z])$ โดย $\tilde{G}_s[z]$ มีลักษณะดังนี้

$$\tilde{G}_s[z] : \begin{pmatrix} \tilde{x}_d[k+1] \\ \tilde{z}(k\tau) \\ \tilde{y}(k\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & B_{s1} & B_{s2} B_{d1} & B_{s2} \\ C_{s1} & D_{s11} & D_{s12} B_{d1} & D_{s12} \\ C_{s2} & 0 & D_{d21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_d[k] \\ w(k\tau) \\ w_d[k] \\ u(k\tau) \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

โดย A_s, B_{s2} และ C_{s2} สามารถหาได้จากสมการที่ (3.51) ส่วนเมตริกซ์ B_{s1}, C_{s1}, D_{s11} และ D_{s12} สามารถหาได้ดังต่อไปนี้

- $B_{s1} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ได้จากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้

$$B_{s1} B_{s1}^T = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{A\xi} B_1 B_1^T e^{A^T \xi} d\xi \tag{3.54}$$

- กำหนดให้

$$M_s := \int_0^\tau \begin{pmatrix} C_1^T(t) \\ C_2^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{pmatrix} dt \tag{3.55}$$

โดย $C_1(t)$ และ $C_2(t)$ กำหนดให้เป็นดังนี้

$$C_1(t) := C_1 e^{At} \tag{3.56}$$

$$C_2(t) := C_1 \int_0^t e^{A(t-\xi)} B_2 \mathcal{H}_\tau(\xi) d\xi + D_{12} \mathcal{H}_\tau(t) \quad (3.57)$$

ทำการแยกตัวประกอบ (factorization) M_s ให้มีลักษณะดังนี้

$$M_s := \begin{pmatrix} C_{s1}^T \\ D_{s12}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{s1} & D_{s12} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

โดย $C_{s1} \in \mathcal{R}^{(n+m_2) \times n}$ และ $D_{s12} \in \mathcal{R}^{(n+m_2) \times m_2}$

- กำหนดให้ Δ_1 เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงขนาด $n \times n$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\Delta_1 \Delta_1^T = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^\tau C_1 e^{A\xi} B_1 B_1^T e^{A^T \xi} C_1 d\xi dt$$

จะได้ $D_{s11} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ดังต่อไปนี้

$$D_{s11} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

- ส่วนการสังเคราะห์ของ $\mathcal{D}_c(t)$ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับการทฤษฎีการวิเคราะห์นอร์ม H_2 โดย

$$\mathcal{D}_c(t) = C_2(t) (D_k D_{d21} + B_{d21})$$

จากทฤษฎีที่ 3.2 เราสามารถสร้างกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สมมูลกับกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องโดยค่านอร์ม H_2 ยังเท่าเดิม ดังนั้นปริภูมิสถานะของระบบวงรอบปิดในเวลาเต็มหน่วย $\Phi_d[z]$ ที่แสดงในรูปที่ 3.7 มีลักษณะดังนี้

$$\Phi_d[z]: \begin{cases} \tilde{x}_d[k+1] = \mathcal{A}_d \tilde{x}_d[k] + \mathcal{B}_d \tilde{u}_d[k] \\ \tilde{z}_d[k] = \tilde{C}_d \tilde{x}_d[k] + \tilde{D}_d \tilde{u}_d[k] \end{cases}$$

โดย $\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} A_s + B_{s2} D_k C_2 & B_{s2} C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_d = \begin{pmatrix} B_{s1} & B_{s2} (D_k D_{d21} + B_{d21}) \\ 0 & B_d \end{pmatrix}$

$$\tilde{C}_d = (C_{s1} + D_{s12} D_k C_2 \quad D_{s12} C_k), \quad \tilde{D}_d = (D_{s11} \quad D_{s12} (D_k D_{d21} + B_{d21}))$$

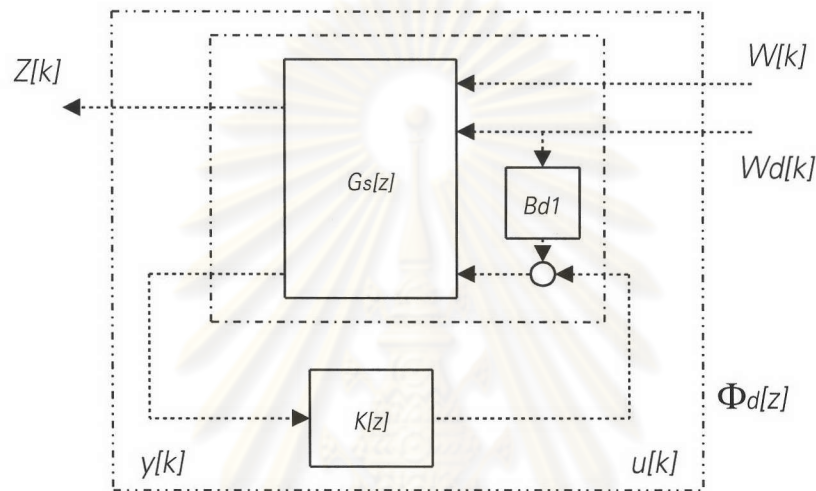
และตัวแปรสถานะ $\tilde{x}_d[k] = (x^T(k\tau) \quad x_k^T[k])^T$, สัญญาณเข้าคือ $\tilde{u}_d[k] = (w^T(k\tau) \quad w_d^T[k])^T$ ดังนั้น

$$\|\Phi_d[z]\|_2 = \text{trace}\{\tilde{C}_d \mathcal{L}_d \tilde{C}_d^T + \tilde{D}_d \tilde{D}_d^T\} \quad (3.60)$$

โดย $\mathcal{L}_d = \mathcal{A}_d \mathcal{L}_d \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง \mathcal{L}_d เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาปูนอฟ

ข้อสังเกต ระบบในเวลาเต็มหน่วยที่สมมูล $\tilde{G}_s[z]$ อีกลักษณะหนึ่งซึ่งสามารถหาได้จาก

Khargonekar และ Sivashankar (1991) หรือ Bamieh และ Pearson (1991) สำหรับในโดเมนเวลา (time domain) และในโดเมนความถี่สามารถหาได้จาก Hagiwara และ Araki (1995)

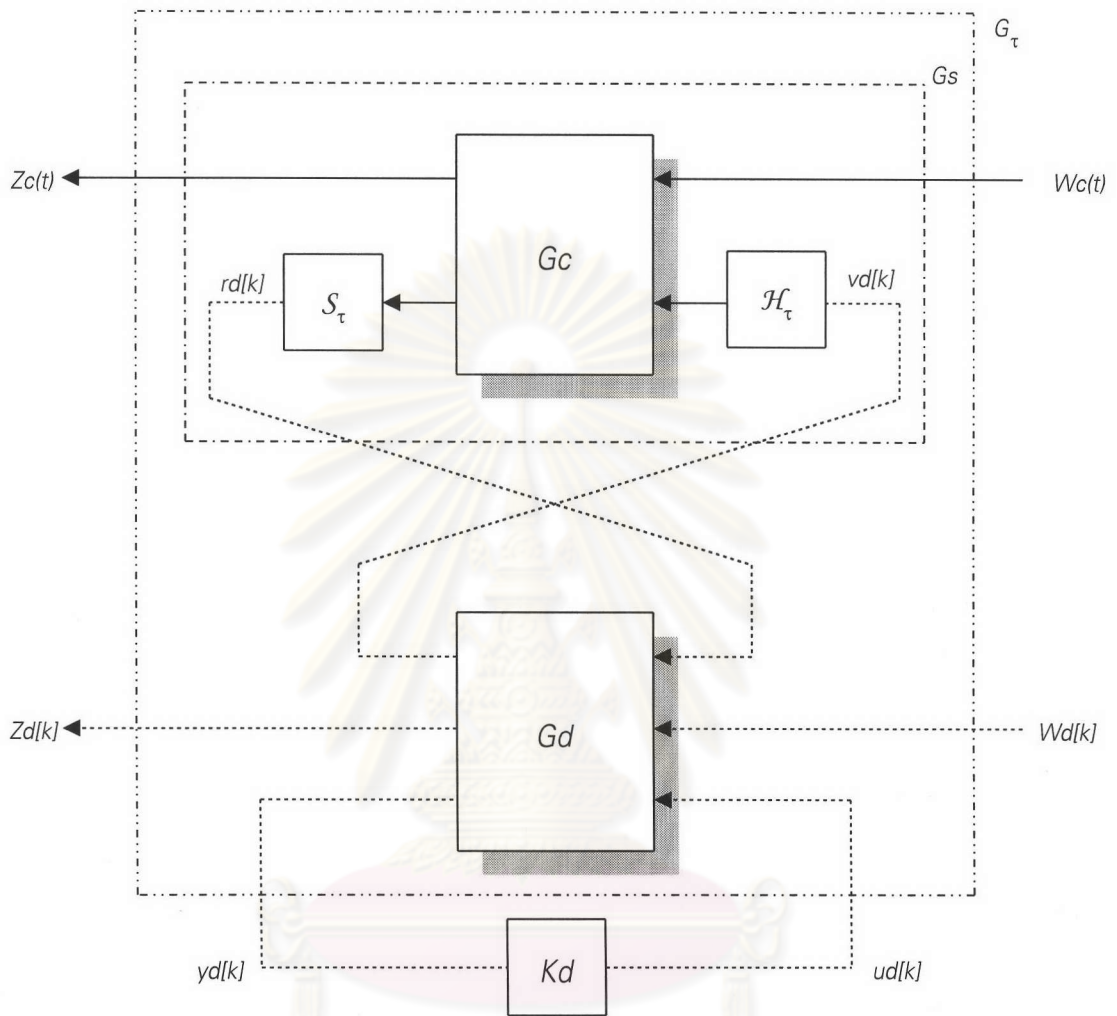


รูปที่ 3.7 ระบบในเวลาเต็มหน่วยที่สมมูลกับระบบซีกตัวอย่างข้อมูล

จะเห็นว่าทฤษฎีการสังเคราะห์จะพิจารณาเฉพาะนอร์ม H_2 ของสัญญาณในโดเมนเวลา ต่อเนื่องเท่านั้น เพื่อการพิจารณาในทฤษฎีสังเคราะห์มีลักษณะนัยทั่วไปที่ประกอบด้วยนอร์ม H_2 ของทั้งสัญญาณในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยจึงได้เปลี่ยนกรอบการทำงานในการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบซีกตัวอย่างข้อมูลให้มีรูปแบบทั่วไป (General Framework for Sampled-Data Controller Synthesis) มากขึ้น ซึ่งประกอบด้วยกระบวนการทั้งในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยโดยเชื่อมต่อกันด้วยตัวซีกตัวอย่างและโฮลและพิจารณาสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม (regulated output) ทั้งในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลาเต็มหน่วยดังในรูปที่ 3.8

กำหนดให้ กระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องมีลักษณะดังนี้

$$G_c : \begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_{c1} & B_{c2} \\ C_{c1} & 0 & D_{c12} \\ C_{c2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ w_c(t) \\ u_c(t) \end{pmatrix} \quad (3.61)$$



รูปที่ 3.8 แสดงกรอบการทำงานของการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบชักรัดตัวอย่างข้อมูล

สำหรับมิติของสัญญาณในโดเมนเวลาต่อเนื่องมีดังนี้คือ $x_c(t) \in \mathcal{R}^{n_c}, w_c(t) \in \mathcal{R}^{m_c1}$
 $z_c(t) \in \mathcal{R}^{p_c1}, y_c(t) \in \mathcal{R}^{p_c2}$ และ $u_c(t) \in \mathcal{R}^{m_c2}$ ตามลำดับ

กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยมีลักษณะดังนี้

$$G_d : \begin{pmatrix} x_d[k+1] \\ v_d[k] \\ z_d[k] \\ y_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_d & B_{d0} & B_{d1} & B_{d2} \\ C_{d0} & D_{d00} & D_{d01} & D_{d02} \\ C_{d1} & D_{d10} & D_{d11} & D_{d12} \\ C_{d2} & D_{d20} & D_{d21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d[k] \\ r_d[k] \\ w_d[k] \\ u_d[k] \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

สำหรับมิติของสัญญาณในเวลาเต็มหน่วยมีดังนี้ $x_d[k] \in \mathcal{R}^{n_d}$, $w_d[k] \in \mathcal{R}^{m_{d1}}$
 $r_d[k] \in \mathcal{R}^{m_{d0}}$, $z_d[k] \in \mathcal{R}^{p_{d1}}$, $v_d[k] \in \mathcal{R}^{p_{d0}}$, $y_d[k] \in \mathcal{R}^{p_{d2}}$ และ $u_d[k] \in \mathcal{R}^{m_{d2}}$ ตามลำดับ และ
 ตัวควบคุมเชิงเลขที่ที่ต้องการออกแบบมีลักษณะดังนี้

$$K_d : \begin{pmatrix} x_k[k+1] \\ u_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k[k] \\ y_d[k] \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

สำหรับมิติของตัวควบคุมเชิงเลขมีเพียง $x_k[k] \in \mathcal{R}^{n_k}$ เท่านั้น และการพิจารณามีลักษณะ
 ที่ซับซ้อนขึ้นโดยประกอบด้วยทั้งพารามิเตอร์ของกระบวนการทั้งในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเวลา
 เต็มหน่วยและตัวควบคุมเชิงเลข โดยเริ่มจากการรวมกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยและตัวควบคุม
 เชิงเลขที่ต้องการออกแบบ หลังจากนั้นจึงนำมารวมกับกระบวนการในเวลาเต็มหน่วยที่สร้างขึ้น
 จากกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่มีค่านอร์ม H_2 สมมูลกัน จะได้ผลการรวมกันระหว่าง
 กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยตัวควบคุมเชิงเลขดังนี้

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_d[k+1] \\ v_d[k] \\ z_d[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_d & \tilde{B}_{d1} & \tilde{B}_{d2} \\ \tilde{C}_{d1} & \tilde{D}_{d11} & \tilde{D}_{d12} \\ \tilde{C}_{d2} & \tilde{D}_{d21} & \tilde{D}_{d22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_d[k] \\ r_d[k] \\ w_d[k] \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \tilde{A}_d &= \begin{pmatrix} A_d + B_{d2} D_k C_{d2} & B_{d2} C_k \\ B_k C_{d2} & A_k \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_{d1} &= \begin{pmatrix} B_{d0} + B_{d2} D_k D_{d20} \\ B_k D_{d20} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{d2} = \begin{pmatrix} B_{d1} + B_{d2} D_k D_{d21} \\ B_k D_{d21} \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}_{d1} &= \begin{pmatrix} C_{d0} + D_{d02} D_k C_{d2} & D_{d02} C_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{d2} = \begin{pmatrix} C_{d1} + D_{d12} D_k C_{d2} & D_{d12} C_k \end{pmatrix}, \\ \tilde{D}_{d11} &= D_{d00} + D_{d02} D_k D_{d20}, \quad \tilde{D}_{d12} = D_{d01} + D_{d02} D_k D_{d21}, \\ \tilde{D}_{d21} &= D_{d10} + D_{d12} D_k D_{d20}, \quad \tilde{D}_{d22} = D_{d11} + D_{d12} D_k D_{d21} \\ \tilde{x}_d[k] &= \begin{pmatrix} x_d^T[k] & x_k^T[k] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

และสัญญาณเข้าควบคุม $u(t)$ และสัญญาณออก $y(t)$ ของกระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่
 ผ่านตัวซັกดตัวอย่างและโฮล กำหนดให้ดังนี้

$$u(t) = \mathcal{H}_\tau(t) v_d(t), \quad r_d[k] = S_\tau y(t) \quad (3.66)$$

เมื่อรวมสมการที่ (3.61) และ (3.64) โดยใช้สมการที่ (3.66) จะได้ระบบวงรอบปิด โดยเปรียบเทียบกับแบบจำลองระบบลูกผสม จะได้พารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีความสัมพันธ์กับระบบลูกผสมดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
 A_c &= A_c, A_{cs}(t) = B_{c2} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{D}_{d11} C_{c2}, A_{cd}(t) = B_{c2} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{C}_{d1}, A_{ds} = \tilde{B}_{d1} C_{c2}, A_d = \tilde{A}_d \\
 B_c &= B_{c1}, B_{cs}(t) = 0, B_{cd}(t) = B_{c2} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{D}_{d12}, B_d = \tilde{B}_{d2} \\
 C_c &= C_{c1}, C_{cs}(t) = D_{c12} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{D}_{d11} C_{c2}, C_{cd}(t) = D_{c12} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{C}_{d1}, C_{ds} = \tilde{D}_{d21} C_{c2}, C_d = \tilde{C}_{d2} \\
 D_{cd}(t) &= D_{c12} \mathcal{H}_\tau(t) \tilde{D}_{d12}, D_d = \tilde{D}_{d22}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

จะเห็นว่าเราสามารถพิจารณาทฤษฎีการสังเคราะห์หั่นอร์ม H_2 ได้เช่นเดียวกับทฤษฎีการวิเคราะห์หั่นอร์ม H_2 ในทฤษฎีที่ 3.1 โดยพารามิเตอร์ $A_s, B_{s1}, B_{s2}, C_{s1}, D_{s11}$ และ D_{s12} เหมือนกับในสมการที่ (3.54)-(3.59) จากทฤษฎีที่ 3.2 ที่ผ่านมา ดังนั้นเราสามารถสร้างระบบในเวลาเต็มหน่วยที่ประกอบด้วยสัญญาณออกลูกผสมได้ดังนี้

$$\Phi_d[z]: \begin{cases} \tilde{x}_d[k+1] = \tilde{A}_d \tilde{x}_d[k] + \tilde{B}_d \tilde{u}_d[k] \\ \tilde{z}_d[k] = \tilde{C}_d \tilde{x}_d[k] + \tilde{D}_d \tilde{u}_d[k] \end{cases} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดย } \tilde{A}_d &= \begin{pmatrix} A_s + B_{s2} \tilde{D}_{d11} C_{c2} & B_{s2} \tilde{C}_{d1} \\ \tilde{B}_{d1} C_{c2} & \tilde{A}_d \end{pmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{pmatrix} B_{s1} & B_{s2} \tilde{D}_{d12} \\ 0 & \tilde{B}_{d2} \end{pmatrix} \\
 \tilde{C}_d &= \begin{pmatrix} C_{s1} + D_{s12} \tilde{D}_{d11} C_{c2} & D_{s12} \tilde{C}_{d1} \\ \tilde{D}_{d21} C_{c2} & \tilde{C}_{d2} \end{pmatrix}, \tilde{D}_d = \begin{pmatrix} D_{s11} & D_{s12} \tilde{D}_{d12} \\ 0 & \tilde{D}_{d22} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

ตัวแปรสถานะ $\tilde{x}_d[k] = \left(x_c^T(k\tau) \quad \tilde{x}_d^T[k] \right)^T$, สัญญาณเข้าคือ $\tilde{u}_d[k] = \left(w_c^T(k\tau) \quad w_d^T[k] \right)^T$ ดังนั้น

$$\|\Phi_d[z]\|_2 = \text{trace}\{\tilde{C}_d \mathcal{L}_d \tilde{C}_d^T + \tilde{D}_d \tilde{D}_d^T\} \tag{3.70}$$

โดย $\mathcal{L}_d = \mathcal{A}_d \mathcal{L}_d \mathcal{A}_d^T + \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^T$ ซึ่ง \mathcal{L}_d เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการลียาปูนอฟ

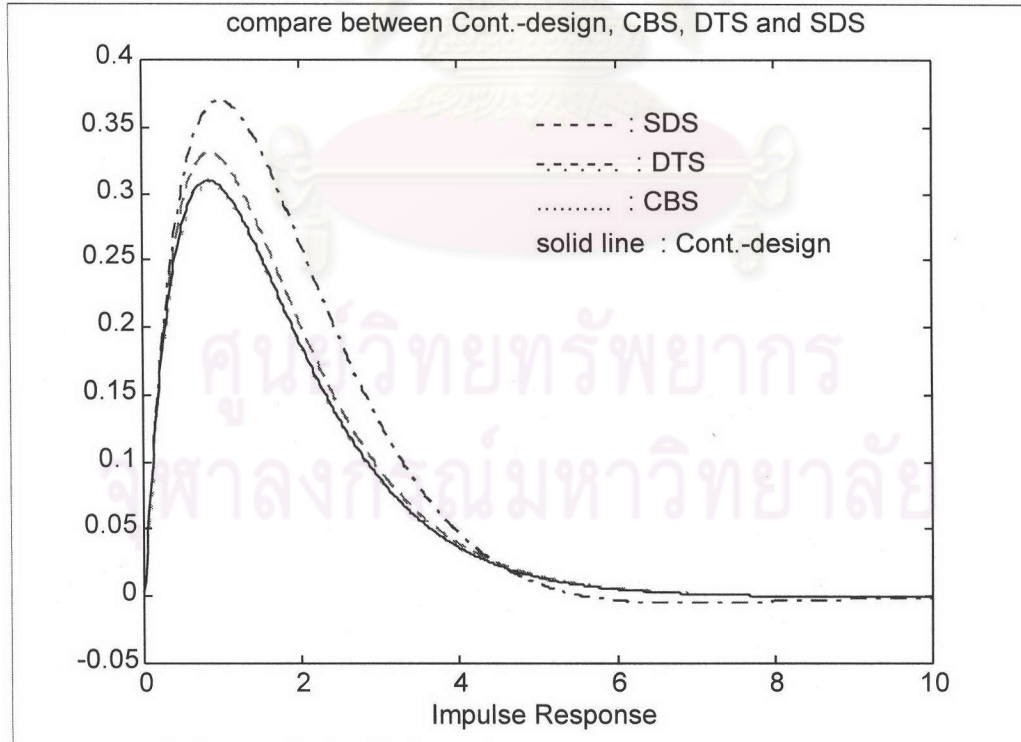
ในตอนท้ายนี้จะแสดงตัวอย่างของผลการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขในวิธีการต่าง ๆ

3.7 ตัวอย่าง

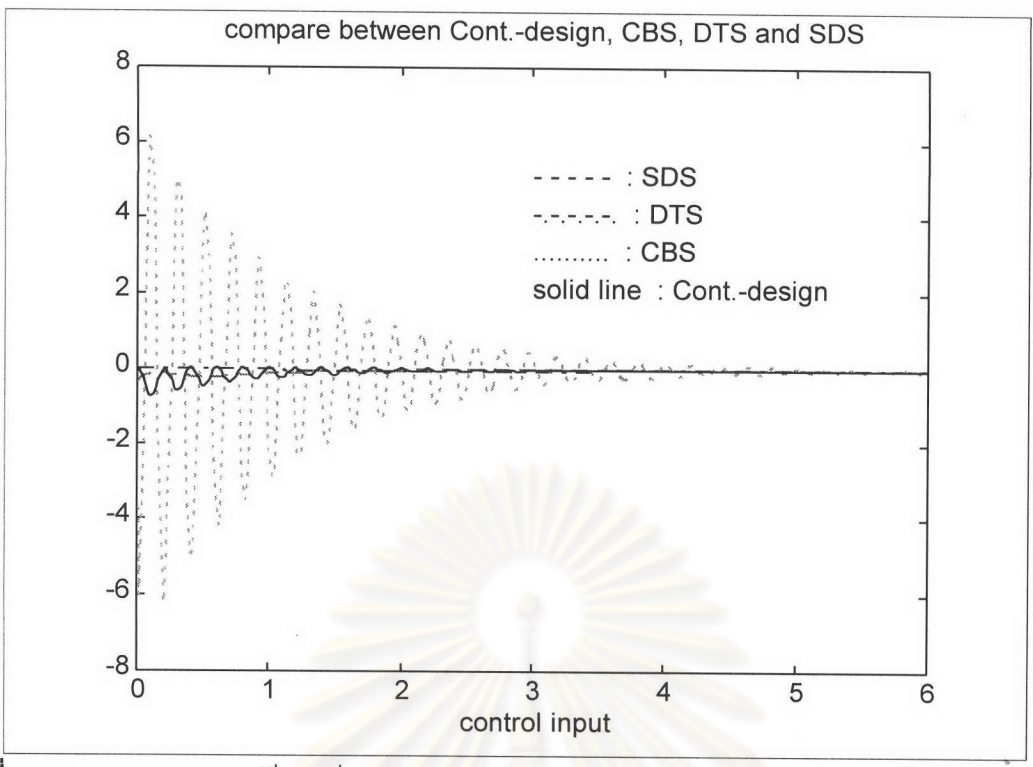
ตัวอย่างที่ 3.1 พิจารณากระบวนการที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$G(s) : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

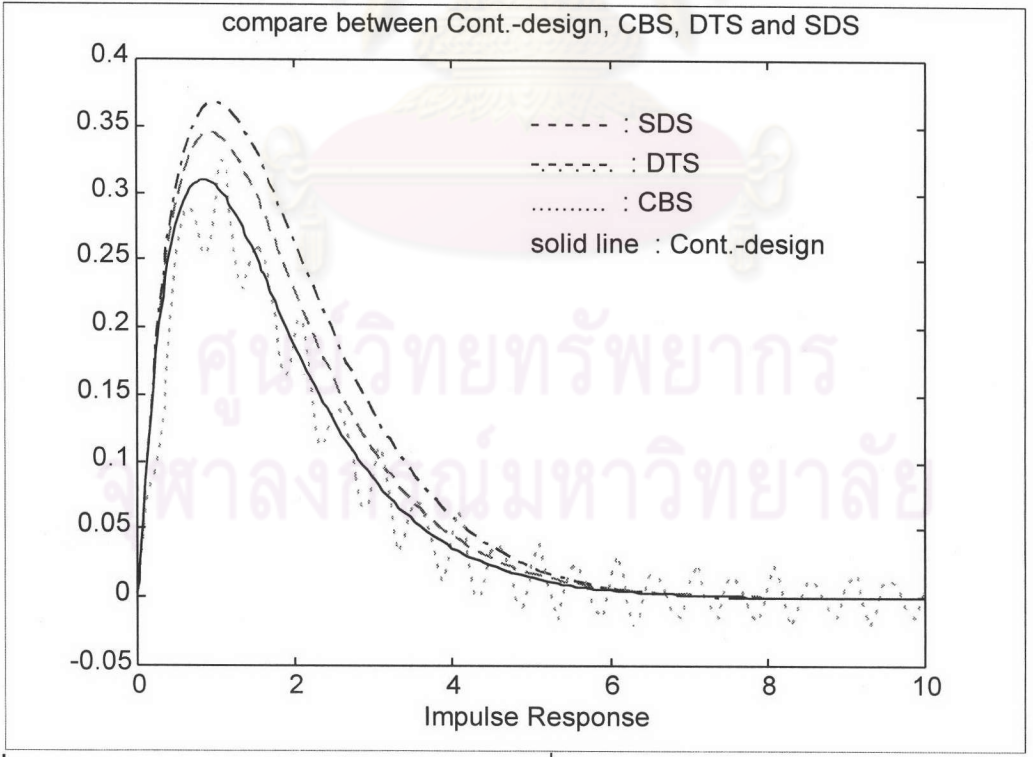
โดยพิจารณาคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.02 , 0.2 และ 0.8 วินาที ตามลำดับ



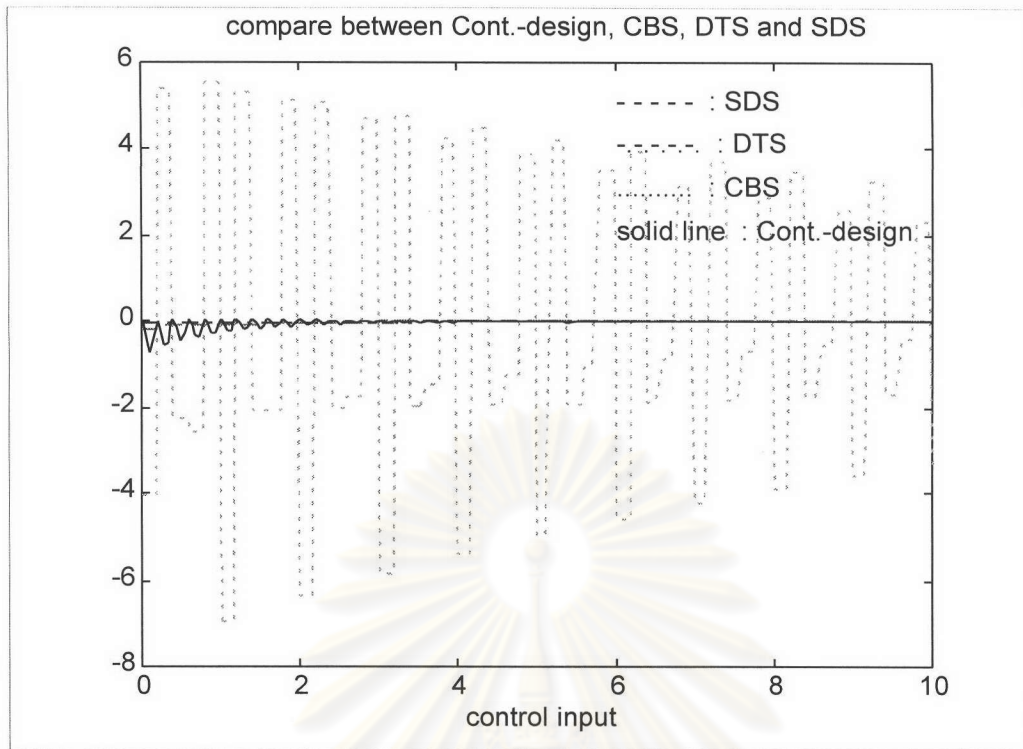
รูปที่ 3.9 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วครู่ของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



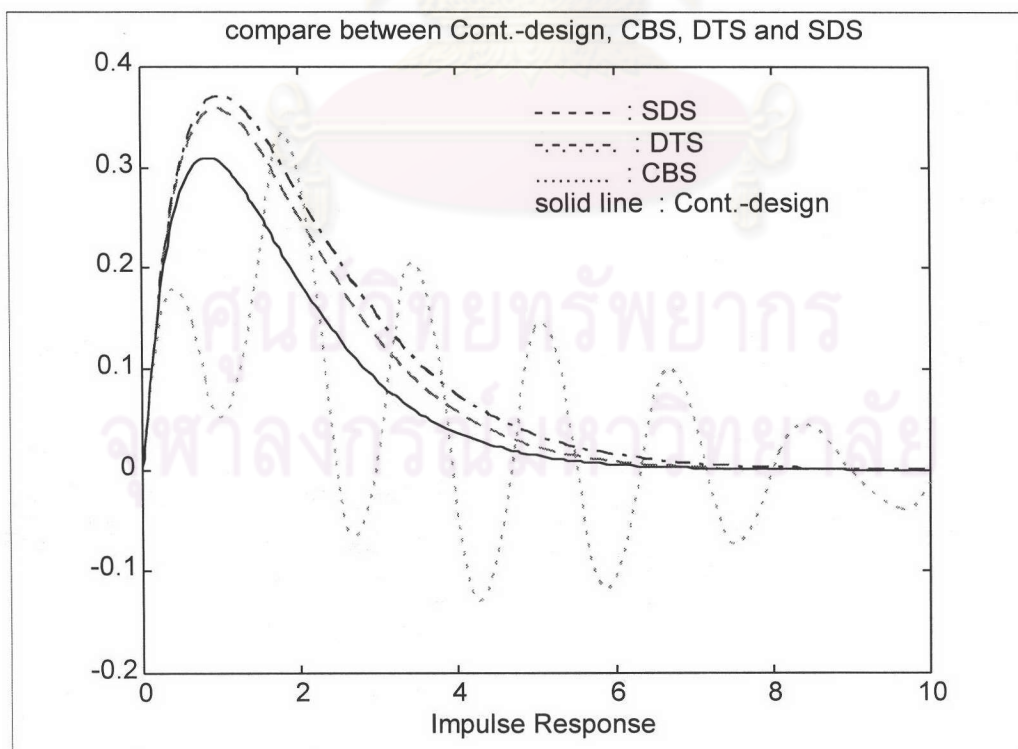
รูปที่ 3.10 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซักรั่วอย่าง เป็น 0.02 วินาที



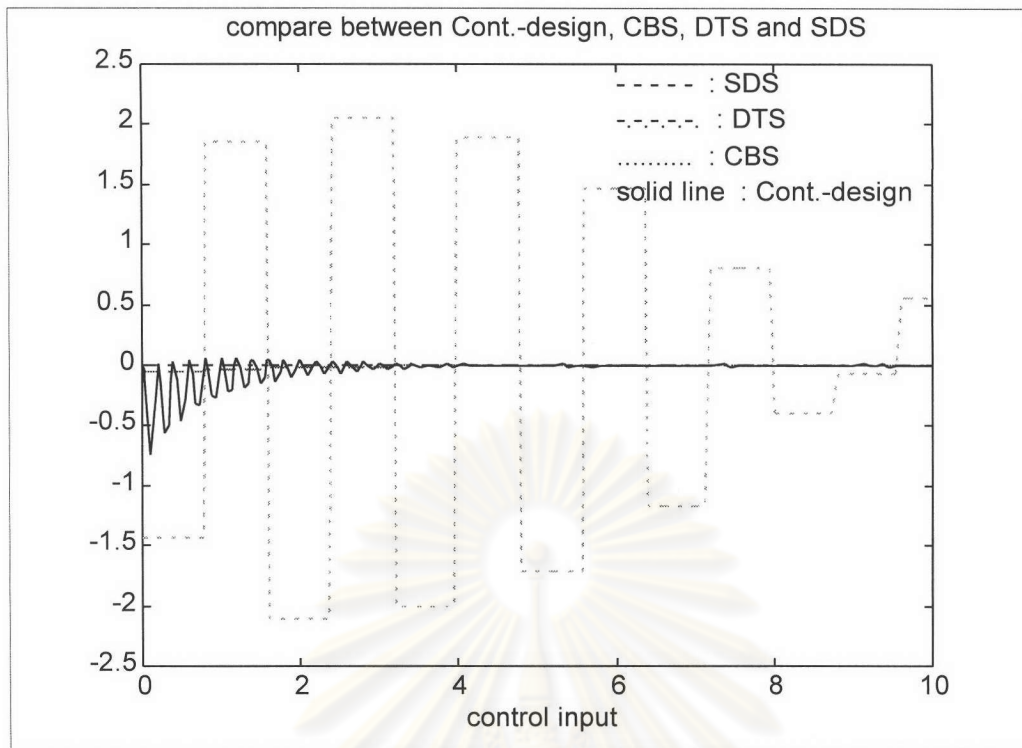
รูปที่ 3.11 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซักรั่วอย่าง เป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.12 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซักรั่วอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.13 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซักรั่วอย่างเป็น 0.80 วินาที



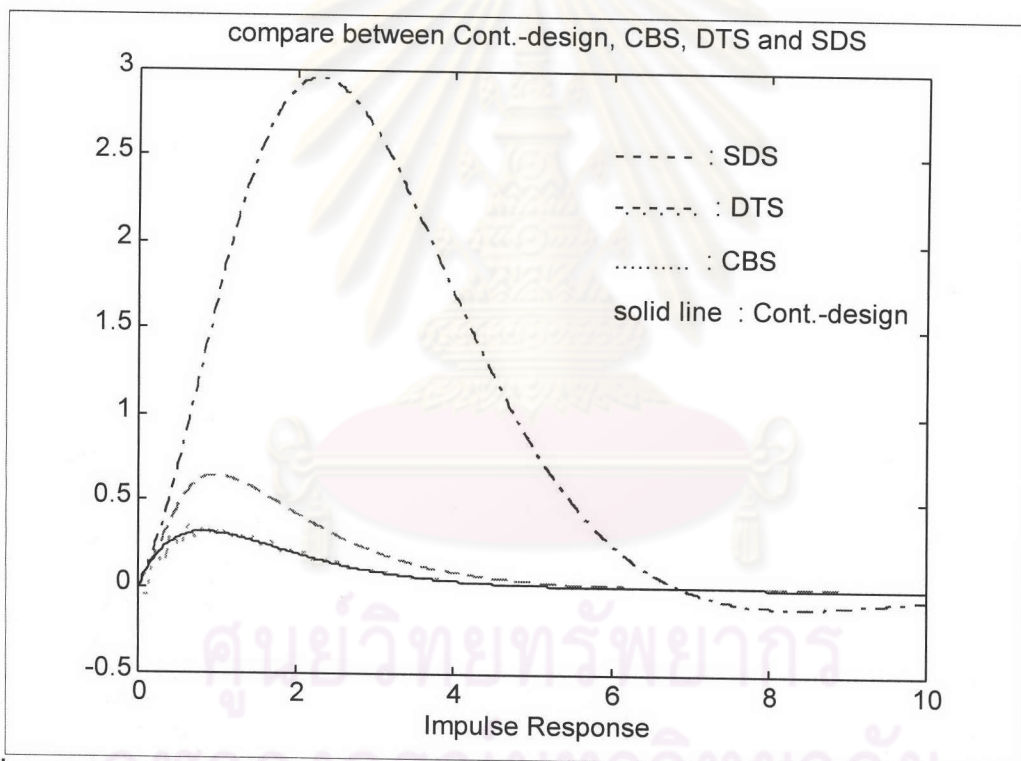
รูปที่ 3.14 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซีกตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.1 พบว่าในช่วงคาบการซีกตัวอย่างน้อย ๆ (ในที่นี้พิจารณาที่คาบการซีกตัวอย่างเท่ากับ 0.02 วินาที) การออกแบบด้วยวิธีการ CBS (ในที่นี้ทำการเปลี่ยนตัวควบคุมเชิงอุปมานที่ได้จากการออกแบบไปเป็นตัวควบคุมเชิงเลขด้วยการแปลงทัสติน) ให้ผลตอบสนองที่ใกล้เคียงกับวิธีการออกแบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง แต่เมื่อคาบการซีกตัวอย่างมากขึ้น (0.2 และ 0.8 วินาที ตามลำดับ) การออกแบบด้วยวิธีการ CBS ให้ผลตอบสนองที่มีพฤติกรรมการแกว่งกวัดเกิดขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบผลตอบสนองของการออกแบบด้วยวิธีการ SDS และ DTS พบว่าการออกแบบด้วยวิธีการ SDS ให้ผลใกล้เคียงกับผลตอบสนองจากการออกแบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องเมื่อคาบการซีกตัวอย่างเปลี่ยนไปและผลตอบสนองเปลี่ยนแปลงไปไม่มากนัก เมื่อเปรียบเทียบกับการออกแบบด้วยวิธีการ CBS และ DTS ตามลำดับ

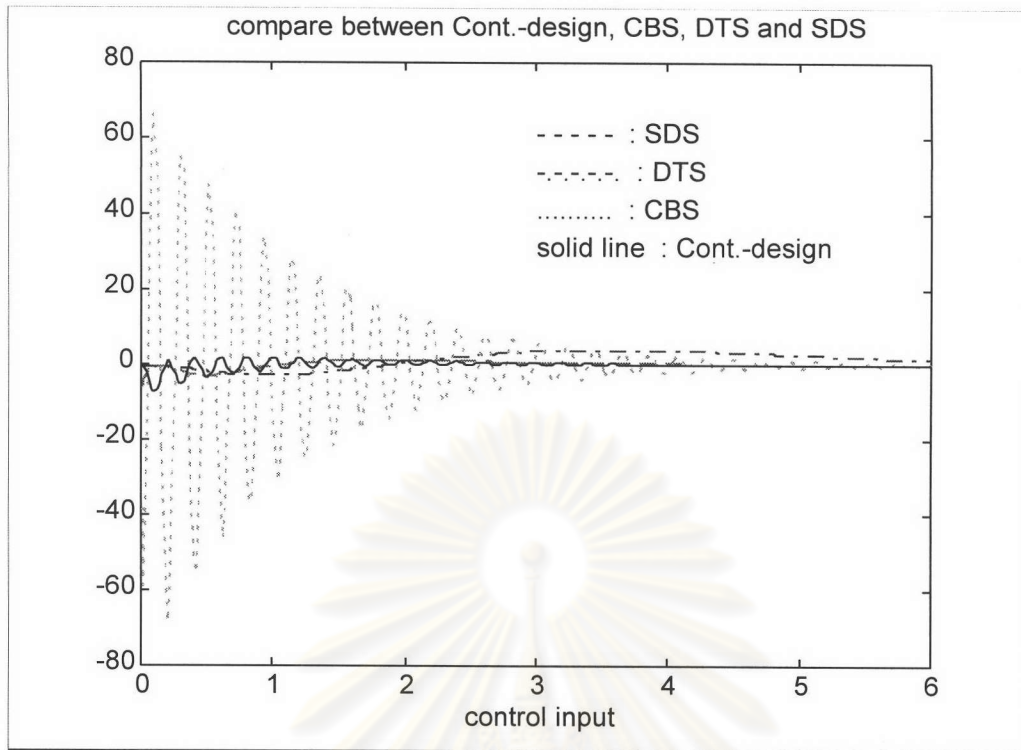
ตัวอย่างที่ 3.2 พิจารณากระบวนการที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$G(s) : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

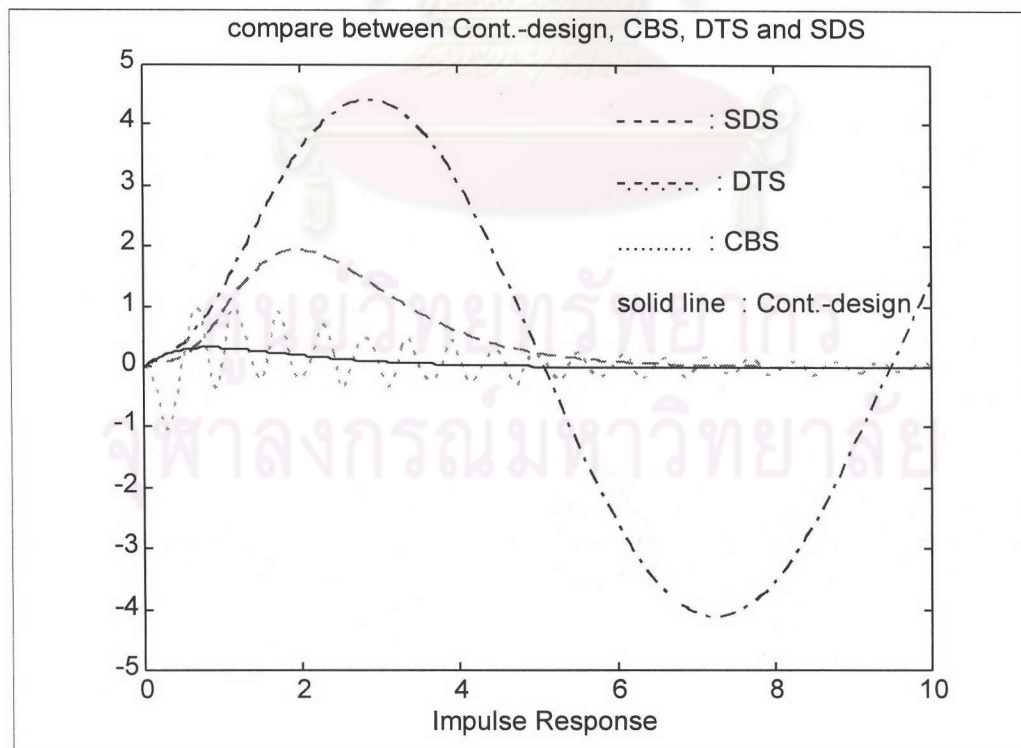
โดยพิจารณาคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 , 0.2 และ 0.8 วินาที ตามลำดับ



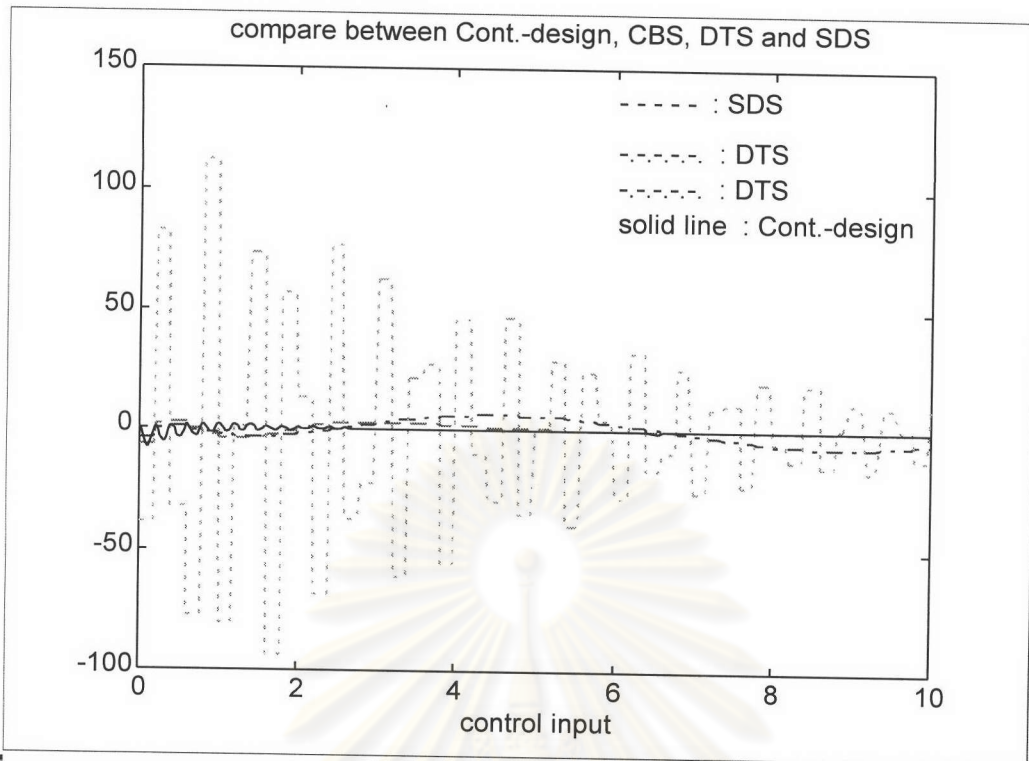
รูปที่ 3.15 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



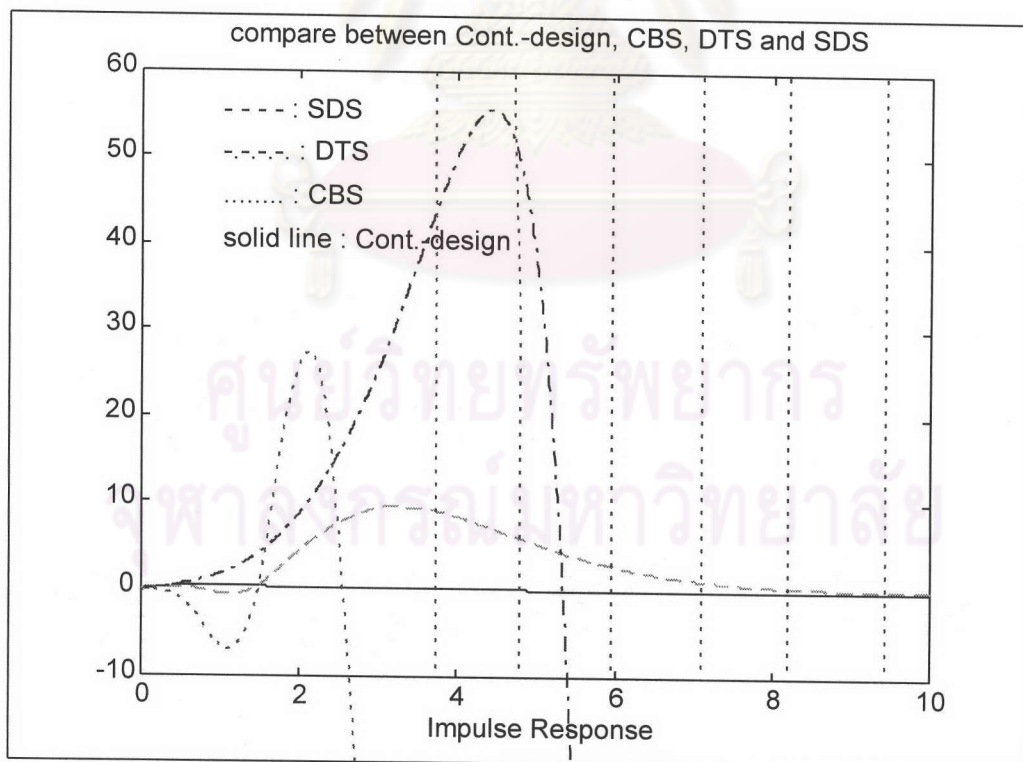
รูปที่ 3.16 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซีกต์วอย่างเป็น 0.02 วินาที



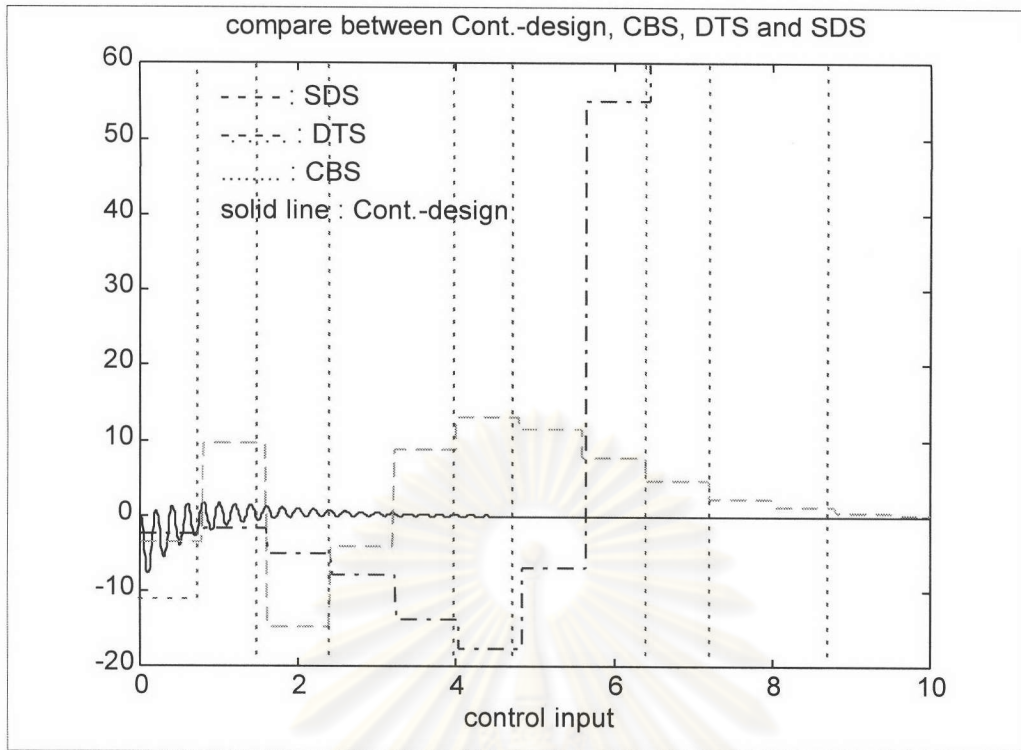
รูปที่ 3.17 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วครู่ของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซีกต์วอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.18 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการชักตัวอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.19 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการชักตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที



รูปที่ 3.20 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที

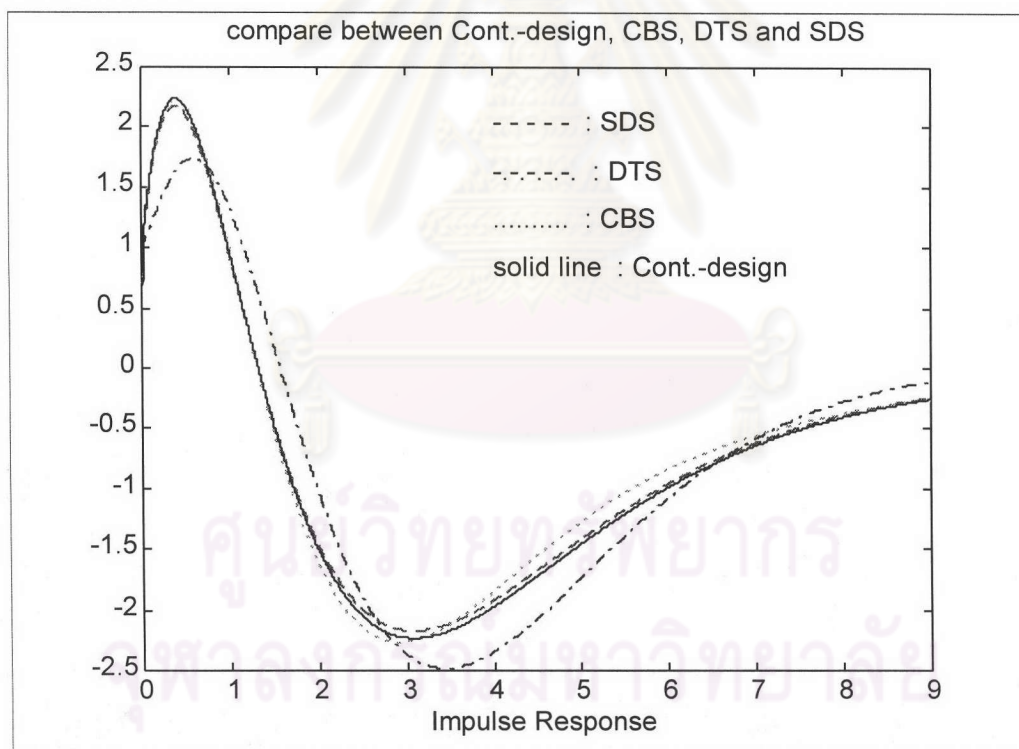
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.2 พบว่าในการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขวิธีการ CBS จะเกิดปรากฏการณ์การแกว่งกวัดขึ้นเมื่อคาบการซັกดตัวอย่างขึ้นและเกิดสภาพขาดเสถียรภาพในที่สุด การออกแบบด้วยวิธีการ DTS ให้ผลตอบสนองที่ต่างจากการออกแบบตัวควบคุมในโดเมนเวลาต่อเนื่องอย่างมากทั้งเกิดสภาพขาดเสถียรภาพเมื่อคาบการซັกดตัวอย่างมากขึ้น และการออกแบบด้วยวิธี SDS สามารถให้ผลตอบสนองที่มีเสถียรภาพแม้ว่าผลตอบสนองดังกล่าวจะต่างจากผลตอบสนองของการออกแบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องก็ตาม ดังนั้นตัวอย่างที่ 3.2 เป็นข้อดีของการออกแบบด้วยวิธี SDS ที่ให้ผลตอบสนองที่มีเสถียรภาพขณะที่ในการออกแบบด้วยวิธี CBS และ DTS ต่างให้ผลตอบสนองที่เกิดสภาพขาดเสถียรภาพเมื่อคาบการซັกดตัวอย่างมากขึ้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

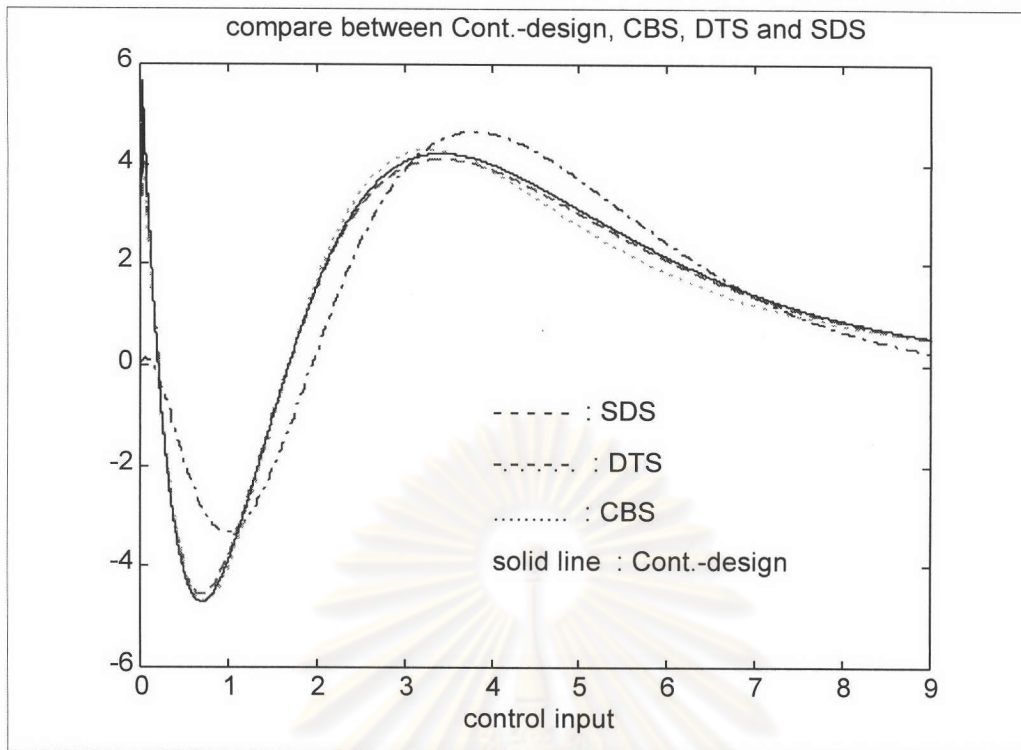
ตัวอย่างที่ 3.3 พิจารณากระบวนการที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$G(s) : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

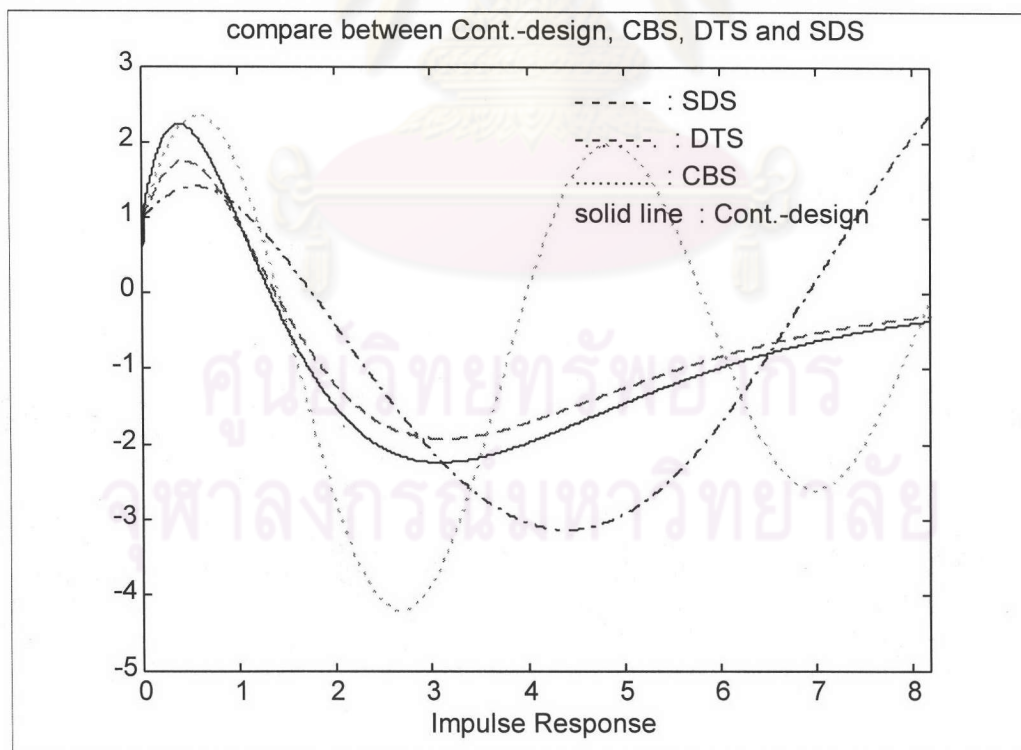
โดยพิจารณาคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 , 0.2 และ 0.8 วินาที ตามลำดับ



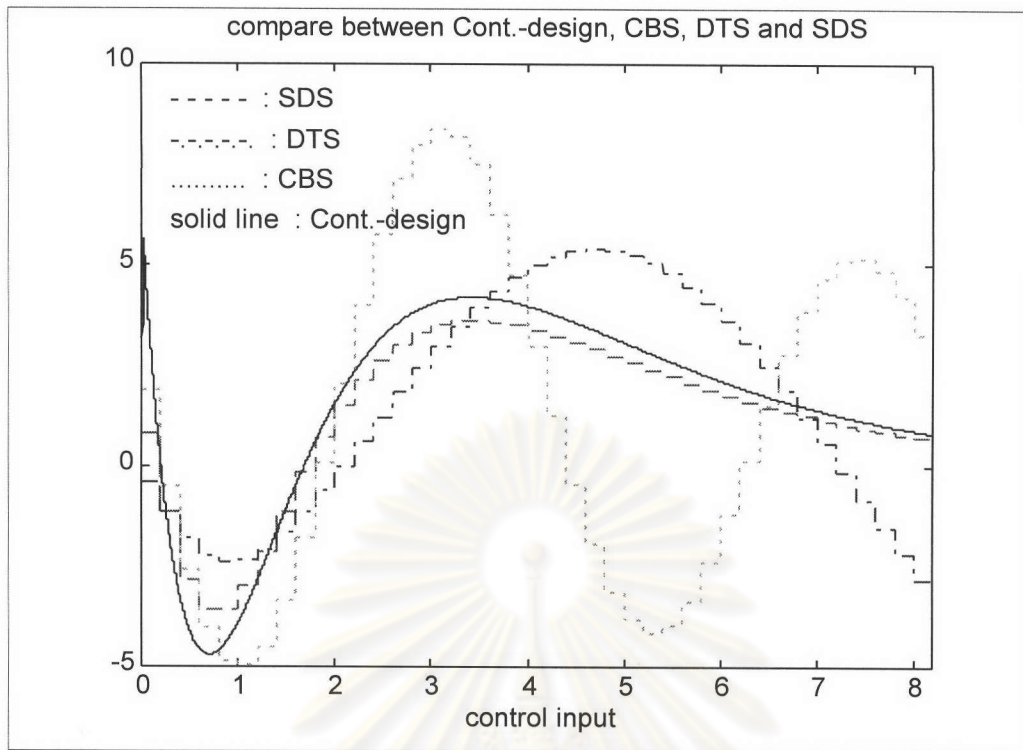
รูปที่ 3.21 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



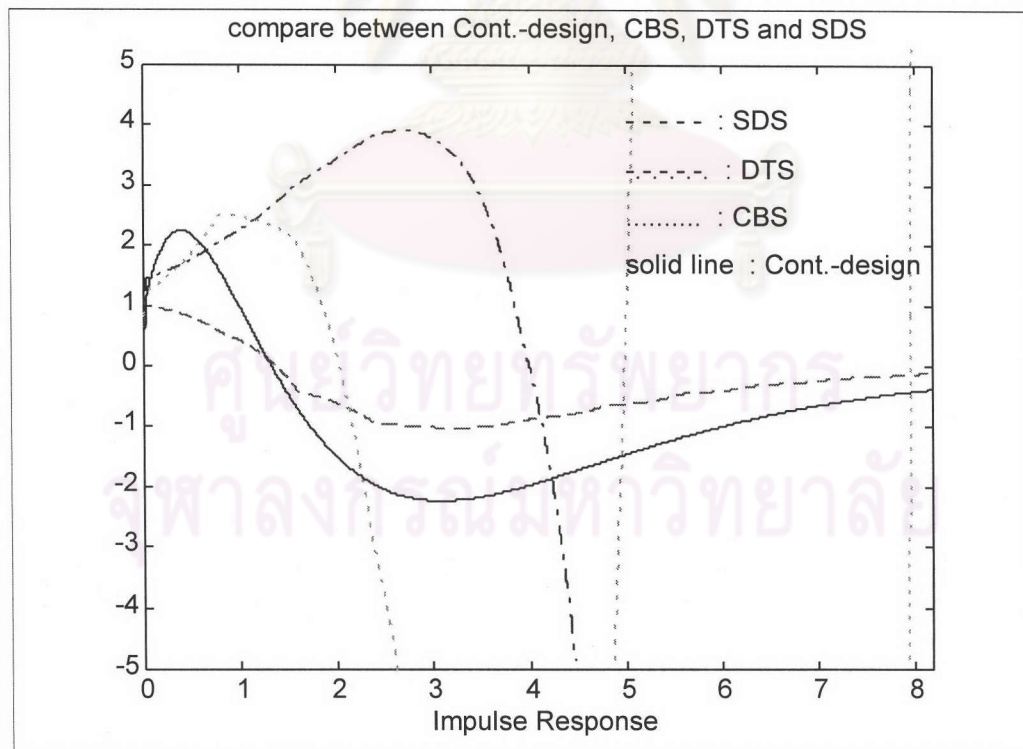
รูปที่ 3.22 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



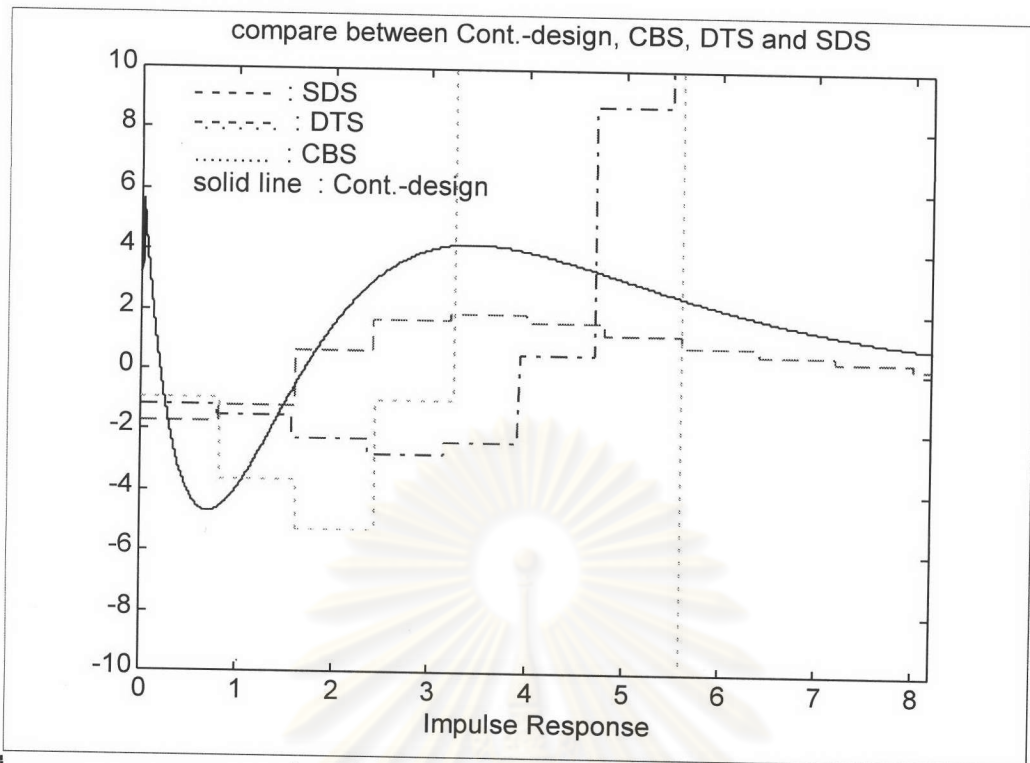
รูปที่ 3.23 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.24 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.25 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซึกตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที



รูปที่ 3.26 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (non-minimum phase) ทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซັกดัวอย่าง เป็น 0.8 วินาที

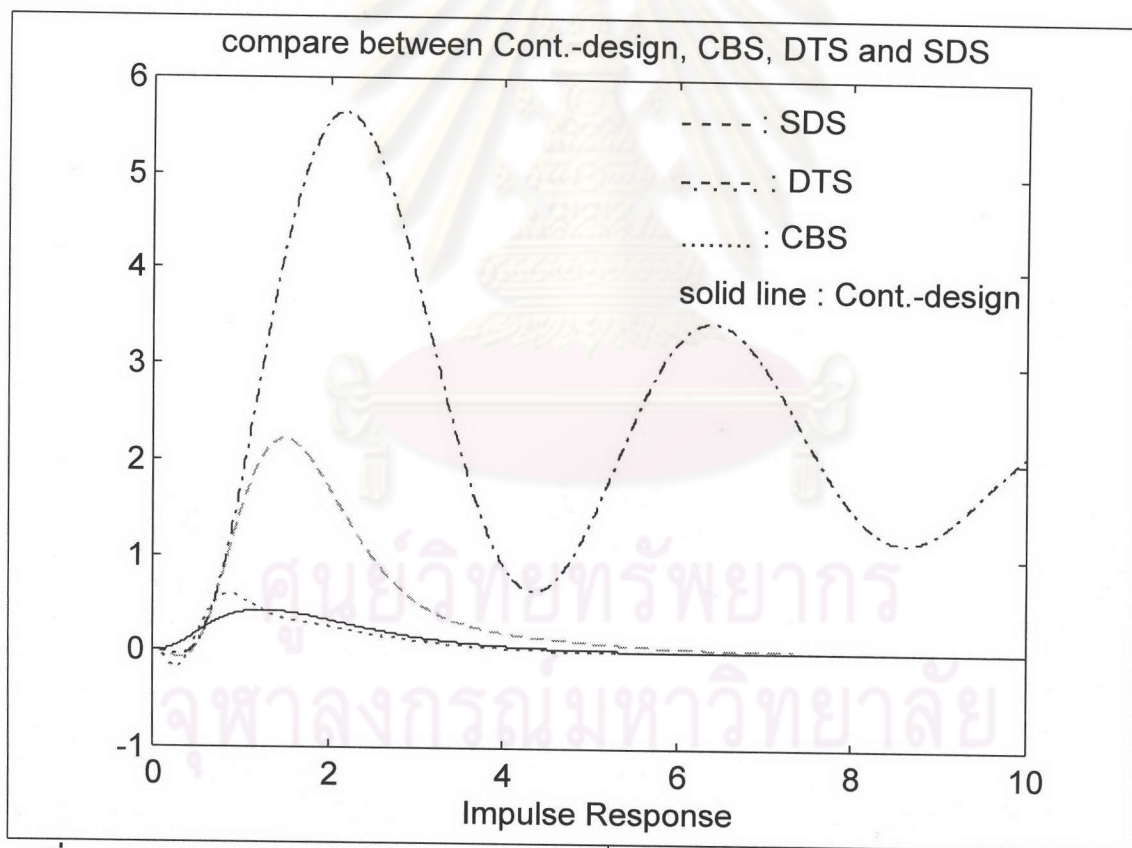
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.3 พบว่าเมื่อกระบวนการของระบบมีทั้งโพลและซีโรอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s เมื่อคาบการซັกดัวอย่างน้อย ๆ มีเพียงการออกแบบด้วยวิธี SDS และ CBS ที่ให้ผลตอบสนองที่ใกล้เคียงกับผลตอบสนองในโดเมนเวลาต่อเนื่องและสัญญาณเข้าควบคุมในโดเมนเวลา เมื่อคาบการซັกดัวอย่างมากขึ้นการออกแบบด้วยวิธี DTS และ CBS ให้ผลตอบสนองที่เกิดสภาพขาดเสถียรภาพและสัญญาณเข้าควบคุมที่ได้จากการออกแบบทั้ง 2 วิธีให้ผลที่แตกต่างไปจากสัญญาณเข้าควบคุมในโดเมนเวลาต่อเนื่อง แต่การออกแบบด้วยวิธี SDS ให้ผลตอบสนองที่มีเสถียรภาพและใกล้เคียงผลตอบสนองและสัญญาณเข้าควบคุมในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

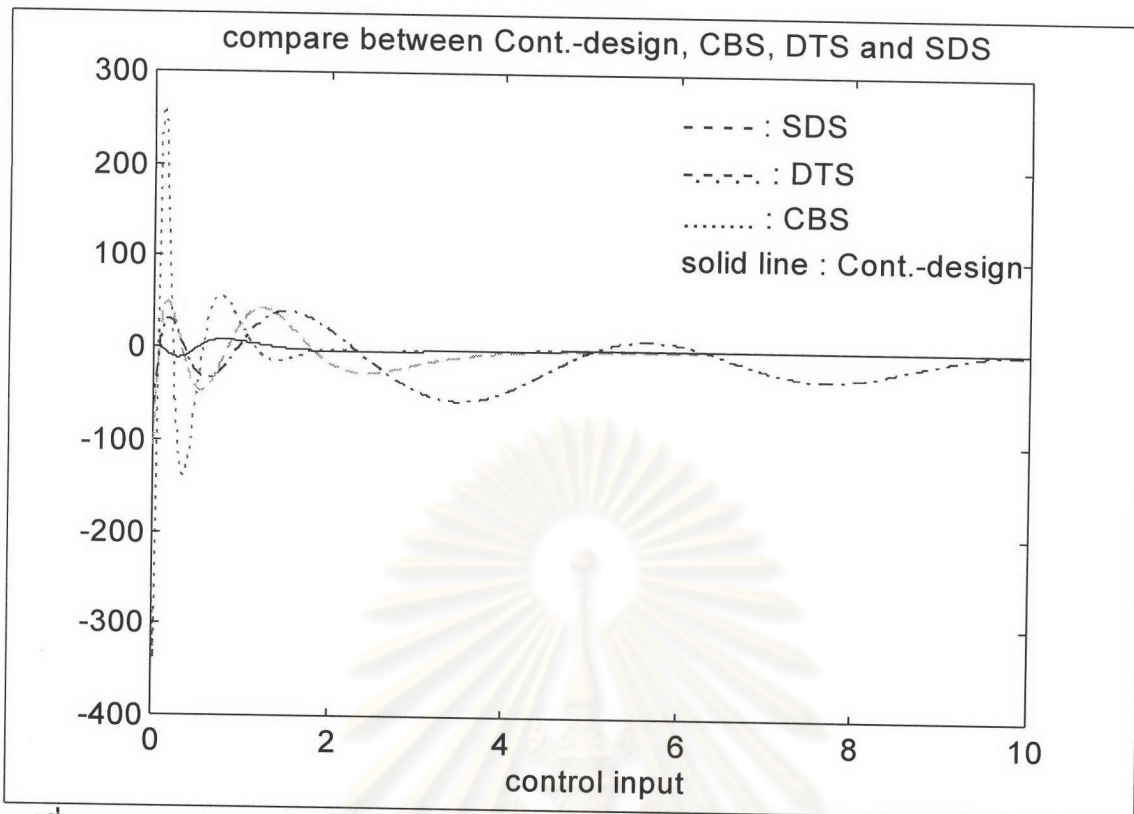
ตัวอย่างที่ 3.4 พิจารณากระบวนการที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ G(s) : \begin{cases} z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

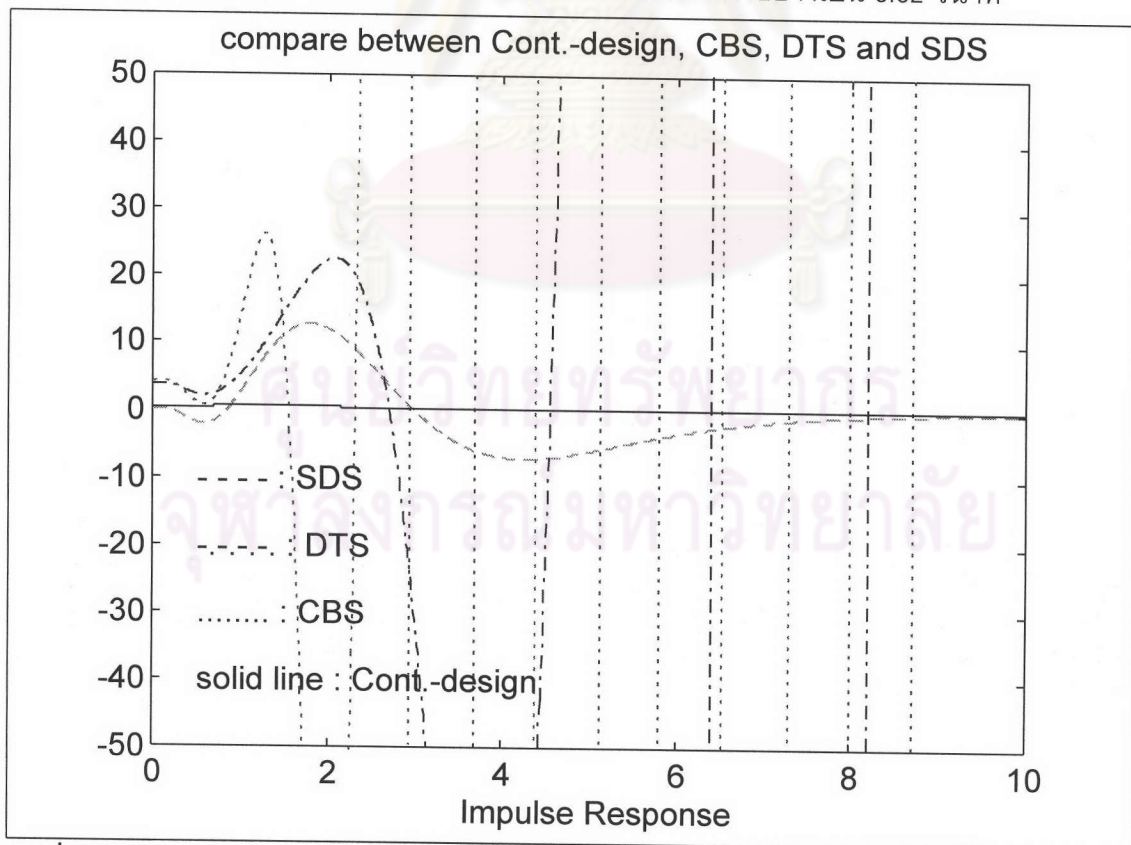
โดยพิจารณาคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 , 0.2 และ 0.8 วินาที ตามลำดับ



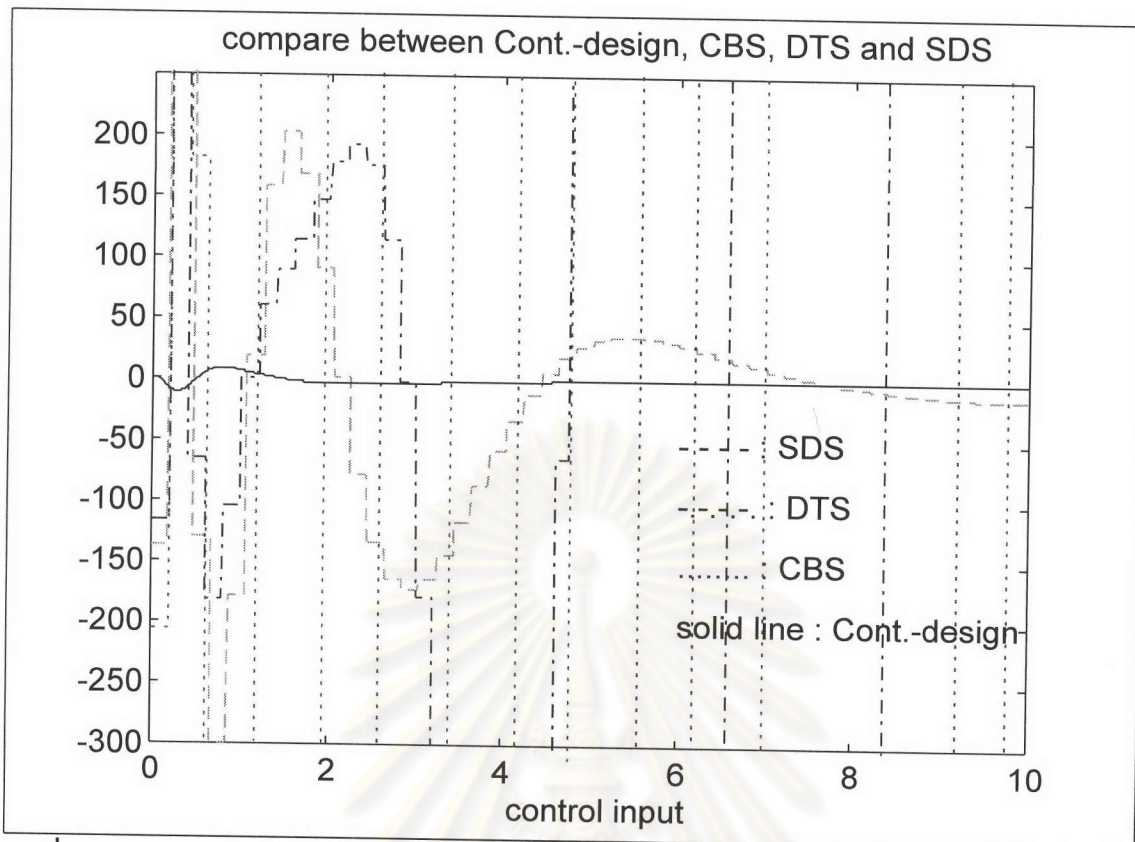
รูปที่ 3.27 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซັกดตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



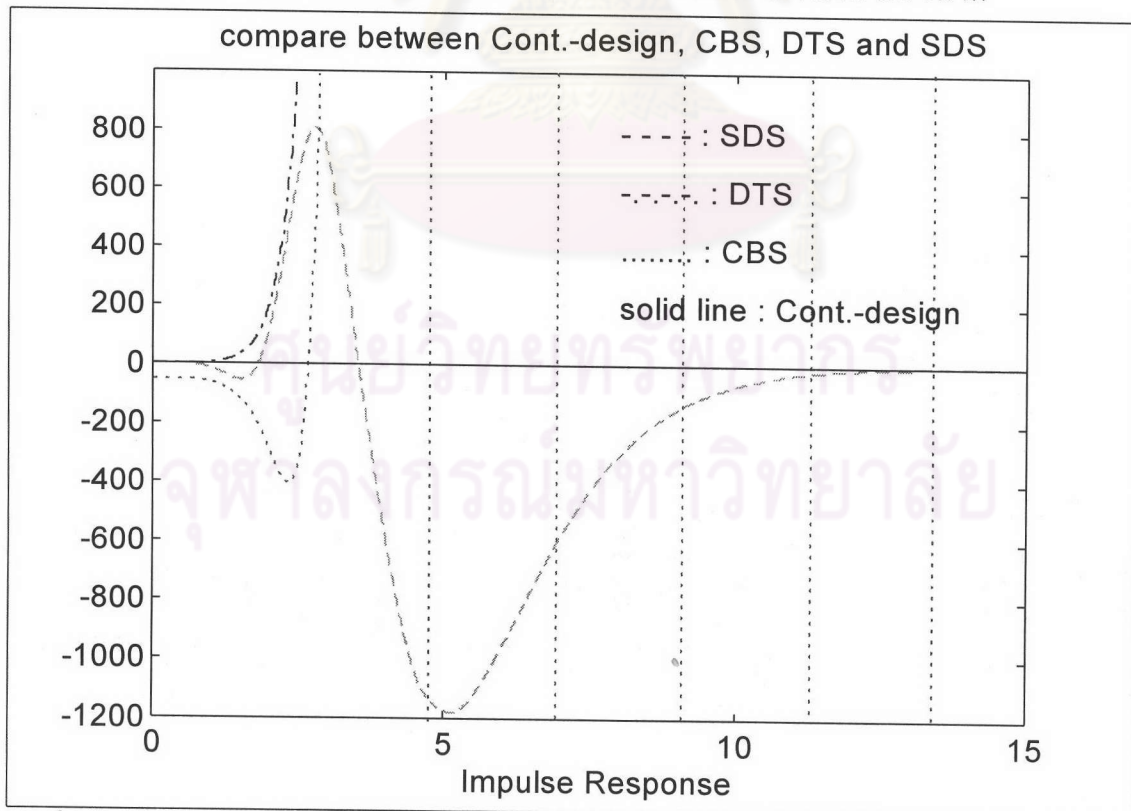
รูปที่ 3.28 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซัดตัวอย่างเป็น 0.02 วินาที



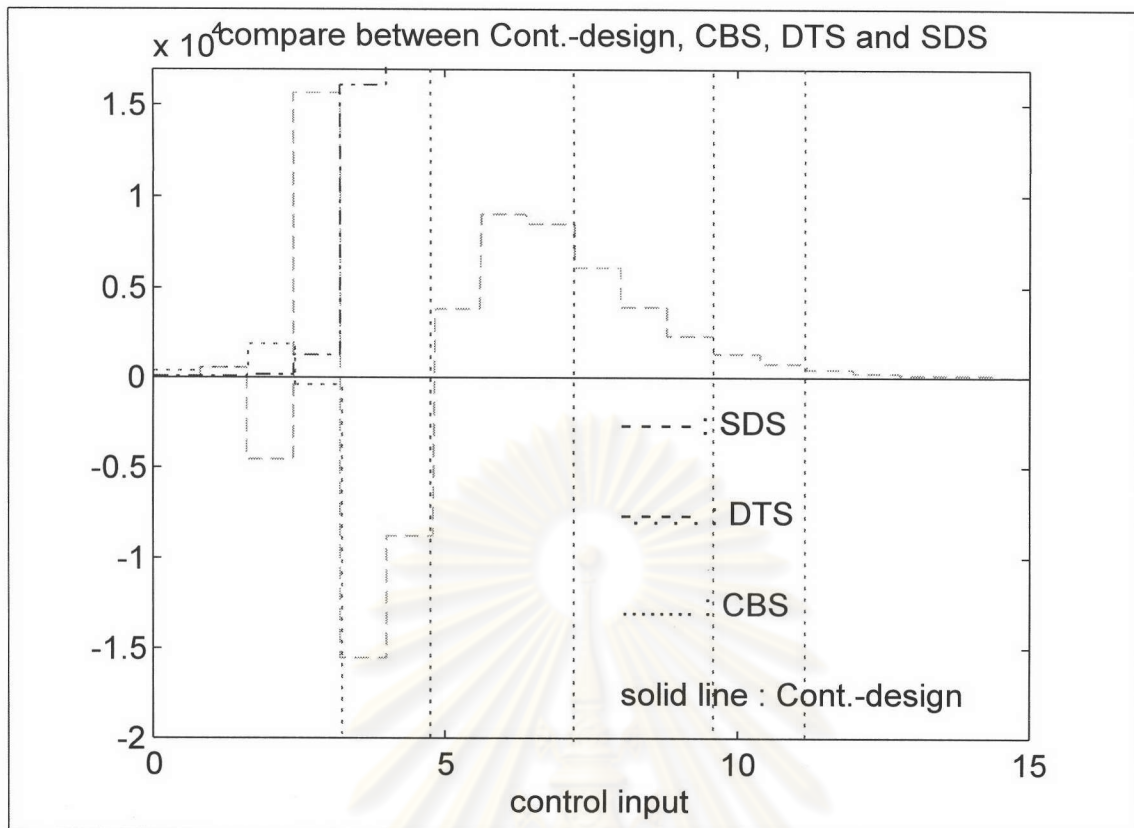
รูปที่ 3.29 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วครู่ของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซัดตัวอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.30 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการซัดตัวอย่างเป็น 0.2 วินาที



รูปที่ 3.31 แสดงผลการเปรียบเทียบผลตอบสนองชั่วคราวของ $y(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS (unstable plant) เมื่อคาบการซัดตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที



รูปที่ 3.32 แสดงผลการเปรียบเทียบสัญญาณเข้าควบคุมของ $u(t)$ ระหว่างการออกแบบด้วยวิธีการของ Cont.-design, CBS, DTS และ SDS เมื่อคาบการชักตัวอย่างเป็น 0.8 วินาที

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.4 พบว่าการออกแบบด้วยวิธี SDS ให้ผลตอบสนองที่มีเสถียรภาพ ขณะที่การออกแบบด้วยวิธี CBS และ DTS ต่างให้ผลตอบสนองที่ขาดเสถียรภาพและสัญญาณเข้าควบคุมขนาดสูงมากเมื่อคาบการชักตัวอย่างสูงขึ้น (0.2 และ 0.8 วินาที) การออกแบบด้วยวิธี SDS ในตัวอย่างที่ 3.4 นี้ให้ผลตอบสนองที่มีขนาดมากกว่าผลตอบสนองที่ทำการออกแบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องเมื่อเปรียบเทียบกับตัวอย่างที่ 3.2 ที่โพลวงรอบเปิดทั้งหมดของกระบวนการอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s หรือตัวอย่างที่ 3.1 ที่มีโพลวงรอบเปิดทั้งหมดของกระบวนการอยู่ทางด้านซ้ายของระนาบ s ดังนั้นในการออกแบบด้วยวิธีการ SDS ให้ผลตอบสนองที่ยังมีเสถียรภาพ แม้ว่าผลตอบสนองดังกล่าวและสัญญาณเข้าควบคุมมีขนาดสูงกว่าการออกแบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องก็ตามรวมทั้งให้ผลที่ต่างไปจากการออกแบบด้วยวิธี DTS และ CBS ที่ให้ผลตอบสนองที่ขาดเสถียรภาพ

ข้อสรุปโดยทั่วไปสำหรับระบบชักตัวอย่างข้อมูล

การศึกษาระบบควบคุมแบบชักตัวอย่างข้อมูล พบว่ามีลักษณะคล้ายกับการออกแบบด้วยวิธีการ DTS ที่ได้ทำการแปลง (discretized) กระบวนการและเกณฑ์สมรรถนะในโดเมนเวลาต่อเนื่องไปยังกระบวนการและเกณฑ์สมรรถนะในเวลาเต็มหน่วย จากนั้นจึงทำการออกแบบตัวควบคุมเชิงเลขต่อไป แต่การออกแบบด้วยวิธีการ SDS ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทำการแปลงกระบวนการและเกณฑ์สมรรถนะในโดเมนเวลาต่อเนื่องไปยังกระบวนการและเกณฑ์สมรรถนะในเวลาเต็มหน่วย โดยยังคงรักษาค่าของเกณฑ์สมรรถนะในลักษณะของนอร์ม H_2 ไว้เท่าเดิม ดังนั้นอาจเรียกเป็นการแปลงแบบพิเศษก็ได้ ซึ่งต่างจากการแปลงโดยทั่วไปที่เมื่อมีการแปลงแล้วจะได้เกณฑ์สมรรถนะของนอร์ม H_2 เปลี่ยนไปจากเดิม และข้อดีของการออกแบบด้วยวิธีการ SDS ที่ได้กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้คือ พารามิเตอร์ของทั้งกระบวนการและตัวควบคุมในระบบเวลาเต็มหน่วยไม่สามารถกลับคืนสู่พารามิเตอร์ในโดเมนเวลาต่อเนื่อง แม้ว่านอร์ม H_2 ของระบบชักตัวอย่างข้อมูลจะกลับสู่นอร์ม H_2 ของระบบในเวลาต่อเนื่องก็ตาม โดยข้อดีดังกล่าวสามารถแก้ไขได้โดยใช้การแปลงเดลต้า (Delta Transform) ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 4 ต่อไป

ศูนย์วิทยพัชการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย