บทที่ 2

ระบบควบคุมต่อเนื่องเชิงเวลาแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้

ความรู้ทั่วไป

การควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้เป็นวิธีการควบคุมแบบหนึ่งซึ่งมีหลักการกว้างๆคือ การปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมเพื่อให้ระบบมีสมบัติและสัญญาณออกตามต้องการ โดยการตัดสินใจที่จะปรับเปลี่ยนไปในรูปแบบไหนนั้นทำในขณะที่ระบบกำลังทำงานอยู่ (แต่รูปแบบที่จะปรับเปลี่ยนต้องมีการกำหนดไว้ล่วงหน้า) อนึ่งตัวแปรที่มีส่วนสำคัญต่อการปรับเปลี่ยนโดยทั่วไปคือสเตททั้งหมดของระบบ ณ เวลานั้นๆ

การควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้สามารถใช้ได้กับทั้งระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้น ซึ่งอาจมีการรบกวนจากภายนอกหรืออาจมีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ภายในก็ได้ นอกจากนั้นอันดับของระบบจะลดลงตามจำนวนสัญญาณควบคุมอีกด้วย

ระบบควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้ ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ

1. ส่วนที่ทำให้สเตทเดินทางจากจุดเริ่มต้นมาสู่พื้นผิวที่มีสมบัติพิเศษบางประการชุดหนึ่งและบังคับให้สเตทยังคงอยู่บนพื้นผิวเหล่านั้น
2. ส่วนที่ทำให้สเตทเดินทางเข้าสู่จุดศูนย์เมื่อระบบอยู่บนพื้นผิวดังกล่าวแล้ว อันมีผลต่อระบบดังต่อไปนี้

2.1. อันดับของระบบโดยรวมลดลง

2.2. สมบัติของระบบบนพื้นผิวขึ้นกับการกำหนดของผู้ออกแบบ

2.3. ระบบสามารถทนทานต่อสัญญาณรบกวนจากภายนอกและการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ภายในได้ ภายใต้ขอบเขตหนึ่ง

พื้นผิวพิเศษดังกล่าวมีชื่อเรียกว่าพื้นผิวสวิตชิง (Switching Surface) หรือพื้นผิวสไลด์ดิง (Sliding Surface)

โดยทั่วไปแล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่จะควบคุมด้วยวิธีการควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้ มักอยู่ในรูปของ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t).\mathbf{u}(t) \qquad (2\text{-}1)$$

สังเกตได้ว่าสมการของ $\dot{\mathbf{x}}$ ต้องเป็นสมการเชิงเส้นของสัญญาณควบคุม แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นสมการเชิงเส้นของสเตท

โดยที่ $\mathbf{x}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเป็น n*1 , $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ มีมิติเป็น n*1 , $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ มีมิติเป็น n*m และ $\mathbf{u}(t)$ มีมิติเป็น m*1

เนื่องจากสมบัติโดยรวมของระบบที่เวลาส่วนใหญ่จะขึ้นกับสมการของพื้นผิวพิเศษ (พื้นผิวสวิตชิงหรือพื้นผิวสไลด์ดิง) ดังนั้นในการออกแบบระบบควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้ จึงจะออกแบบพื้นผิวนี้ก่อน โดยสมมุติให้สมการ

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}'.\mathbf{x} \qquad (2\text{-}2)$$

เป็นสมการของพื้นผิว

โดยที่เมตริกซ์ **s** และ **C** มีมิติเป็น m*1 และ n*m ตามลำดับ

(สังเกตได้ว่า **s** มีจำนวนเท่ากับจำนวนสัญญาณควบคุมและต่อไปจะพบว่าอันดับของระบบจะลดลงเท่ากับจำนวนนี้ด้วย)

โดยแต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ **C** อาจเป็นค่าคงตัวหรือไม่ก็ได้ แต่ในตอนนี้สมมุติให้แต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ **C** เป็นค่าคงตัว เช่น ถ้า m = 2; n = 4

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

จะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

และจากสมการในรูปเมตริกซ์ นี้จะเขียนแยกเป็น 2 สมการได้ว่า

$$s_1 = c_{11}.x_1 + c_{21}.x_2 + c_{31}.x_3 + c_{41}.x_4$$

และ

$$s_2 = c_{12}.x_1 + c_{22}.x_2 + c_{32}.x_3 + c_{42}.x_4$$

ซึ่งทั้งสองสมการเป็นสมการสเกลาร์และเป็นสมการของพื้นผิวใน 4 มิติ (หรือกรณีทั่วไป n มิติ แต่ตัวพื้นผิวเองจะมี n - 1 มิติ) และเมื่อฝั่งซ้ายของสมการทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ สมการทั้งสองจะเป็นสมการของพื้นผิวที่เราต้องการให้ระบบมีลักษณะเฉพาะตามนั้น เมื่อสเตทอยู่บนพื้นผิวนั้นๆ

เมื่อสเตทเดินทางมาถึงพื้นผิวใดพื้นผิวหนึ่ง (เรื่องวิธีการทำให้สเตทเดินทางมาถึงพื้นผิวนั้นจะกล่าวต่อไปภายหลัง) ก็ขึ้นอยู่กับผู้ออกแบบว่าจะออกแบบระบบควบคุมให้สเตทเดินทางต่อไปอย่างไร ซึ่งผู้ออกแบบสามารถเลือกได้ดังนี้คือ (เรียกการเดินทางบนพื้นผิวสวิตชิงว่าแบบแผนสวิตชิง (Switching Scheme)

1. ให้สเตทเดินทางอยู่บนพื้นผิวแรกที่ไปถึงและเดินทางต่อไปยังพื้นผิวที่เป็นผลตัดของพื้นผิวที่ 1 และ ที่ 2 และอยู่บนพื้นผิวนี้และเดินทางต่อไปยังพื้นผิวที่เป็นผลตัดของพื้นผิวที่ 1, ที่ 2 และที่ 3 เป็นดังนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนถึงพื้นผิวที่เป็นผลตัดของทุกๆ พื้นผิว (จาก 1 ถึง m) เป็นพื้นผิวสุดท้าย ซึ่งพื้นผิวสุดท้ายจะมีอันดับเท่ากับ n - m และถูกเรียกว่าพื้นผิวสวิตชิงขั้นสุดท้าย (Eventual Switching Surface) ซึ่งกรณีนี้จะเรียกว่า

แบบแผนสวิตชิงแบบอิสระ (Free-order Switching Scheme)

2. กรณีนี้การเดินทางบนแต่ละพื้นผิวสวิตชิงและบนพื้นผิวที่เป็นผลตัดระหว่างพื้นผิวต่างๆ ถูกกำหนดล่วงหน้าโดยผู้ออกแบบระบบควบคุม วิธีนี้เรียกว่าแบบแผนสวิตชิงแบบตายตัว (Fixed-order Switching Scheme)
3. ในกรณีนี้สเตทจะถูกบังคับให้เดินทางจากจุดเริ่มต้นสู่พื้นผิวสุดท้ายซึ่งเป็นผลตัดของทุกๆพื้นผิวสวิตชิงโดยไม่สนใจพื้นผิวสวิตชิงอื่นๆเหมือนกรณีที่ 1 และ 2 เราเรียกวิธีการนี้ว่าแบบแผนสวิตชิงแบบขั้นสุดท้าย (Eventual Sliding Mode Switching Scheme)
4. กรณีสุดท้ายนี้ผู้ออกแบบจะออกแบบให้แต่ละสัญญาณควบคุมของระบบสัมพันธ์กับพื้นผิวสวิตชิงแต่ละพื้นผิวและบังคับให้เกิดปรากฏการณ์สวิตชิงขึ้นบนพื้นผิวสวิตชิงแยกจากกัน วิธีการนี้เรียกว่าแบบแผนสวิตชิงแบบกระจายศูนย์ (Decentralized Switching Scheme)

จะเห็นได้ว่าการเกิดสไลด์ดิงโหมดถ้าไม่ใช่เกิดแบบ แบบแผนสวิตชิงแบบกระจายศูนย์แล้ว พื้นผิวสวิตชิงขั้นสุดท้ายจะมีส่วนสำคัญในการกำหนดลักษณะเฉพาะสุดท้ายของระบบและเป็นพื้นผิวที่มีสมบัติที่ดีคือ อันดับของระบบจะลดลงเหลือเท่ากับ $n - m$ นอกจากนั้นแล้วสมการลักษณะเฉพาะของระบบ ที่อันดับเท่ากับ $n - m$ นี้ ยังขึ้นกับค่าของเมตริกซ์ C เท่านั้น ทำให้ระบบโดยรวมสามารถทนทานต่อการเปลี่ยนแปลงภายในและการกำหนดสัญญาณออกของระบบขึ้นกับค่าของเมตริกซ์ C เท่านั้นอีกด้วย

เห็นได้ว่าถ้าสามารถบังคับให้สเตทอยู่บนพื้นผิวพิเศษที่ออกแบบไว้แล้วโดยเฉพาะอย่างยิ่งบนพื้นผิวสวิตชิงขั้นสุดท้าย จะทำให้ระบบมีสมบัติตามที่ต้องการ

การทำให้สเตทอยู่บนพื้นผิวที่กำหนดไว้ล่วงหน้าแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีที่ไม่มีการรบกวนจากภายนอกและไม่มีการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ภายในของระบบ
2. กรณีที่มีการรบกวนจากภายนอกหรือมีการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ภายในของระบบ

พิจารณาที่กรณีที่ 1 ถ้าระบบไม่มีการรบกวนจากภายนอกและไม่มีการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ภายในของระบบ ผู้ออกแบบสามารถใช้การควบคุมแบบที่เรียกว่า การควบคุมแบบสมมูล (Equivalent Control) และการควบคุมแบบสมมูลนี้เอง ที่มีส่วนสัมพันธ์กับการออกแบบพื้นผิวสวิตชิงขั้นสุดท้าย โดยที่สัญญาณควบคุมแบบสมมูลคือค่า $\mathbf{u}(t)$ ที่เป็นสัญญาณควบคุมสู่ระบบ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t).\mathbf{u}(t)$$

เพื่อให้ค่าการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิวสวิตชิงขั้นสุดท้ายมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$) ซึ่งหมายความว่าสเตทจะสอดคล้องกับสมการ $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ตลอด หรือคือการที่สเตทไม่เดินทางออกนอกพื้นผิวสวิตชิงนั่นเอง

จาก $\quad \mathbf{s} = \mathbf{0}$ (บนพื้นผิวสวิตชิง)

และ $\quad \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \qquad (2\text{-}3)$

จาก $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ ได้ว่า

$$\dot{\mathbf{s}} = \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$$

(เมื่อพิจารณาว่าพื้นผิวสวิตชิงไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา)

$$\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad (2\text{-}4)$$

แทน (2-1) ใน (2-4) และแทน $\mathbf{u}(t)$ ด้วย $\mathbf{u}_{eq}(t)$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}_{eq}(t)\right] = \mathbf{0}$$

จะได้ว่า

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = -\left[\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\right]^{-1} . \left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \qquad (2\text{-}5)$$

เมื่อ $\left[\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]' . \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\right]$ สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้

เพราะฉะนั้นสมการสเตทของระบบเมื่อป้อนกลับระบบด้วยสัญญาณควบคุมแบบสมมูลแล้ว จะได้ว่า

แทน (2-5) ใน (2-1) ได้

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t}) - \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t}).\left[\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]'.\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right]^{-1}.\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]'.\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t})$$

จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t}).\left[\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]'.\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right]^{-1}.\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}\right]'\right].\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t}) \tag{2-6}$$

และถ้าเมตริกซ์ **C** มีสมาชิกเป็นค่าคงตัว เขียนสมการที่ (2-6) ได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t}).\left[\mathbf{C}'.\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right]^{-1}\mathbf{C}'\right].\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{t}) \tag{2-7}$$

เมื่อ **I** เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติที่เหมาะสม

และสมการที่ (2-7) นี้เองที่เป็นสมการที่แสดงการเคลื่อนที่ของระบบบนพื้นผิวสวิตชิง

ถ้าระบบได้รับสัญญาณรบกวนจากภายนอกหรือเกิดการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ของระบบเอง สเตทจะไม่อยู่บนพื้นผิวสวิตชิงที่เราได้ออกแบบไว้ล่วงหน้าและในกรณีนี้สัญญาณควบคุมแบบสมมูลเพียงอย่างเดียวไม่สามารถทำให้สเตทเดินทางไปสู่จุดศูนย์ได้ ดังนั้นจึงต้องมีสัญญาณควบคุมอีกส่วนหนึ่งเสริมเข้ามา ซึ่งส่วนนี้เองก็เป็นส่วนเดียวกับส่วนที่ทำให้สเตทเดินทางจากจุดเริ่มต้นมาสู่พื้นผิวสวิตชิงด้วย

สัญญาณควบคุมส่วนที่เสริมเข้ามานี้มักอยู่ในรูปของค่าอัตราขยายค่าต่างๆที่คูณกับค่าของสเตทหรือสัญญาณควบคุมที่มีขนาดคงที่ ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของ $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}.\mathbf{x}$ หรือ $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}$ ตามลำดับโดยที่ **K** เป็นเมตริกซ์ของอัตราขยายที่มีมิติที่เหมาะสม โดยทั่วไปแล้วค่าของแต่ละสมาชิกของ **K** จะมีสองค่า ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน ซึ่งค่าของแต่ละสมาชิกรวมทั้งการตัดสินใจว่าเมื่อใดจะใช้ค่าที่เป็นบวกหรือลบของแต่ละสมาชิกใดนั้น ผู้ออกแบบต้องออกแบบให้สอดคล้องกับเงื่อนไขการเข้าถึง (Reaching Condition) ซึ่งมีรูปแบบที่นิยมใช้กันทั่วไปคือ

1. วิธีการสวิตชิงฟังก์ชันตรง (The Direct Switching Function Approach) จากสมการที่ (2-2) เงื่อนไขการเข้าถึงคือ

$$\mathbf{s}.\dot{\mathbf{s}} < 0$$

2. วิธีการฟังก์ชันเลียปูโนฟ (The Lyapunov Function Approach) วิธีนี้ใช้ทฤษฎีเสถียรภาพแบบที่ 2 ของเลียปูโนฟด้วยการเลือกฟังก์ชัน $V(\mathbf{x},t,\mathbf{s}) > 0$ ที่มีคุณสมบัติ $\dot{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{s}) < 0$ ถ้าค่าของ $\mathbf{s}$ (อาจเป็นเมตริกซ์หรือสเกลาร์ก็ได้) ทำให้ข้อกำหนดของ $V(\mathbf{x},t,s)$ และ $\dot{V}(\mathbf{x},t,s)$ เป็นไปตามทฤษฎีเสถียรภาพแบบที่ 2 ของเลียปูโนฟแล้วแสดงว่าถูกต้องตามเงื่อนไขการเข้าถึง

กล่าวโดยสรุปแล้วการออกแบบระบบควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้ ต้องออกแบบใน 2 ส่วนใหญ่ๆ คือ

1. สัญญาณควบคุมแบบสมมูล (Equivalent Control Input) ซึ่งสัมพันธ์กับพื้นผิวสวิตชิง ทำให้การเคลื่อนที่บนพื้นผิวสวิตชิงมีสัญญาณออกตามต้องการ
2. สัญญาณควบคุมแบบสวิตชิง (Switching Control Input) ที่ทำให้สเตทเดินทางจากจุดเริ่มต้นมาสู่พื้นผิวสวิตชิงและไม่เดินทางออกไปเมื่อมีการรบกวนแบบต่างๆ

การออกแบบในบางกรณีอาจไม่ใช้สัญญาณควบคุมแบบสมมูลก็ได้ แต่สัญญาณควบคุมแบบสวิตชิง มีความจำเป็นต้องใช้เสมอและเป็นหัวใจของระบบควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้

ลักษณะของปัญหาและวิธีการออกแบบตัวควบคุมแบบที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการออกแบบตัวควบคุมของระบบที่เขียนในรูปแบบแบบบัญญัติของสมการสเตทที่มีสัญญาณเข้าเพียงตัวเดียว และมีสวิตชิงฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่พารามิเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาของสเตททุกสเตทของระบบ ดังนั้นสามารถเขียนสมการสเตทได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{B}.\mathbf{u} \tag{2-8}$$

เมื่อ **x** และ $\dot{\mathbf{x}}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีมิติเท่ากับ n*1

A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ n*n

B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ n*1

u เป็นปริมาณสเกล่าร์

เขียน **A** และ **B** ในรูปแบบแบบบัญญัติได้ว่า

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

และ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

เขียนสัญญาณควบคุมในรูปแบบของการป้อนกลับสเตทได้ว่า

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{k}' + \Delta\mathbf{k}').\mathbf{x} \tag{2-12}$$

เมื่อ **k** เป็นเมตริกซ์ของค่าอัตราขยายที่สัมพันธ์กับสัญญาณควบคุมแบบสมมูลซึ่งมีมิติเท่ากับ n*1 และ Δ**k** เป็นเมตริกซ์ของค่าอัตราขยายที่สัมพันธ์กับสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงซึ่งมีมิติเท่ากับ n*1 เช่นกัน

เขียนสวิตชิงฟังก์ชันในรูปของ

$$s = \mathbf{c}'.\mathbf{x} \tag{2-13}$$

โดยที่ s เป็นสเกล่าร์และ **c** เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ n*1 และ

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากกรณีนี้ s เป็นปริมาณสเกล่าร์ ดังนั้นพื้นผิวสวิตชิงจึงมีเพียงพื้นผิวเดียวคือ พื้นผิว $s = \mathbf{c}'.\mathbf{x} = 0$ เท่านั้น

การออกแบบระบบควบคุมแบบปรับเปลี่ยนโครงสร้างของตัวควบคุมได้จะเริ่มจากการกำหนดสมการลักษณะเฉพาะขึ้นมาก่อน แล้วจึงออกแบบค่าอัตราขยายที่เหมาะสม (**k**) ที่ทำให้ระบบโดยรวมมีสมบัติตามนั้น จากสมการที่ (2-8) และ (2-12) พิจารณาเฉพาะสัญญาณควบคุมแบบสมมูลจะได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}.\mathbf{x} + \mathbf{B}.(-\mathbf{k}'.\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}.\mathbf{x} - \mathbf{B}.\mathbf{k}'.\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}.\mathbf{k}').\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c.\mathbf{x} \tag{2-14}$$

กำหนดค่าของแต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ **k** ที่ทำให้ระบบตามสมการที่ (2-14) มีสมบัติตามต้องการหรือคือวิธีการกำหนดตำแหน่งของโพล (Pole Placement) นั่นเอง ซึ่งการทำเช่นนี้เป็นการกำหนดค่าเจาะจง (eigenvalue) ของระบบได้ n-1 ค่าจาก n ค่า ที่ต้องตรงกับค่าเจาะจงของระบบที่ได้จากสมการที่ (2-13) เมื่อค่า s เท่ากับศูนย์และแทนค่า $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ด้วยค่าอนุพันธ์ของ x_1 ทั้งหมด

ดังนั้นค่าของแต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ **c** จะเป็นค่าที่กำหนดสมบัติสุดท้ายของระบบและเกี่ยวพันกับสมาชิกของเมตริกซ์ **k** ด้วย

จากการที่ผู้ออกแบบสามารถกำหนดค่าเจาะจงของระบบได้เพียง n-1 ค่า บนพื้นผิวสวิตชิง ทำให้เหลือค่าเจาะจงค่าสุดท้ายที่ผู้ออกแบบสามารถกำหนดได้โดยการกำหนดค่า **k** และค่าเวกเตอร์เจาะจง (eigenvector) n-1 เวกเตอร์ที่สัมพันธ์กับค่าเจาะจงทั้ง n-1 ค่า จะเป็นเวกเตอร์ในปริภูมิว่าง (Null space) หรือเวกเตอร์ที่อยู่บนพื้นผิวสวิตชิง (แสดงด้วยสมการ s=0) และเวกเตอร์เจาะจงตัวสุดท้ายที่สัมพันธ์กับค่าเจาะจงตัวที่ n (λ_n) จะเป็นเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับพลวัตของสวิตชิงฟังก์ชันซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$\dot{s} = \lambda_n . s - \mathbf{c}' . \mathbf{B} . \Delta \mathbf{k}' . \mathbf{x} \tag{2-15}$$

โดยที่ λ_n คือค่าเจาะจงค่าสุดท้ายของระบบ

เมื่อผู้ออกแบบทำการออกแบบค่าอัตราขยายที่สัมพันธ์กับสัญญาณควบคุมแบบสมมูลเรียบร้อยแล้ว ก็ยังเหลือการออกแบบค่าอัตราขยายที่สัมพันธ์กับสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงอีกส่วนหนึ่ง ซึ่งสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงนี้จะสัมพันธ์กับเงื่อนไขการเข้าถึงหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าผู้ออกแบบต้องออกแบบให้สัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงทำให้เกิดภาวะการเข้าถึงจากสเตทเริ่มต้นที่ใดๆในปริภูมิ

จากวิธีสวิตชิงฟังก์ชันตรง เงื่อนไขการเข้าถึงคือ

$$s.\dot{s} < 0 \tag{2-16}$$

จากสมการที่ (2-15) ถ้าเมตริกซ์ **B** เป็นไปตามสมการที่ (2-10) และสมมุติให้แต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ **c** มีค่าเป็นบวกทั้งหมดและสมาชิกตัวสุดท้ายของเมตริกซ์นี้มีค่าเท่ากับหนึ่ง จะสามารถแบ่งกรณีเพื่อพิจารณาได้ดังนี้คือ เมื่อ s>0 และ s<0 ประกอบกับ $\lambda_n>0$ และ $\lambda_n<0$

พิจารณากรณีที่ s>0 ก่อน

$$s.\dot{s} = s.(\lambda_n . s - \mathbf{c}' . \mathbf{B} . \Delta \mathbf{k}' . \mathbf{x})$$

ได้ว่า

$$s.(\lambda_n . s - \mathbf{c}' . \mathbf{B} . \Delta \mathbf{k}' . \mathbf{x}) < 0$$

$$\lambda_n . s - \mathbf{c}' . \mathbf{B} . \Delta \mathbf{k}' . \mathbf{x} < 0$$

$$\lambda_n . s - \Delta \mathbf{k}' . \mathbf{x} < 0 \tag{2-17}$$

จากอสมการที่ (2-17) เห็นได้ว่า เมื่อ s เป็นบวกและค่าเจาะจงค่าที่เกี่ยวข้องกับสวิตชิงฟังก์ชัน (λ_n) มีค่าเป็นลบ ภาวะการเข้าถึงจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\Delta \mathbf{k}'.\mathbf{x} > 0 \tag{2-18}$$

ดังนั้นค่าถ้ากำหนดค่าอัตราขยายในรูปของ

$$\Delta k_i = \alpha_i.\mathrm{sgn}(s.x_i) \qquad ; i=1,2,3,\ldots,n \tag{2-19}$$

เมื่อ α_i เป็นค่าคงตัวที่มีค่ามากกว่าศูนย์

จากสมการที่ (2-19) ได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{k}'.\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\mathrm{sgn}(s.x_i).x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\mathrm{sgn}(x_i).x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.|x_i|\end{aligned} \tag{2-20}$$

ซึ่งค่าทางฝั่งซ้ายของสมการที่ (2-20) มีค่าเป็นบวกเสมอ แสดงว่าอสมการ (2-18) เป็นจริง แสดงว่าระบบที่มีค่าเจาะจงค่าที่เกี่ยวข้องกับสวิตชิงฟังก์ชัน (λ_n) มีค่าเป็นลบจะเกิดภาวะการเข้าถึงเมื่อออกแบบให้แต่ละสมาชิกของเมตริกซ์ $\Delta \mathbf{k}$ เป็นไปตามสมการที่ (2-19) เมื่อค่า α_i เป็นค่าบวกใดๆหรือค่า Δk_i มีค่าเท่ากับศูนย์ทุกๆค่าของ i ก็ยังทำให้เกิดภาวะการเข้าถึงได้เช่นกัน แต่ถ้าค่าเจาะจงค่าที่เกี่ยวข้องกับสวิตชิงฟังก์ชันมีค่าเป็นบวก เงื่อนไขตามสมการที่ (2-19) นั้นยังไม่เพียงพอ

จากอสมการ (2-17) ถ้า λ_n มีค่าเป็นบวก สามารถเขียนอสมการที่ (2-17) ใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned}&\lambda_n.\mathbf{c}'.\mathbf{x} - \Delta \mathbf{k}'.\mathbf{x} < 0 \\ &\sum_{i=1}^{n}(\lambda_n c_i - \Delta k_i).x_i < 0\end{aligned} \tag{2-21}$$

ดังนั้นอสมการที่ (2-21) จะเป็นจริงได้เมื่อ

$$\Delta k_i > \lambda_n.c_i \ \text{ เมื่อ } \ x_i>0 \ \ ;i=1,2,3,\ldots,n \tag{2-22}$$

$$\Delta k_i < \lambda_n.c_i \ \text{ เมื่อ } \ x_i<0 \ \ ;i=1,2,3,\ldots,n \tag{2-23}$$

จากสมการที่ (2-19) อสมการที่ (2-22) และอสมการที่ (2-23) จะได้ว่า

$$\alpha_i > \lambda_n.c_i \qquad ;i=1,2,3,\ldots,n \tag{2-24}$$

เมื่อ λ_n มีค่าเป็นบวก

เนื่องจากปริภูมิสเตทถูกแบ่งเป็นสองส่วนด้วยปริภูมิว่าง เป็นปริภูมิด้านที่ค่าสวิตชิงฟังก์ชันมีค่ามากกว่าศูนย์และด้านที่ค่าสวิตชิงฟังก์ชันมีค่าน้อยกว่าศูนย์

ถ้าผู้ออกแบบออกแบบให้แต่ละสมาชิกของเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{k}$ ให้เป็นไปตามสมการที่ (2-19) และ อสมการที่ (2-24) ปริภูมิทั้งสองจะมีลักษณะเป็นเงาของกันและกันเมื่อเทียบกับปริภูมิว่าง ดังนั้นในกรณีที่สวิตชิงฟังก์ชันมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ค่าของแต่ละสมาชิกของเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{k}$ จะมีค่าตรงข้ามกับกรณีที่สวิตชิงฟังก์ชันมีค่ามากกว่าศูนย์ ทำให้ $\dot{s} > 0$ และเกิดภาวะการเข้าถึงตามอสมการที่ (2-16) และสมการที่ (2-19) ได้ครอบคลุมกรณีที่กล่าวนี้แล้ว

ในขณะนี้ผู้ออกแบบสามารถออกแบบตัวควบคุมให้มีสัญญาณออกเป็นสัญญาณควบคุมแบบสมมูลและสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงได้แล้ว แต่ในบางกรณีสมาชิกของเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{k}$ บางค่าอาจมีค่าเป็นศูนย์ เป็นผลให้ไม่เกิดสภาวะการเข้าถึงที่ค่าสเตทบางค่า

พิจารณากรณีที่ สมาชิกที่ j+1 ถึง n ของเวกเตอร์ $\Delta\mathbf{k}$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อค่า j+1 น้อยกว่า n แต่ไม่เท่ากับหนึ่ง สามารถแบ่งกรณีเพื่อพิจารณาออกเป็นกรณีที่ $s>0$ และ $s<0$ ประกอบกับ $\lambda_n>0$ และ $\lambda_n<0$

พิจารณาเมื่อ $s>0$ และ $\lambda_n<0$

จากอสมการที่ (2-17) ได้ว่า

$$\lambda_n.s - \Delta\mathbf{k}'.\mathbf{x} < 0$$

เห็นได้ว่าพจน์แรกของกรณีนี้มีค่าน้อยกว่าศูนย์อยู่แล้ว และถ้า Δk_i เป็นไปตามสมการที่ (2-19) เขียนพจน์ที่สองของอสมการนี้ได้ว่า

$$-\left[\sum_{i=1}^{j} \Delta k_i . x_i\right] < 0$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{j} \alpha_i . \operatorname{sgn}(s.x_i).x_i\right] < 0$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{j} \alpha_i . |x_i|\right] < 0 \qquad (2\text{-}25)$$

เห็นได้ว่าอสมการที่ (2-25) เป็นจริงเสมอ ดังนั้นในกรณีนี้ภาวะการเข้าถึงจึงเกิดขึ้นเสมอ

พิจารณาเมื่อ $s>0$ และ $\lambda_n>0$

จากสมการที่ (2-15)

$$\dot{s} = \lambda_n.s - \mathbf{c}'.\mathbf{B}.\Delta\mathbf{k}'.\mathbf{x}$$

$$\dot{s} = \lambda_n.s - \Delta\mathbf{k}'.\mathbf{x}$$

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{j}(\lambda_n.c_i - \Delta k_i).x_i + \sum_{i=j+1}^{n}\lambda_n.c_i.x_i \tag{2-26}$$

จากเงื่อนไขการเข้าถึง เมื่อ $s>0$ จะได้ว่า $\dot{s}<0$ และจากพจน์แรกของสมการที่ (2-26) ถ้า Δk_i ที่ i ตั้งแต่ 1 ถึง j เป็นไปตามสมการที่ (2-19) และ α_i เป็นไปตามอสมการที่ (2-24) จะทำให้พจน์นี้มีค่าน้อยกว่าศูนย์ เมื่อพิจารณาพจน์ที่สองของสมการที่ (2-26) จะเห็นได้ว่าถ้าต้องการให้พจน์นี้มีค่าน้อยกว่าศูนย์ แสดงว่าค่า x_i ตั้งแต่ j+1 ถึง n ต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์

เนื่องจากระบบนี้อยู่ในรูปแบบแบบบัญญัติ ดังนั้น

$$\dot{x}_j = x_{j+1}\ ,\ \dot{x}_{j+1} = x_{j+2}\ ,\ \dots\ ,\ \dot{x}_{n-1} = x_n$$

จะเห็นได้ว่าถ้าค่า $\dot{x}_n$ มีค่าเป็นลบ ค่าของสเตทที่ n ก็จะมีค่าลดลงและเป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ (ซึ่งกรณีเช่นนี้ถ้าค่าสเตทใดมีค่ามากกว่าศูนย์ก็จะลดลงจนมีค่าน้อยกว่าศูนย์ได้) จนถึง x_{j+1} และถ้าค่า $\dot{x}_n$ มีค่าเป็นบวกก็ทำให้เกิดเหตุการณ์สลับกันขึ้น

ดังนั้นจากพจน์ที่สองของสมการที่ (2-26) ต้องการให้ค่า x_i ตั้งแต่ j+1 ถึง n ต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์ สามารถทำได้โดยการบังคับให้ $\dot{x}_n$ มีค่าน้อยกว่าศูนย์ พิจารณาสมการที่ (2-13) และ (2-26)

$$c'.\dot{x} = \sum_{i=1}^{j}(\lambda_n.c_i - \Delta k_i).x_i + \sum_{i=j+1}^{n}\lambda_n.c_i.x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(c_i.\dot{x}_i) + \dot{x}_n = \sum_{i=1}^{j}(\lambda_n.c_i - \Delta k_i).x_i + \sum_{i=j+1}^{n}\lambda_n.c_i.x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}(c_i.x_{i+1}) + \dot{x}_n = \sum_{i=1}^{j}(\lambda_n.c_i - \Delta k_i).x_i + \sum_{i=j+1}^{n}\lambda_n.c_i.x_i$$

$$\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{j}(\lambda_n.c_i - \Delta k_i - c_{i-1}).x_i + \sum_{i=j+1}^{n}(\lambda_n.c_i - c_{i-1}).x_i \tag{2-27}$$

เมื่อ $c_0=0$

จากสมการที่ (2-27) ถ้าต้องการให้ x_i ตั้งแต่ตัวที่ j+1 ถึง n มีค่าน้อยกว่าศูนย์แล้ว

$$\Delta k_i > \lambda_n.c_i - c_{i-1} \quad \text{ถ้า } x_i>0 \quad \text{เมื่อ } i = 1,2,3,\dots,j \tag{2-28}$$

$$\Delta k_i < \lambda_n.c_i - c_{i-1} \quad \text{ถ้า } x_i<0 \quad \text{เมื่อ } i = 1,2,3,\dots,j \tag{2-29}$$

โดยที่ $c_0=0$

และ

$$\lambda_n.c_i - c_{i-1} = 0 \qquad \text{เมื่อ } i = j+1,j+2,\dots,n \tag{2-30}$$

เมื่อพิจารณาเทอมหลังของของสมการที่ (2-27) ในกรณีที่เทอมแรกของสมการที่ (2-27) เป็นไปตามสมการที่ (2-28) และ (2-29) หรือในกรณีที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆที่คูณกับ x_i ค่าต่างๆตั้งแต่ค่า i=j+1 ถึง n ที่ทำให้สมการที่ (2-27) มีเสถียรภาพคือในกรณีที่

$$\lambda_n.c_i - c_{i-1} \leq 0 \qquad \text{เมื่อ } i = j+1, j+2, \ldots, n \quad (2\text{-}31)$$

ซึ่งทำให้ข้อกำหนดในอสมการที่ (2-31) ใช้แทนสมการที่ (2-30) ได้

และถ้าแทนอสมการที่ (2-28) และ (2-29) ด้วย

$$\Delta k_i = \alpha_i.\mathrm{sgn}(s.x_i) \qquad \text{เมื่อ } i = 1,2,3,\ldots,j \qquad (2\text{-}32)$$

เมื่อ $\alpha_i > \lambda_n.c_i$

จะครอบคลุมสมการที่ (2-28) และ (2-29) ซึ่งทำให้สมการที่ (2-26) พจน์ที่หนึ่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์ในกรณีที่พิจารณาและในกรณีที่ค่า S<0 อสมการที่ (2-31) และสมการที่ (2-32) ก็สามารถใช้ได้เช่นกัน

กล่าวโดยสรุปคือเมื่อระบบเป็นดังสมการที่ (2-8) ถึง (2-13) แล้ว ผู้ออกแบบต้องออกแบบตามวิธีดังนี้คือ

1. หาค่าของสมาชิกของเมตริกซ์ **c** และเมตริกซ์ **k** ที่ทำให้ระบบในสมการที่ (2-14) มีผลตอบตามต้องการ
2. ถ้าค่าอัตราขยายของสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงมีทุกๆ สมาชิกแล้ว ให้ใช้สมการที่ (2-19) และค่า α_i เป็นไปตามอสมการที่ (2-24)
3. ถ้าค่าอัตราขยายของสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงที่ค่าตั้งแต่สมาชิกตัวที่ j+1 ถึง n มีค่าเป็นศูนย์แล้ว ให้ใช้สมการที่ (2-32) และอสมการที่ (2-31) ประกอบกัน

จะเห็นได้ว่าถ้าอัตราขยายของสัญญาณควบคุมแบบสวิตชิงมีค่าเท่ากับศูนย์ในบางสมาชิกจะทำให้เกิดมีข้อกำหนดในการออกแบบพื้นผิวสวิตชิงเพิ่มขึ้น