บทที่ 7

ผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาต่าง ๆ

ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดและเชื่องช้า ซึ่งละพจน์ความเฉื่อยจากสมการนาเวียร์-สโตกส์นั้นได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่ 3 ผลของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้นั้นถูกนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ขั้นตอนการคำนวณในตัวโปรแกรม ลักษณะไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการและไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ รวมทั้งตัวอย่างในการใช้โปรแกรมดังกล่าวได้แสดงโดยละเอียดในบทที่ 4 ในทำนองเดียวกัน บทที่ 5 อธิบายการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยทั่วไป และบทที่ 6 แสดงการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์พร้อมตัวอย่างใช้งานสำหรับการไหลชนิดนี้

ในบทที่ 7 นี้ จะนำเสนอผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในบทที่ 4 และ 6 เพื่อแก้ปัญหาต่างๆกัน ซึ่งประกอบด้วยปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม และปัญหาที่มีขอบเขตลักษณะของการไหลที่ซับซ้อนมากขึ้นเพื่อแสดงประสิทธิภาพของโปรแกรมเหล่านี้ในการแก้ปัญหาโดยทั่วไป

7.1 โปรแกรมการไหลแบบหนืดและเชื่องช้า STOKES

หัวข้อนี้ประกอบด้วยผลจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 4 เพื่อการแก้ปัญหาชนิดต่างๆของการไหลแบบหนืดและเชื่องช้าที่เกิดขึ้นในงานทางวิศวกรรมหลายชนิด เช่นในกระบวนการหล่อโลหะหรือเซรามิก เป็นต้น การไหลชนิดนี้บางครั้งถูกเรียกว่า การไหลแบบคืบคลาน (Creeping flow) หรือการไหลแบบสโตกส์ (Stokes flow) ซึ่งแรงของความเฉื่อย (Inertia force) นั้นมีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับแรงของความหนืด (Viscous force) นั่นคือ ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number) ซึ่งแสดงอัตราส่วนระหว่างแรงของความเฉื่อยต่อความหนืดนั้นมีค่าต่ำ

รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อแก้ปัญหาที่จะแสดงต่อไปนี้ได้แสดงในภาคผนวก ก ปัญหาที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่นำมาเสนอในหัวข้อนี้ประกอบด้วย 2 ปัญหา คือ ปัญหาของการไหลชนิดเต็มรูปแบบ (Fully developed flow) และการไหลแบบที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดแนวของการไหล

7.1.1 การไหลในท่อชนิดเต็มรูปแบบ

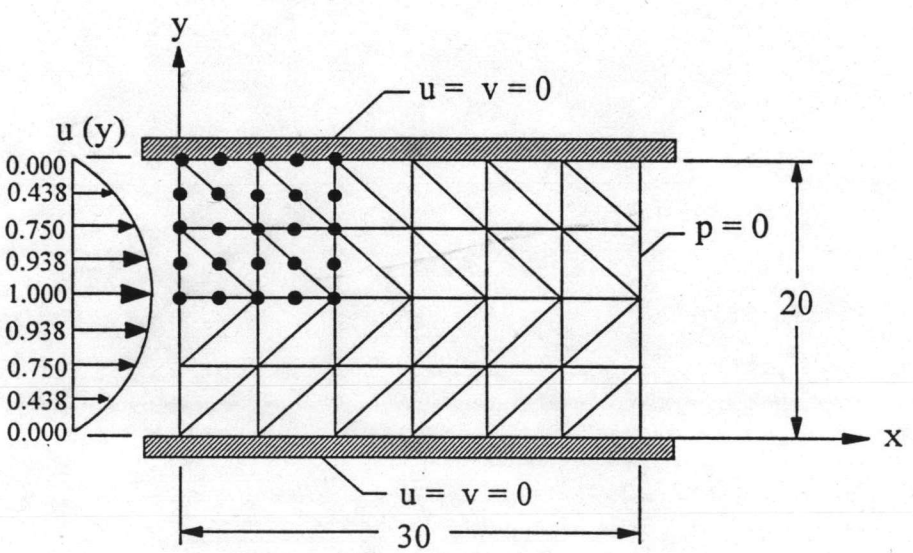
จุดประสงค์ของการแก้ปัญหาแรกนี้คือการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ปัญหานี้เป็นการไหลชนิดเต็มรูปแบบภายในท่อที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 หน่วย และยาว 30 หน่วย ดังแสดงในรูป 4.2 ในกรณีนี้ ผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายของความเร็วในทิศแกน y คือ

$$u(y) = 0.01\, y\, (20 - y) \qquad (7.1)$$

และการกระจายของความดันในทิศแกน x คือ

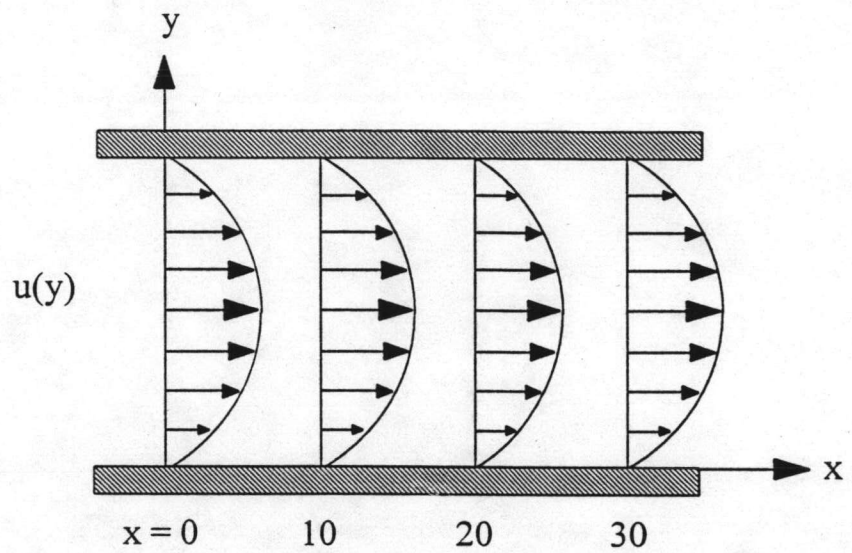
$$p(x) = 6 - 0.2x \qquad (7.2)$$

รูป 7.1 แสดงรูปของไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 48 เอลิเมนต์ และ 117 จุดต่อ กล่าวคือแบ่งย่อยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้แสดงในรูป 4.3 ลงไปอีกเท่าตัว การกระจายของความเร็วซึ่งอธิบายโดยสมการ (7.1) ได้แสดงทางด้านซ้ายของรูป 7.1 เนื่องจากการไหลเป็นการไหลภายใต้สภาวะอยู่ตัวชนิดเต็มรูปแบบ ดังนั้นผลของความเร็วที่คำนวณได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นจำเป็นต้องมีการกระจายที่เหมือนกันในทุกๆระยะตลอดแนวแกน x



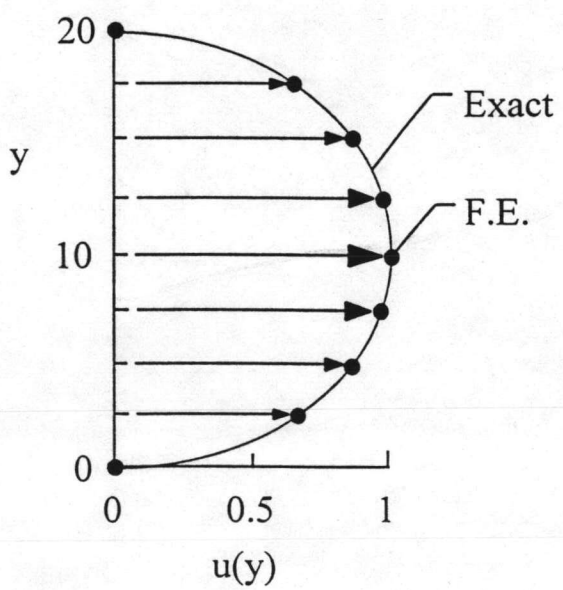
รูป 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบเชื่องช้าในท่อ

รูป 7.2 แสดงการกระจายของความเร็ว u(y) ที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x=10, 20 และ 30 ผลที่ได้สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในสมการ (7.1)



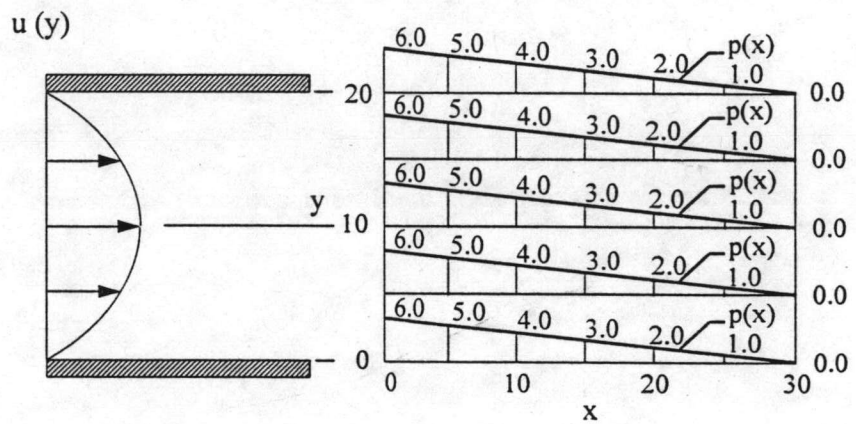
รูป 7.2 การกระจายของความเร็ว u(y) ที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x ต่างๆกัน

รูป 7.3 แสดงรายละเอียดการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของความเร็ว u(y) ที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งสำหรับการไหลแบบง่ายเช่นนี้ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิ-เมนต์สามารถให้ผลลัพธ์แม่นตรงทั้งที่ตำแหน่งของจุดต่อและตลอดแนวของเอลิเมนต์



รูป 7.3 การเปรียบเทียบผลการกระจายของความเร็ว u(y) ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับผลเฉลยแม่นตรง

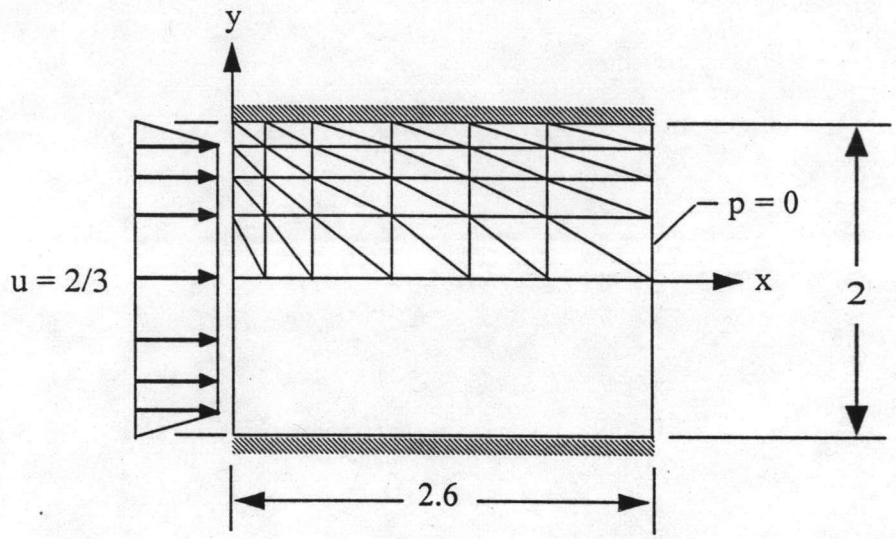
รูป 7.4 แสดงผลลัพธ์ของการกระจายของความดัน, p(x), ณ ระดับ y ที่ต่างๆ กันตลอดแนวแกน x ผลลัพธ์ที่ได้ดังกล่าวสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในสมการ (7.2) ตัวอย่างนี้แสดงถึงความสามารถของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถให้ผลลัพธ์ที่เป็นผลเฉลยแม่นตรงสำหรับการไหลในท่อภายใต้สถานะอยู่ตัวชนิดเต็มรูปแบบได้



รูป 7.4 ผลการกระจายของความดันที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

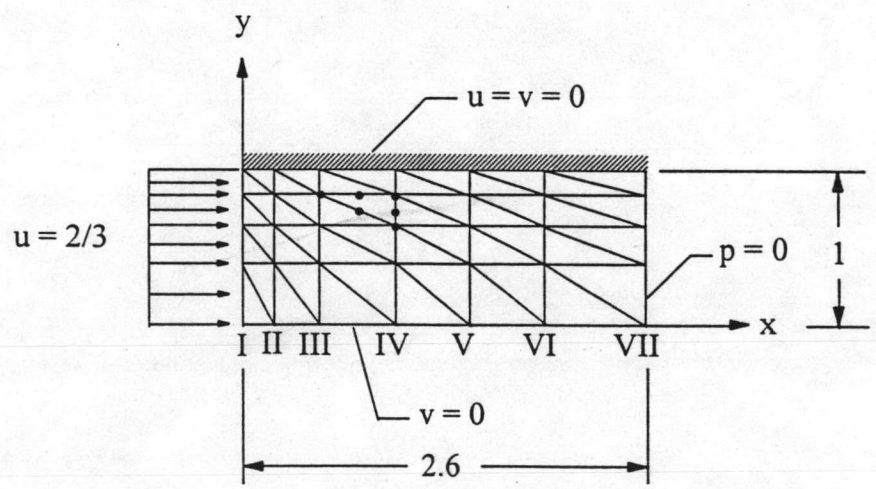
7.1.2 การไหลในท่อที่เกิดการเปลี่ยนแปลงตลอดแนวการไหล

รูป 7.5 แสดงลักษณะของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลในท่อ ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงของสภาวะการไหลทั้งทางแกน x และ y ตลอดแนวการไหล จุดประสงค์ของการแก้ปัญหานี้ คือ (ก) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และคอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น เนื่องจากปัญหาเดียวกันนี้ได้ถูกแก้โดย Yamada และคณะ มาก่อน และ (ข) เพื่อแสดงประสิทธิภาพทางโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในการคำนวณสภาวะของการไหลที่เปลี่ยนแปลงไป รูป 7.5 นี้แสดงการไหลในท่อเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 หน่วย และยาว 2.6 หน่วย โดยความเร็วของการไหลนั้นคงที่ตลอดแนวทางเข้า (x = 0) ส่วนตลอดแนวทางออก (x = 2.6) นั้นกำหนดให้ความดันมีค่าเป็นศูนย์



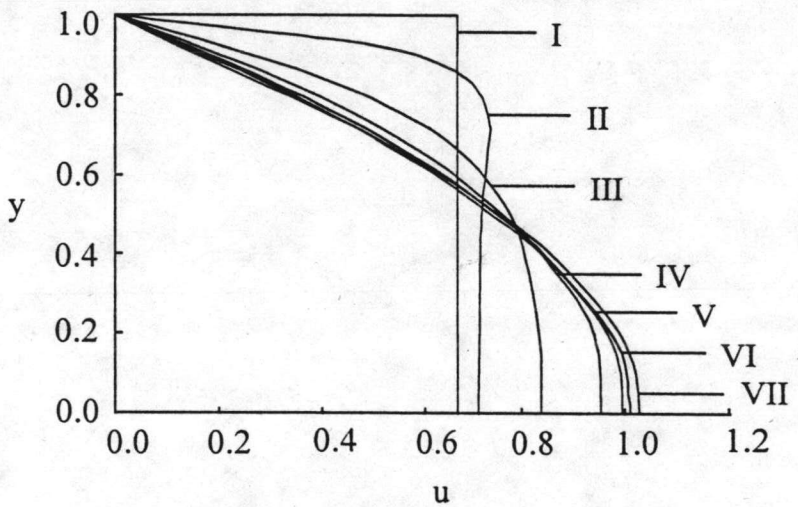
รูป 7.5 รูปแบบปัญหาของการไหลที่เกิดการเปลี่ยนแปลงตลอดแนวการไหล

เนื่องจากปัญหานี้มีความสมมาตรตลอดแนวแกน x รูป 7.6 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งประกอบด้วย 48 เอลิเมนต์ และ 117 จุดต่อ โดยเอลิเมนต์ใกล้ปากทางเข้านั้นมีขนาดเล็กเนื่องจากสภาวะของการไหลเกิดการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณนั้น รูปนี้ยังได้แสดงตำแหน่ง I, II, III, ..., VII ซึ่งจะใช้กำกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในรูป 7.7 และ 7.8 ต่อไป



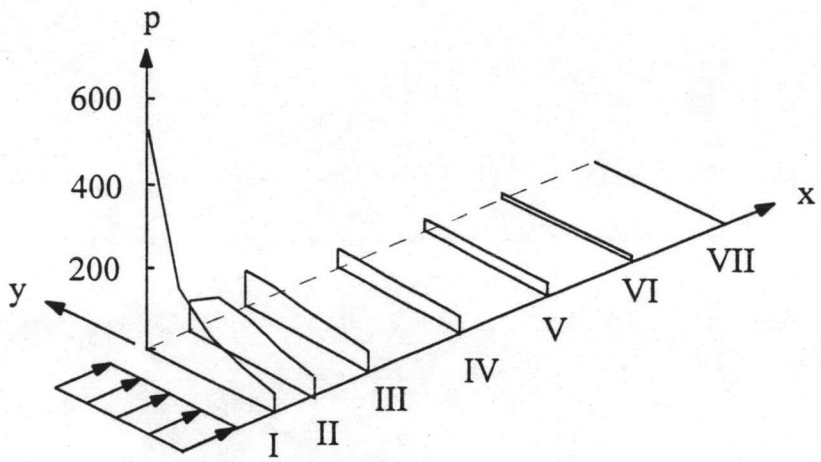
รูป 7.6 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการไหล
ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงตลอดแนวการไหล

รูป 7.7 แสดงผลลัพธ์ของการกระจายของความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตำแหน่ง I, II, III, ..., VII ในทิศทางแกน x ผลลัพธ์ดังกล่าวแสดงการเปลี่ยนแปลงของลักษณะการกระจายจากค่าคงที่ในแนวแกน y มาสู่การกระจายในรูปแบบของฟังก์ชันพาราโบลิก ดังเช่นแสดงในสมการ (4.11) ผลลัพธ์ที่ได้นี้มีความใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่คำนวณโดย Yamada และคณะ ซึ่งแสดงถึงความถูกต้องของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 4 รวมทั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES ดังแสดงในภาคผนวก ก



รูป 7.7 การกระจายของความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตำแหน่งต่างๆในทิศแกน x

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES นี้ ยังประกอบด้วยค่าของความดันที่จุดต่อ รูป 7.8 แสดงการกระจายของความดันที่คำนวณได้ตามตำแหน่ง I, II, III, ..., VII ต่างๆ เนื่องจากความเร็วนั้นเปลี่ยนแปลงทั้งในทิศแกน x และy ทำให้ความดันมีการเปลี่ยนแปลงในทั้งสองทิศทางเช่นกัน จากมากที่ตำแหน่ง I ไปเป็นศูนย์ที่ตำแหน่ง VII ตลอดแนวทางออกตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้



รูป 7.8 การกระจายของความดันที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามตำแหน่งต่างๆในทิศแกน x

ประสบการณ์ที่เกิดขึ้นจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES ตลอดจนการแก้ปัญหาดังที่ได้แสดงข้างต้นนี้ ได้นำไปใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER เพื่อแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับปัญหาโดยทั่วไป ดังที่จะได้แสดงในหัวข้อต่อไป

7.2 โปรแกรมการไหลแบบหนืดโดยทั่วไป

บทที่ 5 ได้แสดงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์แบบไม่เชิงเส้นโดยละเอียด สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ได้ถูกนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังแสดงในบทที่ 6 ซึ่งประกอบด้วยรายละเอียดของขั้นตอนการคำนวณ ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการและไฟล์ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรม รวมทั้งตัวอย่างในการใช้โปรแกรมนี้

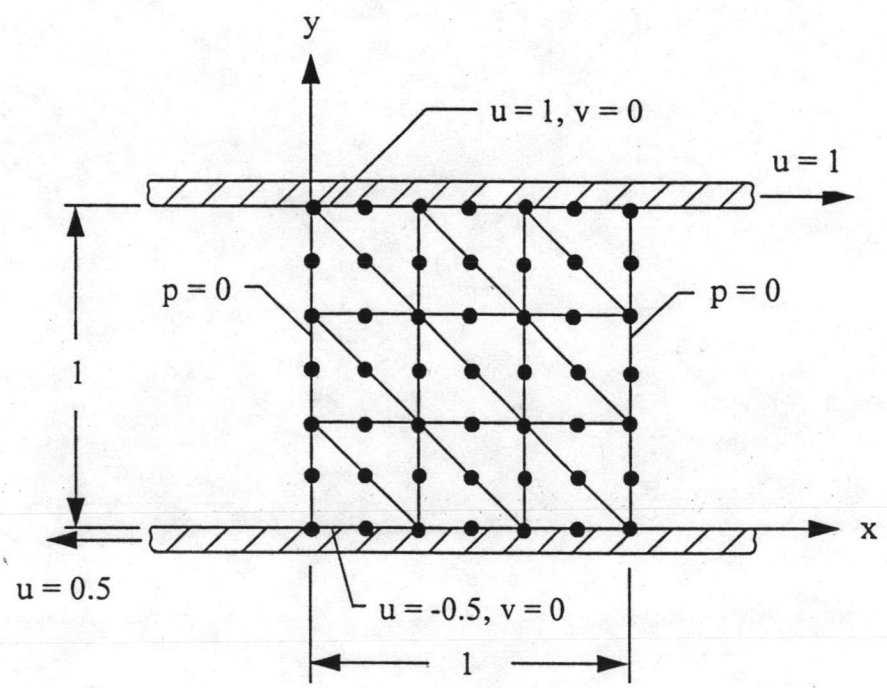
เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยทั่วไปนี้เป็นสมการไม่เชิงเส้น จึงก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบไม่เชิงเส้นด้วย ทำให้จำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีแก้ระบบสมการแบบทำซ้ำ (Iteration technique) ซึ่งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม NAVIER ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันเพื่อแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นดังกล่าว ผลลัพธ์ของการไหลจากตัวอย่างต่างๆที่จะนำเสนอในหัวข้อย่อยต่อไปนี้ได้มาจากการใช้โปรแกรม NAVIER ซึ่งประกอบด้วยตัวอย่างอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ไปจนถึงตัวอย่างการไหลผ่านรูปทางที่ซับซ้อนเพื่อแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้

7.2.1 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน (Couette flow)

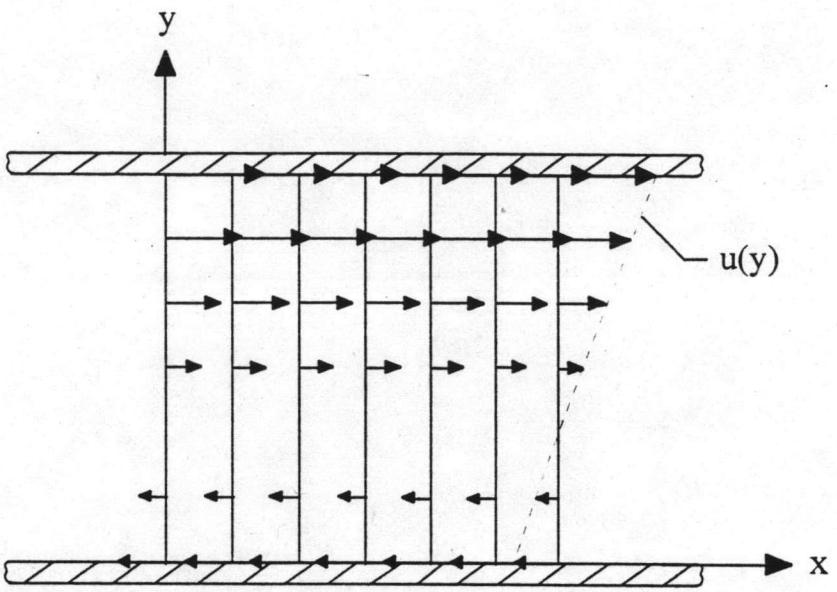
ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับตัวอย่างในหัวข้อ 6.4 ได้นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รูป 7.9 แสดงแผ่นคู่ขนานซึ่งวางห่างกัน 1 หน่วย แผ่นบนเคลื่อนตัวไปทางขวาด้วยความเร็ว u = 1 และแผ่นล่างเคลื่อนตัวไปในทิศทางสวนกันด้วยความเร็ว u = -0.5 ในกรณีนี้ ผลเฉลยแม่นตรงสามารถประดิษฐ์ได้โดยการแก้สมการ (6.1) ซึ่งก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการกระจายของความเร็วคือ

$$u(y) = 1.5y - 0.5 \qquad (7.3)$$

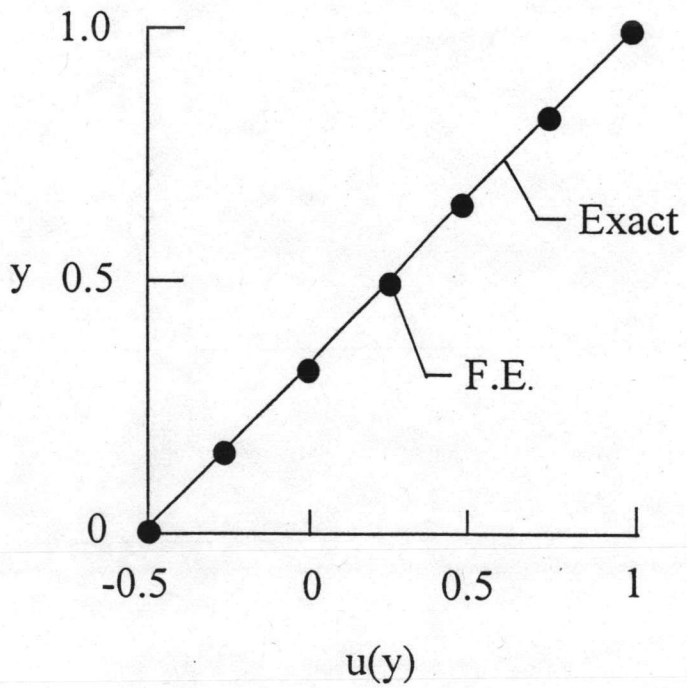
รูป 7.9 ยังได้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 18 เอลิเมนต์ และ 49 จุดต่อ โดยกำหนดให้ความดันตลอดขอบในแนวแกน y ทั้ง 2 ข้างมีค่าเป็นศูนย์ ผลลัพธ์ของการกระจายของความเร็วที่คำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ได้แสดงในรูป 7.10 ผลลัพธ์ที่ได้นี้ได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงในสมการ (7.3) ดังแสดงในรูป 7.11 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมนั้นเป็นผลลัพธ์แม่นตรงเช่นกัน



รูป 7.9 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน



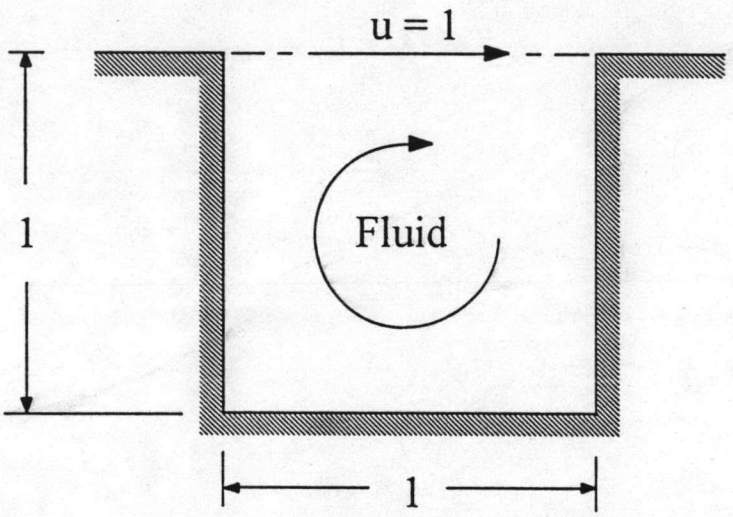
รูป 7.10 ผลการกระจายของความเร็วที่จุดต่อซึ่งคำนวณได้จาก
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER



รูป 7.11 การเปรียบเทียบการกระจายของความเร็วระหว่างผลลัพธ์แม่นตรง
และผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER

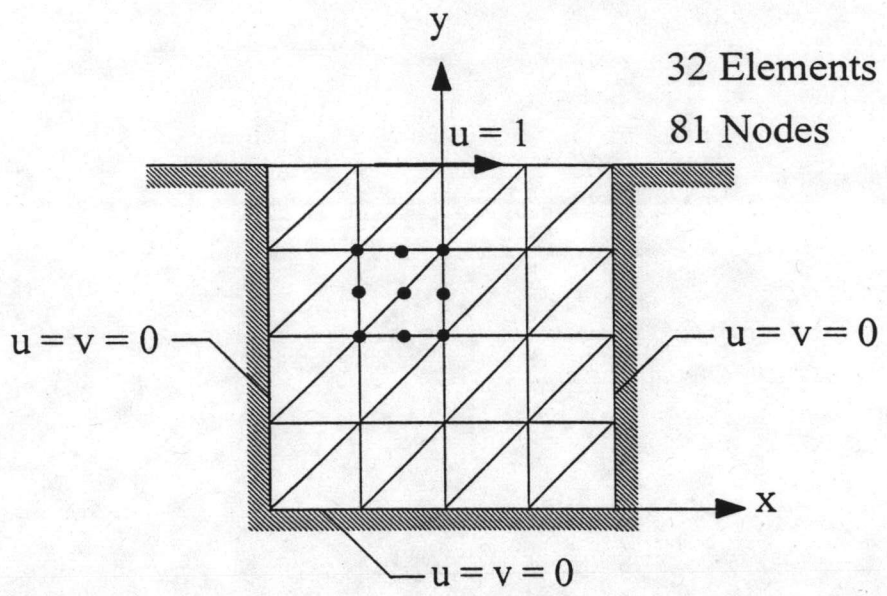
7.2.2 การไหลหมุนวนในช่องว่าง (Cavity flow)

รูป 7.12 แสดงปัญหาการไหลหมุนวนในช่องว่างสี่เหลี่ยม ปัญหานี้เป็นปัญหาการไหลใน 2 มิติ ซึ่งสามารถนำมาใช้ตรวจสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นได้เป็นอย่างดีเนื่องจากมีผลเฉลยแท้จริง (Ramaswamy และคณะ, 1991) ปัญหาดังกล่าวประกอบด้วยช่องว่างสี่เหลี่ยมขนาด 1x1 หน่วย บรรจุด้วยของเหลว ตอนขอบบนของช่องว่างนี้ของเหลวถูกกำหนดให้เคลื่อนตัวด้วยความเร็ว u = 1 ไปในทิศทางด้านขวา การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวก่อให้เกิดการหมุนวนของของเหลวภายในช่องว่างในทิศตามเข็มนาฬิกา

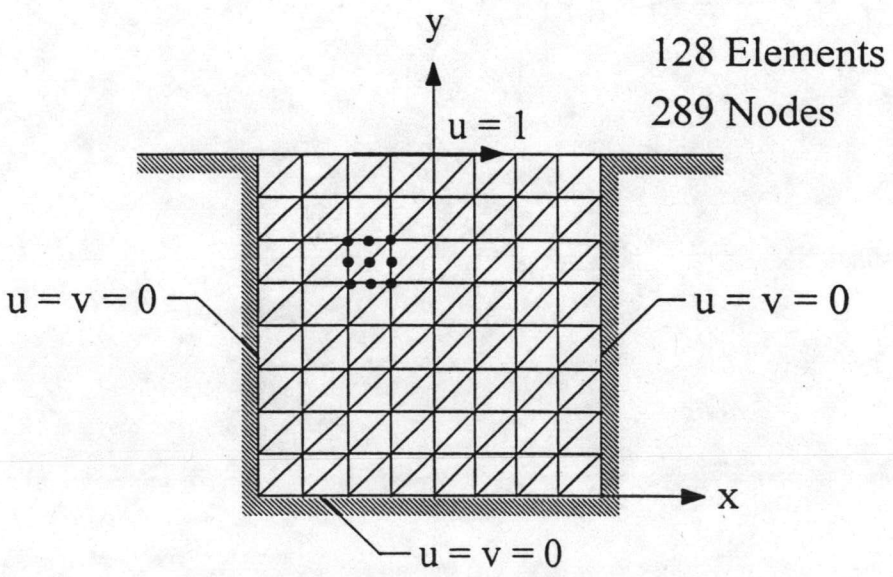


รูป 7.12 การไหลหมุนวนในช่องว่างสี่เหลี่ยม

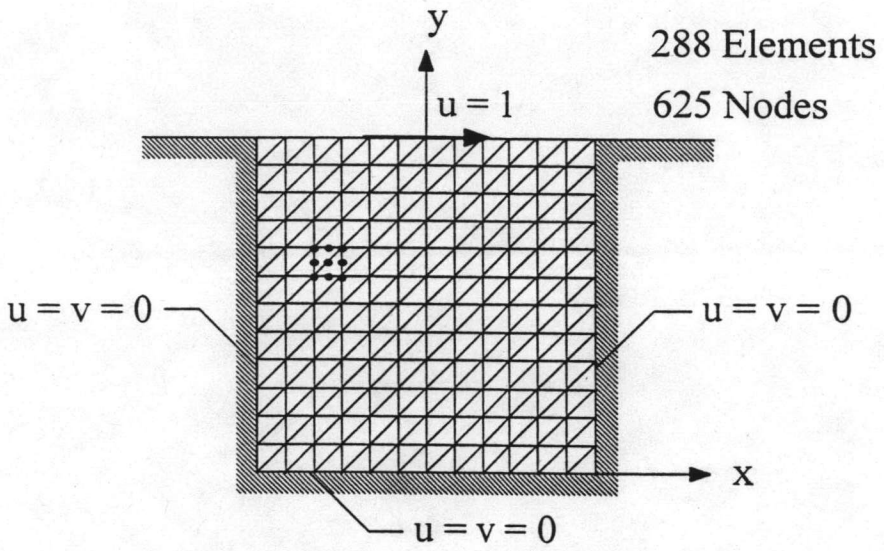
รูป 7.13-7.15 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 รูปแบบ พร้อมเงื่อนไขขอบเขตกล่าวคือ (ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบหยาบซึ่งประกอบด้วย 32 เอลิเมนต์ และ 81 จุดต่อ (ข) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบปานกลางซึ่งประกอบด้วย 128 เอลิเมนต์ และ 289 จุดต่อ และ (ค) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบละเอียดซึ่งประกอบด้วย 288 เอลิเมนต์ และ 625 จุดต่อ ในการคำนวณยังได้แบ่งออกเป็น 2 กรณีกล่าวคือ กรณีที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Re) มีค่าเท่ากับ 100 และ 400



รูป 7.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบหยาบและเงื่อนไขขอบเขต

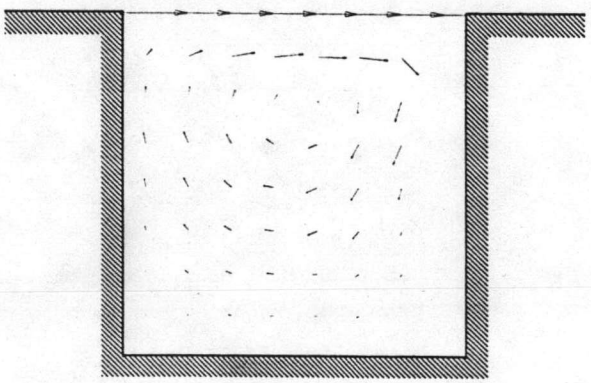


รูป 7.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบปานกลางและเงื่อนไขขอบเขต

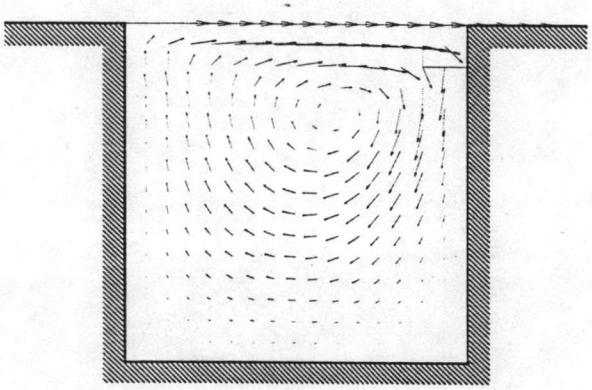


รูป 7.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งแบบละเอียดและเงื่อนไขขอบเขต

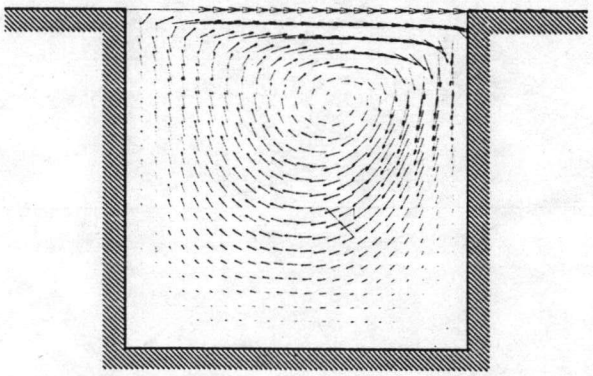
รูป 7.16-7.18 แสดงลักษณะการไหลหมุนวนที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามในกรณีที่ Re = 100 เมื่อเปรียบเทียบรูปทั้งสามนี้จะพบว่าความละเอียดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้นั้นขึ้นตรงกับความละเอียดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ โดยเฉพาะดังแสดงในรูป 7.18 ซึ่งได้จากการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด รูปที่ 7.18 นี้ยังแสดงให้เห็นว่า จุดศูนย์กลางของการหมุนวนสำหรับกรณีที่ Re = 100 นี้ มีตำแหน่งค่อนขึ้นไปทางด้านขวาบนจากจุดกลางช่องว่างสี่เหลี่ยมนี้



รูป 7.16 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ Re = 100

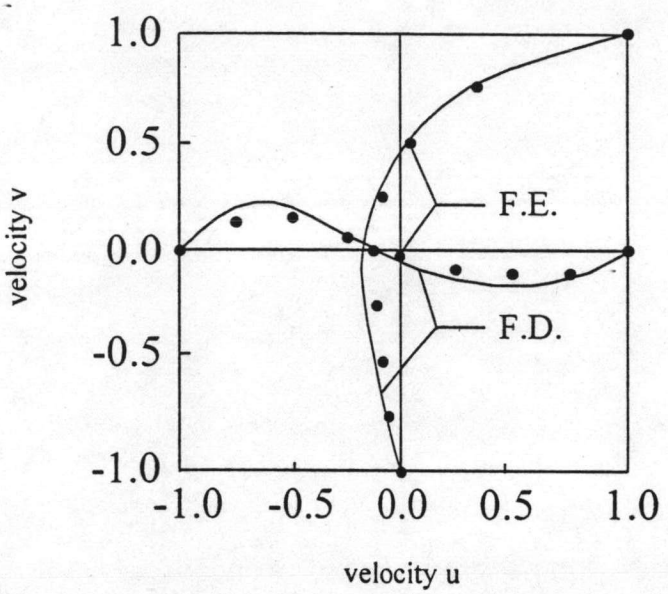


รูป 7.17 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ Re = 100

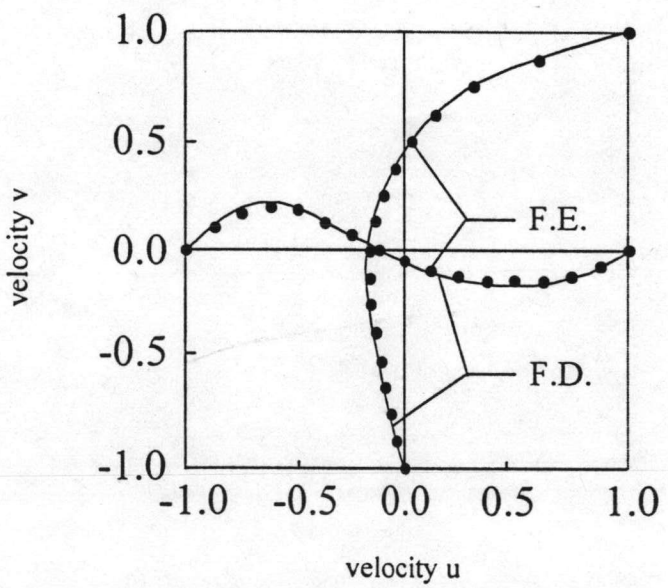


รูป 7.18 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด เมื่อ Re = 100

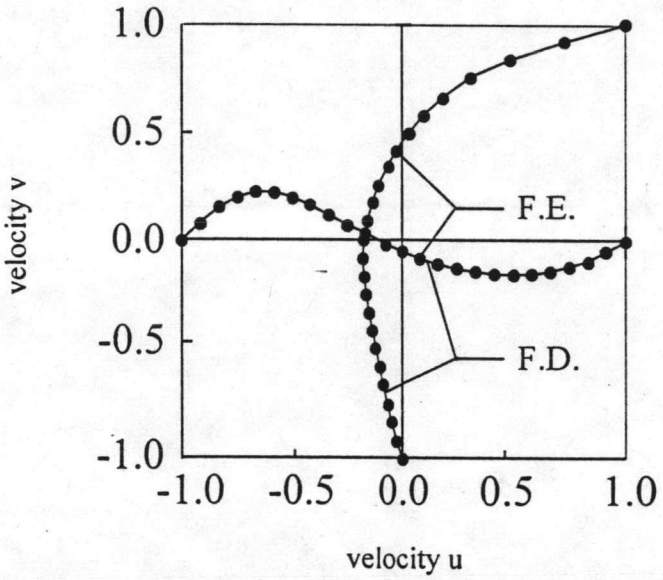
ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่ได้จากรู ปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ต่างๆกันสามารถแสดงได้โดยชัดเจนดังแสดงในรูป 7.19-7.21 ซึ่งเป็นการพล็อตความเร็ว u(y) ที่ตำแหน่ง x = 0 และความเร็ว v(x) ที่ตำแหน่ง y = 0.5 โดยการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์แท้จริงที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องที่ทำการจัดแบ่งรูปแบบที่มีความละเอียดสูงซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ขอเรียกผลลัพธ์นี้ว่าผลลัพธ์แท้จริง รูปทั้งสามแสดงในเห็นว่า ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเพิ่มมากขึ้นเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น สำหรับในกรณีที่ Re = 100 นี้ ผลแตกต่างระหว่างผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นกับผลเฉลยแท้จริงค่อนข้างน้อยถึงแม้จะใช้รูปแบบไฟไนต์แบบหยาบดังแสดงในรูป 7.19 แต่หากเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้นเช่นใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียด ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแท้จริงมากดังแสดงในรูป 7.12



รูป 7.19 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ Re = 100

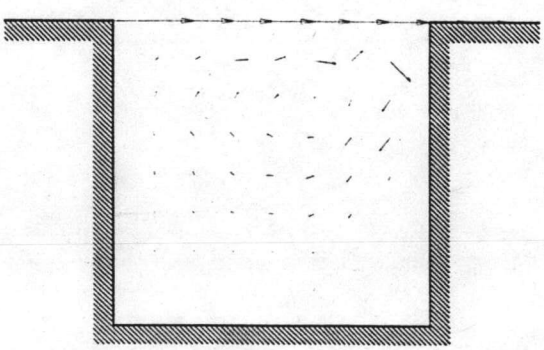


รูป 7.20 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ Re = 100

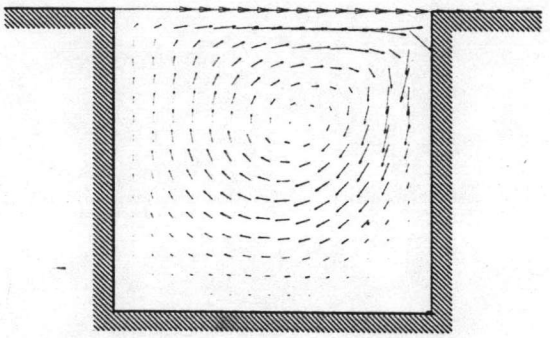


รูป 7.21 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ Re = 100

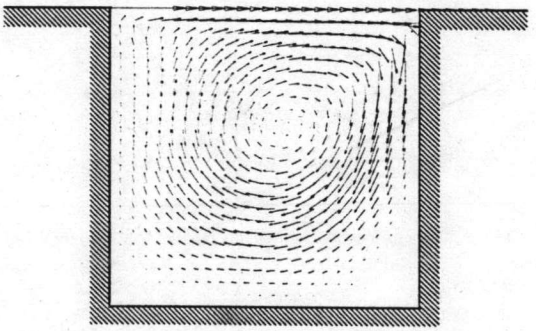
โดยปรกติ ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดๆจะลดลงหากเรย์โนลด์นัมเบอร์นั้นมีค่ามากขึ้น ปัญหานี้จึงได้ถูกทำซ้ำอีกครั้งสำหรับกรณีที่ Re = 400 รูป 7.22-7.24 แสดงลักษณะการไหลหมุนวนในกรณีใหม่นี้ จากการพิจารณาผลลัพธ์ของการไหลหมุนวนจากรูป 7.24 จะพบว่าจุดศูนย์กลางของการหมุนนั้นเคลื่อนตัวเข้าใกล้กึ่งกลางของช่องว่างสี่เหลี่ยมเมื่อเปรียบเทียบกับรูป 7.18 (Re = 100)



รูป 7.22 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ Re = 400

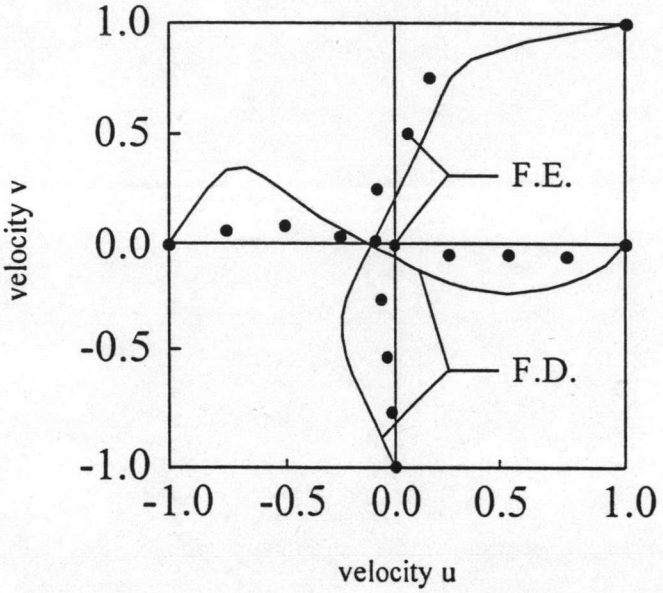


รูป 7.23 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ Re = 400

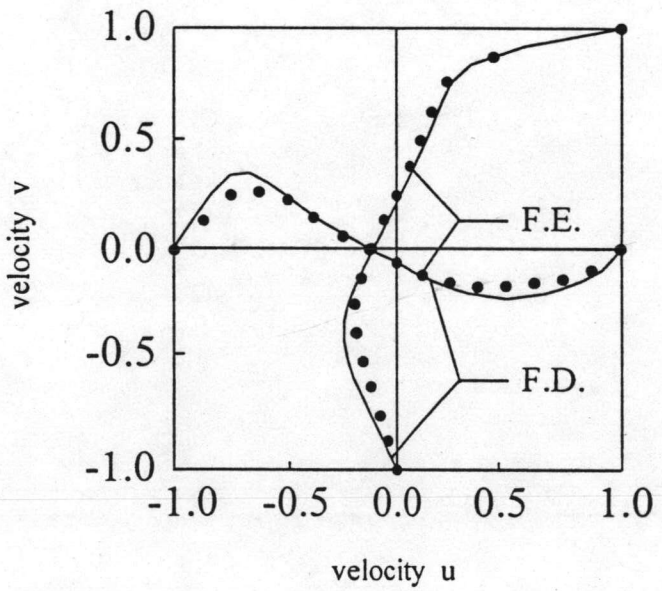


รูป 7.24 ลักษณะการไหลหมุนวนโดยการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ Re = 400

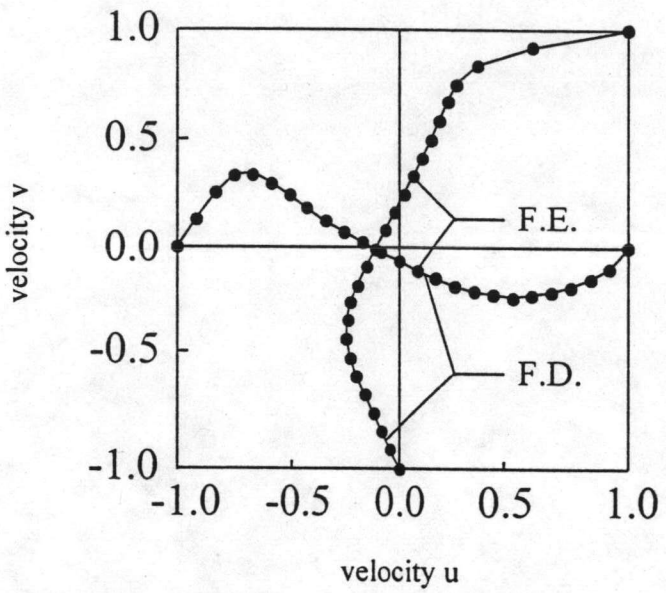
ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณีใหม่นี้เมื่อ Re = 400 สามารถเห็นได้ชัดจากรูป 7.25-7.27 โดยการพล็อตความเร็ว u(y) ที่ตำแหน่ง x = 0 และความเร็ว v(x) ที่ตำแหน่ง y = 0.5 รูป 7.25 แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบนี้มีความแตกต่างจากผลลัพธ์แท้จริงอย่างเห็นได้ชัดในขณะที่ผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดยังคงสามารถให้ความเที่ยงตรงสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์แท้จริง



รูป 7.25 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบหยาบเมื่อ Re = 400



รูป 7.26 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปานกลางเมื่อ Re = 400

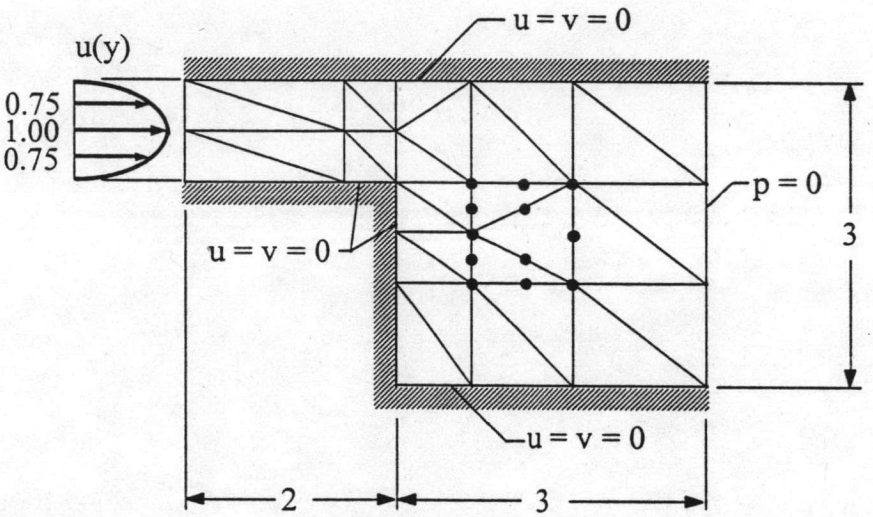


รูป 7.27 การเปรียบเทียบความเร็วคำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบละเอียดเมื่อ Re = 400

ทั้งสองตัวอย่างที่ได้อธิบายในหัวข้อ 7.2.1-7.2.2 นี้มีผลเฉลยแท้จริงที่สามารถใช้ตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น อันก่อให้เกิดความมั่นใจก่อนที่จะนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไปซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ ดังที่จะเสนอในหัวข้อต่าง ๆดังต่อไปนี้

7.2.3 การไหลผ่านช่องแคบที่พื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที

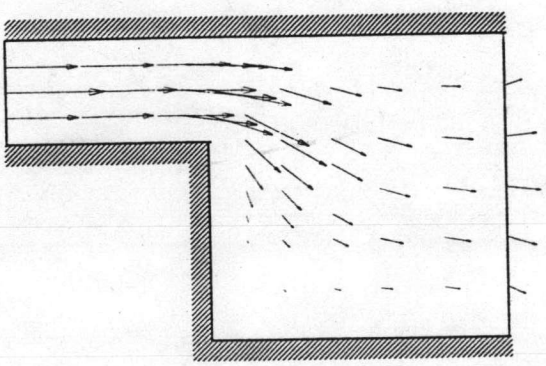
รูป 7.28 แสดงลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบความกว้างหนึ่งหน่วย โดยที่ลักษณะการกระจายของความเร็ว u(y) ณ ปากทางเข้าอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพาราโบลิกและหลังจากเกิดการไหลในช่องแคบเป็นระยะทาง 2 หน่วย พื้นที่หน้าตัดของช่องแคบได้เพิ่มขึ้นจาก 1 หน่วยไปเป็น 3 หน่วยโดยทันที ระยะทางของการไหลในช่วงหลังนี้ดำเนินต่อไปอีก 3 หน่วยก่อนสิ้นสุดที่ขอบเขตของการไหลซึ่งกำหนดความกดดันให้มีค่าเท่ากับศูนย์



รูป 7.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที

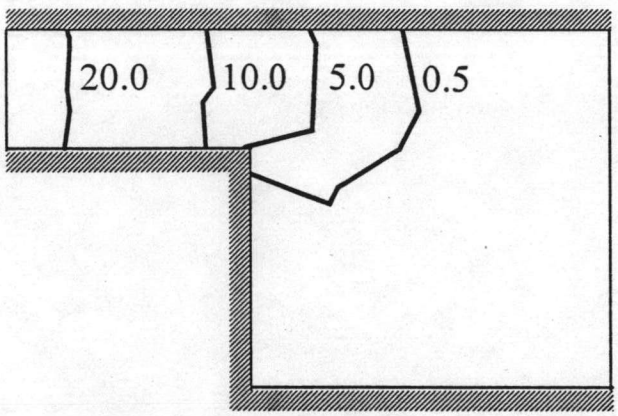
ลักษณะการไหลของปัญหาในรูปแบบดังเช่นแสดงในรูป 7.28 นี้ จะขึ้นอยู่กับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ หากเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าต่ำ การไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไป ในขณะที่หากเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น อาจเกิดการหมุนวนของการไหลในพื้นที่ส่วนด้านล่างที่มีหน้าตัดเพิ่มขึ้นอย่างทันทีทันใด

รูป 7.28 นอกจากจะแสดงเงื่อนไขขอบเขตปัญหานี้แล้ว ยังแสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 30 เอลิเมนต์ และ 79 จุดต่อ ในกรณีของการไหลที่มีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำ เช่น Re = 5 การเปลี่ยนแปลงของการไหลจะค่อยเป็นค่อยไปดังแสดงในรูป 7.29 โดยไม่เกิดการหมุนวน (Recirculation) ของของไหล ความเร็วที่ปากทางเข้ามีค่าสูงและความเร็วจะมีค่าลดลงเมื่อพื้นที่หน้าตัดนั้นเพิ่มขึ้น



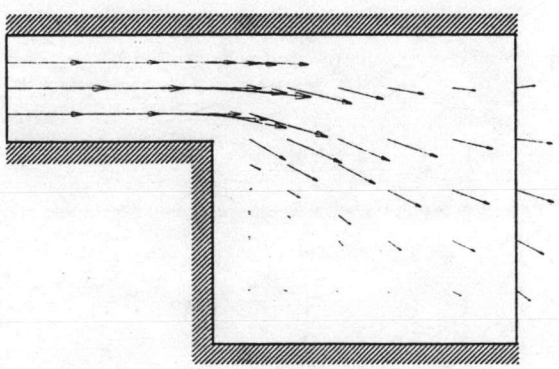
รูป 7.29 ผลลัพธ์ลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที เมื่อ Re = 5

รูป 7.30 แสดงลักษณะการกระจายของความดันด้วยเส้นระดับชั้น (Contour lines) ซึ่งบ่งบอกการเปลี่ยนแปลงของความดันที่เปลี่ยนแปลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปจากความดันสูงในบริเวณปากทางเข้า ไปสู่ความดันต่ำบริเวณปากทางออก



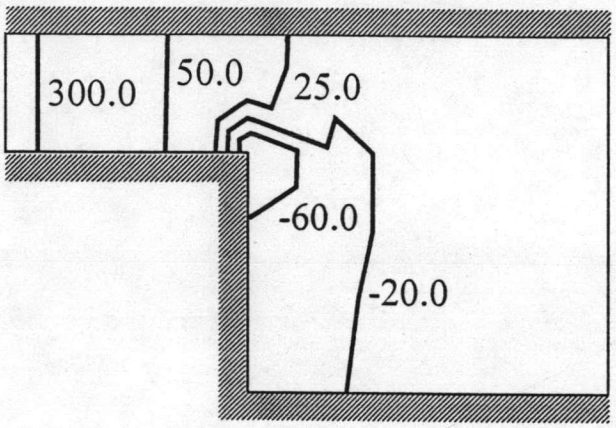
รูป 7.30 ลักษณะการกระจายของความดันของการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที เมื่อ Re = 5

รูป 7.31 แสดงผลลัพธ์ลักษณะของการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันทีเดียวกันนี้แต่เป็นกรณีที่ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ Re = 50 กล่าวคือเพิ่มขึ้นอีก 10 เท่าของกรณีที่แล้ว ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่สูงขึ้นนั้นสอดคล้องกับความเร็วที่ปากทางเข้านั้นถูกกำหนดให้มีค่ามากขึ้นหรือของไหลมีค่าความหนืดลดลง ซึ่งในกรณีนี้ก่อให้เกิดการหมุนวนของการไหลในบริเวณที่ช่องแคบนั้นมีหน้าตัดเพิ่มขึ้นอย่างทันที การไหลที่มีลักษณะเช่นนี้เปรียบเสมือนการไหลของอากาศเย็นออกจากท่อแอร์คอนดิชันในห้องทำงาน ซึ่งมีความเร็วสูงตรงช่องทางออกของอากาศเย็นและเกิดการหมุนวนของอากาศบริเวณใต้ช่องทางออกนั้น



รูป 7.31 ผลลัพธ์ลักษณะของการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที เมื่อ Re = 50

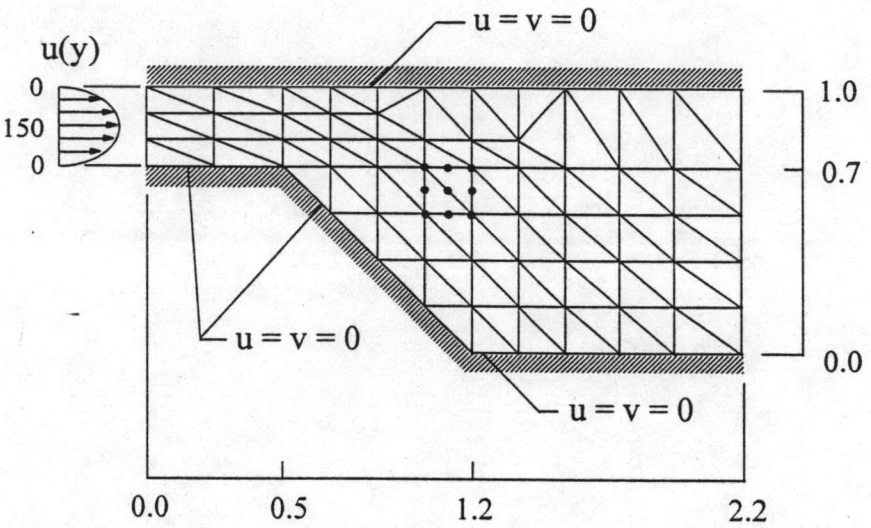
ปรากฏการณ์การไหลหมุนวนของของเหลวในบริเวณที่พื้นที่หน้าตัดเกิดการขยายตัวโดยทันทีสามารถตรวจสอบได้จากการพิจารณาลักษณะการกระจายของความดัน ดังแสดงในรูป 7.32 ซึ่งจะเห็นได้ว่า ความดันในบริเวณนั้นมีค่าต่ำ (เป็นลบในกรณีนี้) ซึ่งเป็นผลให้เกิดการเคลื่อนตัวของของไหลเข้าสู่บริเวณนี้



รูป 7.32 ลักษณะการกระจายของความดันของการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวแบบทันที เมื่อ Re = 50

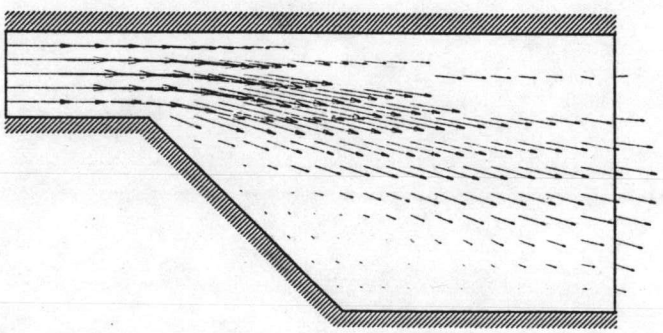
7.2.4 การไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบเชิงเส้น

เพื่อศึกษาปรากฏการณ์ของการไหลผ่านช่องแคบที่มีพื้นที่หน้าตัดเปลี่ยนแปลงไปให้ลึกซึ้งมากขึ้น จึงได้ทำการดัดแปลงรูปแบบของปัญหารวมทั้งเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้นเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ซึ่งคำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นตามมา รูป 7.33 แสดงรูปแบบลักษณะของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ รวมทั้งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 102 เอลิเมนต์และ 235 จุดต่อ ลักษณะของการกระจายของความเร็ว u(y) ที่ปากทางเข้านั้นกำหนดให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพาราโบลิกโดยมีค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 150 ขนาดของช่องแคบเริ่มจากความกว้าง 0.3 ในช่วงระยะทาง 0.5 จากนั้นขยายในรูปแบบเชิงเส้นสู่ความกว้าง 1.0 ในช่วงระยะทาง 0.7 และมีความกว้าง 1.0 เท่าเดิมนั้นไปอีกเป็นระยะทาง 1.0 ก่อนถึงทางออก



รูป 7.33 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบเชิงเส้น

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ซึ่งได้ประดิษฐ์ขึ้นดังที่ได้อธิบายในบทที่ 6 เพื่อใช้แก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ได้นำมาคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาการไหลนี้ รูป 7.34 แสดงลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงการขยายตัวแบบเชิงเส้นนี้ การไหลเริ่มจากรูปแบบของฟังก์ชันพาราโบลิกในช่วงของทางเข้า จากนั้นเริ่มมีทิศทางเบี่ยงเบนลงตามลักษณะการขยายตัวของความกว้างของช่องการไหลนั้นในขณะที่ความเร็วมีค่าลดลง ปริมาณของการไหลส่วนใหญ่ไหลสู่ทางออกด้านขวาโดยตรง ในขณะที่มีบางส่วนบริเวณตอนล่างของช่วงขยายนั้นมีการไหลแบบหมุนวนเพียงเล็กน้อยเกิดขึ้น

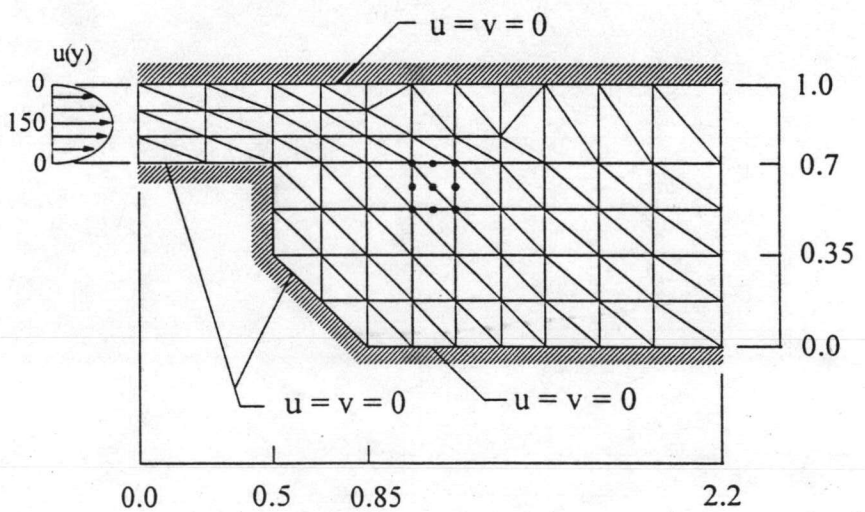


รูป 7.34 ผลลัพธ์ลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบเชิงเส้น

ในการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังแสดงในรูป 7.34 ดังแสดงมานี้ เริ่มจากการใช้เงื่อนไขเริ่มต้นของความเร็วและความดันที่มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดต่อทุกจุดยกเว้นตลอดแนวปากทางการไหลเข้าดังแสดงในรูป 7.30 จากนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ได้ทำการคำนวณโดยผลลัพธ์ได้ลู่สู่ผลลัพธ์ที่แท้จริงหลังจากการทำซ้ำโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน (ดังอธิบายในหัวข้อ 5.3) อยู่ 6 ครั้ง ก่อให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนโดยรวม (สมการ (5.31)) ประมาณ 0.02% การลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ดังแสดงในรูป 7.34 นี้ ทำให้เกิดความมั่นใจว่าผลลัพธ์ที่ได้เป็นผลลัพธ์ที่ถูกต้องจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่กำหนดให้ ตัวอย่างนี้จึงแสดงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์แบบไม่เชิงเส้นสำหรับปัญหาการไหลผ่านรูปทรงที่มีลักษณะซับซ้อนได้

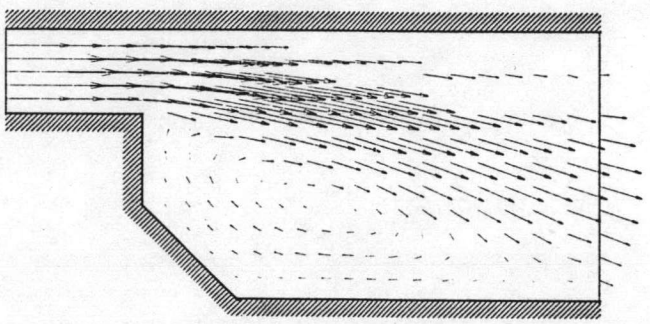
7.2.5 การไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบซับซ้อนขึ้น

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากขึ้น และเพื่อศึกษาการไหลหมุนวนของการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบค่อนข้างทันที จึงได้ทำการดัดแปลงรูปแบบของปัญหาที่เคยแสดงในรูป 7.33 ไปเล็กน้อยสู่รูป 7.35 โดยการเพิ่มส่วนการไหลหมุนวนให้มากขึ้น รูป 7.35 ใหม่นี้แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 114 เอลิเมนต์ และ 261 จุดต่อ ส่วนเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆยังคงเหมือนกับปัญหาในรูป 7.33 ทุกประการ



รูป 7.35 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบซับซ้อนขึ้น

จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 7.35 นี้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ได้นำมาใช้คำนวณอีกครั้ง ผลลัพธ์ลักษณะของการไหลที่เกิดขึ้นได้แสดงในรูป 7.33 จากการพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้นี้พบว่า ปรากฏการณ์ของการไหลโดยรวมยังคงคล้ายคลึงกับผลลัพธ์ในรูป 7.34 กล่าวคือ ปริมาณของของไหลส่วนใหญ่ผ่านเข้าช่องแคบทางด้านซ้ายของภาพแล้วไหลออกที่ทางออกทางด้านขวาของภาพโดยตรง หากแต่พื้นที่ของการไหลหมุนวนนั้นเพิ่มมากขึ้น

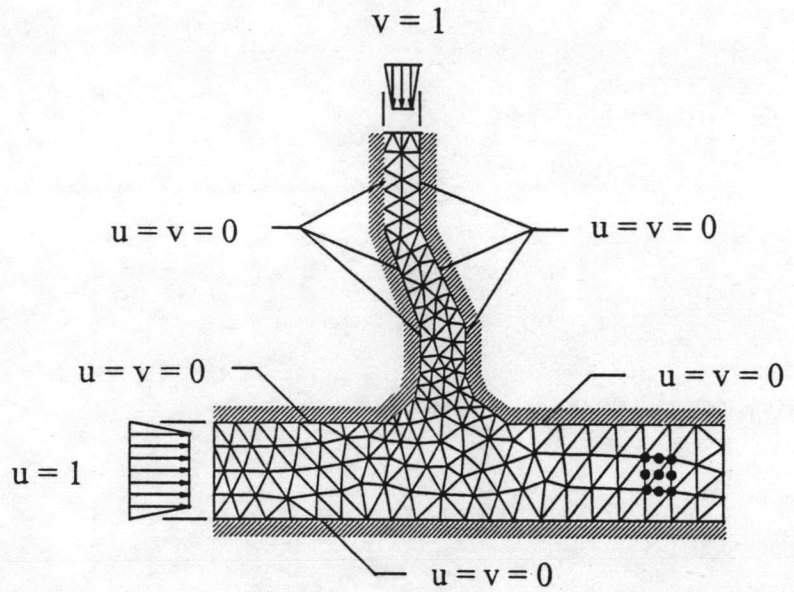


รูป 7.36 ผลลัพธ์ลักษณะการไหลผ่านช่องแคบที่มีช่วงขยายตัวแบบซับซ้อนขึ้น

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากตัวอย่างของการไหลผ่านช่องแคบที่มีการขยายตัวในรูปแบบต่างๆกันดังได้อธิบายในหัวข้อ 7.2.3-7.2.5 แสดงให้เห็นว่า ปรากฏการณ์ลักษณะของการไหลในรูปแบบต่างๆกันนั้น เช่น เกิดการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว รวมทั้งเกิดการไหลหมุนวน ต่างขึ้นอยู่กับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ของการไหลนั้นและลักษณะรูปแบบ (Geometry) ของปัญหาเป็นสำคัญ

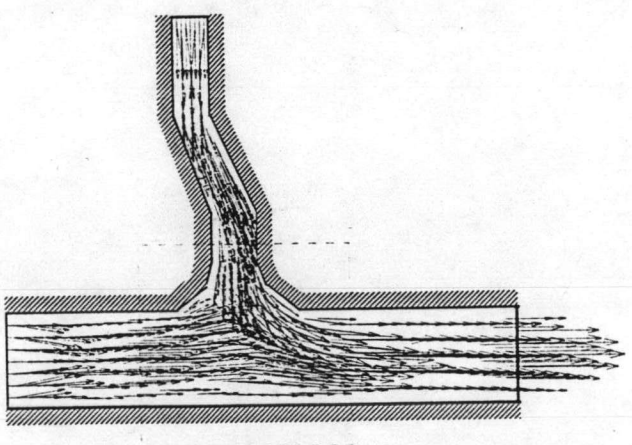
7.2.6 การไหลในท่อที่มาบรรจบกัน

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ปัญหาของการไหลในท่อ 2 ท่อที่มาบรรจบกันดังแสดงในรูป 7.37 จึงได้นำมาทำการคำนวณ ลักษณะของปัญหาประกอบด้วยท่อใหญ่วางตัวในแนวนอนซึ่งมีการไหลเข้าจากทางด้านซ้ายด้วยความเร็วสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดของท่อใหญ่นี้ ในช่วงตอนกลางของท่อใหญ่นี้ได้มีท่อขนาดเล็กที่มีความโค้งไปมาวิ่งเข้ามาบรรจบ โดยที่ปลายบนของท่อเล็กนี้มีการไหลเข้าด้วยความเร็วที่สม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดอีกด้วยเช่นกัน นอกเหนือไปจากลักษณะของปัญหาที่มีรูปแบบที่ซับซ้อนแล้ว จุดประสงค์ของการใช้ปัญหานี้คือการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการวางตัวของเอลิเมนต์ในรูปแบบใดๆ (Arbitrary) เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ รูป 7.37 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการวางตัวของเอลิเมนต์ต่างๆในลักษณะใดๆซึ่งประกอบด้วย 258 เอลิเมนต์ และ 603 จุดต่อ



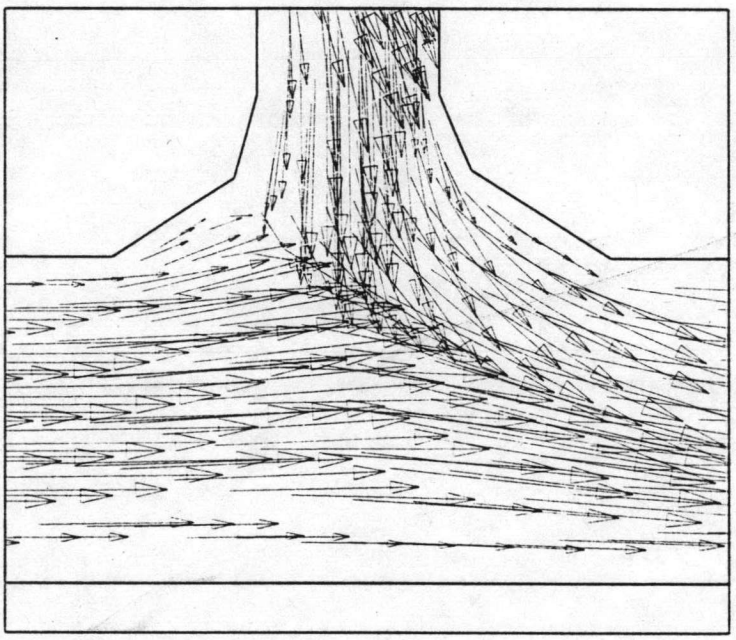
รูป 7.37 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการไหลในท่อที่มาบรรจบกัน

ผลลัพธ์ของการไหลในท่อที่มาบรรจบกันจากเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้นี้ ซึ่งคำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ได้แสดงในรูป 7.38 การไหลในท่อขนาดเล็กมีการเบี่ยงเบนไปตามลักษณะความโค้งไปมาของท่อ ทิศทางของการไหลเปลี่ยนแปลงไปเมื่อไหลมาบรรจบกับท่อใหญ่ แล้วจึงไหลรวมกันออกไปทางด้านขวาของท่อใหญ่



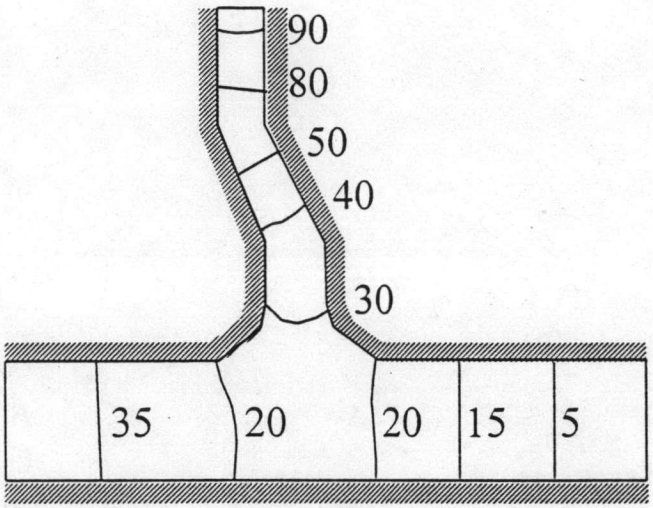
รูป 7.38 ผลลัพธ์ลักษณะการไหลในท่อที่มาบรรจบกัน (รายละเอียดในกรอบสี่เหลี่ยมได้ขยายและแสดงในรูป 7.39)

ลักษณะของการไหลในช่วงของท่อทั้งสองที่มาบราจบกันดังแสดงในกรอบสี่เหลี่ยมในรูป 7.38 ได้นำมาขยายและแสดงในรูป 7.39 เพื่อให้เห็นการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางของการไหลมาบรรจบกันได้ชัดเจนยิ่งขึ้น หากพิจารณารูป 7.39 นี้โดยละเอียดจะพบว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์ให้ผลของปรากฏการณ์การไหลได้อย่างค่อนข้างละเอียดถึงแม้ว่าเอลิเมนต์ที่ใช้นั้นจะมีขนาดใหญ่และจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ทั้งหมดนั้นค่อนข้างน้อย ยกตัวอย่างเช่น ในบริเวณขอบซ้ายบนของรอยต่อระหว่างท่อใหญ่และท่อเล็กในรูป 7.39 นี้ การไหลในท่อใหญ่มีการเคลื่อนตัวและเบนขึ้นบนเล็กน้อยตามขอบพนังท่อ ก่อนวกกลับลงหลังจากกระทบเข้ากับการไหลในแนวดิ่งที่มาจากท่อเล็กด้านบนเป็นต้น



รูป 7.39 รายละเอียดลักษณะการไหลในบริเวณที่ท่อมาบรรจบกัน

นอกเหนือจากผลลัพธ์ของความเร็ว ณ จุดต่อต่างๆที่คำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูป 7.38-7.39 แล้ว ผลลัพธ์อื่นยังประกอบด้วยค่าความดันตามจุดต่อซึ่งได้นำมาพล็อตในรูปแบบของเส้นชั้นดังแสดงในรูป 7.40 ลักษณะการกระจายของความดันดังแสดงในรูป 7.40 นี้แสดงปรากฏการณ์ของการไหลจากบริเวณที่มีความดันสูงไปสู่บริเวณที่มีความดันต่ำซึ่งสอดคล้องกับความเป็นจริง ค่าของความดันที่คำนวณได้สามารถให้ประโยชน์หลายๆอย่างในการออกแบบท่อ เช่น การคำนวณความหนาที่เหมาะสมของท่อ เป็นต้น

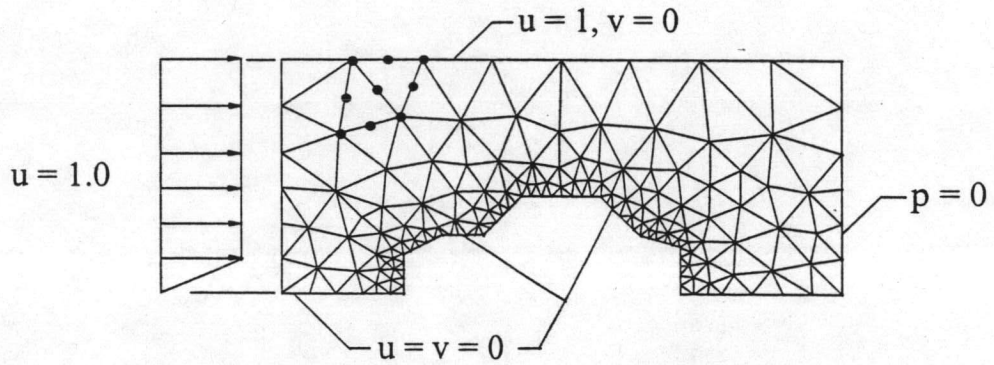


รูป 7.40 ผลลัพธ์ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความดันของการไหล
ในท่อที่มาบรรจบกัน

7.2.7 การไหลผ่านลำตัวรถยนต์

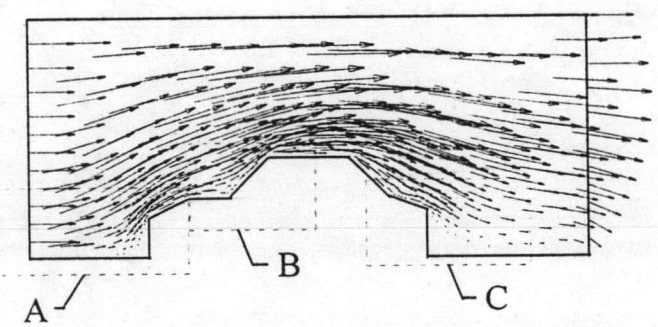
ปัญหาของการไหลอีกชนิดหนึ่งซึ่งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นสามารถนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้คือ ปัญหาการไหลผ่านรูปทรงรถยนต์ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยลักษณะสภาวะของการไหล รวมทั้งค่าของความดันตลอดผิวลำตัวรถยนต์ ซึ่งจะช่วยผู้ออกแบบในการปรับแต่งรูปร่างลักษณะรถยนต์ให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดก่อนนำไปสร้างขึ้นเป็นรูปแบบจริงเพื่อนำไปทดลองสู่การผลิตจริง

เพื่อแสดงผลประโยชน์จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าว รูป 7.41 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการไหลผ่านรูปทรงรถยนต์อย่างง่าย รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วย 260 เอลิเมนต์ และ 599 จุดต่อ โดยการจัดแบ่งเอลิเมนต์ได้ใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณผิวลำตัวรถเนื่องจากจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของความเร็วค่อนข้างมากในบริเวณนั้น ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ไกลออกไปมีขนาดใหญ่ขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์นั้นไม่มาก และเพื่อเป็นการลดจำนวนตัวไม่รู้ค่า ซึ่งจะเป็นผลต่อเนื่องในการลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ รวมทั้งปริมาณของหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้ในเครื่องคอมพิวเตอร์



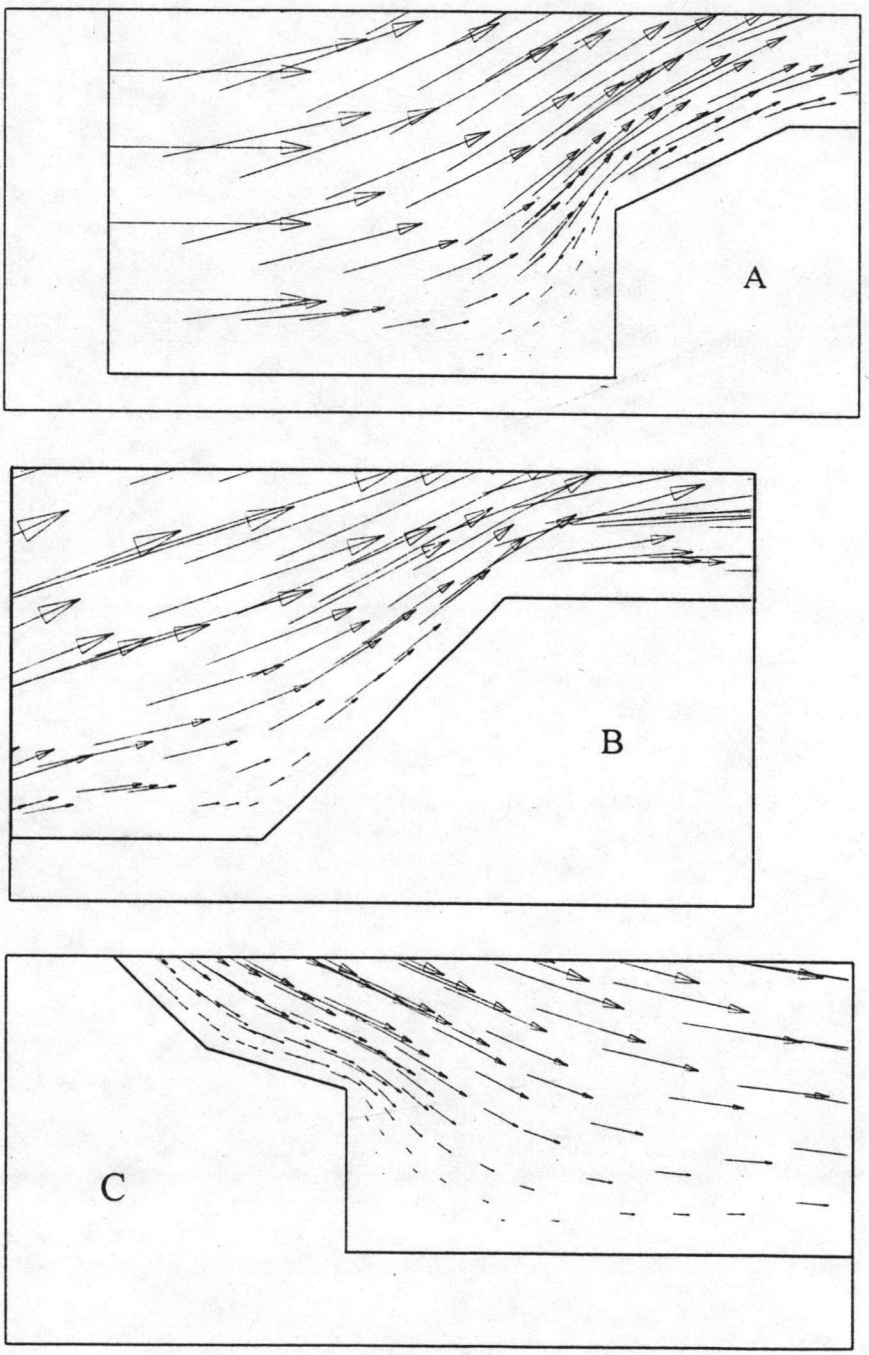
รูป 7.41 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของการไหลผ่านลำตัวรถยนต์

ผลลัพธ์ของการกระจายของความเร็วผ่านลำตัวรถซึ่งคำนวณได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวได้แสดงในรูป 7.42 ลักษณะปรากฏการณ์ของการไหลที่เกิดขึ้นสอดคล้องกับฟิสิกส์ของปัญหา กล่าวคือ ลักษณะของการไหลที่ไกลออกไปจากตัวรถนั้นมีการเปลี่ยนแปลงน้อย ในขณะที่ความเร็วของการไหลใกล้ลำตัวรถนั้นมีค่าน้อยและมีทิศทางในแนวสัมผัสไปกับลำตัวรถ รายละเอียดของการไหลใกล้ตัวรถซึ่งแสดงโดยกรอบสี่เหลี่ยมจำนวน 3 กรอบที่กำกับโดยกรอบ A, B และ C ได้ขยายให้ใหญ่ขึ้นและแสดงในรูป 7.43 การคำนวณหาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูป 7.42 นี้ เริ่มจากการใช้ค่าของความเร็วและความดันที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ณ ทุกๆจุดต่อในขอบเขตของการไหล ยกเว้นความเร็วที่เท่ากันตลอดแนวทางเข้าของการไหลทางด้านซ้ายของปัญหา จากการคำนวณพบว่า ผลลัพธ์ได้ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์แท้จริงโดยมีค่าความคลาดเคลื่อนโดยรวมซึ่งแสดงในสมการ (5.31) น้อยกว่า 0.1% หลังจากผ่านกระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสันจำนวน 10 ครั้ง



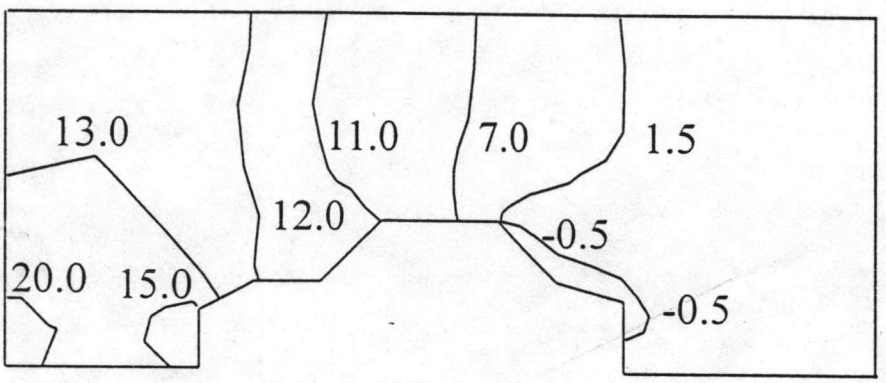
รูป 7.42 ผลลัพธ์ลักษณะการไหลผ่านรถยนต์ (รายละเอียดในกรอบได้ขยายและแสดงในรูป 7.43)

รายละเอียดของปรากฏการณ์ของการไหลที่คำนวณได้ในบริเวณกันชนด้านหน้าได้แสดงในรูปย่อย A ของรูป 7.43 ซึ่งแสดงถึงความเร็วของของไหลมีค่าลดลงพร้อมกับมีการเปลี่ยนทิศทางเชิดขึ้นผ่านกระโปรงรถ รูปย่อย B ในรูป 7.43 เดียวกันนี้แสดงถึงการไหลผ่านกระโปรงรถและเปลี่ยนทิศทางขึ้นไปตามกระจกหน้ารถก่อนวิ่งไปในทิศทางของหลังคารถ รูปย่อย C แสดงการไหลผ่านกันชนด้านหลังของตัวรถก่อนไหลออกทางด้านขวาของขอบเขตการไหลของปัญหานี้



รูป 7.43 รายละเอียดลักษณะของการไหลในบริเวณต่าง ๆกันรอบตัวรถ
(ใช้ประกอบกับรูป 7.42)

รูป 7.44 แสดงผลลัพธ์การกระจายของความดันที่คำนวณได้ซึ่งแสดงโดยเส้นชั้นที่ระดับต่างๆกัน ค่าของความดันต่างๆที่เกิดขึ้นนี้สอดคล้องกับฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นกล่าวคือ ความดันที่เกิดขึ้นบริเวณตอนหน้าของลำตัวรถ เช่น กันชนหน้า กระโปรงหน้า และกระจกหน้า นั้นมีค่าสูง ในขณะที่ความดันตามกระจกหลังและกันชนหลังจะมีค่าน้อย ซึ่งก่อให้เกิดแรงฉุดต้านการเคลื่อนตัวรถนั้น



รูป 7.44 ผลลัพธ์แสดงการกระจายของความดันรอบตัวรถ

ตัวอย่างทั้งหมด 9 ตัวอย่างที่ได้นำเสนอในบทนี้ หลายตัวอย่างเป็นตัวอย่างที่ใช้ในการตรวจสอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รวมทั้งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้แต่งขึ้นเช่นกัน ในขณะที่อีกหลายตัวอย่างเป็นตัวอย่างที่ใช้แสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เพื่อช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาของการไหลในหลายๆกรณีผ่านรูปแบบที่มีลักษณะซับซ้อน ผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมดดังแสดงในตัวอย่างต่างๆนี้ได้มาจากการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั้งสิ้น ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ ดังนั้น หากต้องการความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่สูงมากขึ้นจึงจำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น ซึ่งมีผลโดยตรงกับปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้อยู่ แต่อย่างไรก็ตาม ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ยังคงเหมือนเดิมโดยไม่ต้องเปลี่ยนแปลงส่วนใดๆในตัวโปรแกรมทั้งสิ้น ยกเว้นในบรรทัดที่แสดงตัวเลขของหน่วยความจำที่ต้องการใช้สำหรับปัญหานั้นๆ ซึ่งแสดงอยู่ในตอนต้นของตัวโปรแกรมเท่านั้น