บทที่ 4

การประยุกต์ระบบแถวคอยและทฤษฎีความน่าจะเป็นช่วยในการวิจัย

การปูผิวแอสฟัลติกคอนกรีต เป็นการดำเนินงานแบบหนึ่งที่อาศัยการหยุดหรือแถวคอย เข้ามาใช้ในระบบของการกระทำที่ซ้ำ ๆ กัน โดยเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่เป็นวงรอบ การนำระบบแถวคอยเข้ามาช่วยในการดำเนินงาน จะช่วยให้เราสามารถทำนายพฤติกรรมของการรอคอยของรถบรรทุกที่โรงผสมแอสฟัลท์และที่จุดปูผิว ตลอดจนขั้นตอนในการดำเนินงานเป็นวงรอบของเครื่องจักรที่เกี่ยวข้องเหล่านั้น ทั้งยังสามารถประมาณระยะเวลาและค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานนั้นได้โดยอาศัยเทคนิคของการจำลองสภาพและคอมพิวเตอร์เข้าช่วย

4.1 ระบบแถวคอย

ระบบนี้มีพื้นฐานมาจากรูปแบบของการเข้ามาและ/หรือการออกไปแบบสุ่มโดยลูกค้าที่เข้ามาเหล่านั้นอาจได้รับการบริการในทันทีทันใดหรืออาจต้องเสียเวลาในการรอคอยจนกว่าจะมีความสะดวกเพียงพอ เวลาที่ใช้ในการบริการขึ้นอยู่กับตัวลูกค้าผู้มาใช้บริการแต่ละคนนั้นเอง ซึ่งอาจจะแน่นอนตายตัวหรือเปลี่ยนแปลงได้ขึ้นอยู่กับการบริการนั้น ๆ สถานการณ์เหล่านี้มักจะพบได้ในชีวิตประจำวันของเราทุกคน เช่นการมาตัดผมของลูกค้าแต่ละคนในร้านตัดผม โดยที่ช่างตัดผมเป็นผู้ให้บริการแก่ลูกค้านั้น หรือสถานการณ์ที่เครื่องจักรที่ใช้งานเกิดเสียขึ้นมา โดยมีตัวเครื่องจักรเป็นลูกค้า รอคอยการให้บริการจากพนักงานซ่อมเครื่องจักรนั้น เป็นที่น่าสังเกตว่า คำจำกัดความของลูกค้าอาจจะแปลความหมายได้หลายแง่ โดยการบริการอาจจะกระทำจากผู้บริการมาหาลูกค้าเองหรือตัวลูกค้าไปหาผู้ให้บริการ ความสะดวกจากการบริการเช่นนั้น อาจจะยากที่จะจัดทำเป็นตารางให้เหมาะสมได้ เนื่องจากการเสนอส่วนประกอบของการสุ่มในรูปแบบของการเข้ามาใช้บริการและรูปแบบของการให้บริการนั้น สามารถใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ช่วยวิเคราะห์สถานการณ์เช่นนั้นได้ โดยอาศัยการแจกแจงความน่าจะเป็นให้เหมาะสมที่หาได้จากทฤษฎีเหล่านั้นสามารถทำให้ผู้วิเคราะห์สามารถหาข้อสรุปเกี่ยวกับการดำเนินงานของระบบได้ ส่วนพารามิเตอร์ของระบบ (เช่นอัตราการให้บริการ) อาจจะดัดแปลงเพื่อให้แน่ใจว่ามีผลดีต่อลูกค้าผู้มาใช้บริการและตัวผู้ให้บริการเองด้วย บ่อยครั้งที่พื้นฐานการตัดสินใจจะมีผลเกี่ยวเนื่องกับผลการวิเคราะห์ค่าใช้จ่ายต่อสถานการณ์ในการรอคอยนั้น เช่น

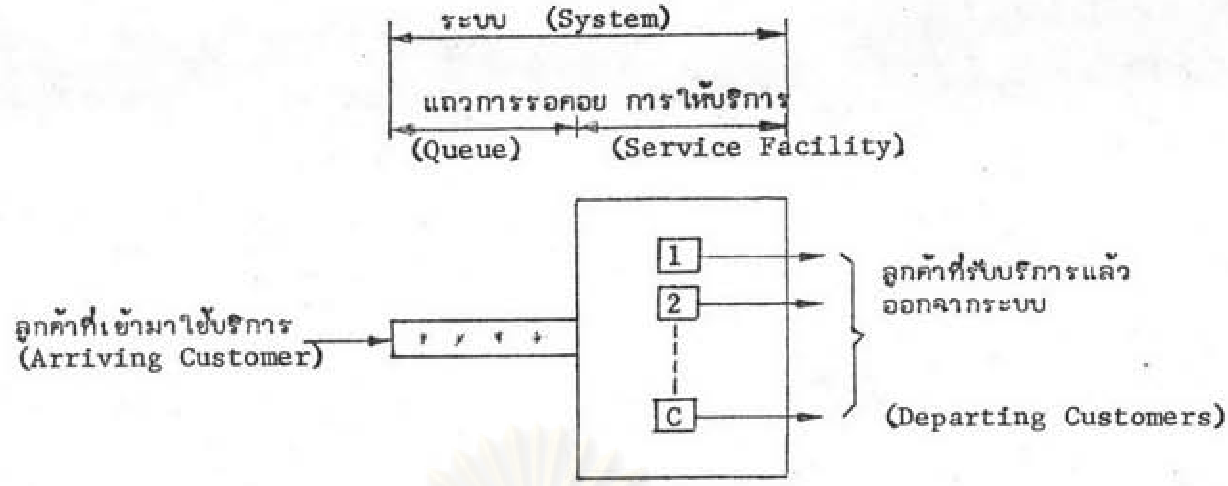
การเพิ่มจำนวนของผู้ให้บริการในระบบจะเป็นตัวลดเวลาที่คาดว่าจะรอคอย แต่จะเป็นการเพิ่มค่าใช้จ่ายของการบริการด้วยเช่นกัน ในทางตรงกันข้าม การลดลงของผู้ให้บริการจะมีผลทำให้เวลาที่คาดว่าจะรอคอยเพิ่มตามไปด้วย แต่ก็ช่วยลดค่าใช้จ่ายในการบริการลง ดังนั้นถ้าหากผู้ใดสามารถแสดงเวลาที่คาดการณ์ในการรอคอยเป็นตัวเงินได้ แน่นอนที่เราจะต้องเลือกจำนวนผู้ให้บริการมากที่สุด (หรืออัตราในการให้บริการ) ซึ่งจะช่วยให้ค่าใช้จ่ายของการบริการและเวลาที่ต้องรอคอยน้อยที่สุด แม้ว่าวิธีนี้ตามทฤษฎีจะดีแต่ในทางปฏิบัติแล้วยากที่จะทำได้เมื่อพิจารณาถึงค่าใช้จ่ายต่อหน่วยเวลาที่ต้องรอคอย ค่าใช้จ่ายเหล่านี้ค่อนข้างจะละเอียดซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่การประมาณการในทางปฏิบัติจะสามารถเชื่อถือได้ จากกรณีเช่นนี้จึงต้องมีการเลือกเฟ้นเงื่อนไขอื่น ๆ สำหรับตัดสินใจ

จากการพิจารณาที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่าระบบแถวคอยไม่สามารถจะแยกเป็นพวก ๆ เหมือนเช่นเทคนิคอื่น ๆ ได้ ยิ่งกว่านั้นเครื่องมือที่ใช้จะช่วยให้การวิเคราะห์ปัญหาได้ผลดีที่สุด

กรรมวิธีที่เกี่ยวข้องกับปัญหาแถวคอย ได้รวบรวมไว้ 4 ขั้นตอนคือ

1. กำหนดตัวแปรและความเกี่ยวเนื่องของสถานการณ์เพื่อใช้อธิบายปัญหา
2. การแจกแจงที่เกี่ยวเนื่องที่ได้รับมีผลมาจากจำนวนข้อมูลที่พอเพียงและใช้การทดสอบทางด้านสถิติที่เหมาะสม
3. ใช้การแจกแจงเพื่อปรับปรุงคุณลักษณะของการทำงานเพื่ออธิบายระบบที่เกี่ยวข้องทั้งหมด
4. ปรับปรุงการกระทำของระบบตลอดจนการใช้แบบจำลองในการตัดสินใจที่เหมาะสมและมีพื้นฐานจากคุณลักษณะการทำงานของสถานการณ์

ส่วนประกอบของระบบแถวคอยแสดงไว้ในรูป 4.1 โดยลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการส่วนหนึ่งจะรอคอยการรับบริการ อีกส่วนหนึ่งกำลังใช้บริการอยู่จากผู้ให้บริการ และส่วนสุดท้ายเป็นลูกค้าที่รับการบริการแล้วออกจากระบบ



รูปที่ 4.1 : แสดงแผนของระบบแถวคอยกับผู้ให้บริการ C แถว

4.2 <u>คุณลักษณะของระบบแถวคอย</u>

ระบบของแถวคอย สามารถแยกได้เป็น 6 คุณลักษณะคือ

1. การแจกแจงการเข้ามาของผู้รับบริการ
   (Input or Arrival Distribution)
2. การแจกแจงการออกไปของผู้รับบริการ
   (Output or Departure Distribution)
3. ช่องทางการให้บริการ (Service Channel)
4. ระเบียบในการให้บริการ (Service Discipline)
5. จำนวนผู้เข้ารับบริการมากที่สุดที่สามารถอยู่ในระบบ
   (Maximum number of Customers allowed in the system)
6. ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการ (Calling Source)

4.2.1 <u>การแจกแจงการเข้ามาของผู้รับบริการ</u> (Input or Arrival Distribution)

การแจกแจงการเข้ามาของผู้รับบริการ จะวัดจากอัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้เข้ามารับบริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา (mean arrival rate) หรือวัดจากเวลาเฉลี่ยของการเข้ามาห่างกันระหว่างผู้รับบริการสองคน (mean interarrival time)

4.2.2 <u>การแจกแจงการออกไปของผู้รับบริการ</u> (Output or Departure Distribution)

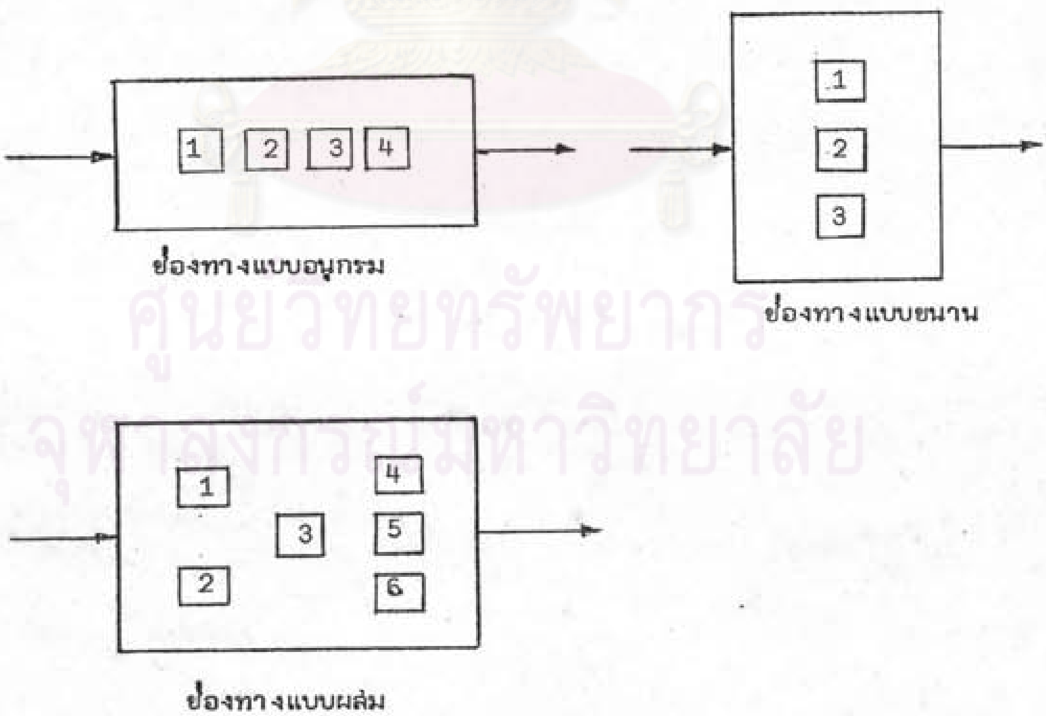
การแจกแจงการออกไปของผู้รับบริการจะวัดจากอัตราเฉลี่ยของจำนวนผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา (mean service rate) หรือเวลาเฉลี่ยของการเข้ามาห่างกันระหว่างผู้รับบริการต่อคน (mean service rate) หรือเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการต่อคน (mean service time)

4.2.3 <u>ช่องทางการให้บริการ</u> (Service Channel)

ช่องทางการให้บริการอาจแบ่งได้ 3 ประเภทคือ

1. ช่องทางแบบอนุกรม
2. ช่องทางแบบขนาน
3. ช่องทางแบบผสม

รายละเอียดดูจากรูป 4.2



รูป 4.2 รูปแบบช่องทางการให้บริการ

4.2.4 ระเบียบในการให้บริการ (Service Discipline)

เป็นหลักเกณฑ์ในการให้บริการแก่ผู้รับบริการ มีอยู่ด้วยกัน 5 ข้อ คือ

1. มาก่อนได้รับบริการก่อน (First Come First Serve : FCFS) ผู้รับบริการที่มาถึงสถานีบริการก่อนจะได้รับบริการก่อน เช่น การเข้าแถวซื้อตั๋วชมภาพยนตร์ ฯลฯ

2. มาทีหลังได้รับบริการก่อน (Last Come First Serve : LCFS) ผู้รับบริการที่มาถึงสถานีบริการหลังสุดจะได้รับบริการก่อน ส่วนมากจะเป็นการบริการในลักษณะย้อนลำดับการเข้ามา เช่น การเบิกพัสดุในห้องเก็บของ จะเอาพัสดุที่เก็บทีหลังมาใช้ก่อนเนื่องจากสะดวกในการนำออก

3. การให้บริการแบบสุ่ม (Serve in Random Order : SIRO) เป็นการให้บริการแบบเดาสุ่ม ไม่เลือกว่าผู้รับบริการจะมาถึงสถานีบริการก่อนหรือหลัง

4. ระเบียบทั่วไปในการให้บริการ (General Serve Discipline : GD) เป็นการให้บริการแบบทั่ว ๆ ไปอาจจะเป็นแบบ 1, 2 หรือ 3 ก็ได้

5. การให้บริการตามลำดับความสำคัญ (Priority Serve) เป็นการให้บริการตามความสำคัญของผู้รับบริการ เช่น ให้บริการแก่เด็กหรือคนชราก่อน ฯลฯ

4.2.5 จำนวนผู้เข้ารับบริการมากที่สุดที่สามารถอยู่ในระบบ (Maximum Number of Customers Allowed in the System) เช่น กรณีร้านตัดผมมีช่างประจำอยู่ 3 คน และมีเก้าอี้สำหรับนั่งรอ 4 ตัว ดังนั้นจำนวนผู้รับบริการที่สามารถอยู่ในระบบได้จึงมีเท่ากับ 7 คน ข้อจำกัดของระบบนี้คือ ถ้าจำนวนผู้รับบริการอยู่เต็มในระบบแล้ว เมื่อมีผู้รับบริการมาถึงระบบอีกไม่สามารถที่จะรอคอยได้ก็จะทำให้ร้านตัดผมร้านนั้นต้องเสียลูกค้าไป

4.2.6 ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการ (Calling Source) เช่น กรณีศูนย์อนามัย จุฬาฯ ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการรักษาจะเป็นเฉพาะนิสิตและข้าราชการในสังกัดจุฬาฯเท่านั้น แต่ถ้าเป็นโรงพยาบาลทั่ว ๆ ไป ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการ คือ ประชาชนทั่ว ๆ ไป

4.3 <u>สภาวะของระบบแถวคอย</u>

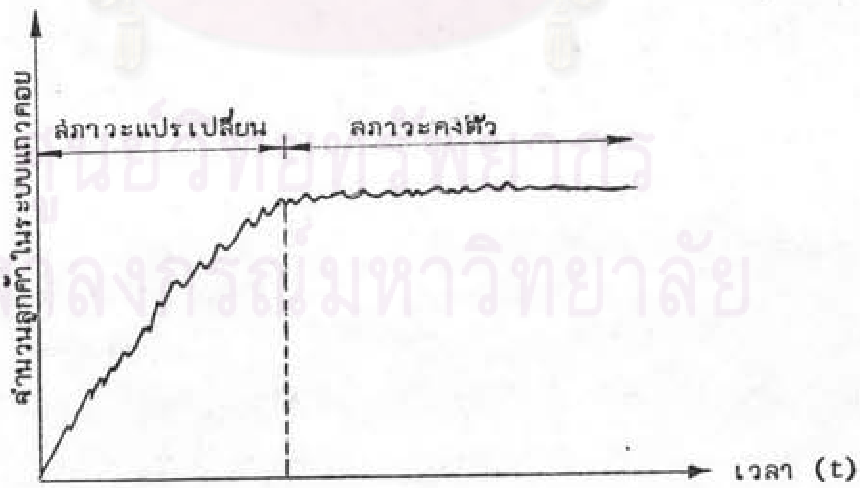
สภาวะของระบบแถวคอย มีอยู่ 2 สภาวะคือ

1. สภาวะแปรเปลี่ยน (Transient State)

2. สภาวะคงตัว (Steady State)

สภาวะแปรเปลี่ยน เป็นสภาวะของระบบแถวคอย ณ เวลาใด ๆ ก่อนที่จะเข้าสู่สภาวะคงตัว มักจะเกิดขึ้นในตอนเริ่มต้นของการดำเนินงาน เช่น เมื่อเริ่มดำเนินการปูผิวแอสฟัลติกคอนกรีต จะมีจำนวนรถบรรทุกมาคอยรับวัสดุผสมร้อนที่โรงผสมแอสฟัลท์ จำนวนไม่แน่นอน เนื่องจากมีรถบรรทุกบางคันต้องคอยรับส่งคนงานไปยังหน้างานก่อน กว่าที่รถบรรทุกจะเข้าสู่สภาวะปกติ (สภาวะคงตัว) ก็ต่อเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่งแล้ว ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์ของระบบแถวคอยในสภาวะแปรเปลี่ยน จะขึ้นกับเวลาและเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ เมื่อระบบแถวคอยดำเนินไปช่วงระยะเวลาหนึ่ง จะเข้าสู่สภาวะคงตัว และจะอยู่ในสภาวะเช่นนี้เป็นเวลายาวนาน ดังรูป 4.3

การวิเคราะห์ระบบแถวคอย มักจะวิเคราะห์ในสภาวะคงตัวเป็นส่วนใหญ่เนื่องจากไม่ขึ้นกับเวลาและเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ ส่วนการวิเคราะห์ในสภาวะแปรเปลี่ยนจะมีวิธีการและการคำนวณที่ยุ่งยากซับซ้อนมากกว่าสภาวะคงตัว



รูป 4.3 แสดงสภาวะของระบบแถวคอย

4.4 สัญลักษณ์ของระบบแถวคอย

n = จำนวนผู้รับบริการในระบบ

$P_n(t)$ = ความน่าจะเป็นของสภาวะแปรเปลี่ยนของผู้รับบริการ n คน ในระบบที่เวลา t โดยสมมติว่าระบบเริ่มดำเนินงานที่เวลาศูนย์

P_n = ความน่าจะเป็นของสภาวะคงตัว ของผู้รับบริการ n คน ในระบบ

λ = อัตราเฉลี่ยการมาใช้บริการ (จำนวนผู้รับบริการที่มาใช้บริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

μ = อัตราเฉลี่ยการให้บริการ (จำนวนผู้รับบริการที่ได้รับบริการแล้วเสร็จต่อหนึ่งหน่วยเวลา)

C = จำนวนช่องทางการให้บริการแบบขนาน

ρ = $\frac{\lambda}{\mu}$ = ความหนาแน่นของผู้รับบริการ

$\frac{\rho}{C}$ = แฟคเตอร์ที่ใช้สำหรับความสะดวกในการบริการ C แถว

$w(t)$ = ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของเวลาที่รอคอยในระบบ

W = เวลาที่อยู่ในระบบแถวคอยโดยเฉลี่ย

W_q = เวลารอคอยในแถวคอยโดยเฉลี่ย

L = จำนวนผู้รับบริการที่อยู่ในระบบแถวคอยโดยเฉลี่ย

L_q = จำนวนผู้รับบริการที่อยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ย

4.5 <u>การพิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปรในระบบ</u>

เราสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง W, W_q, L และ L_q ได้จากเงื่อนไขการเข้ามา การออกไป และผู้มีสิทธิเข้ารับบริการได้ดังนี้

$$L = \lambda W \tag{1}$$

$$L_q = \lambda W_q \tag{2}$$

เนื่องจากอัตราเฉลี่ยการให้บริการเท่ากับ μ หน่วย ต่อหนึ่งหน่วยเวลา ดังนั้น เวลาให้บริการเฉลี่ยต่อคนจะเท่ากับ $\frac{1}{\mu}$ แต่เนื่องจากเวลาที่ใช้ในระบบหมายถึงเวลาที่รอคอยรวมกับเวลาที่ใช้บริการ ดังนั้นเวลาที่ใช้ในระบบโดยเฉลี่ยคำนวณได้จากสูตร

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} \tag{3}$$

จากนั้นคูณสมการ (3) ด้วย λ จะได้

$$\lambda W_q = \lambda W - \frac{\lambda}{\mu} \tag{4}$$

แทนค่า L, L_q และ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ จากสมการ (1) และ (2) ลงในสมการ (4) จะได้

$$L_q = L - \rho$$

ในตัวแบบแถวคอยทั่วไป จะสามารถหาค่า L และ L_q จาก P_n ได้คือ

$$L = \sum_{n=0}^{\alpha} nPn$$

$$L_q = \sum_{n=C}^{\alpha} (n-C)P_n$$

4.6 ชนิดของการแจกแจงของระบบแถวคอย สามารถแบ่งได้ดังนี้

4.6.1 การแจกแจงการมาของผู้รับบริการ

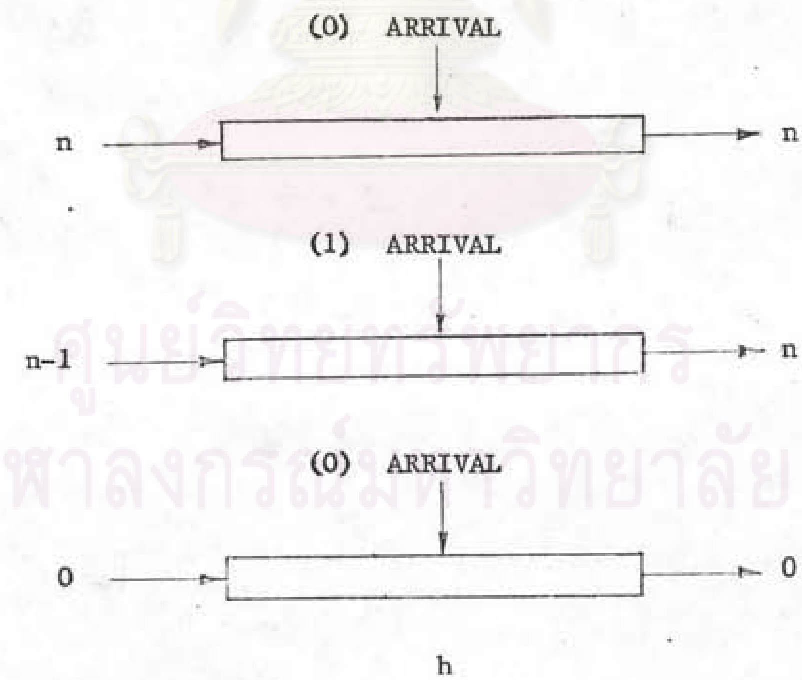
สมมติว่าระบบเริ่มเมื่อเวลาเท่ากับศูนย์ ($t=0$) และไม่มีผู้รับบริการอยู่ในระบบเลย ($n=0$)

ให้ λ เป็นอัตราการมาของผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา

h เป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก

ในช่วงเวลาระหว่าง t และ $t+h$ จะมีทางเป็นไปได้ 2 กรณีคือ

1. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ n คน และระหว่างเวลา t ถึง $t+h$ ความน่าจะเป็นที่ไม่มีผู้รับบริการมาถึงระบบเลย $= 1-\lambda h$
2. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ $n-1$ คน และระหว่างเวลา t ถึง $t+h$ ความน่าจะเป็นที่มีผู้รับบริการมาถึงระบบ 1 คน $= \lambda h$



ดังนั้น $P_n(t+h) \cong P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h$ เมื่อ $n > 0$ (5)

$$P_0(t+h) \cong P_0(t)(1-\lambda h) \qquad n = 0 \qquad (6)$$

จากสมการ (5) และ (6) จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} \cong -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} \cong -\lambda P_0(t)$$

ให้ limit $h \to 0$ จะได้

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad (7)$$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \qquad (8)$$

$P'_n(t)$ เป็น Derivative ครั้งแรกของ $P_n(t)$ โดยขึ้นอยู่กับเวลา t

จะได้ $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$ โดย $n = 0,1,2..$ (9)

ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปัวซองที่มีค่าเฉลี่ย $= \lambda t$ และความแปรปรวน $= \lambda t$

4.6.2 การแจกแจงเวลาห่างระหว่างผู้มารับการ

สมมติว่าการแจกแจงการมาของผู้รับบริการเป็นแบบปัวซอง

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของช่วงห่างของเวลาระหว่างการมา

เมื่อ $t > 0$

$F(t)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นสะสมของ $f(t)$ เมื่อ $t > 0$

จาก $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$ (10)

ถ้าไม่มีการมาเกิดขึ้นในช่วง 0 ถึง t

$$P_0(t) = \int_t^{\alpha} f(u)\, du$$

$$= 1 - \int_0^t f(u)\,du$$

$$= 1 - F(t) \qquad (11)$$

จากสมการ (9) และ (11) จะได้

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad (12)$$

แทนค่า $P_0(t)$ จากสมการ (12) ลงในสมการ (11) จะได้

$$1-F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Differentiate $F(t)$ โดยขึ้นอยู่กับ t จะได้

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{โดย} \quad t > 0 \\ 0 & \text{"} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

นั่นคือ ถ้าการแจกแจงการมาของผู้รับบริการเป็นปัวซอง การแจกแจงช่วงห่างของเวลาระหว่างผู้รับบริการแต่ละคนจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล โดยมีค่าเฉลี่ย $= \frac{1}{\lambda}$ และความแปรปรวน $= \frac{1}{\lambda^2}$

4.6.3 การแจกแจงการออกไปของผู้รับบริการ

กำหนดให้ N เป็นจำนวนผู้รับบริการที่สามารถอยู่ในระบบ

μ เป็นอัตราการออกไปของผู้รับบริการ

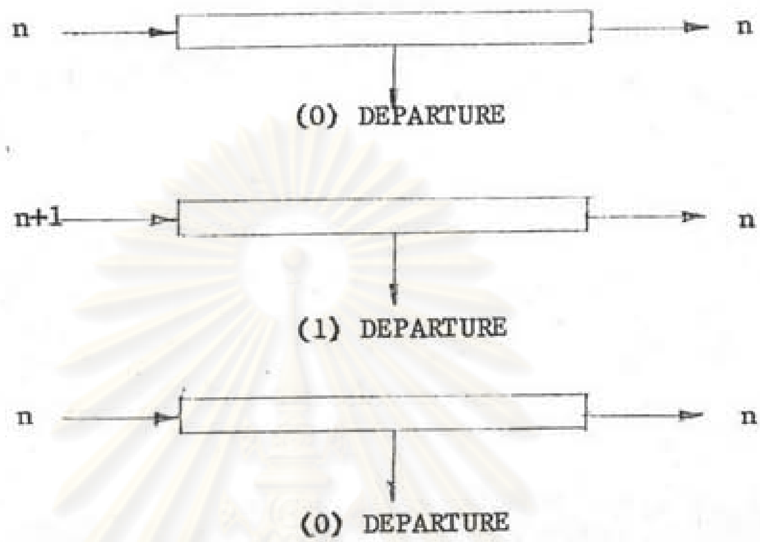
h เป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก

โดยระบบเริ่มเมื่อ $t = 0$ และ $n = 0$

ในช่วงเวลาระหว่าง t และ $t+h$ จะมีทางเป็นไปได้ 2 กรณีคือ

1. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ n คน และระหว่าง t ถึง $t+h$ ความน่าจะเป็นที่ไม่มีผู้รับบริการออกไปเลย $= 1-\mu h$

2. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ $n+1$ คน และระหว่างเวลา t ถึง $t+h$ ความน่าจะเป็นที่มีผู้รับบริการออกไป 1 คน $= \mu h$



ดังนั้น $P_n(t+h) \cong P_n(t)(1-\mu h)$ $\quad n = N$

$$P_n(t+h) \cong P_n(t)(1-\mu h) + P_{n+1}(t)\mu h \qquad 0 < n < N$$

$$P_0(t+h) \cong P_0(t)(1) + P_1(t)\mu h \qquad n = 0$$

จัดเทอมเหล่านี้ใหม่ แล้วให้ limit ของ $h \to 0$ จะได้

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) \qquad n = N$$

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \qquad 0 < n < N$$

$$P'_n(t) = -\mu P_1(t) \qquad n = 0$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการทั้ง 3 จะเป็น

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} \cdot e^{-\mu t}}{N-n} \qquad n = 1, 2, \ldots N$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} P_n(t)$$

ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปัวซองชนิด Truncated

4.6.4 <u>การแจกแจงเวลาที่ให้บริการ</u>

กำหนดให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของเวลาที่ให้บริการ

ความน่าจะเป็นที่ไม่มีการให้บริการระหว่างเวลา $(0, T)$ จะเท่ากับความน่าจะเป็นของการไม่มีคนออกจากระบบระหว่างเวลาเดียวกันนั้น ดังนั้น

$$P\left[\text{ เวลาให้บริการ } t > T\right] = P\left[\text{ ไม่มีการออกไประหว่าง } T\right]$$

หรือ $$1 - \int_0^T g(t)\,dt = P_N(T) = e^{-\mu T}$$

ดังนั้น $$\int_0^T g(t)\,dt = 1 - e^{-\mu T}$$

โดยการ Differentiation จะได้

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

ซึ่งแสดงว่าการแจกแจงเวลาที่ให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล มีค่าเฉลี่ย $= \frac{1}{\mu}$ และความแปรปรวน $= \frac{1}{\mu^2}$

4.7 <u>ชนิดของระบบแถวคอย</u> สามารถจำแนกตามจำนวนช่องทางการให้บริการได้ดังนี้

1. ระบบแถวคอยที่มีช่องทางการให้บริการเพียง 1 ช่องทาง
2. ระบบแถวคอยที่มีช่องทางการให้บริการมากกว่า 1 ช่องทาง

4.7.1 <u>ระบบแถวคอยที่มีช่องทางการให้บริการเพียง 1 ช่องทาง</u> สามารถแบ่งออกได้เป็น

ก. <u>ระบบแถวคอยแบบที่ 1</u> (ระบบแถวคอยในสภาพแน่นอน)

ระบบแถวคอยแบบนี้ จะมีผู้ให้บริการเพียงหน่วยเดียว การเข้ามารับบริการและเวลาให้บริการมีสภาพแน่นอนด้วยอัตราคงที่ ระบบแถวคอยประเภทนี้ มักจะพบในระบบที่ดำเนินงานแบบอัตโนมัติโดยใช้เครื่องจักรเข้าช่วย

พฤติกรรมของระบบแถวคอยแบบนี้ มี 3 ลักษณะคือ

1. ถ้าอัตราการมารับบริการเท่ากับอัตราการให้บริการ ($\lambda=\mu$) จะไม่มีการรอคอย และส่วนให้บริการไม่มีเวลาว่าง

2. ถ้าอัตราการมารับบริการต่ำกว่าอัตราการให้บริการ ($\lambda<\mu$) จะไม่มีการรอคอย แต่ส่วนให้บริการมีเวลาว่าง

3. ถ้าอัตราการมารับบริการสูงกว่าอัตราการให้บริการ ($\lambda>\mu$) ส่วนให้บริการจะถูกใช้งานเต็มที่ และมีการเข้าแถวรอคอยเกิดขึ้น ความยาวของแถวคอยจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

การที่จะทำให้ระบบดำเนินงานมีประสิทธิภาพ จะต้องพยายามทำให้อัตราการมาเท่ากับอัตราการให้บริการ ($\lambda=\mu$) ทั้งนี้เพื่อให้ส่วนบริการทำงานเต็มที่และสม่ำเสมอโดยไม่เกิดการรอคอยขึ้น

สูตรที่ใช้กับระบบแถวคอยแบบนี้คือ

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

ข. <u>ระบบแถวคอยแบบที่ 2</u> (ระบบแถวคอยแบบพื้นฐาน) มีข้อสมมติฐานดังนี้

1. การแจกแจงการมารับบริการเป็นแบบปัวซอง

2. การแจกแจงเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

3. มีช่องทางการให้บริการเพียงช่องเดียว

4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบใครมาถึงก่อนได้รับบริการก่อน

5. จำนวนผู้มารับบริการและการรอคอยมีจำนวนไม่จำกัด

6. อัตราการให้บริการ (μ) จะต้องสูงกว่าอัตราการมารับบริการ (λ)

สูตรที่ใช้กับระบบแถวคอยแบบนี้คือ

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$P_n = \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n \cdot P_0 \quad \text{โดยที่} \quad n = 1, 2, 3, 4...$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

โดยที่ P_n หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้รับบริการ n คนอยู่ในระบบ

P_0 หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีผู้รับบริการอยู่ในระบบซึ่งก็คือ ความน่าจะเป็นที่ส่วนบริการว่างงาน

(ค) <u>ระบบแถวคอยแบบที่ 3</u> (ระบบแถวคอยที่ผู้รับบริการมีจำนวนจำกัด) มีข้อสมมติฐาน ดังนี้

1. การแจกแจงการมารับบริการเป็นแบบปัวซอง

2. การแจกแจงเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

3. มีช่องทางการให้บริการเพียงช่องเดียว

4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบใครมาถึงก่อนได้รับบริการก่อน

5. จำนวนผู้มารับบริการ มีจำนวนจำกัด สมมติมีขนาดเท่ากับ N

สูตรที่ใช้กับระบบแถวคอยแบบนี้คือ

$$\lambda n = \begin{cases} \lambda(N-n) & \text{โดยที่} \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{"} \quad n = N \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \qquad \text{โดยที่} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots N$$

โดยที่ λ_n = อัตราการมา ในขณะที่มีผู้รับบริการ n คน อยู่ในระบบ

μ_n = อัตราการให้บริการ ในขณะที่มีผู้รับบริการ n คนอยู่ในระบบ

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} \cdot \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n \cdot P_0 \qquad \text{โดยที่} \quad 1 \le n \le N$$

$$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

$$L_q = N - \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)(1-P_0)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(N-L)$$

$$W = \frac{L}{\lambda(N-L)}$$

หรือ $$W = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-P_0} - \frac{\mu}{\lambda}\right]$$

$$W_q = \frac{1}{\mu}\left[\frac{N}{1-P_0} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right]$$

(จ) <u>ระบบแถวคอยแบบที่ 4</u> (ระบบแถวคอยที่มีจำนวนผู้รับบริการในแถวคอยจำนวนจำกัด) ข้อสมมติฐานของระบบแถวคอยชนิดนี้ คล้ายกับชนิดที่ 2 เพียงแต่ขนาดของแถวคอยจะถูกจำกัดด้วยเนื้อที่ กำลังความสามารถในการให้บริการ หรือความไม่เต็มใจของผู้รับบริการที่จะต้องเสียเวลารอคอย ซึ่งจะมีผลกระทบต่อความน่าจะเป็นของจำนวนผู้รับบริการในระบบ ความยาวโดยเฉลี่ยของแถวคอยและของระบบ เวลารอคอยโดยเฉลี่ยในแถวคอยและเวลาอยู่ในระบบโดยเฉลี่ย

จากการกำหนดให้จำนวนผู้รับบริการที่อยู่ในระบบแถวคอยชนิดนี้ มีได้ไม่เกิน M คน ฉะนั้นสูตรที่ใช้กับระบบชนิดนี้คือ

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \cdot P_0 & \text{โดยที่ } \lambda \neq \mu \text{ สำหรับ } 0 \leq n \leq M \\ \frac{1}{M+1} & \text{"} \quad \lambda = \mu \qquad 0 \leq n \leq M \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{(M+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}} & \text{โดยที่} \quad \lambda \neq \mu \\ \frac{M}{2} & \text{"} \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

$$L_q = L - (1-P_0)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1-P_M)$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda(1-P_M)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_M)}$$

(จ) <u>ระบบแถวคอยแบบที่ 5</u> (ระบบแถวคอยที่การมาถึงมีการแจกแจงแบบปัวซอง เวลาให้บริการมีการแจกแจงแบบใด ๆ) มีข้อสมมติฐานดังนี้

1. การแจกแจงการมารับบริการเป็นแบบปัวซอง

2. การแจกแจงเวลาให้บริการเป็นแบบใดก็ได้

3. มีช่องทางการให้บริการเพียงช่องเดียว

4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบใครมาถึงก่อนได้รับบริการก่อน

5. จำนวนผู้มารับบริการและการรอคอยมีจำนวนไม่จำกัด

ระบบแถวคอยแบบนี้จำเป็นต้องทราบค่าเฉลี่ยของเวลาให้บริการ $\frac{1}{\mu}$ และความแปรปรวนของเวลาให้บริการ (σ^2)

สูตรที่ใช้กับระบบแถวคอยแบบนี้คือ

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. สำหรับอัตราการให้บริการ (μ) ค่าหนึ่ง ความยาวของแถวคอย (L_q) จะมีค่าเพิ่มขึ้น ถ้าความแปรปรวน (σ^2) มีค่าเพิ่มมากขึ้น การเปลี่ยนแปลงค่าของ L_q จะมีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงค่าอื่น ๆ เช่น L, W_q และ W ด้วย ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ผลการดำเนินงานของระบบแถวคอยสามารถจะปรับปรุงให้ดีขึ้นได้ ถ้าลดความแปรปรวนของเวลาให้บริการ

2. ถ้าความแปรปรวนของเวลาให้บริการเท่ากับศูนย์ แสดงว่าเวลาให้บริการเท่ากันสำหรับผู้รับบริการในแต่ละราย กรณีนี้ถือเป็นกรณีเฉพาะสำหรับระบบนี้ ซึ่งมีการแจกแจงการมาเป็นแบบปัวซอง แต่เวลาให้บริการเป็นแบบสภาพแน่นอน สูตร L_q สำหรับกรณีนี้จะกลายเป็น

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}$$

หรือ

$$L_q = \frac{\lambda}{2\ \mu(\mu-\lambda)}$$

3. สมมติเวลาให้บริการมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล โดยมีค่าความแปรปรวน $\sigma^2 = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2$ โดยการแทนค่า σ^2 ด้วย $\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$ ในสูตรของระบบแถวคอยแบบที่ 4 จะได้

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\ (\mu-\lambda)}$$

4.8.2 <u>ระบบแถวคอยที่มีช่องทางการให้บริการมากกว่า 1 ช่องทาง</u> มีข้อสมมติฐานดังนี้

1. การแจกแจงการมารับบริการเป็นแบบปัวซอง
2. การแจกแจงเวลาให้บริการเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{1}{\mu}$
3. มีช่องทางการให้บริการมากกว่า 1 ช่องทาง
4. ระเบียบการให้บริการเป็นแบบใครมาถึงก่อนได้รับบริการก่อน
5. จำนวนผู้มารับบริการและการรอคอยมีจำนวนไม่จำกัด

สูตรที่ใช้กับระบบแถวคอยแบบนี้คือ

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 1, 2, 3, \ldots, (S-1) \\ S\mu & n \geq S \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{S\mu}\right)}}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{สำหรับ} \quad 0 \leq n < S \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S/S(n-S)} \cdot P_0 & \text{"} \quad n \geq S \end{cases}$$

เมื่อมีผู้รับบริการอยู่ในระบบมากกว่า S คน ช่องให้บริการทุกช่องจะไม่ว่าง ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่ผู้รับบริการจะต้องรอ $= P\ (n \geq S)$

$$= P_S + P_{S+1} + P_{S+2} + \ldots.$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S}{S!\ (\ 1 - \frac{\lambda}{S\mu}\ )} \cdot P_0$$

จำนวนช่องให้บริการที่ทำงานโดยเฉลี่ย = ค่าคาดหมายของจำนวนช่องให้บริการที่ทำงาน

$$= \sum_{n=1}^{S-1} n.P_n + \sum_{n=S}^{\alpha} S.P_n$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}$$

เนื่องจากอัตราการมารับบริการ = λ คน/หน่วยเวลา และจำนวนช่องที่ทำงาน

โดยเฉลี่ย = $\frac{\lambda}{\mu}$ ฉะนั้นโดยเฉลี่ยแล้วแต่ละช่องจะทำงาน $= \frac{\lambda}{S\mu}$

โดยที่ $\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$

ระบบแถวคอยแบบนี้จะหาคำตอบได้ในสภาวะคงตัวก็ต่อเมื่อ $\rho = \frac{\lambda}{S} < 1$

สูตรอื่น ๆ ที่ใช้กับระบบแถวคอยชนิดนี้คือ

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S+1}}{(S-1)!\left(S - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \cdot P_0$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

4.8 ทฤษฎีความน่าจะเป็น

ในการศึกษาและดำเนินการทางด้านวิศวกรรม บ่อยครั้งที่การตัดสินใจอาจต้องกระทำโดยไม่คำนึงถึงความสมบูรณ์และคุณภาพของข้อมูลภายใต้การกระทำที่ไม่แน่นอน ดังนั้นผลจากการตัดสินใจใด ๆ ไม่สามารถหาออกมาได้ด้วยความมั่นใจอย่างเต็มที่ได้ การที่จะทำให้เกิดความมั่นใจจากเงื่อนไขที่ไม่แน่นอนนี้ได้ จำเป็นต้องใช้แนวความคิดและทฤษฎีความน่าจะเป็นเข้าช่วย เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเหล่านั้น และเป็นที่เชื่อถือได้ในเชิงสถิติ

ทฤษฎีความน่าจะเป็นและแนวความคิดทางสถิติที่ใช้ มีดังนี้

4.8.1 ความน่าจะเป็น (Probability) เป็นมาตรการหรือวิธีหนึ่งในการวัดโอกาสการเกิดของเหตุการณ์ว่าจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด ความน่าจะเป็นที่คำนวณได้ใช้สำหรับคาดคะเนเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่ยังไม่เกิดขึ้น ถ้าเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแล้วก็ไม่จำเป็นต้องมีความน่าจะเป็น อีกนัยหนึ่งความน่าจะเป็นจะมีความหมายต่อการคาดคะเนก็ต่อเมื่อเหตุการณ์นั้นยังไม่เกิดขึ้น อย่างไรก็ตามเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแล้ว ก็มีประโยชน์ในการที่จะหาความน่าจะเป็นเพื่อใช้เป็นตัวคาดคะเนถึงเหตุการณ์ที่มีโอกาสจะเกิดขึ้นว่าเป็นเท่าใด ความน่าจะเป็นสามารถคำนวณได้โดยใช้อัตราส่วนของจำนวนวิธีที่เหตุการณ์ที่สนใจเกิดขึ้นต่อจำนวนวิธีของเหตุการณ์ทั้งหมดจะเกิดขึ้นหรือคิดเป็นร้อยละของเหตุการณ์ทั้งหมด

4.8.2 ลักษณะของเหตุการณ์อันเป็นพื้นฐานในการคำนวณความน่าจะเป็น

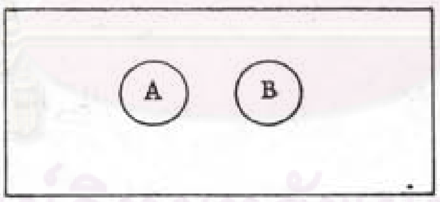
การจะคำนวณความน่าจะเป็น จำเป็นต้องมีความเข้าใจลักษณะของเหตุการณ์อันเป็นพื้นฐานแห่งความน่าจะเป็นเสียก่อน เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นสามารถแบ่งได้เป็น 6 ประเภท คือ

1. เหตุการณ์แบบง่าย (Simple Event) เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยมีลักษณะที่ไม่สามารถจะแยกเป็นเหตุการณ์อื่น ๆ ได้อีกเช่น เหตุการณ์ของการโยนเหรียญ 1 อัน เหตุการณ์ที่จะให้ได้หัว เป็นเหตุการณ์แบบง่ายแยกออกเป็นเหตุการณ์อื่นอีกไม่ได้แล้ว

2. เหตุการณ์แบบผสม (Compound Event) เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นมีลักษณะที่สามารถแยกเป็นเหตุการณ์อื่น ๆ ได้อีก เช่น เหตุการณ์การโยนเหรียญ 2 อัน จะให้ได้หัวและก้อยเป็นเหตุการณ์ผสมเพราะสามารถแยกออกเป็น 2 เหตุการณ์คือเหตุการณ์ที่ 1 เหรียญอันที่ 1 ออกหัว เหรียญอันที่ 2 ออกก้อย เป็นต้น

3. เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ (Mutually Exclusive Event) เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นมีลักษณะที่แยกจากกันจะเกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ ถ้าเขียนอยู่ในรูปของเซท จะมีลักษณะดังนี้ โดย A เป็นลักษณะหนึ่ง ส่วน B เป็นอีกลักษณะหนึ่ง นั่นคือ

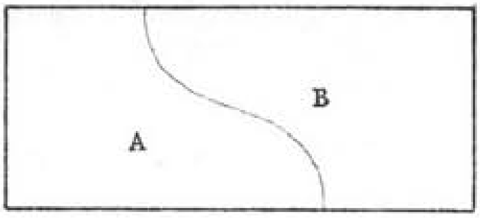
$A \cap B = 0$



ตัวอย่างเช่น A เป็นลักษณะสีแดงของไพ่ B เป็นลักษณะสีดำของไพ่ ซึ่งลักษณะสีแดงและสีดำของไพ่เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ ฉะนั้นเหตุการณ์ที่จะมีไพ่สีแดงและสีดำจึงเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้

4. เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นรวมแล้วเป็นทั้งหมด (Exhaustive Event) เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น โดยมีลักษณะการเกิดพร้อมกันไม่ได้ แต่เมื่อนำมารวมกันจะเป็นทั้งหมด ถ้าเขียนอยู่ในรูปของเซท โดยให้ A เป็นลักษณะหนึ่ง ส่วน B เป็นอีกลักษณะหนึ่ง นั่นคือ

$A \cup B = 1$



ตัวอย่างเช่น A เป็นลักษณะสีแดงของไพ่ B เป็นลักษณะสีดำของไพ่ ซึ่งลักษณะสีแดงและสีดำของไพ่รวมกันแล้วเป็นไพ่ทั้งชุด จะนั้นเหตุการณ์ที่จะมีไพ่สีแดงและสีดำจึงเป็นเหตุการณ์ที่รวมกันแล้วเป็นทั้งหมด

5. <u>เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน</u> (Independent Event) เป็นเหตการณ์ที่เกิดขึ้นโดยมีลักษณะการปรากฏที่ไม่มีผลต่อกันและกันได้แก่ ลักษณะการเกิดชนิดที่นำไปแทนที่ ถ้าเขียนอยู่ในรูปความน่าจะเป็น โดยให้ A เป็นลักษณะหนึ่ง ส่วน B เป็นอีกลักษณะหนึ่ง นั่นคือ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ตัวอย่างเช่น A เป็นลักษณะของไพ่ดอกจิก B เป็นลักษณะของไพ่โพดำ ถ้าหยิบไพ่ 2 ใบชนิดที่นำไปแทนที่ โดยให้ไพ่ใบที่ 1 เป็นไพ่ดอกจิก และไพ่ใบที่ 2 เป็นไพ่โพดำจะเห็นว่าการเกิดขึ้นของทั้ง 2 ลักษณะจะไม่กระทบกระเทือนกัน เพราะแผ่นไพ่ใบแรกจากไพ่ทั้งชุดซึ่งมี 52 ใบ เมื่อนำไปแทนที่ การหยิบไพ่ใบที่ 2 ไพ่ทั้งชุดก็ยังคงมี 52 ใบดังเดิม

6. <u>เหตุการณ์ที่ต้องพึ่งพากัน</u> (Dependent Event) เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยมีลักษณะการปรากฏที่มีผลต่อกันและกัน ได้แก่ ลักษณะการเกิดชนิดที่ไม่นำไปแทนที่ ถ้าเขียนอยู่ในรูปความน่าจะเป็น โดยให้ A เป็นลักษณะหนึ่ง ส่วน B เป็นอีกลักษณะหนึ่ง จะได้ $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$ ตัวอย่างเช่น ถ้าหยิบไพ่ 2 ใบชนิดไม่นำไปแทนที่ การหยิบไพ่ใบที่ 1 จากไพ่ทั้งชุด ในครั้งแรกจะมี 52 ใบ การหยิบครั้งที่ 2 เมื่อไม่นำไปแทนที่จะถูกกระทบกระเทือนจากการหยิบครั้งแรก แทนที่ไพ่จะมี 52 ใบดังเดิม จะมีไพ่เหลือเพียง 51 ใบเท่านั้น

4.8.3 <u>การแจกแจงความน่าจะเป็น</u> (Probability Distribution)

การแจกแจงความน่าจะเป็น สามารถกระทำได้หลายแบบ แต่ที่นิยมใช้กันบ่อย ๆ ในทางปฏิบัติมี 3 แบบคือ

1. <u>อาศัยการเก็บสะสมข้อมูลในอดีต เพื่อสร้างการแจกแจงที่ต้องการ</u> วิธีนี้เหมาะสำหรับปัญหาที่มีโครงสร้างไม่เปลี่ยนแปลงในอนาคต และข้อมูลที่มีอยู่ในอดีตมีมากพอที่จะ

สร้างการแจกแจง เช่น เราสามารถสร้างการแจกแจงของจำนวนผลผลิตที่เสียจากโรงงานแห่งหนึ่งได้จากข้อมูลในอดีต และใช้การแจกแจงดังกล่าวเป็นตัวบอกจำนวนผลผลิตที่จะเสียในอนาคตได้ ตราบใดที่โครงสร้างของการผลิตเช่น เครื่องจักร คน ฯลฯ ยังไม่เปลี่ยนแปลง วิธีนี้เป็นวิธีที่ง่ายที่สุดเนื่องจากอาศัยการรวบรวมข้อมูลอย่างเดียว

2. อาศัยการคาดคะเนอย่างมีหลักเกณฑ์ ปัญหาบางอย่างค่อนข้างจะเฉพาะของมัน และไม่มีข้อมูลในอดีตมาช่วยในการสร้างการแจกแจงของผลลัพธ์เลย เช่น ผู้จัดการฝ่ายการตลาด อาจต้องทำนายการแจกแจง รายรับของสินค้าชนิดใหม่ที่นำสู่ตลาดด้วยตนเอง เพราะในอดีตไม่เคยมีสินค้าดังกล่าวออกสู่ตลาดมาก่อนเลย เป็นต้น วิธีนี้โดยปกติแล้วจะยากที่สุด เพราะไม่มีอะไรมาช่วยเราในการสร้างการแจกแจงเลย

3. โดยอาศัยวิธีข้างต้นทั้งสองชนิดรวมกัน วิธีนี้ใช้กันมากทีเดียวเพราะผู้ตัดสินใจคำนึงว่าการแจกแจงที่เขาได้จากการรวบรวมข้อมูลในอดีตนั้นไม่ถูกต้องทีเดียว เพราะโครงสร้างของระบบดังกล่าวเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้เขาเองอาจได้แนวความคิดใหม่ ๆ ที่ช่วยแก้ไขเปลี่ยนแปลงการแจกแจงแบบที่มีอยู่แล้ว เช่น การจะทำนายราคาหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ เมื่อเรามีข้อมูลเก่าซึ่งเป็นราคาหุ้นในอดีตมาช่วยสร้างตารางการแจกแจง แต่เราก็ต้องผนวกความรู้จากแหล่งภายนอกและการคาดคะเนของเราเองลงไปในผลลัพธ์ดังกล่าวด้วย

4.8.4 ชนิดของการแจกแจงความน่าจะเป็น สามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ

4.8.4.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous Distribution) การแจกแจงแบบนี้ที่พบบ่อยคือ การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมมา และการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

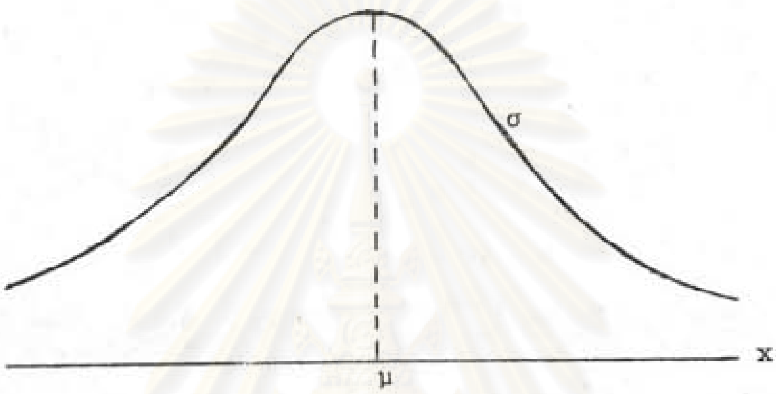
ก. การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) เป็นการแจกแจงแบบที่ใช้มากที่สุดแบบหนึ่ง ลักษณะของการแจกแจงดังกล่าวจะเป็นรูประฆังคว่ำ บางครั้งเรียกการแจกแจงดังกล่าวว่าการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian Distribution) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ ซึ่งคิดค้นสมการของการแจกแจงดังกล่าว

ถ้าให้การแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย (μ) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) ตามลำดับแล้ว สมการของการแจกแจงสามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = \frac{X}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{เมื่อ} \quad -\infty<x<\infty$$

โดยที่ $\pi = 3.14159...$ และ $e = 2.71828...$

สัญญลักษณ์ที่ใช้แทนการแจกแจงคือ $N(\mu,\sigma)$



รูป 4.4 แสดงรูปโค้งปกติ $N(\mu,\sigma)$

μ จะเป็นตัวบอกว่าโค้งจะอยู่ทางซ้ายหรือขวา ยิ่ง μ มีค่ายิ่งมาก โค้งการแจกแจงจะเบนไปทางขวา ส่วน σ จะเป็นตัวบอกว่าโค้งจะสูงหรือต่ำ ถ้ายิ่ง σ มีค่ายิ่งสูง โค้งการแจกแจงจะยิ่งกระจายมากและค่อนข้างแบนเนื่องจากการผันแปรมีค่าสูงขึ้น

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบปกติ มีดังนี้

1. โค้งจะสมมาตรรอบแกน $x=\mu$ ซึ่งเป็นจุดเฉลี่ยหรือจุดกึ่งกลางของโค้ง
2. โค้งจะมีค่าสูงสุดที่จุด $x=\mu$ และจุดที่โค้งมีค่า $f(x)$ สูงสุด เรียกว่าฐานนิยม (Mode)
3. พื้นที่ทั้งหมดที่อยู่ใต้เส้นโค้ง และอยู่เหนือแกน X มีค่าเป็น 1

การแจกแจงปกติแบบมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)

เนื่องจากในการหาค่าความน่าจะเป็นนั้น เราจำเป็นต้องอินทิเกรทเทอมที่ยุ่งยากมากนั่นคือ $f(x)$ วิธีที่จะช่วยย่นระยะเวลาก็คือทำตารางให้อ่านค่าความน่าจะเป็น แต่

ก็ทำไม่ได้สะดวก ทั้งนี้เพราะถ้าค่า μ และ σ แตกต่างออกไปแล้ว ค่าความน่าจะเป็นใต้โค้งจุดเดียวกันก็ต่างกันออกไป วิธีที่จะแก้ปัญหาดังกล่าวได้คือ การปรับโค้งปกติใด ๆ ที่กำหนดให้เข้าแบบมาตรฐานนั้นคือ มีค่า $\mu=0$ และ $\sigma=1$

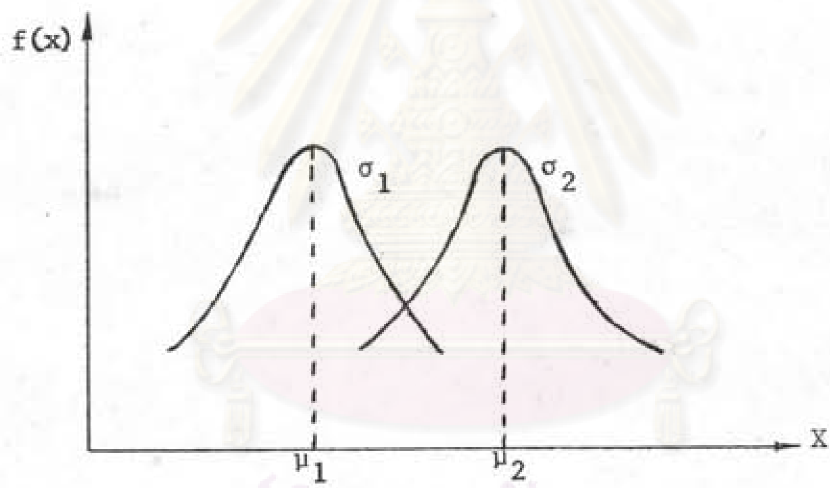
รูปแบบของสมการการแจกแจงปกติแบบมาตรฐานคือ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \text{เมื่อ } -\infty<z<\infty$$

โดยที่ $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

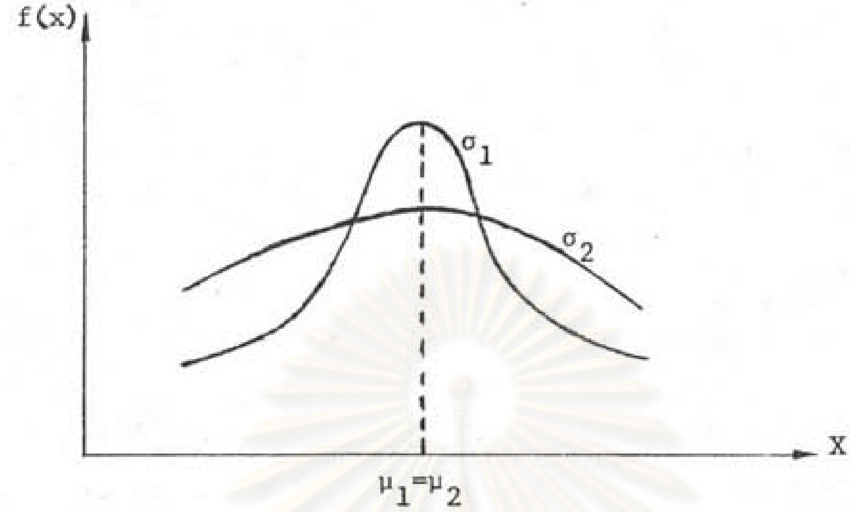
รูปแบบของการแจกแจงแบบปกติ มีดังนี้

1. <u>กรณี $\mu_1 \neq \mu_2$ และ $\sigma_1 \neq \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$</u>



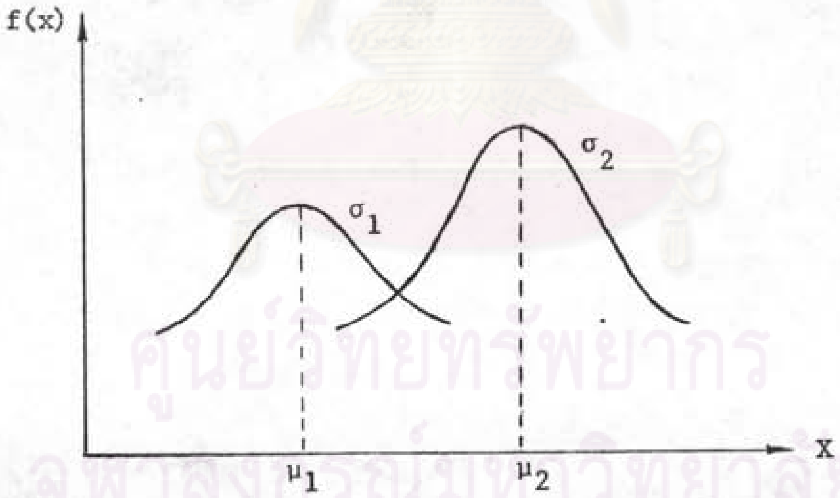
รูป 4.5 การแจกแจงที่มีค่าเฉลี่ยต่างกันแต่มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน

2. กรณี $\mu_1 = \mu_2$ และ $\sigma_1 \neq \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$



รูป 4.6 การแจกแจงที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน แต่มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน

3. กรณี $\mu_1 \neq \mu_2$ และ $\sigma_1 \neq \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$



รูป 4.7 การแจกแจงที่มีค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน

การแจกแจงแบบปกติมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง 2 ตัวคือ μ และ σ

$$\text{โดยที่ ค่าเฉลี่ย } (\mu) = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\text{ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน } (\sigma) = S = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2}{n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ข. <u>การแจกแจงแบบแกมม่า</u> (Gamma Distribution) เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องวิธีหนึ่ง การแจกแจงแบบนี้ถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ μ และ β โดยที่ α คือ Shape Parameter และ β คือ Scale Parameter

รูปแบบสมการแสดงการแจกแจงแบบแกมม่า คือ

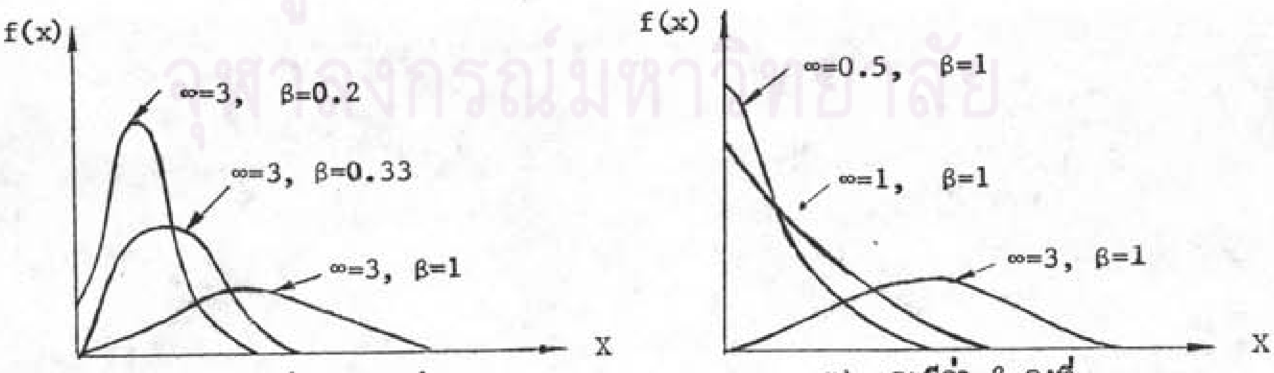
$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{(\alpha-1)!} \cdot X^{\alpha-1} \cdot C^{-\beta X}$$

การแจกแจงแบบแกมม่ามีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง 2 ตัวคือ μ และ σ

$$\text{โดยที่ ค่าเฉลี่ย } (\mu) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน } (\sigma) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$$

การแจกแจงแบบแกมม่า จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α และ β ดังแสดงในรูป 4.11



ก) กรณีค่า α คงที่ ข) กรณีค่า β คงที่

รูป 4.8 ลักษณะการแจกแจงแบบแกมม่าที่มีค่า α และ β ต่าง ๆ กัน

ค. <u>การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล</u> (Exponential Distribution) เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องวิธีหนึ่ง ที่ได้มาจากการแจกแจงแบบแกมม่า โดยให้ $\alpha=1$

รูปแบบของสมการการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล มีดังนี้

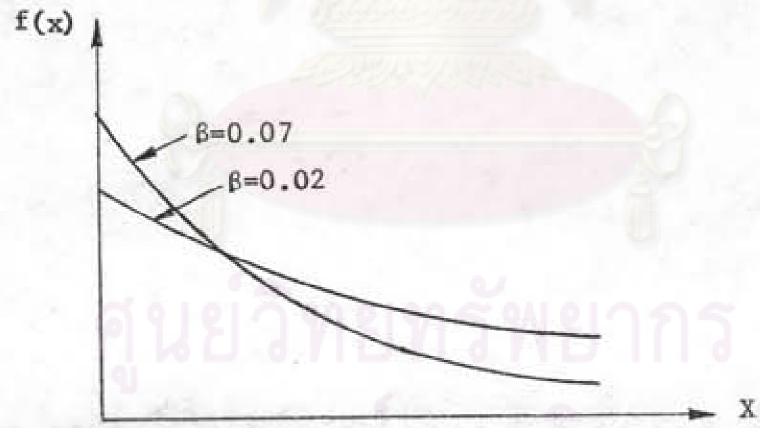
$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{เมื่อ} \quad x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

การแจกแจงแบบนี้ มีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง 1 ตัวคือ β

โดยที่ ค่าเฉลี่ย (μ) $= \frac{1}{\beta}$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) $= \frac{1}{\beta}$

การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ β ดังรูป 4.12



รูป 4.9 ลักษณะการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลที่มีค่า β ต่าง ๆ กัน

4.8.4.2 <u>การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง</u> (Discrete Distribution) การแจกแจงแบบนี้มีหลายวิธีด้วยกัน เช่น การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ แบบไบโนเมียล แบบมัลติโนเมียล แบบปัวซอง แบบเรขาคณิต และแบบเนกาทีฟไบโนเมียล

แต่การแจกแจงที่นิยมใช้กับการจำลองสภาพการรูปผิวแอสฟัลติกคอนกรีต คือ วิธีการแจกแจงแบบปัวซอง ซึ่งจะยกกล่าวถึงเฉพาะวิธีนี้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

ก) <u>การแจกแจงแบบปัวซอง</u> (Poisson Distribution) เป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องวิธีหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเหตุการณ์ของตัวแปรสุ่มที่เกิดขึ้นต่อหนึ่งหน่วยเวลา เช่น จำนวนโทรศัพท์ที่เรียกเข้ามายังบริษัทแห่งหนึ่งในเวลา 1 ชม. เป็นต้น

รูปแบบของการแจกแจงแบบปัวซอง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$P(X=x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{X!} \qquad x=0,1,2...$$

โดยที่ λ เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นใน 1 หน่วยเวลา

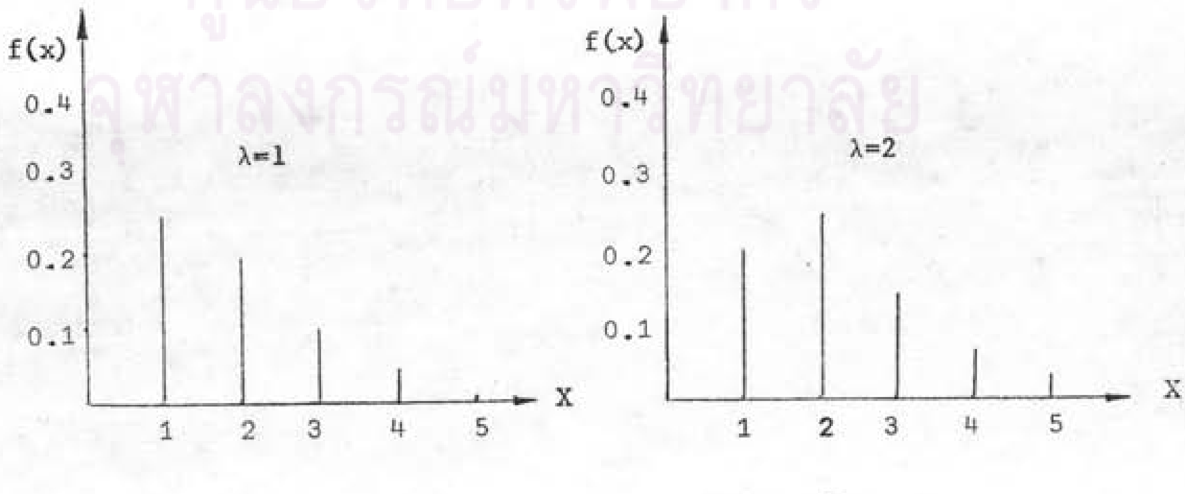
$$e = 2.71828...$$

การแจกแจงแบบปัวซอง มีพารามิเตอร์ 1 ตัวคือ λ

$$\text{โดยที่ค่าเฉลี่ย } (\mu) = \lambda = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\text{ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน } (\sigma) = \sqrt{\lambda}$$

การแจกแจงแบบปัวซอง จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ λ ดังแสดงในรูป 4.13



รูป 4.10 ลักษณะการแจกแจงแบบปัวซองที่มีค่า λ ต่าง ๆ กัน