บทที่ 3

ทฤษฎีการควบคุม

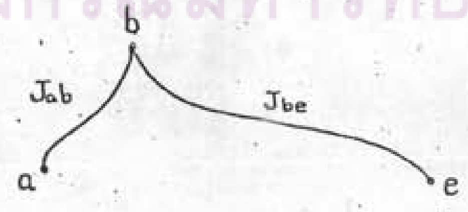
3.1 บทนำ

การออกแบบระบบควบคุมแบบเก่า(classical control system) มีวิธีการในการวิเคราะห์หลายแบบ ในการหาค่าพารามิเตอร์ของการออกแบบเพื่อให้ใช้งานกับระบบนั้นได้ ค่าประสิทธิภาพที่ยอมรับได้โดยทั่วไปจะกำหนดให้อยู่ในรูปของเวลาและความถี่ เช่น rise time , settling time , gain และ phase margin ซึ่งจะต้องเหมาะสมกับระบบ อย่างไรก็ตาม ระบบที่มีความซับซ้อน และระบบที่มีหลายอินพุท และหลายเอ๊าท์พุทจะต้องใช้เทคโนโลยีแบบใหม่ในการวิเคราะห์ เช่น ในการออกแบบระบบควบคุม spacecraft attitude นั้นจะต้องใช้เชื้อเพลิงให้น้อยที่สุด ซึ่งถ้าใช้วิธีเก่าจะไม่สามารถให้คำตอบที่ดีได้ แต่ถ้าใช้ทฤษฎีการควบคุมแบบทันสมัย (modern control system) จะมุ่งเข้าสู่คำตอบได้ดีกว่าสำหรับระบบซึ่งซับซ้อน การควบคุมที่ใช้ทฤษฎีการควบคุมแบบทันสมัยที่จะนำมาใช้นี้คือ " ทฤษฎีการควบคุมแบบออปทิมัล (2 : 27 - 121) "

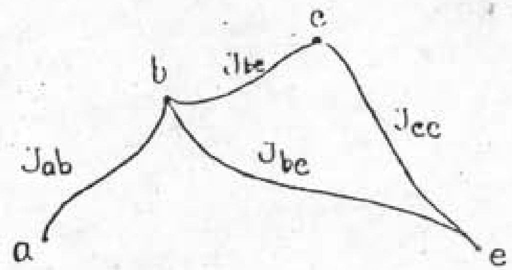
วัตถุประสงค์ของทฤษฎีการควบคุมแบบออปทิมัล คือ เป็นการหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมในการควบคุมความผิดพลาด และการใช้พลังงานในการขับเคลื่อนของระบบ

3.2 ทฤษฎีการควบคุมแบบออปทิมัล

พิจารณารูปที่ 3.1a , 3.1b



รูปที่ 3.1a แสดงเส้นทางที่เหมาะสมจาก a - e



รูปที่ 3.1b แสดงทางเดินที่เหมาะสม 2 เส้นทางจาก b - e

จากรูปที่ 3.1a , 3.1b จะเห็นว่าในการเดินทางจาก a ไปยัง e นั้นมีเส้นทางเดินได้หลายเส้นทางแต่จะมีเส้นทางเดียวเท่านั้นที่สั้นที่สุด ซึ่งความต้องการใหญ่ในการเดินทางนี้จะเรียกว่า cost function (2 : 27) ให้เส้นทางแรก a -b มี cost function เป็น J_{ab} และเส้นทางต่อมาคือ b - e จะมี cost function เป็น J_{be} ค่าที่น้อยที่สุดของ cost function J_{ae}^{*} จาก a - e คือ

$$J_{ae}^{*} = J_{ab} + J_{be} \qquad \text{.........(3.1)}$$

ซึ่งในการหาค่า cost function ที่เหมาะสมที่สุดนั้นมีวิธีการมากมาย ในการวิเคราะห์ระบบที่ออกแบบไว้เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการควบคุมนั้น จำเป็นที่จะต้องทำการจำลองแบบของระบบจริงให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรูปสมการสเตท (3 : 312) เป็น

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \qquad \text{......(3.2)}$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \qquad \text{......(3.3)}$$

จากทฤษฎีของการควบคุมแบบออปทิมัลนั้นมีวัตถุประสงค์หลักอยู่คือ ต้องการให้มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด และใช้พลังงานน้อยที่สุดที่ความต้องการระดับหนึ่งๆ ซึ่งเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ cost function ได้คือ

$$\begin{aligned} J = {} & 0.5\langle[Z(t_f)-Y(t_f)],F(t)[Z(t_f)-Y(t_f)]\rangle \\ & + 0.5 \int_{t_0}^{t_f} \{\langle[Z(t)-Y(t)],Q(t)[Z(t)-Y(t)]\rangle \\ & + \langle U(t),R(t)U(t)\rangle\}\, dt \qquad \text{........(3.4)} \end{aligned}$$

โดยที่

$Z(t)$ = สัญญาณเอ้าท์พุทที่ต้องการ

$F(t)$ = weighting factor (2 : 77)

$Q(t)$ = weighting factor

$R(t)$ = weighting factor

และ $Z(t) - Y(t) = e(t)$ = ค่าความผิดพลาด

กำหนดให้

$$C(t) = I \quad , \quad Z(t) = 0$$

และ $Y(t) = -X^{o}(t) = e(t)$ จะได้ว่า

$$J = 0.5\langle X(t_f),F(t)X^{o}(t_f)\rangle + 0.5\int_{t_0}^{t_f}[\langle X^{o}(t),Q(t)X^{o}(t)\rangle + \langle U(t),R(t)U(t)\rangle]\,dt \qquad \text{........(3.5)}$$

กำหนดให้ Hamiltonian (2 : 88), H เป็น

$$H = 0.5\langle X^{o}(t),Q(t)X^{o}(t)\rangle + 0.5\langle U(t),R(t)U(t)\rangle + \langle A(t)X^{o}(t),P(t)\rangle + \langle B(t)U(t),P(t)\rangle \qquad \text{........(3.6)}$$

จากเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการควบคุมแบบออปทิมัล (Necessary condition (2 : 59))

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad \text{........(3.7)}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial X} = \dot{P}(t) \qquad \text{........(3.8)}$$

โดยที่ $P(t)$ = Lagrange multiplier (2 : 43)

จะได้ว่า

$$\dot{P}(t) = -Q(t)X^{o}(t) - A^{T}(t)P(t) \qquad \text{........(3.9)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 = R(t)U(t) + B^{T}(t)P(t) \qquad \text{.......(3.10)}$$

จะได้ว่า

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t) \qquad ....(3.11)$$

แทนค่าสมการที่ (3.11) ลงในสมการที่ (3.2) จะได้ว่า

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) - B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t) \qquad ....(3.12)$$

หรือเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{P}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B(t) \\ -Q(t) & -A^{T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \end{bmatrix}$$

สมมติให้

$$P(t) = -K(t)X(t) \qquad ....(3.13)$$

$$\dot{P}(t) = -\dot{K}(t)X(t) - \dot{X}(t)K(t) \qquad ....(3.14)$$

จากสมการที่ (3.9)

$$\dot{P}(t) = -Q(t)X^{*}(t) - A^{T}(t)P(t)$$

จากสมการที่ (3.12) จะได้

$$\dot{X}(t) = [A(t) - D(t)K(t)]X(t) \qquad ....(3.15)$$

โดยที่

$$D(t) = B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t) \qquad ....(3.16)$$

แทนค่าสมการที่ (3.12) ลงในสมการที่ (3.14) จะได้

$$\dot{P}(t) = [\dot{K}(t) + K(t)A(t) + K(t)D(t)K(t)]X(t) \qquad ......(3.17)$$

แทนค่าสมการที่ (3.17) ลงในสมการที่ (3.9) แล้วจัดรูปใหม่ได้

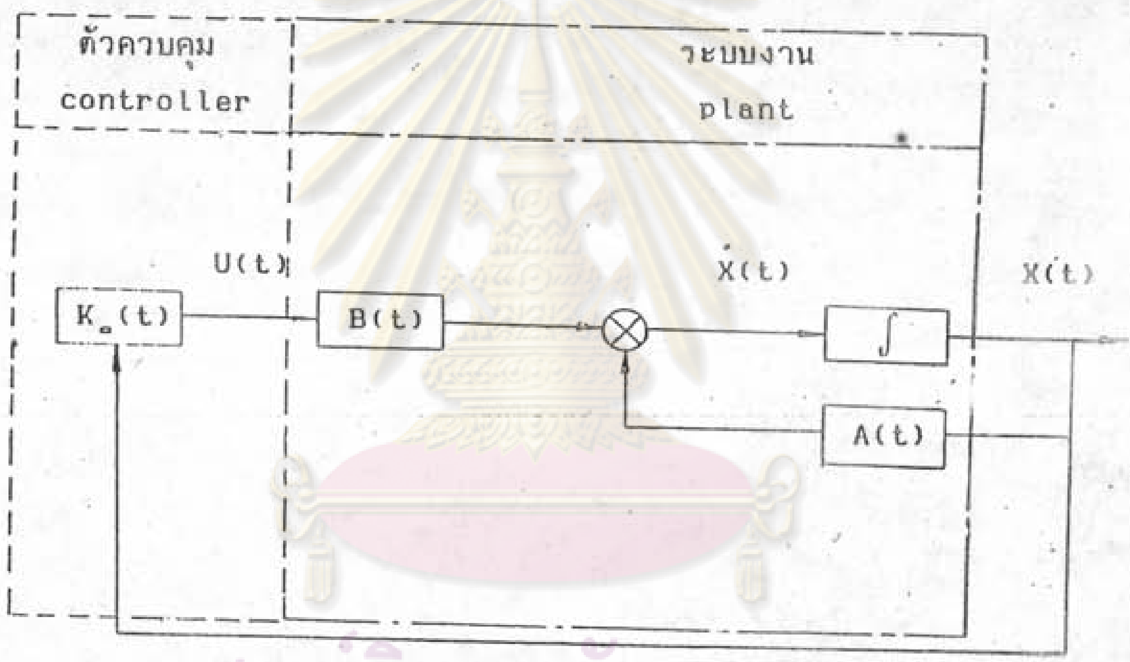
$$\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^{T}(t)K(t) + K(t)D(t)K(t) - Q(t) = 0 \qquad ....(3.18)$$

ซึ่งสมการที่(3.18)นี้เรียกว่า สมการริคคาติ (Riccati equation (2 : 79)

ถ้าพิจารณาจากกฎการควบคุม จะได้ว่า $U(t) = -K_o(t)X(t)$ และ

$$K_o(t) = R^{-1}(t)B^{T}(t)K(t) \qquad ....(3.19)$$

ซึ่งเราจะสามารถเขียนระบบนี้ให้อยู่ในรูป block diagram ได้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงถึง block diagram ของระบบ