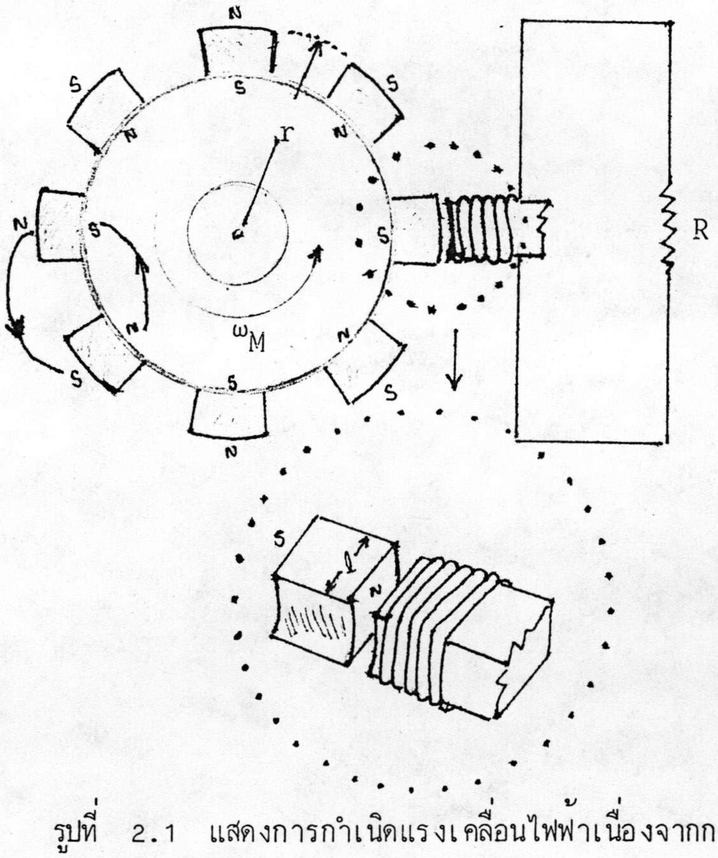
บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 แรงเคลื่อนไฟฟ้าเนื่องจากการหมุนสนามแม่เหล็กตัดกับขดลวด (3)

การกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ นอกจากการหมุนขดลวดตัดกับสนามแม่เหล็กหรือให้ขดลวดเป็นโรเตอร์ สนามแม่เหล็กเป็นสเตเตอร์แล้ว อีกวิธีหนึ่งคือการให้สนามแม่เหล็กหมุนตัดกับขดลวดหรือให้ขดลวดเป็นสเตเตอร์ สนามแม่เหล็กเป็นโรเตอร์ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงการกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าเนื่องจากการหมุนสนามแม่เหล็กหมุนตัดกับขดลวด

จากรูปที่ 2.1 โรเตอร์ประกอบด้วยขั้วแม่เหล็ก P ขั้วหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_M ตัดกับขดลวดจำนวน N รอบ แรงเคลื่อนไฟฟ้าขณะเวลาใด ๆ ในขดลวดหาได้จากสมการ

$$E = \omega N\Phi \sin\omega t \qquad [2.1]$$

โดยที่

E = แรงเคลื่อนไฟฟ้ามีหน่วยเป็นโวลต์ (V)

ω = ความถี่เชิงมุมทางไฟฟ้า (electrical angular frequency) มีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที (rad./s)

ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กต่อหนึ่งหน่วยขั้ว มีหน่วยเป็นเวเบอร์ (Wb)

ω และ ω_M มีความสัมพันธ์กันตามสมการ

$$\omega = \frac{P}{2}\omega_M \qquad [2.2]$$

ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กต่อหนึ่งหน่วยขั้ว, Φ ในรูปที่ 2.1 หาได้จากสมการ

$$\Phi = \frac{4B_m \ell r^{*}}{P} \qquad [2.3]$$

โดยที่ B_m = ความหนาแน่นฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กสูงสุดที่ผ่านขดลวด มีหน่วยเป็นเวเบอร์/ตารางเมตร (Wb/m^2)

ℓ = ความยาวของขั้วแม่เหล็กตามแนวแกน (axial) ของโรเตอร์ มีหน่วยเป็นเมตร (m)

---

*ดูรายละเอียดที่ภาคผนวก ก.

แทนค่าสมการที่ (2.2), (2.3) ใน (2.1) จะได้

$$E = 2\omega_M B_m N\ell r \sin(\frac{P}{2}\omega_M)t \qquad [2.4]$$

สมการ (2.4) เขียนใหม่ได้เป็น

$$E = 2B_m N\ell v \sin(\frac{P}{2}\omega_M)t \qquad [2.5]$$

โดย $v = \omega_M r$

= ความเร็วเชิงเส้น (linear velocity) ของสนามแม่เหล็กตัดกับขดลวด [2.6]

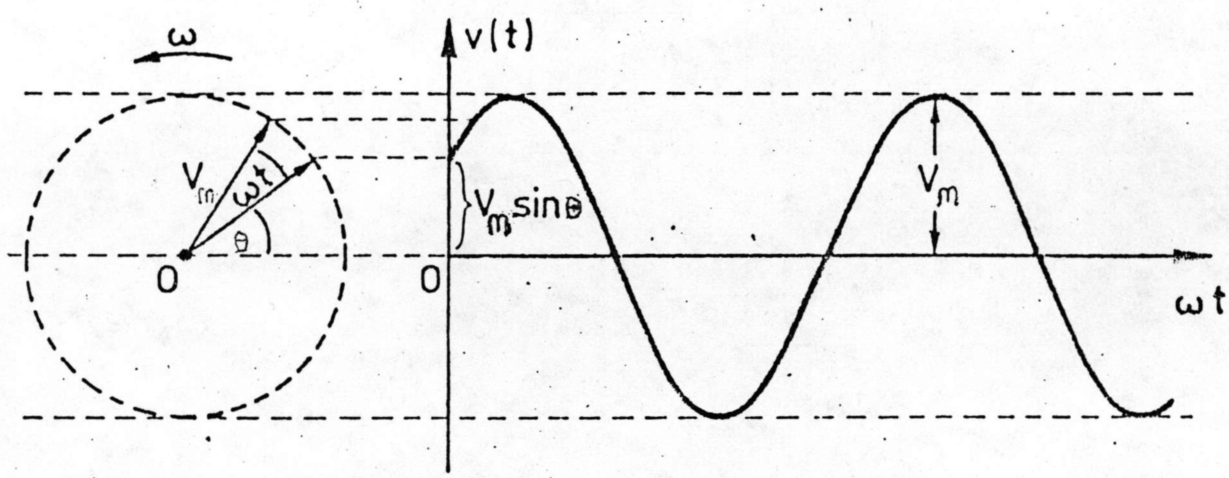
สมการ (2.5) ใช้หาแรงเคลื่อนไฟฟ้าเนื่องจากการหมุนสนามแม่เหล็กตัดกับขดลวด เมื่อ plot กราฟระหว่าง E และ t จะได้กราฟมีลักษณะเป็น sinewave

2.2 <u>วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ</u> (4)

ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้ากระแสสลับที่มีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเป็นฟังก์ชั่น sine ของเวลา ถ้าให้ v(t) เป็นความต่างศักย์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาตามสมการ

$$v(t) = V_m \sin(t + \theta) \qquad [2.7]$$

สมการ [2.7] เกิดจากการหมุนเวกเตอร์ขนาด V_m รอบจุดหมุน O ด้วยความเร็วเชิงมุม ω เรเดียนต่อวินาทีคงที่ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงการหมุนเวกเตอร์ V_m และการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์กับเวลา

$$v(0) = V_m \sin\theta \qquad [2.8]$$

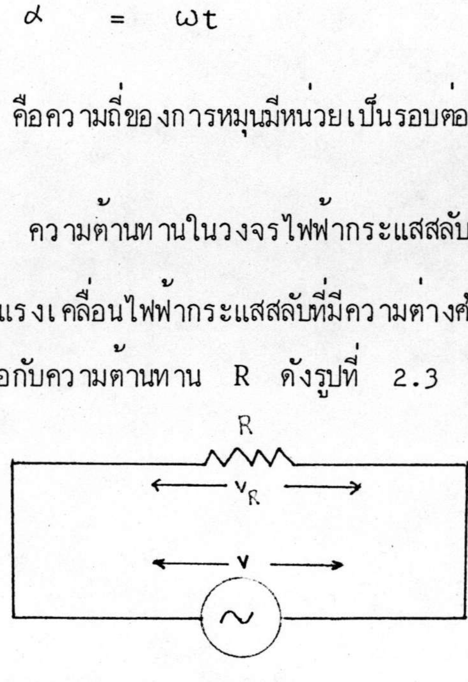
ถ้าเวกเตอร์ V_m หมุนไป 1 รอบเป็นมุม $\alpha = 2\pi$ ด้วยความเร็วเชิงมุม ω และเวลาที่ใช้เป็น T จะได้

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ \text{และ} \quad \alpha &= \omega t \end{aligned}\right\} \qquad [2.9]$$

f คือความถี่ของการหมุนมีหน่วยเป็นรอบต่อวินาทีหรือเฮิร์ตซ์

2.2.1 ความต้านทานในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

นำแรงเคลื่อนไฟฟ้ากระแสสลับที่มีความต่างศักย์ v เป็นไปตามสมการที่ (2.7) มาต่อกับความต้านทาน R ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ไฟฟ้ากระแสสลับต่อกับความต้านทาน

ความต่างศักย์คร่อม R เท่ากับ v_R และให้ i เป็นกระแสไฟฟ้าที่ผ่านความต้านทาน R จากกฎของเคอร์ชอฟจะได้ว่า

$$v = v_R = V_m \sin(\omega t + \theta) \qquad [2.10]$$

V_m เป็นค่าความต่างศักย์สูงสุดของ v_R

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t + \theta)$$

$$= I_m \sin(\omega t + \theta) \qquad [2.11]$$

I_m เป็นค่ากระแสไฟฟ้าสูงสุดที่ไหลผ่านความต้านทาน R

$$V_m = I_m R \qquad [2.12]$$

ให้ P เป็นกำลังที่ใช้เพื่อให้กระแสไฟฟ้าผ่านความต้านทาน R ดังนั้น

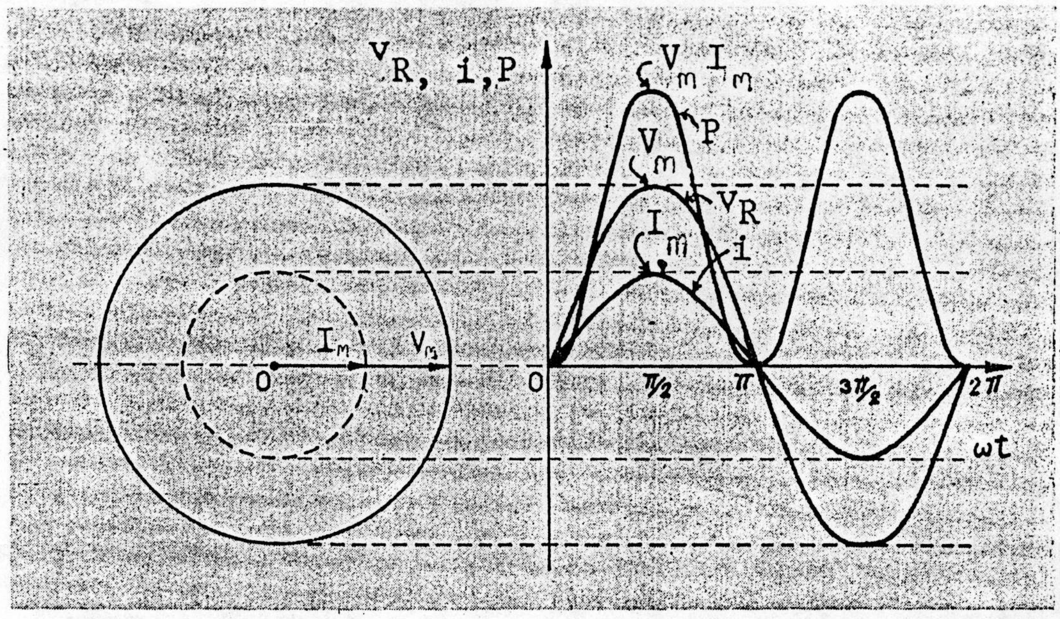
$$P = v_R i$$

$$= V_m \sin(\omega t + \theta)\, I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$= V_m I_m \sin^2(\omega t + \theta) \qquad [2.13]$$

เพื่อความสะดวกในการพิจารณาจะใช้ในกรณีที่มุมเริ่มต้น θ เป็น 0 จากสมการที่ [2.10], [2.11] และ [2.13] จะได้

$$\left.\begin{aligned} v_R &= V_m \sin \omega t \\ i &= I_m \sin \omega t \\ P &= V_m I_m \sin^2 \omega t \end{aligned}\right\} \qquad [2.14]$$



รูปที่ 2.4 แสดงเฟสของ i และ v_R

จากรูปที่ 2.4 จะเห็นว่ากระแสไฟฟ้าเฉลี่ยและความต่างศักย์เฉลี่ยครบรอบเป็นศูนย์ แต่ค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยไม่เป็นศูนย์ ให้ $\bar{P}$ เป็นค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยจะได้

$$\bar{P} = \int_0^{2\pi} \frac{P}{2\pi} d\alpha$$

จากสมการที่ (2.14)

$$P = V_m I_m \sin^2 \omega t = V_m I_m \sin^2 \alpha$$

$$\bar{P} = \int_0^{2\pi} \frac{V_m I_m \sin^2 \alpha d\alpha}{2\pi}$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \int_{o}^{2\pi} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha$$

$$\bar{P} = \frac{V_m I_m}{4} \left[\int_{o}^{2\pi} d\alpha - \int_{o}^{2\pi} \frac{\cos 2}{2} \, d2\alpha \right]$$

$$= \frac{V_m I_m}{4} \left[\alpha \Big|_{o}^{2\pi} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Big|_{o}^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{V_m I_m}{4} \left[2\pi \right]$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \bar{P} = V_{rms} I_{rms} \qquad [2.15]$$

โดย

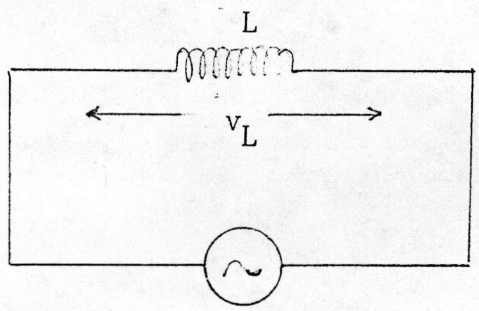
$$\left. \begin{aligned} V_{rms} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707\ V_m \\ I_{rms} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707\ I_m \end{aligned} \right\} \qquad [2.16]$$

ค่า V_{rms} และ I_{rms} เรียกว่าค่ารากที่สองของกำลังสองเฉลี่ย (root mean square) ของ v และ i หรือบางที่เรียกว่าค่ายังผล (effective value) เขียนเป็น V_{eff} และ I_{eff} ซึ่งค่านี้เป็นค่าที่ใช้เปรียบเทียบกับกระแสไฟฟ้าตรง นั่นคือหมายถึงค่าของกระแสไฟฟ้าสลับที่ให้กำลังไฟฟ้าคร่อมความต้านทานเท่ากับของ

กระแสไฟฟ้าตรง ในทางปฏิบัติค่าไฟฟ้ากระแสสลับที่วัดได้จากมิเตอร์ต่าง ๆ จะอ่านค่าออกมาเป็นค่ายังผลเสมอ

2.2.2 ขดลวดเหนี่ยวนำในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

เมื่อต่อแรงเคลื่อนไฟฟ้ากระแสสลับกับขดลวดเหนี่ยวนำที่มีค่าความเหนี่ยวนำ L เฮนรี (ในที่นี้จะไม่คิดความต้านทานภายในของขดลวดเหนี่ยวนำ) กระแสไฟฟ้าในวงจรจะเป็นกระแสสลับด้วยแต่จะไม่เหมือนกับวงจรที่ต่อกับความต้านทานคือเฟสของความต่างศักย์ที่คร่อมขดลวดเหนี่ยวนำอยู่ 90 องศา พิจารณาวงจรดังรูปที่ 2.5 ให้ v_L เป็นความต่างศักย์ที่คร่อมขดลวดเหนี่ยวนำ



รูปที่ 2.5 ไฟฟ้ากระแสสลับต่อกับขดลวดเหนี่ยวนำ

จากกฎของเคอร์ชอฟจะได้ว่า $v = v_L = V_m \sin(\omega t + \theta)$ [2.17]

V_m เป็นความต่างศักย์สูงสุดของ v_L

จาก $v_L = L\frac{di}{dt}$

ดังนั้น $L\frac{di}{dt} = V_m \sin(\omega t + \theta)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_m}{L}\sin(\omega t + \theta)$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$i = -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{V_m}{\omega L}\sin(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$$

$$i = I_m\sin(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}) \qquad [2.18]$$

โดย $$I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{V_m}{X_L}$$

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{X_L} \qquad [2.19]$$

และ $$X_L = \omega L = 2\pi f L \qquad [2.20]$$

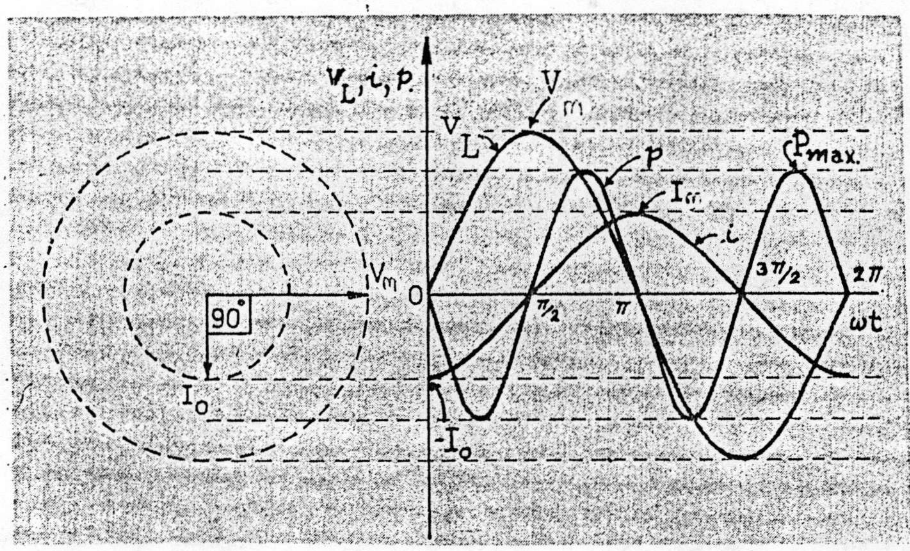
ค่า X_L เรียกว่า ค่าความต้านทานเหนี่ยวนำ (inductive reactance) มีหน่วยเป็นโอห์ม เนื่องจาก L เป็นค่าคงที่ ดังนั้น X_L จะแปรผันโดยตรงกับความถี่

จากสมการ [2.17], [2.18] ให้มุม $\theta = 0$ จะได้

$$v_L = V_m\sin\omega t$$

$$i = I_m\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad [2.21]$$

จากสมการ [2.21] เขียนกราฟแสดงเฟสของ i และ v_L ได้ดังรูปที่ 2.6 จะเห็นได้ว่า i มีเฟสตามหลัง v_L เป็นมุม 90°



รูปที่ 2.6 กราฟแสดงเฟสของ i และ v_L

ให้ P เป็นกำลังไฟฟ้าที่ใช้จะได้

$$P = iv_L$$

$$= I_m \sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) V_m \sin\omega t$$

$$= -V_m I_m \sin\omega t \cos\omega t$$

$$= -V_m I_m \sin 2\omega t$$

$$P = -V_{rms} I_{rms} \sin 2\omega t \qquad [2.22]$$

จากรูปที่ 2.6 ค่ากำลังไฟฟ้าสูงสุดเป็น $+V_{rms}I_{rms}$ และ $-V_{rms}I_{rms}$

$$P_{max} = V_{rms} I_{rms} \qquad [2.23]$$

แต่ $\bar{P} = 0$ [2.24]

ทั้งนี้เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ $\sin 2\omega t$ เป็น 0

จากสมการที่ [2.22] จะเห็นว่ากำลังไฟฟ้าที่ขดลวดเหนี่ยวนำจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางทุก ๆ ครึ่งรอบ แหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าจะให้พลังงานกับขดลวดเหนี่ยวนำและจะถูกเก็บไว้ในสนามแม่เหล็ก หลังจากนั้นพลังงานที่เก็บสะสมไว้จะคืนให้แหล่งกำเนิด ดังนั้นทุก ๆ รอบกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยจึงเป็นศูนย์ถ้าต้องการหาพลังงานที่สะสมในขดลวดเหนี่ยวนำ W จะหาได้จาก

$$dW = Pdt$$

จากสมการที่ (2.22) จะได้ว่า

$$dW = -V_{rms}I_{rms}\sin 2\omega t dt$$

$$dW = \frac{-V_{rms}I_{rms}}{2\omega}\int_{-\pi/2}^{\pi\ 2/\pi} \sin 2\omega t d2\omega t$$

$$W = \frac{V_{rms}I_{rms}}{2\omega}\Big[\cos 2\omega t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

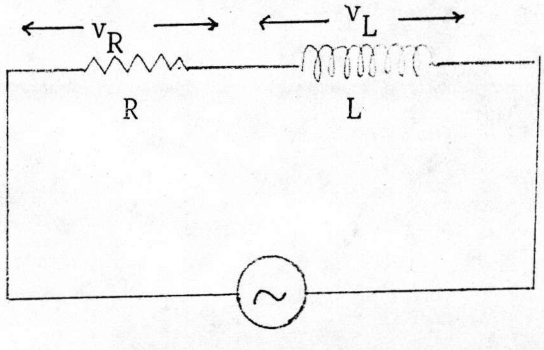
$$= \frac{V_{rms}I_{rms}}{\omega}$$

$$= \frac{(I_{rms}X_L)}{\omega} I_{rms} = \frac{\omega L I_{rms}^2}{\omega}$$

$$W = L\ I_{rms}^2 \qquad [2.25]$$

2.2.3 ความต้านทาน ขดลวดเหนี่ยวนำและแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าต่อแบบอนุกรม

ต่อวงจร RL อนุกรมกับแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่มีความต่างศักย์ v ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ความต้านทานและความเหนี่ยวนำต่อกันแบบอนุกรมกับแหล่งกำเนิดแรงเคลื่อนไฟฟ้ากระแสสลับ

ให้ v_R และ v_L เป็นความต่างศักย์คร่อม R และ L ตามลำดับ เนื่องจากวงจรนี้ต่อแบบอนุกรม ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ผ่าน R และ L จะเท่ากัน ในที่นี้จะให้กระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรเป็นไปตามสมการ

$$i = I_m \sin\omega t \qquad [2.26]$$

ดังนั้น $$v_R = iR = I_m R \sin\omega t$$

$$= V_R \sin\omega t \qquad [2.27]$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_m \sin\omega t)$$

$$= \omega L I_m \cos\omega t = V_L \cos\omega t$$

$$v_L = V_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad [2.28]$$

โดย $V_R = I_m R$, $V_L = \omega L I_m$

V_R, V_L เป็นความต่างศักย์สูงสุดของ v_R และ v_L ตามลำดับ

จาก $v = v_R + v_L$

$= I_m R\sin\omega t + \omega L I_m \cos\omega t$

$= I_m R\sin\omega t + \omega I_m L\cos\omega t$

ให้ $A = I_m R$, $B = I_m \omega L$ จะได้

$v = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

และให้ $A = D\cos\theta$, $B = D\sin\theta$ ดังนั้น

$A^2 + B^2 = D^2$ และ $\tan\theta = \frac{B}{A}$

$$v = D\sin\omega t\cos\theta + D\cos\omega t\sin\theta$$

$$= D\sin(\omega t + \theta)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(\omega t + \theta)$$

$$= I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t + \tan^{-1}\frac{\omega L}{R})$$

$$v = V_m\sin(\omega t + \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}) \qquad [2.29]$$

V_m เป็นค่าความต่างศักย์สูงสุดของ v โดย

$$\left.\begin{aligned} V_m &= I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ &= \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \end{aligned}\right\} \qquad [2.30]$$

ความต้านทานรวมในวงจรเรียกว่าอิมพิแดนซ์ (impedance) ใช้สัญญลักษณ์ Z ดังนั้นจากสมการ [2.30]

$$Z = \frac{V_m}{I_m} \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad [2.31]$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad [2.32]$$

ให้ P เป็นกำลังไฟฟ้าที่ใช้ในวงจร ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= iv \\ &= I_m \sin\omega t V_m \sin(\omega t + \theta) \\ &= V_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + \theta) \\ &= V_m I_m \sin\omega t(\sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta) \\ &= V_m I_m \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\omega t\right)(\cos\theta + \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin\theta) \\ &= \frac{V_m I_m}{2} (1-\mathrm{cso}2\omega t)\cos\theta + \sin 2\omega t\sin\theta \end{aligned}$$

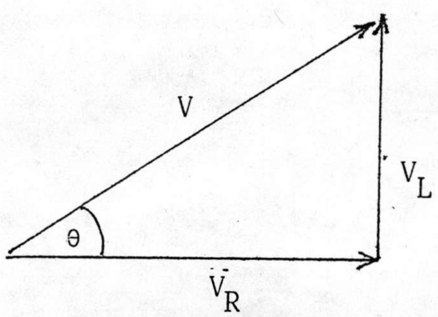
$$P = V_{rms} I_{rms}(\cos\theta - \cos 2\omega t\cos\theta + \sin 2\omega t\sin\theta) \qquad [2.33]$$

จากสูตรกำลังไฟฟ้าเฉลี่ย $\bar{P} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P\,d\omega t$ เมื่อแทนค่า P

จากสมการ [2.33] แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\bar{P} = V_{rms} I_{rms} \cos\theta \qquad [2.34]$$

แสดงเฟสและอัมปลิจูดของความต่างศักย์ v_R, v_L และ v ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แสดงเฟสและอัมปลิจูดของ v_R, v_L และ v

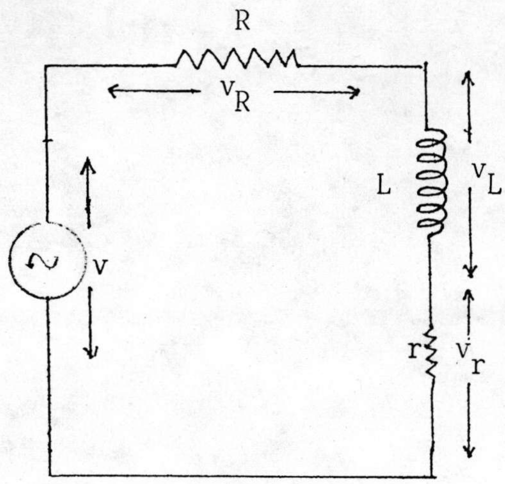
ในวงจรนี้

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R}{Z} \qquad [2.35]$$

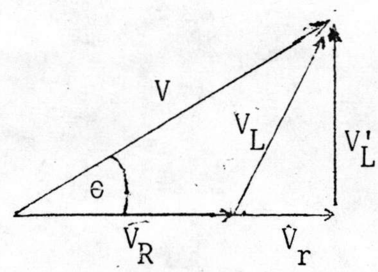
จาก $V_{rms} = I_{rms} Z$, เมื่อแทนค่า V_{rms} และ $\cos\theta$ ลงในสมการที่ [2.34] จะได้

$$\left.\begin{aligned} \bar{P} &= I_{rms}^2 R \\ \text{หรือ} \quad \bar{P} &= \frac{V_{rms}^2}{R} \end{aligned}\right\} \qquad [2.36]$$

ถ้าขดลวดเหนี่ยวนำมีความต้านทานภายในเท่ากับ r วงจร R-L จะเขียนได้ดังรูปที่ 2.9 (ก) และแสดงเฟสได้ดังรูปที่ 2.9 (ข)



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.9 (ก) วงจร R-L เมื่อ L มีความต้านทานภายใน r

(ข) แสดงเฟสและอัมปลิจูดของ v, v_R, v_L

ในวงจรดังรูปที่ 2.9 เราจะได้

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + (\omega L)^2} \qquad [2.37]$$

$$\bar{P} = I^2_{rms}(R+r) = \frac{V^2_{R\,rms}}{R} + \frac{V^2_{r\,rms}}{r} = \bar{P}_R + \bar{P}_r \qquad [2.38]$$

จากสมการ [2.38] จะเห็นว่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในวงจรเท่ากับผลรวมของกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนความต้านทานภายนอก $\bar{P}_R$ กับกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนความต้านทานภายใน $\bar{P}_r$

2.3 กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยสูงสุดของวงจรอนุกรม R-L

ต่อวงจรอนุกรม R-L เมื่อ L มีความต้านทานภายในเป็น r กับแหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ ให้ I เป็นค่ายังผลของกระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจร V เป็นค่ายังผลของความต่างศักย์ทั้งหมดในวงจร กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในวงจรจะหาได้จาก

$$P = I^2(R + r)$$

แต่ $$I = \frac{V}{\sqrt{(R+r)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$P = \frac{V^2(R+r)}{(R+r)^2 + (\omega L)^2} = \frac{V^2 R_T}{R_T^2 + (\omega L)^2}$$

เมื่อ $$R_T = R + r$$

P จะมากที่สุดเมื่อ $$\frac{dP}{dR_T} = 0$$

$$\frac{V^2\left[R_T^2 + (\omega L)^2 - R_T\ 2R_T\right]}{\left[R_T^2 + (\omega L)^2\right]^2} = 0$$

$$(\omega L)^2 - R_T^2 = 0$$

ดังนั้น $$R_T = (R + r) = \omega L$$

เพราะฉะนั้นกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยในวงจรอนุกรม R-L เมื่อ L มีความต้านทานภายใน r จะมากที่สุดเมื่อ $R + r = \omega L$, จากสมการ

$$P = I^2(R + r)$$

จะเห็นได้ว่ากำลังเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนความต้านทานภายนอก (R) จะมีค่ามากเมื่อกำลังเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนความต้านทานภายใน (r) มีค่าน้อย นั่นคือ $\bar{P}_R$ จะมีค่ามากเมื่อ r มีค่าน้อย ๆ ในกรณีที่ขดลวดมีความต้านทานน้อยจนไม่อาจนำมาคิดได้ กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยในวงจรอนุกรม R-L จะมากที่สุดเมื่อ $R = \omega L$