บทที่ 8

บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงการประดิษฐ์และการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อการแก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในสองมิติ เนื้อหาของวิทยานิพนธ์เริ่มจากการอธิบายถึงความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์ การพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์ เอลิเมนต์ซึ่งเริ่มต้นจากการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทางด้านโครงสร้าง ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน มาจนถึงปัญหาทางด้านการไหลซึ่งยังจำแนกออกเป็นแบบอัดตัวได้และอัดตัวไม่ได้ ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้เกิดขึ้นในการไหลที่มีความเร็วสูง เช่น การไหลผ่านปีกเครื่องบินที่บินเร็วกว่าเสียง อันก่อให้เกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อค ส่วนปัญหาแบบอัดตัวไม่ได้เป็นการไหลที่เกิดขึ้นกับปัญหาที่พบเห็นโดยปกติทั่วไป เช่น การไหลในท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดต่างๆ การไหลเวียนของอากาศในห้องทำงาน รวมทั้งการไหลของอากาศผ่านรถยนต์ ปัญหาการไหลแบบชนิดหลังนี้มีความสำคัญในงานการออกแบบ ซึ่งเป็นที่มาของการทำวิทยานิพนธ์นี้ อันเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อใช้แก้ปัญหาลักษณะของการไหลชนิดนี้ผ่านรูปร่างซับซ้อนใดๆ

เพื่อให้วิทยานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์ เนื้อหาของวิทยานิพนธ์จึงเริ่มจากบทที่ 2 ซึ่งเป็นการแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลชนิดนี้ที่มีชื่อเรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวยังสามารถจำแนกออกได้เป็น 2 แบบย่อยขึ้นอยู่กับลักษณะของการไหล หากการไหลนั้นมีความเร็วที่ต่ำมาก พจน์ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับความเฉื่อยจะมีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับพจน์อื่นๆ ทำให้สามารถละทิ้งออกจากสมการเชิงอนุพันธ์นั้นได้ ซึ่งเป็นผลให้สมการนั้นลดรูปจากสมการไม่เชิงเส้นมาอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้น ทำให้สะดวกแก่การแก้ปัญหา สมการเชิงอนุพันธ์ที่ลดรูปมาอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้นนี้ เรียกว่า สมการของสโตกส์ แต่สำหรับปัญหาที่มีความเร็วค่อนข้างสูง สมการนาเวียร์-สโตกส์ดั้งเดิมนั้นต้องถูกนำมาใช้ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์นี้ ประกอบด้วยพจน์ไม่เชิงเส้นที่สอดคล้องกับความเฉื่อย ทำให้การแก้ปัญหานั้นมีความซับซ้อนมากขึ้น

เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจ สมการของสโตกส์ ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นได้ถูกนำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยมีรายละเอียดดังแสดงในบทที่ 3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นี้ได้นำไปประดิษฐ์ต่อขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยตรง ดังแสดงในบทที่ 4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ได้ตั้งชื่อให้ว่า STOKES ซึ่งมีรายละเอียดของการใช้งาน ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้าและไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น รวมทั้งตัวอย่างการใช้โปรแกรมนี้ได้อธิบายละเอียดในบทที่ 4 นี้

หลังจากที่ได้ประสบความสำเร็จในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสโตกส์ ซึ่งเป็นสมการแบบเชิงเส้นพร้อมทั้งได้ตรวจสอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นแล้ว จึงได้ดำเนินวิธีการในลักษณะเช่นเดียวกันไปทำการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งเป็นระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการนาเวียร์-สโตกส์นี้ ได้แสดงโดยละเอียดในบทที่ 5 เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ดังกล่าวเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น ทำให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นนั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นเช่นกัน ดังนั้นระเบียบวิธีของ นิวตัน-ราฟสันจึงได้นำมาประยุกต์เพื่อแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นดังกล่าว ผลของสมการต่างๆที่ประดิษฐ์ในบทที่ 5 นี้ ได้นำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตั้งชื่อให้ว่า NAVIER รายละเอียดขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ รวมทั้งไฟล์ข้อมูลต่างๆ ตลอดจนตัวอย่างปัญหาการใช้โปรแกรมนี้ได้แสดงโดยละเอียดในบทที่ 6

ความถูกต้องของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสโตกส์ (บทที่ 3) และนาเวียร์-สโตกส์ (บทที่ 5) รวมทั้งความถูกต้องของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES (บทที่ 4) และ NAVIER (บทที่ 6) ได้ทำการตรวจสอบโดยใช้ปัญหาอย่างง่ายที่มีผลลัพธ์แม่นตรงดังแสดงในบทที่ 7 จากนั้นเมื่อเกิดความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมเหล่านี้แล้ว จึงนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาการไหลผ่านรูปทรงที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป เช่นการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดในลักษณะต่างๆกัน การไหลในท่อคดเคี้ยวที่มาบรรจบกัน รวมทั้งการไหลผ่านรูปทรงรถยนต์

8.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์นี้ สามารถจำแนกออกได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ คือ ปัญหาในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสโตกส์

และนาเวียร์-สโตกส์ และปัญหาในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน สำหรับปัญหาแรกของการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องกระทำอย่างเป็นขั้นเป็นตอนด้วยความระมัดระวัง ทั้งนี้สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นนี้ประกอบด้วยสมการย่อยถึง 3 สมการ คือสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการอนุรักษ์มวล และสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศแกน x และ y สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นี้ โดยเฉพาะที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงนั้นมีความซับซ้อนค่อนข้างสูง ยิ่งไปกว่านั้น เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นนั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นเช่นกัน ทำให้ต้องประยุกต์ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันซึ่งมีความซับซ้อนขึ้นไปอีกระดับหนึ่ง

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ ซึ่งนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน ก่อให้เกิดความซับซ้อนในการเขียนโปรแกรมเช่นกัน การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวจึงจำเป็นต้องกระทำอย่างระมัดระวังและต้องทำการตรวจสอบความถูกต้องในทุกขั้นตอน

เนื่องจากปัญหาการไหลด้วยการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์เป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นซึ่งต้องทำการแก้โดยกระบวนการทำซ้ำ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่ผลลัพธ์นั้นไม่อาจลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ จากประสบการณ์ของการแก้ปัญหาการไหลในหลายๆแบบด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างๆกันในขณะทำวิทยานิพนธ์นี้ พบว่าผลลัพธ์นั้นอาจไม่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการหากจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้นั้นมีน้อยเกินไป โดยเฉพาะเมื่อการไหลนั้นมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่สูง วิธีการแก้ไขสามารถทำได้โดยเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้น แต่ในทางปฏิบัติจะพบขีดจำกัดเนื่องจากการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่มากขึ้นจำเป็นต้องใช้หน่วยความจำที่มากตามขึ้นไปด้วย ซึ่งเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้งานอยู่นั้นอาจมีปริมาณหน่วยความจำที่จำกัดและไม่พอเพียงในการแก้ปัญหานั้น อย่างไรก็ตาม เนื่องจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในภาคผนวก ก และ ข นั้นสามารถใช้งานได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ชนิดต่างๆกันโดยไม่ต้องเปลี่ยนแปลงส่วนใดๆในตัวโปรแกรมเลยยกเว้นจำนวนหน่วยความจำที่ตั้งไว้ในช่วงต้นของตัวโปรแกรม ดังนั้นปัญหาของขีดจำกัดในปริมาณหน่วยความจำจึงแก้ไขได้โดยง่ายหากเครื่องคอมพิวเตอร์มีปริมาณหน่วยความจำเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ปัญหานี้จะมีอุปสรรคลดลงเนื่องจากเครื่องคอมพิวเตอร์ในอนาคตจะมีขนาดปริมาณหน่วยความจำที่เพิ่มมากขึ้นไปเรื่อยๆ

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานที่สามารถสานต่อได้จากวิทยานิพนธ์นี้

ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 8.2 ถึงอุปสรรคหลักของการแก้ปัญหาการไหลซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์แบบไม่เชิงเส้นนั้น คือความต้องการในการใช้จำนวนเอลิเมนต์ค่อนข้างมากเพื่อสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ความ

การดังกล่าวมีขีดจำกัดเนื่องจากปริมาณหน่วยความจำที่ไม่พอเพียงบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่ในปัจจุบัน วิธีการหนึ่งที่สามารถช่วยลดจำนวนเอลิเมนต์ได้คือ การใช้ระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (Remeshing technique) กล่าวคือใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของการไหลน้อยเพื่อช่วยลดปริมาณของหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และในขณะเดียวกัน ใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของการไหลมากเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงจากการคำนวณ การใช้ระเบียบวิธีการจัดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกันกับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในภาคผนวก ก และ ข สามารถแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาการไหลได้ดีมากยิ่งขึ้น

ในทางปฏิบัติ ลักษณะของการไหลนั้นอาจเปลี่ยนแปลงไปหากอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆนั้นมีค่าไม่เท่ากัน เพื่อคำนวณปรากฏการณ์ของการไหลเนื่องจากผลของอุณหภูมิด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวจำเป็นต้องประกอบด้วยสมการพลังงาน (Energy equation) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เพิ่มเข้าไปอีกสมการหนึ่ง การแก้ปัญหาดังกล่าวจึงมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น แต่อย่างไรก็ตามไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในภาคผนวกของวิทยานิพนธ์นี้ สามารถนำไปดัดแปลงเพิ่มเติมได้โดยสะดวกเพื่อใช้แก้ปัญหานี้