บทที่ 2

ทฤษฎีกราฟิกกับการสร้างภาพ

เนื่องจากภาพเกิดจากหลักการพื้นฐานทางด้านกราฟิก ได้แก่ เส้นตรง วงกลม เส้นโค้งโดยอาศัยฟังก์ชั่นกระดูกงู เป็นต้น

2.1 <u>เส้นตรง</u>

การสร้างเส้นตรงเกิดจากการกำหนดจุดปลายของเส้นตรงทั้ง 2 ด้าน และใช้สมการของเส้นตรงในการเชื่อมโยงจุดปลายทั้งสอง

สมการเส้นตรง $Y = mX + b$ 2-1

m = ความลาดชัน

b = จุดตัดบนแกน Y

ถ้ากำหนดจุดปลายของเส้นตรง คือ $(x1,y1)$ และ $(x2,y2)$ ตามรูปที่ 2.1 จะหาค่า

$$m = \frac{(y2-y1)}{(x2-x1)} \qquad 2\text{-}2$$

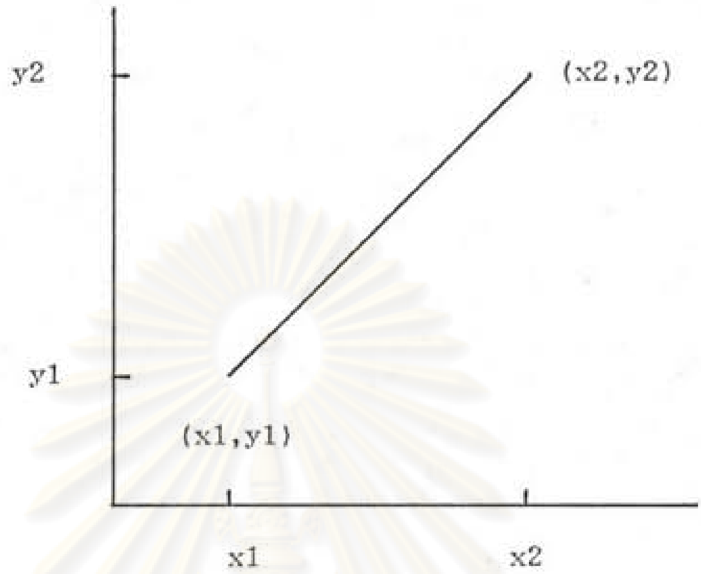
$$b = y1 - mx1 \qquad 2\text{-}3$$

กำหนดค่า x ใด ๆ บนเส้นตรงเส้นนี้ สามารถหาค่า y ได้ จาก

$$y = \frac{(y2-y1)}{(x2-x1)}(x-x1) + y1 \qquad 2\text{-}4$$

การลากเส้นตรงบนจอภาพจะต้องอาศัยหลักการของเบเซนแฮม (Bresemham) เนื่องจากจอภาพมีลักษณะเป็นแมทริกซ์ (Matrix) การลากเส้นตรงเป็นการหาตำแหน่งที่ดีที่สุดของจุดบนจอภาพที่ประกอบกันเป็นเส้นตรง วิธีการของเบเซนแฮมจะเพิ่มค่าตามแนวแกนนอนและแกนตั้งทีละหน่วยโดยให้สัมพันธ์กับค่าความลาดชันของเส้นตรง ค่าที่เพิ่มขึ้นตามแนวแกนใดแกนหนึ่งอาจมีค่าเป็นศูนย์หรือเป็นหนึ่งขึ้นอยู่กับจุดที่คำนวณบนเส้นตรงนั้นจะมีค่าใกล้เคียงกับตำแหน่งบนจอภาพหรือไม่ ความแตกต่างระหว่างตำแหน่งจริงของเส้นตรงกับตำแหน่งบนจอภาพเรียกว่า ค่าผิดพลาด

(error) ค่านี้จะใช้ในการปรับตำแหน่งจุดเพื่อให้ได้เส้นตรงบนจอภาพใกล้เคียงเส้นตรงจริงมากที่สุด



รูปที่ 2.1 แสดงเส้นตรงที่เกิดขึ้นจากการกำหนดจุดปลาย (x1,y1) (x2,y2)

2.1.1 ขั้นตอนวิธีการสร้างเส้นตรงของเบเซนแฮม สามารถคำนวณหาจุดบนเส้นตรงระหว่างจุดปลายทั้ง 2 ได้ทุกแกน โดยกำหนดเงื่อนไขว่าจุดทั้งสองจะต้องไม่เป็นจุดเดียวกัน ตำแหน่งของจุดทั้งสองต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม ดังขั้นตอนต่อไปนี้

กำหนดจุดปลายของเส้นตรง คือ (x1,y1) และ (x2,y2)

2.1.1.1 กำหนดค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปร x = x1 และ y = y1

2.1.1.2 คำนวณหาผลต่างของจุดปลายทั้งสองตามแนวแกน x และแกน y ได้ค่า ΔX และ ΔY ตามลำดับ

2.1.1.3 คำนวณค่าของผลต่างระหว่างจุดปลายและจุดตั้งต้นของเส้นตรงว่ามีค่า มากกว่า น้อยกว่า หรือ เท่ากับศูนย์ ตามแนวแกน x และ y ได้ค่า s1 และ s2 ตามลำดับ

2.1.1.4 ถ้า ΔY มากกว่า ΔX จะทำการสลับผลต่างระหว่างค่าทั้งสอง และกำหนดตัวแปรการเปลี่ยนแปลง ให้มีค่าเป็น 1 มิฉะนั้นตัวแปรการเปลี่ยนแปลงมีค่าเป็น 0

2.1.1.5 กำหนดตัวแปรควบคุมเท่ากับ 1

2.1.1.6 กำหนดค่าความผิดพลาด เท่ากับ สองเท่าของผลต่างของจุดปลายตามแนวแกน y ลบด้วย ผลต่างของจุดปลายตามแนวแกน x

2.1.1.7 สร้างจุดบนจอภาพ ณ ตำแหน่ง x และ y

2.1.1.8 ถ้าค่าของการเปลี่ยนแปลงมีค่าเป็น 1 จะเพิ่มค่า x โดยบวกค่าของ s1 กับ x เดิม มิฉะนั้นจะเพิ่มค่า y โดยบวกค่าของง s2 กับ y เดิม

2.1.1.9 เพิ่มค่าความผิดพลาด โดยการบวกค่าของสองเท่าของ x กับค่าความผิดพลาดเดิม

2.1.1.10 ถ้าค่าความผิดพลาดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ย้อนไป 2.1.1.8 มิฉะนั้นไปยัง 2.1.1.11

2.1.1.11 ถ้าค่าของการเปลี่ยนแปลงมีค่าเป็น 1 จะเพิ่มค่า y โดยบวกค่าของ s2 กับ y เดิม มิฉะนั้นเพิ่มค่า x โดยบวกค่าของ s1 กับ x เดิม

2.1.1.12 เพิ่มค่าความผิดพลาด โดยการบวกค่าของสองเท่าของ y กับค่าความผิดพลาดเดิม

2.1.1.13 เพิ่มค่าตัวแปรควบคุม ขึ้นอีก 1

2.1.1.14 ถ้าค่าตัวแปรควบคุมน้อยกว่า x ย้อนไป 2.1.1.7 มิฉะนั้นไปยัง 2.1.1.15

2.1.1.15 สิ้นสุดการทำงาน

2.2 วงกลม

การสร้างวงกลมจะกำหนด จุดศูนย์กลางของวงกลม (Center Coordinate) (xc,yc) และรัศมี (r) ตามรูปที่ 2.2 สมการของวงกลม

$$(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = r^2 \qquad 2\text{-}5$$

กรณีที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) สมการวงกลมจะอยู่ในลักษณะ

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad 2\text{-}6$$

หรือ

$$y = yc \pm \sqrt{r^2 - (x - xc)^2} \qquad 2\text{-}7$$

สมการ 2-7 ค่อนข้างยุ่งยากในการคำนวณหาค่า y ถ้าแปลงสมการ 2-7 ให้อยู่ในระบบพิกัดขั้ว (Polar Coordinate) จะคำนวณค่า x และ y ได้ง่าย

$$x = xc + r\cos\theta$$

$$y = yc + r\sin\theta \qquad 2\text{-}8$$

θ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π

r คือรัศมี

ความยาวของส่วนโค้ง (arc length) คือส่วนโค้งที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของมุมเท่ากับ Θ ดังรูปที่ 2.3

$$\text{Arc Length} = r \times \Theta \qquad 2\text{-}9$$

การสร้างวงกลมตามระบบพิกัดขั้ว จะพบปัญหาเกี่ยวกับการคำนวณค่าของ $Cos(\Theta)$ และ $Sin(\Theta)$ ทุกครั้งที่เปลี่ยนแปลงค่าของมุม (Θ) เพื่อสะดวกในการสร้างวงกลมสามารถแปลงค่ามุม (Θ) ให้อยู่ในรูปของ $d\Theta$ และทำการคำนวณค่าเพียงครั้งเดียว ดังนี้

กำหนดจุด 2 จุด อยู่บนวงกลม (x1,y1),(x2,y2) ดังรูป 2.3

$$
\begin{aligned}
x1 &= rCos(\Theta) \\
y1 &= rSin(\Theta) \qquad 2\text{-}10 \\
x2 &= rCos(\Theta + d\Theta) \\
y2 &= rSin(\Theta + d\Theta)
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ $d\Theta$ เป็นค่ามุมที่มีการเปลี่ยนแปลงคงที่

หลักการทางตรีโกณมิติ

$$
\begin{aligned}
x2 &= rCos(\Theta)Cos(d\Theta) - rSin(\Theta)Sin(d\Theta) \\
y2 &= rSin(\Theta)Cos(d\Theta) + rCos(\Theta)Sin(d\Theta)
\end{aligned}
$$

แทนค่า x1 และ y1 จาก 2-10

$$
\begin{aligned}
x2 &= x1Cos(d\Theta) - y1Sin(d\Theta) \\
y2 &= y1Cos(d\Theta) + x1Sin(d\Theta) \qquad 2\text{-}11
\end{aligned}
$$

ดังนั้นการสร้างภาพวงกลมจากสมการ 2-11 เป็นการคำนวณหาตำแหน่งใหม่ตามเส้นรอบวงของวงกลมจากจุดเริ่มต้น คือ x1 เท่ากับ 0 และ y1 เท่ากับ รัศมี และกำหนดค่ามุมที่เปลี่ยนแปลงคงที่ เท่ากับ $d\Theta$

ขั้นตอนวิธีการสร้างวงกลมจะทำการคำนวณจุดของเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบจุดศูนย์กลาง ณ จุดกำเนิด และเปลี่ยนตำแหน่งจุดศูนย์กลางจากจุดกำเนิดไปยังตำแหน่งใด ๆ โดยบวกค่า xc กับ x และบวกค่า yc กับ y ดังนั้นจุดศูนย์กลางวงกลมจะเปลี่ยนไปยังตำแหน่ง (xc,yc)

เพื่อคำนวณหาตำแหน่งที่ดีที่สุดของจุดบนจอภาพเพื่อประกอบเป็นวงกลม จะต้องทำการปรับค่า y โดยนำอัตราสัดส่วนของความยาว (aspect ratio) คูณกับค่า y ก่อน และเพื่อให้จุดบนวงกลมมีความต่อเนื่องจึงกำหนดความยาวของส่วนโค้ง ($rd\Theta$) ที่เปลี่ยนไปมีค่าเป็น 1 ดังนั้นจะได้ค่า $d\Theta = 1/r$

2.2.1 ขั้นตอนวิธีการสร้างวงกลม กำหนดอัตราสัดส่วนของความยาวเท่ากับ 1.33 และขั้นตอนการสร้างดังนี้

2.2.1.1 คำนวณองศาของมุมที่เพิ่มขึ้น จากการหารหนึ่งด้วยรัศมี

2.2.1.2 กำหนดจุดเริ่มต้นของเส้นรอบวงของวงกลม โดยกำหนดให้จุด x เท่ากับ 0 และ y เท่ากับ รัศมี

2.2.1.3 สร้างจุดของเส้นรอบวงของวงกลมบนจอภาพโดยการคำนวณตำแหน่งจุดพร้อมกัน 8 จุด

จุดแรก ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x บวกกับค่า x และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า y คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว บวกกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

จุดสอง ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x ลบกับค่า x และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า y คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว บวกกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

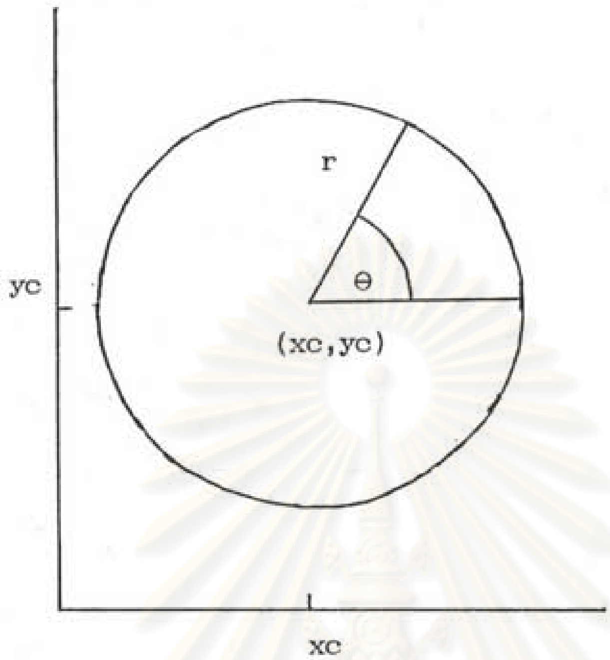
จุดสาม ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x บวกกับค่า x และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า y คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว ลบกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

จุดสี่ ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x ลบกับค่า x และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า y คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว ลบกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

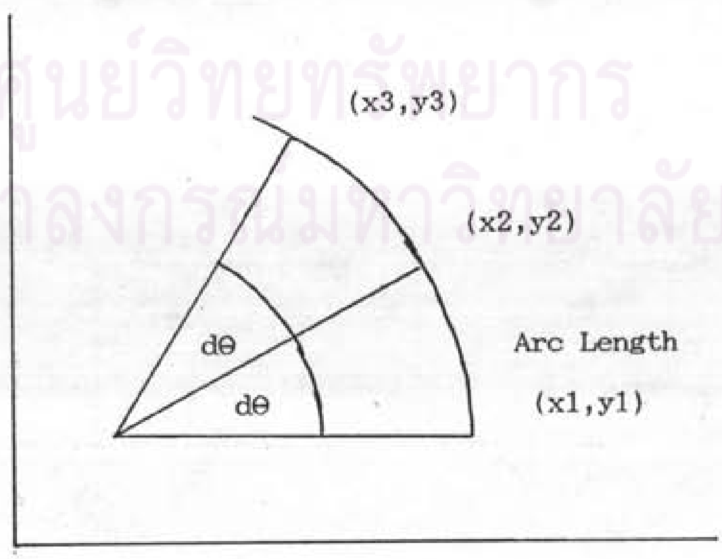
จุดห้า ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x บวกกับค่า y และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า x คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว บวกกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

จุดหก ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x ลบกับค่า y และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า x คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว บวกกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

จุดเจ็ด ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x บวกกับค่า y และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า x คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว ลบกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y



รูปที่ 2.2 แสดงวงกลมที่เกิดจากการกำหนดจุดศูนย์กลาง (xc,yc) และรัศมี (r)



รูปที่ 2.3 แสดงความยาวของส่วนโค้ง

จุดแปด ตำแหน่งของ x เกิดจากจุดศูนย์กลาง ณ แกน x ลบกับค่า y และตำแหน่งของ y เกิดจากค่า x คูณด้วย อัตราสัดส่วนของความยาว ลบกับจุดศูนย์กลาง ณ แกน y

2.2.1.4 คำนวณค่า x และค่า y ใหม่ โดย

ค่า x ใหม่ คำนวณจาก ผลคูณของค่า x เดิมกับ Cos ของ องศาของมุมที่เพิ่มขึ้น ลบด้วย ผลคูณของค่า y เดิมกับ Sin ขององศาของมุมที่เพิ่มขึ้น

ค่า y ใหม่ คำนวณจาก ผลคูณของค่า y เดิมกับ Cos ของ องศาของมุมที่เพิ่มขึ้น บวกด้วย ผลคูณของค่า y เดิมกับ Sin ขององศสของมุมที่เพิ่มขึ้น

2.2.1.5 ถ้าค่า y มากกว่าหรือเท่ากับ ค่า x ย้อนไป 2.2.1.3 มิฉนั้น ไปยัง 2.2.1.6

2.2.1.6 สิ้นสุดการทำงาน

2.3 เส้นโค้งโดยอาศัยฟังก์กระดูกงู

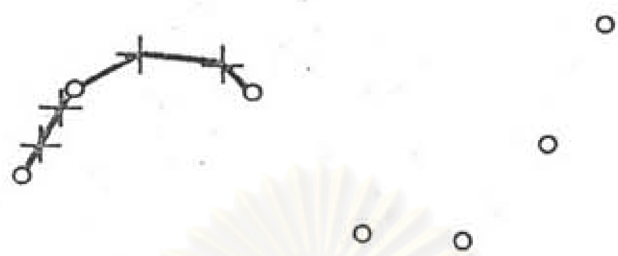
การสร้างเส้นโค้งโดยอาศัยฟังก์ชั่นกระดูกงูนั้น เป็นการวาดเส้นโค้งผ่านจุดควบคุมความโค้ง จะอาศัยการลากเส้นตรงสั้น ๆ ต่อ ๆ กัน ไปจากจุดควบคุมความโค้งหนึ่ง ไปยังจุดควบคุมความโค้งที่ติดกัน ทิศทางของเส้นตรงสั้น ๆ จะถูกกำหนดโดยฟังก์ชั่นที่เรียกว่า ฟังก์ชั่นแสดงการโค้ง (Blending Function)

การแสดงตำแหน่งของจุดบนเส้นโค้ง จะใช้สมการทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของพาราเมตริก (Parametric Form) มาอธิบาย

$$x = fx(u)$$
$$y = fy(u) \qquad 2\text{-}12$$

กรณีที่ต้องการให้เส้นโค้งผ่านจุดที่กำหนดให้ n จุด

$$(x1,y1),(x2,y2),...,(xn,yn)$$



รูปที่ 2.4 แสดงเส้นโค้งเกิดจากเส้นตรงสั้น

จากสมการ 2-12 แปลงให้อยู่ในรูปของผลรวม

$$fx(u) = \sum_{i=1}^{n} xiBi(u)$$

$$fy(u) = \sum_{i=1}^{n} yiBi(u) \qquad 2\text{-}13$$

โดยค่า Bi(u) เป็นฟังก์ชั่นแสดงการโค้ง ซึ่ง Bi(u) จะเป็นตัวที่ชี้แสดงว่า ณ จุดซึ่ง u มีค่าใดค่าหนึ่งนั้น เส้นโค้งจะถูกควบคุมโดยจุดควบคุมความโค้งที่ i มากน้อยเท่าใด เช่น ณ จุดบนเส้นโค้งซึ่งมีค่า u เท่ากับ u_1 แล้วค่า $B_{i_1}(u_1) = 1$ และ $B_j(u_1) = 0$ โดยที่ $j = 1 \sim n$ และ $j = i_1$ จากสมการ 2-12 และ 2-13 จะได้ว่า

$$x = fx(u_1) = x_j0 + x_j0 + x_{i_1}1 + x_j0 + \ldots = x_{i_1}$$

$$y = fy(u_1) = y_j0 + y_j0 + y_{i_1}1 + y_j0 + \ldots = y_{i_1} \qquad 2\text{-}14$$

โดยที่ $j = 1 \sim n$ และ $j = i_1$

จากสมการ 2-14 จะได้ว่าเส้นโค้งจะผ่านจุด i_1 เมื่อ u เท่ากับ u_1 นั้นคือเมื่อ u เท่ากับ u_1 นั้น เส้นโค้งจะถูกควบคุมโดยสิ้นเชิง (completely control) โดยจุดควบคุมความโค้ง i_1

สำหรับฟังก์ชั่นแสดงการโค้งที่ใช้ในการวิจัยคือ

$$B_i(u) = \frac{(u+1)(u)(u-1)(u-2)\ldots(u-(i-3))(u-(i-1))\ldots(u-(i-2))}{(i-1)(i-2)(i-3)\ldots(1)(-1)\ldots(i-n)} \quad 2\text{-}15$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นควบคุมความโค้ง ที่ทำให้ $B_i(u)$ เท่ากับ 1 เมื่อ u=i-2 (โดยที่ i=1~n และ u=1~n-2) นั่นคือ เมื่อ u=i-2 แล้ว เส้นโค้งจะผ่านจุดควบคุมความโค้ง i ตัวอย่างเช่นเส้นโค้งจะผ่านจุดควบคุมความโค้ง i=2 เมื่อ u=0

ในการวาดเส้นโค้งนั้นจะใช้ฟังก์ชั่นในสมการ 2-15 และจุดควบคุมความโค้งทีละ 4 จุด (คือ i=1~4) เพื่อวาดส่วนโค้งซึ่งเชื่อมโยงจุดควบคุมความโค้งที่อยู่ระหว่างกลาง คือจุด i=2 (u=0) และจุด i=3 (u=1) แล้วจะเลื่อนไปวาดเส้นโค้งถัดไป ดังรูปที่ 2.4 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการวาดเส้นโค้งผ่านจุด b และ c จะใช้จุด a(i=1), b(i=2) ,c(i=3), d(i=4) เป็นจุดควบคุมความโค้งและให้ u มีค่าเพิ่มจาก 0 ไปจนถึง 1 จะได้ค่า x,y,z ของจุดซึ่งอยู่บนเส้นโค้งจากสมการ 2-12 และ 2-13 และในการวาดเส้นโค้งผ่านจุด c และ d นั้นจะใช้จุด bcde เป็นจุดควบคุมความโค้ง

รูปที่ 2.5 ตัวอย่างการวาดเส้นโค้ง

2.4 <u>การแปลงลักษณะใน 2 มิติ</u> (Two-Dimensional Transformation)

การแปลงลักษณะเชิงเรขาคณิต (Geometrical Transformation) มีการย้ายตำแหน่ง (Translation) ในการพัฒนาโปรแกรมนี้จะใช้ในการย้ายตำแหน่งของภาพจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง ใช้ในกรณีเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของคาร์แรกเตอร์ในการสร้างภาพเคลื่อนไหว

2.4.1 การย้ายตำแหน่ง กำหนดให้จุดแรก (x,y) ย้ายตำแหน่งใหม่ไปที่ (x',y') คือเปลี่ยนแปลงไปตามแนวนอน เป็นระยะทาง H หน่วย เปลี่ยนแปลงไปตามแนวตั้งเป็นระยะทาง V หน่วย ดังรูปที่ 2.6

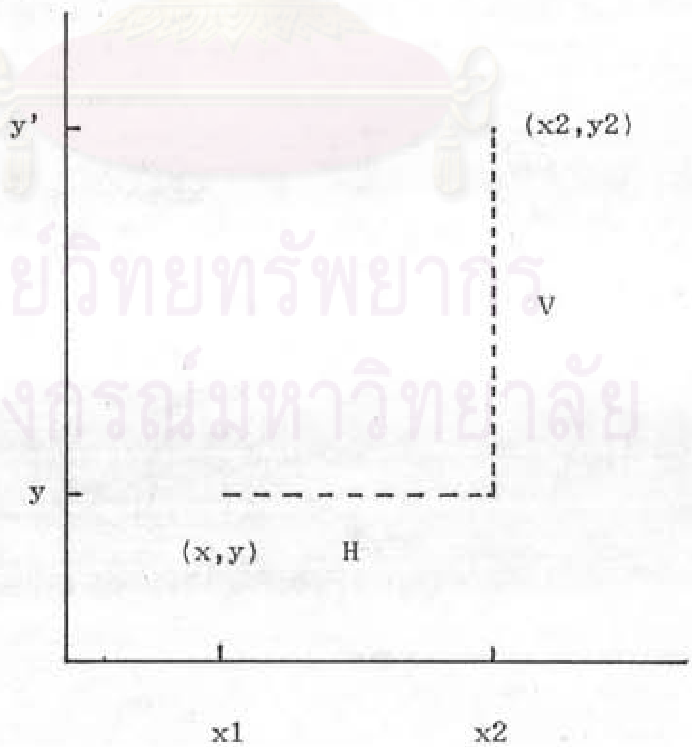
สมการในการย้ายตำแหน่งคือ

$$x' = x + H$$

$$y' = y + V$$

สมการที่ 2-16 สามารถจัดให้อยู่ในรูปของ แมทริกซ์ ดังนี้

$$[x' \; y' \; 1] = [x \;\; y \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ H & V & 1 \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}16$$



รูปที่ 2.6 แสดงการย้ายตำแหน่งภาพ