

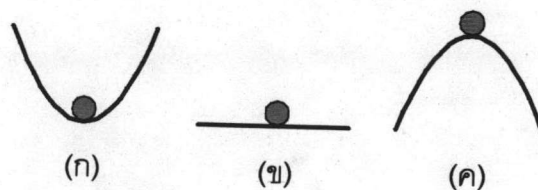
บทที่ 4

เครือข่ายประสาทของ Hopfield

งานของ Hopfield ที่ตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1982 และ 1984 [7,22,23] นับว่ามีอิทธิพลต่อการพัฒนาเครือข่ายประสาทเป็นอย่างมาก หลักการและแนวคิดที่ปรากฏในเอกสารทั้งสองชิ้นนี้มีพื้นฐานมาจากการพัฒนาเครือข่ายประสาทก่อนหน้านี้ เช่น แบบจำลองนิวรอนของ McCulloch และ Pitts เครือข่ายของ Grossberg เครือข่ายความสัมพันธ์เชิงเส้นของ Anderson และ Kohonen และเครือข่ายประสาทที่ประยุกต์ใช้กับทางการแพทย์ (Brain-State-in-a-Box) ของ Anderson, Siverstein, Rite และ Jone เอกสารทั้งสองแสดงหลักการและแนวคิดอย่างกระจ่างชัดเจน อีกทั้งงานของเขายังแสดงการประยุกต์ใช้งานจริงได้ประสบผลสำเร็จจึงกล่าวได้ว่ายุคปี 80 คือยุคทองของเครือข่ายประสาท

4.1 หลักการเกี่ยวกับเสถียรภาพของระบบไดนามิกส์

เครือข่ายประสาทของ Hopfield ที่จะกล่าวถึงต่อไปเป็นเครือข่ายประสาทที่มีสถานะเปลี่ยนแปลงตามเวลาเครือข่ายประสาทถูกพิจารณาเป็นระบบไดนามิกส์ไม่เป็นเชิงเส้น (Non linear dynamical system) โดยเน้นพิจารณาถึงเสถียรภาพ (Stability) ของระบบซึ่งอาจเรียกว่า นิวโรไดนามิกส์ (Neurodynamics) เสถียรภาพที่จะกล่าวถึงต่อไปเป็นเสถียรภาพโดยนัยของไลออะฟูนอฟ (In the sense of Lyapunov) มีพื้นฐานมาจากหลักการเกี่ยวกับพลังงานซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ให้เห็นต่อไป เพื่อให้เกิดภาพพจน์เกี่ยวกับเสถียรภาพอย่างชัดเจนพิจารณาภาพที่ 4.1



ภาพที่ 4.1 แสดงถึงเสถียรภาพของลูกบอลที่สภาวะต่าง ๆ

จากภาพที่ 4.1 (ก) เป็นภาพของระบบที่มีเสถียรภาพ นั่นคือไม่ว่าจะวางลูกบอลที่ตำแหน่งใด ๆ ก็ตามในที่สุดแล้วลูกบอลจะเคลื่อนที่มาหยุดนิ่งที่กัน สำหรับตำแหน่งที่กันเรียกว่า จุดเสถียรภาพแบบอสมโทติก (Asymptotically stable point)

พิจารณาภาพที่ 4.1 (ข) ลูกบอลวางไว้กึ่งกลางระนาบผิวเรียบซึ่งวางอยู่ในแนวระดับ หากขยับลูกบอลไปไว้ที่ตำแหน่งอื่น ๆ ลูกบอลก็จะอยู่ที่ตำแหน่งนั้น ๆ มันจะไม่เคลื่อนที่ไปหยุด ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งโดยเฉพาะ ลักษณะแบบนี้ไม่อาจเรียกว่าเป็นเสถียรภาพแบบอสมโทติก แต่หากจะพิจารณาให้ดีจะเห็นว่าแม้มันไม่มีแนวโน้มจะขยับหรือเคลื่อนที่เข้าหาจุดใดจุดหนึ่งแต่มันก็ไม่มีแนวโน้มที่จะเคลื่อนที่ออกจากจุดนั้น ๆ เช่นกัน จึงพิจารณาได้ว่าระบบในภาพที่ 4.1 (ข) เป็นระบบที่มีเสถียรภาพ อย่างน้อยที่สุดก็มีเสถียรภาพโดยนัยของไลอูทวิตซ์

สำหรับภาพที่ 4.1 (ค) เป็นภาพลูกบอลที่วางอยู่บนตำแหน่งสูงสุด เรียกว่าอยู่ที่จุดสมดุล (Equilibrium point) ได้เช่นเดียวกับทั้งสองภาพที่ผ่านมา สำหรับภาพสุดท้ายนี้ หากมีแรงมากระทำลูกบอลก็จะเคลื่อนที่ออกจากจุดนี้ เรียกกระบวนดังเช่นในภาพที่ 4.1 (ค) ว่าระบบไม่มีเสถียรภาพ

พิจารณาระบบไดนามิกส์อัตโนมัติ (Autonomous dynamical system) ของชุดสมการอนุพันธ์กำลังหนึ่ง

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = F_j(x_j(t)) ; j = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t)) \quad (4.2)$$

โดยที่ $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$

กล่าวคือระบบไดนามิกส์เป็นระบบที่มีสถานะ (State) แปรตามเวลา สำหรับระบบไดนามิกส์แบบไม่อัตโนมัติ สามารถแทนด้วยสมการ $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t), t)$ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ 4.2 จะเห็นว่าระบบไดนามิกส์แบบไม่อัตโนมัติพจน์ด้านขวาเป็นฟังก์ชัน $F(\cdot)$ ที่ขึ้นกับเวลา t

จากสมการที่ 4.2 หากกำหนดให้ \mathcal{M} คือ เซตเปิดในนอร์มัลเวกเตอร์สเปซ (Normal vector space state) กล่าวได้ว่า $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}$ เป็นสถานะสมดุล (Equilibrium state หรือ Stationary state) ถ้าหาก

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

โดยที่ $\bar{\mathbf{x}}$ คือ เวกเตอร์ค่าคงที่

$\mathbf{0}$ คือ เวกเตอร์ศูนย์

สำหรับเสถียรภาพโดยนัยของไลอະพุนอฟ นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย เขาได้นำเสนอทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับเสถียรภาพ 2 ทฤษฎีบท ซึ่งอาจเรียกว่า วิธีไลอະพุนอฟ (The direct method of Lyapunov) ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 \bar{x} เป็นสถานะสมดุลย์ที่มีเสถียรภาพถ้าภายในอาณาบริเวณ (Neighborhood) เล็ก ๆ ของ \bar{x} มีฟังก์ชันโพสิทีฟเดฟิไนต์ (Positive definite function) $V(x)$ ซึ่งอนุพันธ์เทียบกับเวลาของมันเป็นแบบเนกาทีฟเซมิเดฟิไนต์ (Negative semidefinite) ในอาณาบริเวณนั้น

ทฤษฎีบทที่ 2 \bar{x} เป็นสถานะสมดุลย์ที่มีเสถียรภาพแบบอซิมีโทติกถ้าภายในอาณาบริเวณเล็กๆ ของ \bar{x} มีฟังก์ชันโพสิทีฟเดฟิไนต์ $V(x)$ ซึ่งอนุพันธ์เทียบกับเวลาของมันเป็นแบบเนกาทีฟเดฟิไนต์ในอาณาบริเวณนั้น

สำหรับฟังก์ชันสเกลาร์แบบต่อเนื่อง (Continuous scalar function) $V(x)$ ที่กล่าวถึงในทฤษฎีบททั้งสองเรียกว่าฟังก์ชันไลอະพุนอฟ ฟังก์ชันนี้ต้องเป็นฟังก์ชันแบบโพสิทีฟเดฟิไนต์ $V(x)$ ทั้งนี้ฟังก์ชัน $V(x)$ จะเป็นฟังก์ชันโพสิทีฟเดฟิไนต์ในเวคเตอร์สเปซ \mathcal{L} ถ้า ทุกๆ x ใน \mathcal{L} ต้องมีคุณสมบัติดังนี้

- 1) ฟังก์ชัน $V(x)$ มีอนุพันธ์ย่อยอย่างต่อเนื่อง (Continuous partial derivative) เทียบกับสมาชิกทุกตัวของเวคเตอร์สเปซ
- 2) $V(\bar{x}) = 0$
- 3) $V(x) > 0$ ถ้า $x \neq \bar{x}$

จากทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 2 ของไลอະพุนอฟสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

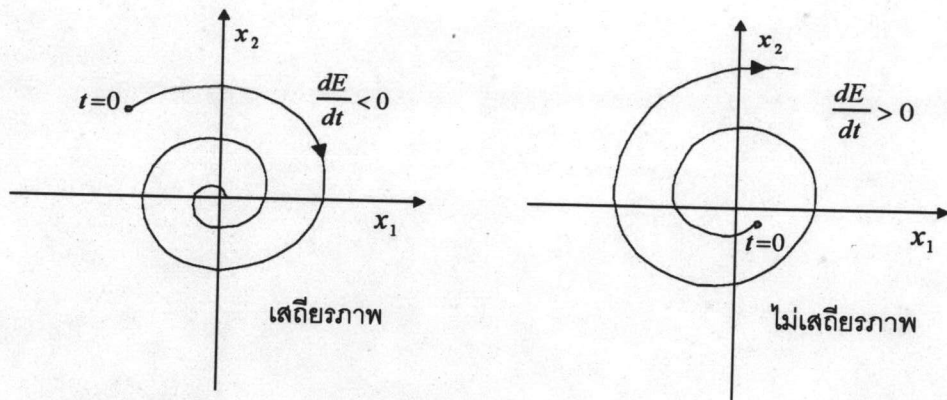
ทฤษฎีบทที่ 1 สถานะ \bar{x} มีเสถียรภาพ ถ้า

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq 0 ; \mathbf{x} \in \delta - \bar{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

โดยที่ δ คือ อาณาบริเวณเล็กๆรอบ \bar{x}

ทฤษฎีบทที่ 2 สถานะ \bar{x} มีเสถียรภาพแบบอซิมีโทติก ถ้า

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0 ; \mathbf{x} \in \delta - \bar{\mathbf{x}} \quad (4.5)$$

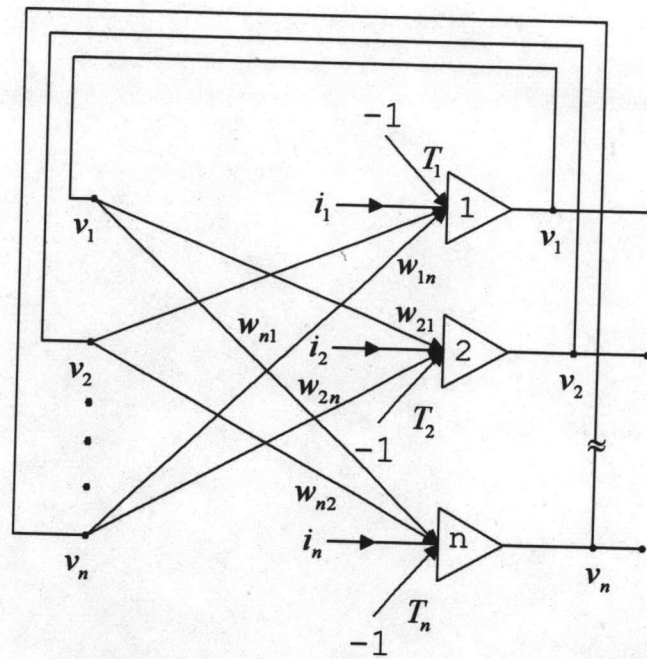


ภาพที่ 4.2 แสดงระบบมีเสถียรภาพและไม่เสถียรภาพสำหรับระบบ 2 มิติ

จุดเด่นที่สำคัญในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีของไลออปูนอฟในการแก้ปัญหาที่ไม่จำเป็น ต้องแก้ระบบสมการ อย่างไรก็ตามทฤษฎีดังกล่าวไม่ได้แสดงการหาฟังก์ชันไลออปูนอฟ ในการหาฟังก์ชันไลออปูนอฟจึงเป็นไปในลักษณะลองผิดลองถูก(Trial and error) ระบบแต่ละระบบอาจจะมีฟังก์ชันไลออปูนอฟได้หลายฟังก์ชันหรืออาจจะไม่มีฟังก์ชันสำหรับระบบนั้นๆเลย หากสามารถหาฟังก์ชันไลออปูนอฟของระบบได้สามารถกล่าวได้ว่าระบบนั้นมีเสถียรภาพ แต่ถ้าหากไม่สามารถหาฟังก์ชันไลออปูนอฟของระบบได้ มิได้หมายความว่าระบบนั้นไม่มีเสถียรภาพ นั่นก็คือการมีฟังก์ชันไลออปูนอฟของระบบเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ(Sufficient)แต่ไม่จำเป็น(Not necessary) ที่จะบอกว่าระบบมีเสถียรภาพ สำหรับเครือข่ายประสาทของ Hopfield ที่จะกล่าวถึง ในหัวข้อต่อไปจะพิจารณาฟังก์ชันพลังงานเป็นฟังก์ชันไลออปูนอฟ

4.2 เครือข่ายประสาทของ Hopfield แบบต่อเนื่อง

เครือข่ายประสาทของ Hopfield จัดว่าเป็นเครือข่ายประสาทแบบย้อนกลับและมีการเรียนรู้แบบไม่มีการควบคุม Hopfield ได้ประยุกต์ใช้หลักการทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวกับพลังงานมาใช้ กล่าวคือ ภาวะที่ระบบไดนามิกมีเสถียรภาพเป็นภาวะที่ระบบมีระดับพลังงานต่ำ พิจารณาเครือข่ายประสาทแบบย้อนป้อนชั้นเดียวดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 แสดงเครือข่ายประสาทแบบย้อนกลับชั้นเดียว

จากภาพที่ 4.3 จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$net_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij} v_j + I_i - T_i ; i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

โดยที่ net_i คือ ข้อมูลป้อนเข้าทั้งหมดของนิวรอน i

w_{ij} คือ ค่าการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลส่งออกของนิวรอน j กับข้อมูลป้อนเข้าของนิวรอน i

I_i คือ ข้อมูลป้อนเข้าจากภายนอกไปยังนิวรอน i

V_j คือ ข้อมูลส่งออกของนิวรอน j

T_i คือ ค่าขีดจำกัดของนิวรอน i

n คือ จำนวนนิวรอนทั้งหมด

สมการที่ 4.6 สามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$net_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{v} + I_i - T_i ; i = 1, 2, \dots, n$$

โดยที่ $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{in} \end{bmatrix} ; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$

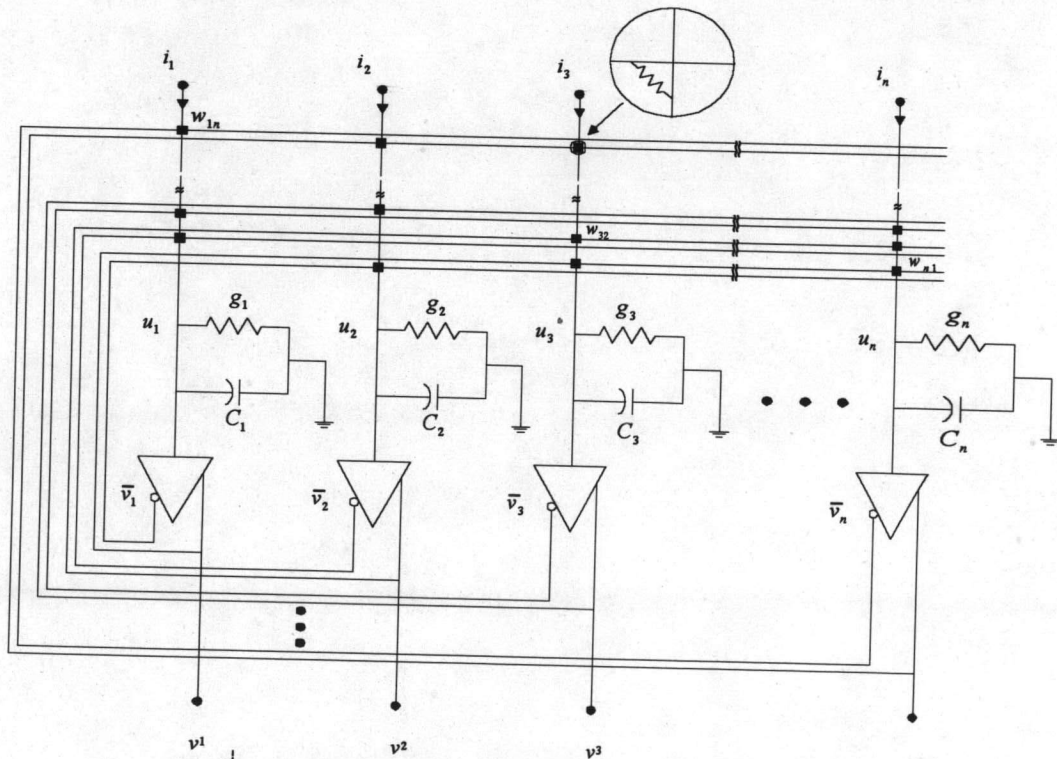
หากพิจารณาเครือข่ายประสาทในภาพที่ 4.3 ทั้งระบบ สามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\mathbf{net} = \mathbf{W}\mathbf{v} + \mathbf{I} - \mathbf{T} \quad (4.7)$$

โดยที่ $\mathbf{net} = \begin{bmatrix} net_1 \\ net_2 \\ \vdots \\ net_n \end{bmatrix}$; $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$

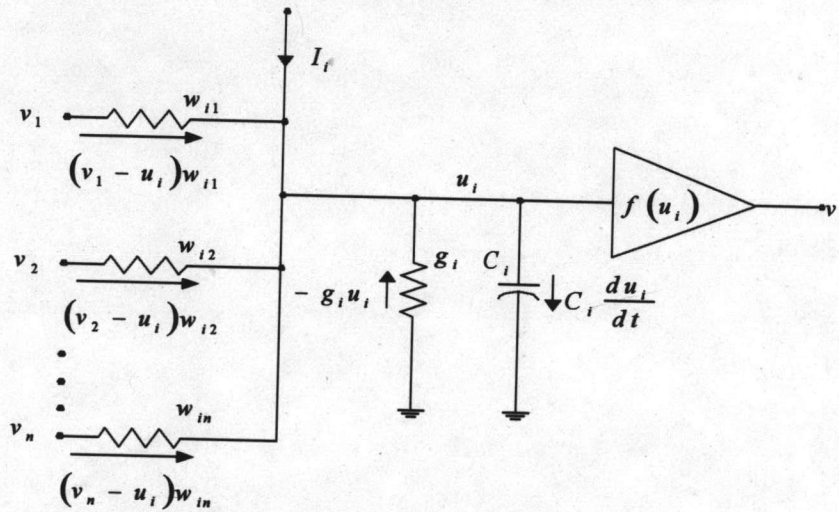
$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}$$
 ; $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$

เครือข่ายประสาทที่นำเสนอโดย Hopfield ในปี ค.ศ. 1985 นั้น แสดงด้วยวงจรไฟฟ้าดังภาพที่ 4.4



ภาพที่ 4.4 แสดงการแทนเครือข่ายประสาทด้วยอุปกรณ์ไฟฟ้า

เครือข่ายประสาทดังภาพที่ 4.4 เรียกว่าเครือข่ายย้อนกลับชั้นเดียวแบบต่อเนื่อง (Continuous - time single - layer feedback network) หรืออาจเรียกว่า เครือข่ายแบบเกรเดียนท์ (Gradient - type networks) ภาพที่ 4.4 ประกอบด้วยอุปกรณ์พื้นฐานทางไฟฟ้า ได้แก่ ความต้านทาน คาปาซิเตอร์ และอินเวอร์เตอร์(Inverter) ข้อมูลป้อนเข้าและข้อมูลส่งออกของเครือข่ายประสาทดังภาพ คือ แรงดัน(v) ข้อมูลป้อนเข้าจากภายนอกคือกระแสที่ป้อนเข้าวงจร(I) และระดับแอกทิเวชันของเครือข่ายประสาทก็คือแรงดันภายในของวงจร(u) ภาพที่ 4.4 ประกอบด้วยนิวรอนจำนวน n นิวรอนใช้ฟังก์ชันแอกทิเวชัน $f(u_i)$ บอกความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันป้อนเข้า u_i กับแรงดันส่งออก v_i ฟังก์ชันแอกทิเวชันที่ใช้ในเครือข่ายคือ Voltage transfer characteristic (VTC) เพื่อคงรูปแบบที่นำเสนอโดย Hopfield จึงใช้ u เป็นระดับแอกทิเวชันของเครือข่ายแทน net



ภาพที่ 4.5 แสดงการแทนนิวรอนด้วยอุปกรณ์ไฟฟ้า

พิจารณาองค์ประกอบย่อยในภาพที่ 4.4 ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพที่ 4.5 เมื่อใช้กฎ KCL ผลรวมของกระแสภายในวงจรเท่ากับศูนย์ จะได้สมการดังนี้

$$I_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij} v_j - u_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_{ij} + g_i \right) = C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right) \quad (4.8)$$

พจน์ด้านซ้ายของสมการที่ 4.8 คือกระแสทั้งหมดที่ไหลเข้าตัวเก็บประจุ C_i ซึ่งเป็นผลรวมของกระแส $(v_j - u_i) W_{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, n$ และ $j \neq i$) กระแส I_i และกระแส $-g_i u_i$ กำหนดให้ความนำ (Conductance) ทั้งหมดที่ต่อกับนิวตรอน(Neuron) i คือ G_i มีค่า

$$G_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} + g_i$$

สามารถเขียนสมการ 4.8 ได้ใหม่ดังนี้

$$C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right) = \sum_{j=1}^n w_{ij} v_j - G_i u_i + I_i \quad (4.9)$$

เมื่อพิจารณาเครือข่ายทั้งหมดในภาพที่ 4.4 และกำหนดให้ C และ G คือเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีค่าเฉพาะแนวทแยงส่วนตำแหน่งอื่นมีค่าเท่ากับศูนย์ $u(t)$, $v(t)$, และ I คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด n กล่าวคือ

$$C = \text{diag} [C_1, C_2, \dots, C_n]$$

$$G = \text{diag} [G_1, G_2, \dots, G_n]$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

จะได้ความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการสถานะ (State equation) และสมการข้อมูลส่งออก (แรงดัน) ดังสมการที่ 4.10

$$\left. \begin{aligned} C \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} &= \mathbf{W}\mathbf{v}(t) - \mathbf{G}\mathbf{u}(t) + \mathbf{I} \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{u}(t)] \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

เพื่อพิจารณาถึงเสถียรภาพระบบไดนามิกส์ของสมการอนุพันธ์ดังสมการที่ 4.10 ต้องพิจารณาฟังก์ชันพลังงานของระบบในภาพที่ 4.5 สมมติว่าเครือข่ายประสาทดังภาพที่ 4.4 มีฟังก์ชันพลังงาน คือ $E[\mathbf{v}(t)]$ การเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชันพลังงานเทียบกับการเปลี่ยนแปลงเวลา จากลูกโซ่ (Chain rule) สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันพลังงานกับการเปลี่ยนแปลงข้อมูลส่งออกได้ดังนี้

$$\frac{dE[\mathbf{v}(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E(\mathbf{v})}{\partial v_i} \dot{v}_i \quad (4.11)$$

$$\text{โดยที่ } \dot{v}_i = \frac{dv_i}{dt}$$

หรือเขียนอยู่ในรูปการคูณแบบสเกลาร์ (Scalar product) ของเวกเตอร์ได้ดังสมการที่ 4.12

$$\frac{dE[\mathbf{v}(t)]}{dt} = \nabla E^T(\mathbf{v}) \dot{\mathbf{v}} \quad (4.12)$$

โดยที่ $E(\mathbf{v})$ คือ เวกเตอร์ของค่าเกรเดียนท์ของฟังก์ชันพลังงาน

$$\nabla E(\mathbf{v}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial E(\mathbf{v})}{\partial v_1} \\ \frac{\partial E(\mathbf{v})}{\partial v_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(\mathbf{v})}{\partial v_n} \end{bmatrix}$$

จากสมการข้างบนนี้จะเห็นว่าเป็นการคำนวณฟังก์ชันพลังงาน $E[\mathbf{v}(t)]$ ในสเปซของข้อมูลส่งออก \mathbf{v}^n ขนาด n มิติ หากพิจารณาฟังก์ชันพลังงานในสเปซของระดับแอกติเวชัน \mathbf{u}^n เมื่อเครือข่ายประสาทอยู่ในภาวะเสถียรภาพแบบบอซิมโทติก ฟังก์ชันพลังงานของเครือข่ายก็คือฟังก์ชันไลอะพูนอฟ หากอนุพันธ์ของฟังก์ชันพลังงานในสเปซของระดับแอกติเวชันมีค่าเป็นลบค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพลังงานในสเปซของข้อมูลส่งออกก็มีค่าเป็นลบด้วย เนื่องจากสมการที่ 4.10 บอกความสัมพันธ์ระหว่างสเปซ \mathbf{u}^n กับสเปซ \mathbf{v}^n เป็นแบบ Monotonic

4.2.1 ภาวะไดนามิกส์ของเครือข่ายประสาทของ Hopfield

ฟังก์ชันไลอะพูนอฟที่นำเสนอโดย Hopfield ในปี ค.ศ. 1984 ซึ่งก็คือฟังก์ชันพลังงานสำหรับเครือข่ายประสาทในภาพที่ 4.4 นั้นเอง ฟังก์ชันมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ 4.13

$$E(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v} - \mathbf{I}^T \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n G_i \int_0^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \quad (4.13)$$

โดยที่ $f^{-1}(\bullet)$ คือ อินเวิร์สของฟังก์ชัน $f(\bullet)$

ค่าฟังก์ชันในสมการที่ 4.13 ไม่แสดงตัวแปรเวลา t เพื่อให้สะดวกในการนำเสนอแต่ให้เข้าใจว่า \mathbf{v} คือ $\mathbf{v}(t)$ เมื่อใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพลังงานที่มีเมตริกซ์ของค่าเชื่อมโยง

เป็นแบบสมมาตร พจน์อินทิเกรตมีค่า $\frac{d}{dv_i} \left(G_i \int_0^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \right) = G_i u_i$ นั่นคือ

$$\frac{dE}{dt} = (-\mathbf{W} \mathbf{v} - \mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{u})^T \dot{\mathbf{v}} \quad (4.14)$$

พิจารณาสมการที่ 4.12 และสมการที่ 4.14 จะได้

$$\nabla E = -(\mathbf{W} \mathbf{v} - \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{I}) \quad (4.15)$$

จากสมการที่ 4.10 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงพลังงานกับระดับแอกติเวชัน ดังนี้

$$-\nabla E = C \frac{du}{dt} \quad (4.16)$$

จากสมการที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่าเมื่อ $\frac{dE}{dt} < 0$ ฟังก์ชันพลังงานจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาเปลี่ยนไป จนกระทั่ง $\frac{dE}{dt} = 0$ หรือไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพลังงาน ณ จุดดังกล่าวพบว่า $\frac{du_i}{dt} = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ ด้วย จุดที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงพลังงานนี้แสดงว่าไม่มีสิ่งจากภายนอกมากระตุ้นเร้าหรือเครือข่ายคงสภาพเดิมได้หรือกล่าวว่าเป็นภาวะเสถียรภาพ จากฟังก์ชันพลังงานในสมการที่ 4.13 สามารถสรุปภาวะเกี่ยวกับเครือข่ายประสาทของ Hopfield ได้ดังนี้

1) ฟังก์ชันพลังงาน E คือฟังก์ชันไลอะพูนอฟของเครือข่ายประสาทของ Hopfield ตามทฤษฎีเสถียรภาพของไลอะพูนอฟและจะพิจารณาให้เครือข่ายประสาทของ Hopfield เป็นระบบไดนามิกส์

2) เครือข่ายประสาทของ Hopfield เป็นเครือข่ายที่มีเสถียรภาพตามทฤษฎีบทที่ 1 ของไลอะพูนอฟ

การหาจุดสมดุลย์ของเครือข่ายไดนามิกส์ที่มีฟังก์ชันแอคทิเวชันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นการหาคำตอบของสมการ

$$\nabla E = 0 \quad (4.17)$$

คำตอบจากสมการที่ 4.17 หรือจุดสมดุลย์อาจจะเป็นจุดสูงสุด จุดต่ำสุด หรือจุดอานม้า (Saddle point) ก็ได้ เมื่อแทนค่าเกรเดียนท์ของฟังก์ชันพลังงานจากสมการ 4.15 ลงในสมการที่ 4.17 จะได้

$$\mathbf{Wv} - \mathbf{Gu} + \mathbf{I} = 0 \quad (4.18)$$

สมการที่ 4.18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเปซของระดับแอคทิเวชันกับสเปซของข้อมูลส่งออก หากไม่พิจารณาพจน์ \mathbf{Gu} จะได้คำตอบอยู่ในสเปซ \mathbf{v}^* นั่นคือจุดสมดุลย์ \mathbf{v}^* คือ

$$\mathbf{v}^* = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{I} \quad (4.19)$$

การไม่พิจารณาพจน์ \mathbf{Gu} ในสมการที่ 4.18 หรือย้อนกลับไปสมการที่ 4.13 คือการตัดพจน์สุดท้ายด้านขวาของสมการออก หมายความว่าพจน์ดังกล่าวมีนัยสำคัญน้อยมาก ภาวะดังกล่าวจะเกิดกับเครือข่ายที่มีผลตอบสนอง (ข้อมูลส่งออก) มีค่าสูงมากเมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลป้อนเข้าเครือข่ายหรือเปรียบเทียบกับข้อมูลป้อนเข้าภายใน (ระดับแอคทิเวชัน) กล่าวอีกอย่างคือเป็นเครือข่ายที่มีการขยายสูง (High - gain) เมื่อพิจารณาเฉพาะที่พื้นผิว (The faces) และที่ขอบ (The edges) ของปริมาตรหลายมิติ (Hypercube) จะได้

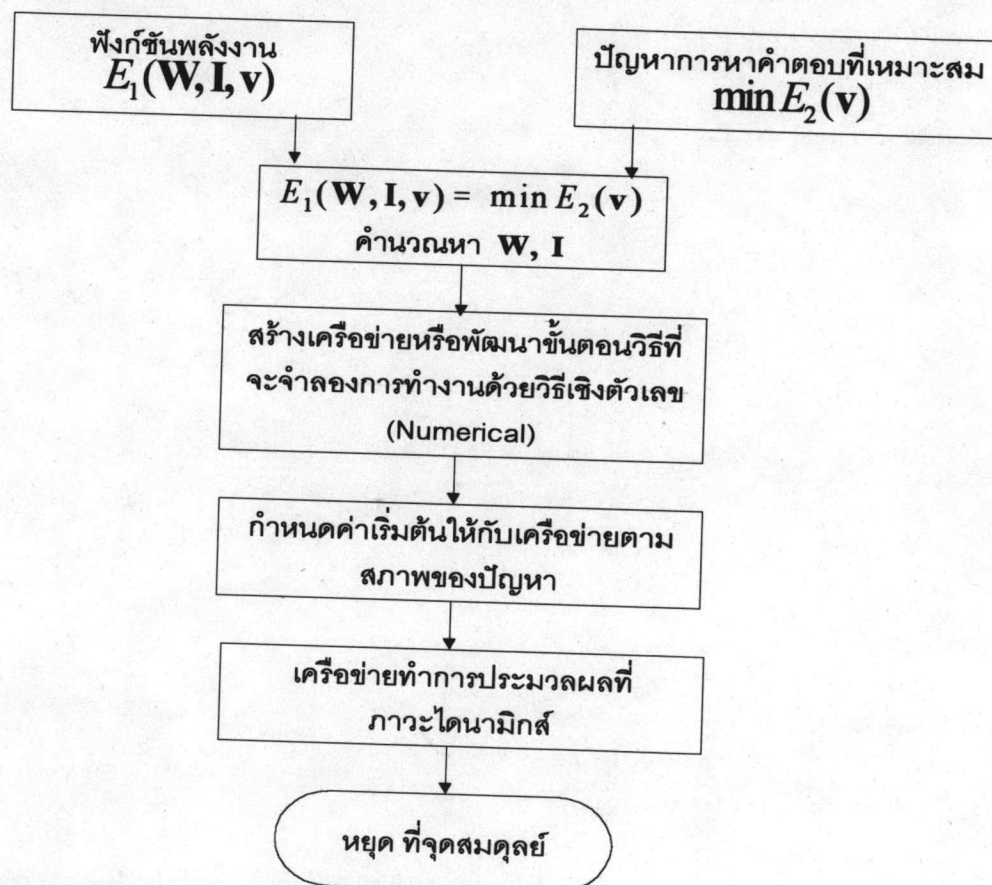
$$E = -\frac{1}{2} \left(w_{ij} v_i v_j + w_{ji} v_j v_i \right) - k_i v_i - k_j v_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

$$E = -k_i v_i + c$$

โดยที่ k_i, c : คือค่าคงที่
 พื้นผิวจะระบุตำแหน่งด้วย (i, j)
 ขอบระบุด้วย (i)

จากสมการที่ 4.20 แสดงว่าจะไม่เกิดจุดต่ำสุดที่พื้นผิวและที่ขอบของปริมาตร n มิติหรือกล่าวได้ว่าจุดต่ำสุดอยู่ในปริมาตร n มิติ ในกรณีนี้แต่ละมิติมีค่าในช่วง $[-1, 1]$ จุดที่อาจจะเป็นค่าต่ำสุดมีด้วยกันทั้งหมด 2^n จุด ในกรณีนี้จุดต่ำสุดอาจจะอยู่ที่มุมของลูกบาศก์ก็ได้

ในการประยุกต์เครือข่ายของ Hopfield เพื่อแก้ปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมมีโพลีชาร์ตดังนี้



ภาพที่ 4.6 แสดงโพลีชาร์ตการใช้เครือข่ายประสาทแก้ปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสม

งานที่ยากในการประยุกต์ใช้เครือข่ายประสาทในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบที่เหมาะสม คือการหาฟังก์ชันพลังงานหรือฟังก์ชันไลอะพูนอฟที่สอดคล้องกับปัญหาเพื่อหาคำตอบที่เหมาะสม อีกปัญหาหนึ่งที่ประสบในการประยุกต์เครือข่ายประสาทของ Hopfield ในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบที่เหมาะสม คือเปอร์เซ็นต์การได้คำตอบที่ดีที่สุด ดังเช่นในการแก้ปัญหา TSP โดย Hopfield และ Tank ใน ค.ศ. 1985 ซึ่งแสดงรายละเอียดในหัวข้อต่อไปนั้นปรากฏว่าเปอร์เซ็นต์การได้คำตอบที่ดีที่สุดประมาณ 15-30 % เท่านั้น อย่างไรก็ตามแม้คำตอบที่ได้ไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด คำตอบที่ได้ก็เป็นคำตอบที่ใกล้เคียงคำตอบที่ดีที่สุด สำหรับปัญหา TSP ต่อมาได้มีการพัฒนา นำเสนอฟังก์ชันพลังงานหรือฟังก์ชันไลอะพูนอฟในรูปแบบที่เหมาะสมขึ้นมาพร้อมทั้งพัฒนาการเรียนรู้ที่ภาวะไดนามิกส์ทำให้เปอร์เซ็นต์การได้คำตอบที่ดีที่สุด สูงประมาณ 93-100% [33,34] ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นของพารามิเตอร์ต่างๆ

4.3 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้เครือข่ายประสาทของ Hopfield

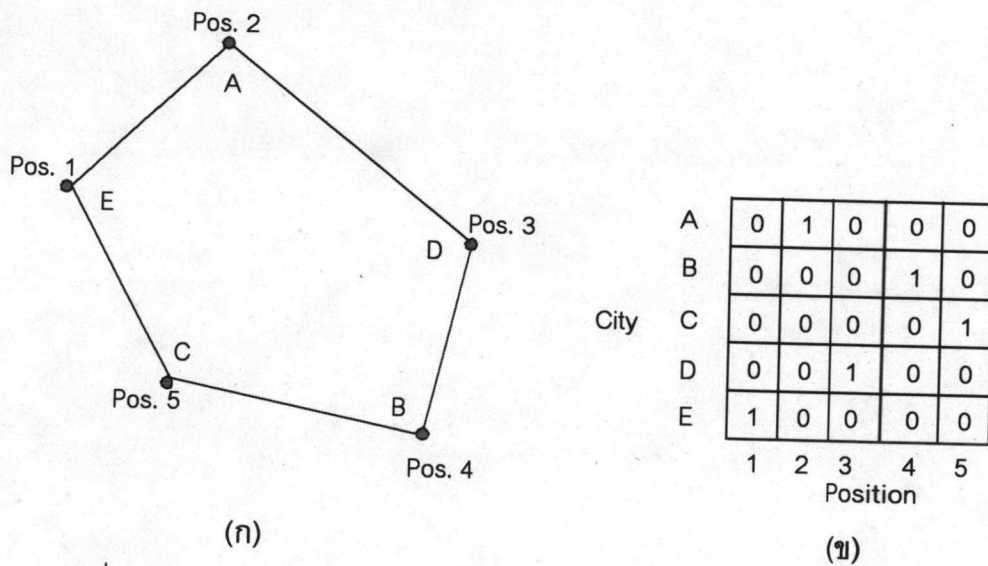
ได้มีการประยุกต์ใช้เครือข่ายประสาท Hopfield ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ มากมายทั้งโดย Hopfield และคณะได้แก้ปัญหา Traveling salesman problem (TSP) [31] ปัญหาการแปลงสัญญาณ A/D (Analog to Digital) ปัญหาการจัดเก็บและเข้าถึงหน่วยความจำ (Computer memory) และนักวิจัยอื่น ๆ ได้แก่ ปัญหา TSP และการจัดสรรงาน (List - matching หรือ Job assignment) [34,35] การหาเส้นทางที่สั้นที่สุดสำหรับเครือข่ายการสื่อสาร (Communication network) [36] รวมทั้งปัญหาของระบบไฟฟ้าเกี่ยวกับการจัดสรรกำลังผลิตอย่างเหมาะสม [37] ปัญหาการจ่ายไหลด้อย่างมีประสิทธิภาพ [38] ในขณะนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้เครือข่าย Hopfield ในการแก้ปัญหาโดยทั่วไป คือ ปัญหา TSP

4.3.1 ปัญหา Traveling salesman problem (TSP)

ปัญหา TSP เป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์กันมานาน แต่ยังไม่มียวิธีแก้ปัญหามีประสิทธิภาพ ปัญหา TSP เป็นปัญหาการจัดเรียงให้ได้มาซึ่งคำตอบที่เหมาะสม จึงมีคำตอบที่เป็นไปได้มากมายแต่จะมีเพียงคำตอบเดียวที่เป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด และปัญหา TSP ยังจัดเป็นปัญหาแบบ NP-complete (Nondeterministic polynomial time) กล่าวคือใช้เวลา

ในการแก้ปัญหาเพิ่มขึ้นแบบโพลิโนเมียลตามขนาดของปัญหาเช่น ใช้เวลาในการคำนวณเท่ากับ e^n เมื่อ n คือขนาดของปัญหา

ปัญหา TSP คือปัญหาการหาแบบการเดินทางผ่านเมืองต่าง ๆ ให้มีระยะทางในการเดินทางครั้งนั้นสั้นที่สุด โดยมีข้อจำกัดคือ ต้องเดินทางผ่านเมืองทุกเมือง และแต่ละเมืองต้องเดินทางผ่านเพียงครั้งเดียว ยกเว้นเมืองที่เป็นเมืองเริ่มต้น ในรูปแบบการเดินทางแต่ละครั้งจึงเกิดเส้นทางเป็นวงรอบปิด(Closed loop) การหาแบบเส้นทางหรือวงรอบการเชื่อมโยงของเมืองต่าง ๆ ที่ให้ระยะทางที่สั้นที่สุดนั้นเป็นการพิจารณาเลือกรูปแบบเส้นทางที่สั้นที่สุดจากรูปแบบเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมด แนวทางการเปรียบเทียบรูปแบบเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดนี้ใช้แก้ปัญหาได้ดีในกรณีที่จำนวนเมืองมีไม่มากนัก ในกรณีที่จำนวนเมืองเท่ากับ n เมือง รูปแบบการเดินทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $(n-1)!/2$ ถ้าจำนวนเมือง $n = 20$ รูปแบบการเดินทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดประมาณ 6×10^{16} รูปแบบซึ่งนับว่าเป็นค่าที่สูงมาก



ภาพที่ 4.7 (ก) ตัวอย่างคำตอบของปัญหา TSP 5 เมือง (ข) การแทนคำตอบด้วยเมตริกซ์

พิจารณา ภาพที่ 4.7(ก) เป็นตัวอย่างคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา TSP มีจำนวน 5 เมือง และภาพที่ 4.7(ข.) เป็นการแทนคำตอบที่ได้ในรูปเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมืองที่แทนด้วยตัวอักษร (A, B, ..., E) และลำดับของเมืองในเส้นทางที่แทนด้วยตัวเลข (1, 2, ..., 5)

ในปี ค.ศ. 1985 Hopfield และ Tank ได้นิยามปัญหา TSP ด้วยฟังก์ชันพลังงานดังนี้

$$E = E_{con1} + E_{con2} + E_{con3} + E_{opt1} \quad (4.21)$$

$$\text{โดยที่ } E_{con1} = \frac{A}{2} \sum_X \sum_i \sum_j v_{Xi} v_{Xj} ; i \neq j$$

$$E_{con2} = \frac{B}{2} \sum_i \sum_X \sum_Y v_{Xi} v_{Yi} ; X \neq Y$$

$$E_{con3} = \frac{C}{2} \left(\sum_X \sum_i v_{Xi} - n \right)^2$$

$$E_{opt1} = \frac{D}{2} \sum_X \sum_Y \sum_i d_{XY} v_{Xi} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1}) ; X \neq Y$$

A,B,C,D คือ ค่าคงที่

n คือ จำนวนเมือง

d_{XY} คือ ระยะทางระหว่างเมือง X กับเมือง Y

v_{Xi} คือ ค่าของเมตริกซ์ตัวที่ X, i, $v_{Xi} = 1$ หมายความว่าเมือง X อยู่ในลำดับที่ i ของการเดินทาง แต่ถ้าเมือง X ไม่ใช่เมืองที่อยู่ในลำดับที่ i ของการเดินทาง ค่า $v_{Xi} = 0$

i, j, X, Y = 1, 2, ..., n

E_{con1} , E_{con2} , และ E_{con3} เป็นเงื่อนไขข้อจำกัดของปัญหานั้นคือ E_{con1} เป็นตัวบังคับให้เกิด v เท่ากับ 1 เพียงตัวเดียวในแต่ละแถว (Row), E_{con2} เป็นตัวบังคับให้เกิด v เท่ากับ 1 เพียงตัวเดียวในแต่ละหลัก (Column) ส่วน E_{con3} เป็นตัวบังคับให้เมตริกซ์ของคำตอบมีสมาชิกที่มีค่าเท่ากับ 1 เพียง n ตัวเท่านั้น เงื่อนไขทั้งสามนี้ก็คือบังคับให้การเดินทางแต่ละครั้งต้องผ่านทุกเมืองและผ่านเพียงครั้งเดียวนั่นเอง สำหรับส่วนสุดท้าย E_{opt1} เป็นผลรวมของระยะทางระหว่างเมืองทั้งหมดในการเดินทางครั้งนั้น หากจะเทียบกับปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสม E_{opt1} คือ ฟังก์ชันเป้าหมาย และ E_{con1} , E_{con2} , และ E_{con3} คือเงื่อนไข

จากฟังก์ชันพลังงานในสมการที่ 4.12 เมื่อเครือข่ายมีการขยายสูงจะพิจารณาตัดพจน์อินทิเกรตทิ้ง และใช้ตัวห้อยสองตัวเพื่อบอกความสัมพันธ์ระหว่างเมืองกับลำดับของเมือง แทนตัวห้อยตัวเดียวในสมการที่ 4.12 จะได้ ฟังก์ชันพลังงานในรูปสมการกำลังสองดังนี้

$$E = \frac{1}{2} \sum_{Xi} \sum_{Yj} W_{Xi,Yj} v_{Xi} v_{Yj} - \sum_{Xi} I_{Xi} v_{Xi} \quad (4.22)$$

จากสมการที่ 4.16 แทนที่เราจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันพลังงานเราอาจจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของระดับแอกติเวชัน หรือการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลป้อนเข้าภายในของเครือข่ายประสาท

การเปลี่ยนแปลงระดับแอกทิเวชันของเครือข่ายประสาท หรือสมการการขับเคลื่อน (Equation of emotion) มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Delta u_{Xi} = \left[\sum_Y \sum_j W_{Xi,Yj} v_{Yj} - \frac{u_{Xi}}{\tau} + I_{Xi} \right] \Delta t \quad (4.23)$$

โดยที่ Δu_{Xi} คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงระดับแอกทิเวชันของนิวรอน Xi

Δt คือ ช่วงเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับแอกทิเวชันของนิวรอน Xi

จากสมการที่ 4.21 และสมการที่ 4.22 จะได้

$$\left. \begin{aligned} W_{Xi,Yj} &= -A\delta_{XY}(1-\delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1-\delta_{XY}) - C - Dd_{XY}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) \\ I_{Xi} &= Cn' \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

โดยที่ δ_{XY} คือ ฟังก์ชันโครเนคเกอร์เดลต้า (Kronecker delta function)

$$\delta_{XY} = \begin{cases} 1 & ; X=Y \\ 0 & ; X \neq Y \end{cases}$$

แทนค่าทั้งสองจากสมการที่ 4.24 ลงในสมการที่ 4.23 จะได้

$$\Delta u_{Xi} = \left[-\frac{u_{Xi}}{\tau} - A \sum_{j \neq i} v_{Xj} - B \sum_{Y \neq X} v_{Yi} - C \sum_Y \sum_j v_{Yj} - D \sum_Y d_{XY} (v_{Y,i+1} + v_{Y,i-1}) + Cn' \right] \Delta t \quad (4.25)$$

ค่าระดับแอกทิเวชันในรอบการคำนวณครั้งต่อไปคือ

$$u_{Xi}(t+1) = u_{Xi}(t) + \Delta u_{Xi} \quad (4.26)$$

โดยใช้ฟังก์ชันซิกมอยด์แบบแทนเจนต์ไฮเพอโบลิกเป็นฟังก์ชันแอกทิเวชัน

$$v_{Xi} = g(u_{Xi}) = \frac{1}{2} [1 + \tanh(\lambda u_{Xi})]$$

โดยที่ λ คือ ค่าคงที่สำหรับปรับความชัน (Slop) ของฟังก์ชันแอกทิเวชัน

งานที่ตีพิมพ์ของ Hopfield และ Tank ในปี ค.ศ. 1985 ใช้ $\lambda = 50$, $A = B = D = 500$, $C = 200$, $\tau = 1.0$ และ $n' = 15.0$ สำหรับ $10 \leq n \leq 30$ งานของ Hopfield และ Tank นี้ได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเพียง 15% สำหรับ $n=10$ ต่อมาในปี ค.ศ.1988 Brandt และคณะ [35] ได้นำเสนอรูปแบบฟังก์ชันพลังงานสำหรับปัญหา TSP ในรูปแบบที่แตกต่างจากรูปแบบที่นำเสนอโดย Hopfield และ Tank ผลลัพธ์ที่ได้จากการนำเสนอของ Brandt และคณะสามารถแก้ปัญหา TSP ขนาดใหญ่ขึ้นและเปอร์เซ็นต์การได้คำตอบที่ดีที่สุดมากกว่ารูปแบบที่นำเสนอโดย Hopfield และ Tank จากที่กล่าวมาเป็นผลจากการศึกษาพฤติกรรม (Performance) ของฟังก์ชันพลังงานที่ต่างกันในการแก้ปัญหา TSP โดย Proztel และคณะ ในปี ค.ศ. 1993 [34]