บทที่ 6

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยรวมความเฉื่อย

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยรวมความเฉื่อยดังแสดงในบทที่ 5 ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โปรแกรมใหม่นี้มีการทำงานที่คล้ายคลึงกับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สโตกส์ในบทที่ 4 จุดประสงค์หลักในการประดิษฐ์โปรแกรมนี้ คือการแสดงวิธีการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนตามสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมเพื่อคำนวณหาลักษณะของการไหล หรือปรับปรุงโปรแกรมเพื่อนำไปใช้สำหรับงานวิจัยอื่นๆหลังจากที่ได้ทำความเข้าใจในตัวโปรแกรมนี้แล้ว โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้เขียนขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรนและได้ตั้งชื่อว่านาเวียร์ (NAVIER) โดยรายละเอียดของตัวโปรแกรมจะอธิบายในหัวข้อต่อไปนี้

6.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์นาเวียร์ มีโปรแกรมหลักซึ่งประกอบด้วยโปรแกรมย่อยเจ็ดโปรแกรม ขั้นตอนการคำนวณได้แสดงในรูป 6.1 โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

6.1.1 การทำงานเริ่มจากอ่านค่าข้อมูลนำเข้าของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้ จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด โคออร์ดิเนตของแต่ละจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นแต่ละเอลิเมนต์ ค่าความหนาแน่นและค่าความหนืดของของไหล จำนวนการทำซ้ำและเงื่อนไขค่าของความคลาดเคลื่อนเพื่อหยุดการทำซ้ำ

6.1.2 เข้าสู่กระบวนการทำซ้ำเพื่อแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น โดยสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการ (5.29) โดยการเรียกโปรแกรมย่อย TRI โปรแกรมย่อยนี้จะทำการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆดังแสดงในสมการ (5.30a-b) โดยมีรายละเอียดในสมการ (5.16-5.22) ก่อนที่จะเรียกโปรแกรมย่อย ASSMBLE เพื่อที่จะรวมทุกไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์มาสร้างขึ้นเป็นระบบสมการ

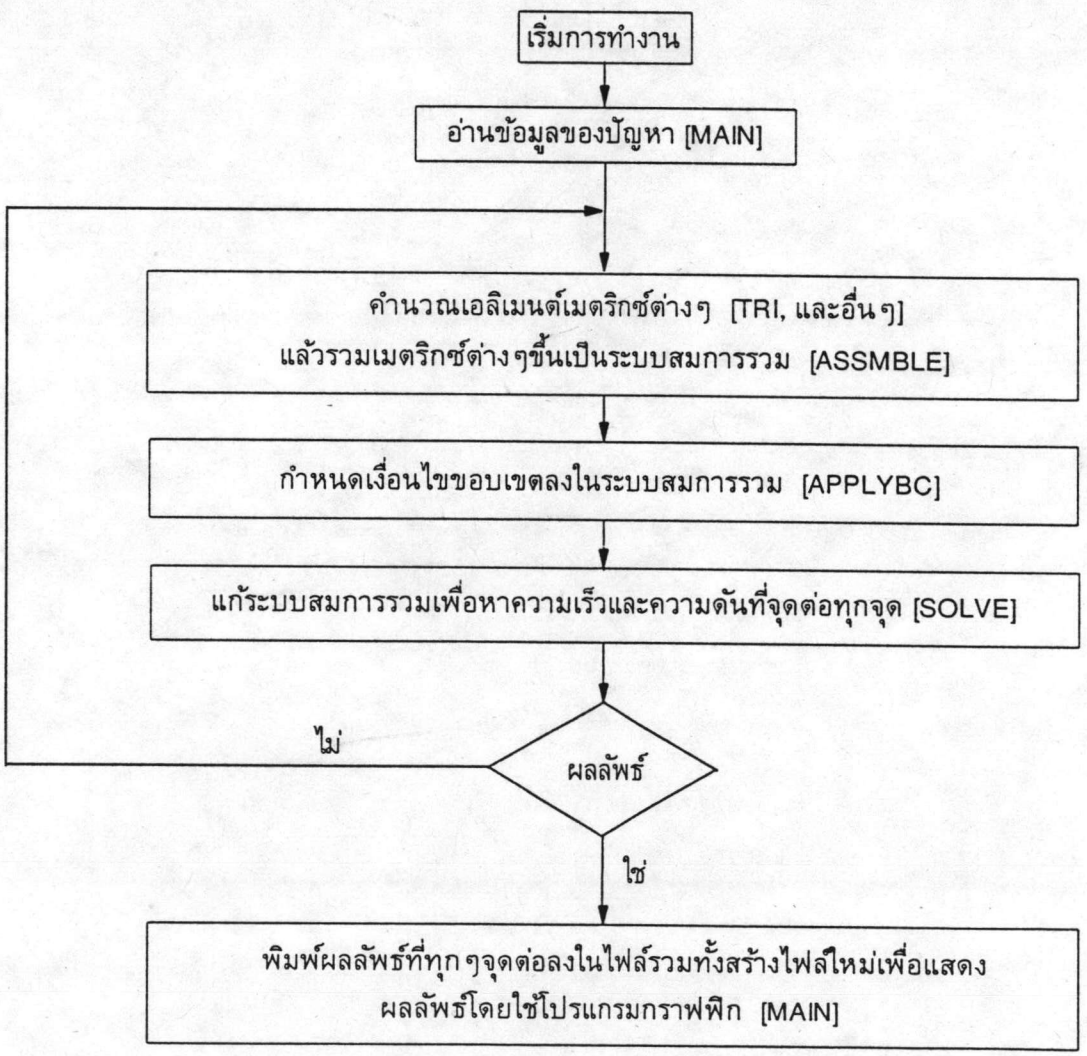
6.1.3 ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการรวมโดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC เงื่อนไขขอบเขตหลายๆชนิดสามารถนำมาประยุกต์ใช้ ดังตัวอย่างเช่น ความเร็ว

u และ v นี้ อาจถูกกำหนดตลอดทางเข้าของการไหล หรือความเร็ว u และ v นี้ จะมีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับจุดต่อตลอดผิวที่สัมผัสกับของแข็งเป็นต้น

6.1.4 แก้ระบบสมการ เพื่อหาค่าความเร็วและความดันที่จุดต่อต่างๆ โดยเรียกโปรแกรมย่อย SOLVE

6.1.5 ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ ในสมการ (5.13) ถ้าผลลัพธ์ลู่เข้าภายใต้ค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้แล้วให้ไปทำต่อในหัวข้อ 6.1.6 แต่หากผลลัพธ์ยังมีค่าความคลาดเคลื่อนมากกว่าค่าที่ตั้งไว้ให้กลับไปทำหัวข้อ 6.1.2 ใหม่

6.1.6 พิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในไฟล์ผลลัพธ์เพื่อนำไปใช้พล็อตลักษณะต่างๆ ของการไหล เช่น การแสดงลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ด้วยเส้นชั้นตลอดจนการพล็อตในรูปแบบของ x-y ต่างๆ



รูป 6.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ NAVIER

6.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์นาเวียร์ได้แสดงภาคผนวก ข ที่ท้ายเล่มของวิทยานิพนธ์นี้

6.3 ไฟล์ข้อมูลและไฟล์ผลลัพธ์

ลักษณะไฟล์ข้อมูลที่ใช้กับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์นาเวียร์ ประกอบด้วยหกส่วน ดังแสดงต่อไปนี้

6.3.1 ลักษณะของไฟล์ข้อมูล

บรรทัดแรก จำนวนบรรทัดที่อธิบายลักษณะของปัญหา

บรรทัดต่อมา ลักษณะของคำอธิบายเท่ากับจำนวนบรรทัดที่บอกไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่าง 2
FLOW BETWEEN PARALLEL PLATES
WITH 8 TRIANGLES AND 25 NODES

6.3.2 ขนาดของรูปไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายจำนวนจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดที่สอง จำนวนจุดต่อความเร็ว จุดต่อความดัน เอลิเมนต์ เงื่อนไขขอบเขตที่ทางออก การทำซ้ำ และความกว้างของความคลาดเคลื่อน

ตัวอย่าง	NPOIV	NPOIP	NELEM	NFREE	NITER	TOL
	15	9	8	1	20	0.1

6.3.3 ค่าคุณสมบัติของของไหล

บรรทัดแรก คำอธิบายคุณสมบัติของของไหล

บรรทัดที่สอง ค่าคุณสมบัติความหนืด

ตัวอย่าง	Density	Viscosity
	1.0	1.0

6.3.4 ข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำอธิบายข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดที่สอง หมายเลขจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตสำหรับความเร็ว u, v และความดัน p (0 = อิสระ, 1 = ยึดไว้) โคออร์ดิเนต และค่าของ u, v, p

ตัวอย่าง

NODE	IBCU	IBCV	IBCP	X	Y	U	V	P
1	1	1	0	0.	0.	1.	0.	0.
2	0	1	0	1.	0.	0.	0.	0.

หมายเหตุ: การนับเลขที่จุดต่อภายในเอลิเมนต์จะต้องนับเลขที่มุมของเอลิเมนต์ก่อนแล้วจึงนับเลขจุดต่อที่กลางขอบของเอลิเมนต์ (ดูตัวอย่างในหัวข้อ 6.4)

6.3.5 การจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายความหมายของบรรทัดถัดไป

บรรทัดต่อมา หมายเลขเอลิเมนต์ เลขจุดต่อที่มุมเอลิเมนต์จากนั้นจึงเป็นเลขจุดต่อที่กลางของเอลิเมนต์ (ดูรูป 3.1)

ตัวอย่าง

IE	I	J	K	L	M	N
1	1	13	11	12	6	7
2	1	3	13	8	7	2

4.3.6 เงื่อนไขการไหลที่ทางออก

บรรทัดแรก คำอธิบายรายละเอียด

บรรทัดต่อมา หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสามที่ขอบเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่าง

IE	II	JJ	KK
4	5	15	10

6.4 ตัวอย่างสำหรับการใช้โปรแกรม

เพื่อแสดงการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นาเวียร์ และขณะเดียวกันเพื่อตรวจสอบความถูกต้องสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่แล้ว ตัวอย่างการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวระหว่างแผ่นเรียบ 2 แผ่นได้นำเสนอในรูป 6.2 แผ่นล่างถูกยึดไว้ ในขณะที่แผ่นบนมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับหนึ่ง ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานกำหนดให้มีระยะเท่ากับหนึ่ง

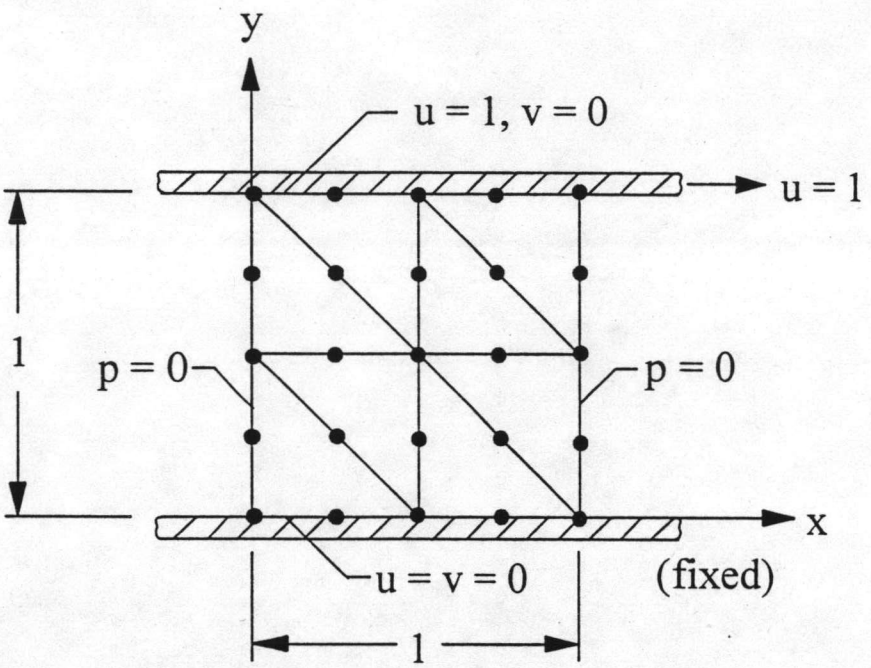


Fig. 6.2 การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวระหว่างแผ่นคู่ขนาน

รูปแบบการกระจายของความเร็วแม่นตรงที่ทุกตำแหน่งของ x สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้สำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติเช่นนี้ ในกรณีนี้สมการนาเวียร์-สโตกส์ ในแกน x ซึ่งคือสมการ (2.15a) ลดรูปมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.1)$$

โดยสมการ (2.15b) นั้นถูกต้องอยู่เสมอเมื่อกำหนดให้ค่าความดันนั้นเท่ากับศูนย์ในทุกๆ จุด หากทำการอินทิเกรตสมการ (6.1) สองครั้งจะได้

$$u(y) = Ay + B \qquad (6.2)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$u(y = 0) = 0 \qquad (6.3a)$$

และ

$$u(y = 1) = 1 \qquad (6.3b)$$

ก่อให้เกิด A = 1 และ B = 0 ดังนั้นค่ารูปแบบการกระจายความเร็วแม่นตรงตามแนวแกน y ณ ตำแหน่ง x ใดๆ คือ

$$u(y) = y \qquad (6.4)$$

การวิเคราะห์ปัญหานี้โดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นาเวียร์ เริ่มต้นจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังเช่นแสดงในรูป 6.2 ซึ่งรูปแบบดังกล่าวประกอบด้วย 25 จุดต่อของความเร็วและ 9 จุดต่อของความดัน และ 8 เอลิเมนต์ ความเร็ว u และ v ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ที่จุดต่อของด้านล่างของแผ่น และมีค่าความเร็ว u = 1 และ v = 0 ที่จุดต่อทางด้านบนของแผ่น และกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ที่จุดต่อตามแนวดิ่งทางด้านซ้ายและขวาของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

โดยการใช้รูปแบบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว ลักษณะไฟล์ข้อมูลที่ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นาเวียร์ต้องการนั้น ได้ทำการสร้างขึ้นและตั้งชื่อว่า COUETTE.DAT ไฟล์ข้อมูลดังกล่าวนี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```
2
EXAMPLE OF COUETTE FLOW USING NAVIER-STOKES CODE
FINITE ELEMENT MODEL WITH 25 NODES AND 8 ELEMENTS
    NPOIV     NPOIP     NELEM     NFREE   NITER      TOL
       25         9         8         1      20      0.1
    DENSITY      VISCOSITY
        1.0            1.0
NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES [25]:
 1     1     1     1     0.     0.     0.     0.     0.
 2     1     1     0     0.5    0.     0.     0.     0.
 3     1     1     1     1.0    0.     0.     0.     0.
 4     0     1     1     0.     0.5    0.     0.     0.
 5     0     1     0     0.5    0.5    0.     0.     0.
 6     0     1     1     1.0    0.5    0.     0.     0.
 7     1     1     1     0.     1.0    1.     0.     0.
 8     1     1     0     0.5    1.0    1.     0.     0.
 9     1     1     1     1.0    1.0    1.     0.     0.
10     1     1    -1     0.25   0.     0.     0.     0.
11     1     1    -1     0.75   0.     0.     0.     0.
12     0     1    -1     0.     0.25   0.     0.     0.
13     0     1    -1     0.25   0.25   0.     0.     0.
14     0     1    -1     0.5    0.25   0.     0.     0.
15     0     1    -1     0.75   0.25   0.     0.     0.
16     0     1    -1     1.0    0.25   0.     0.     0.
17     0     1    -1     0.25   0.5    0.     0.     0.
18     0     1    -1     0.75   0.5    0.     0.     0.
19     0     1    -1     0.     0.75   0.     0.     0.
20     0     1    -1     0.25   0.75   0.     0.     0.
21     0     1    -1     0.5    0.75   0.     0.     0.
22     0     1    -1     0.75   0.75   0.     0.     0.
23     0     1    -1     1.0    0.75   0.     0.     0.
24     1     1    -1     0.25   1.0    1.     0.     0.
25     1     1    -1     0.75   1.0    1.     0.     0.
ELEMENT NODAL CONNECTION [8]:
1     1     2     4     13     12     10
2     5     4     2     13     14     17
3     2     3     5     15     14     11
4     6     5     3     15     16     18
5     4     5     7     20     19     17
6     8     7     5     20     21     24
7     5     6     8     22     21     18
8     9     8     6     22     23     25
ELEMENT NODAL CONNECTION FOR OUTFLOW [1]:
4     3    16     6
```

จากนั้นเมื่อทำการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์นาเวียร์โดยใช้ไฟล์ข้อมูลนี้ จะเห็นรายละเอียดที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ดังนี้

```
>NAVIER          <Enter>

PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:
COUETTE.DAT      <Enter>

   THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF:
        NUMBER OF VELOCITY NODES        =    25
        NUMBER OF PRESSURE NODES        =     9
        NUMBER OF ELEMENTS              =     8
        NUMBER OF OUTFLOW BOUNDARY      =     1
   WITH NUMBER OF ITERATIONS REQUIRED   =    20
   OR SPECIFIED STOPPING TOLERANCE      =  0.10

   * PERFORMING COMPUTATION AT ITERATION NUMBER  1:
        ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQS.
        APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL INCREMENTS
        SOLVING SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR NODAL INCREMENTS
        ( TOTAL OF   59 EQUATIONS TO BE SOLVED )
     CURRENT SOLUTION HAS GLOBAL ERROR OF  150.00 %

   * PERFORMING COMPUTATION AT ITERATION NUMBER  2:
        ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQS.
        APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL INCREMENTS
        SOLVING SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR NODAL INCREMENTS
        ( TOTAL OF   59 EQUATIONS TO BE SOLVED )
     CURRENT SOLUTION HAS GLOBAL ERROR OF    0.00 %

   *** SOLUTION CONVERGED WITHIN SPECIFIED TOLERANCE ***


PLEASE ENTER FILE NAME FOR VELOCITY & PRESSURE SOLUTIONS:
UVP.OUT          <Enter>

PLEASE ENTER FILE NAME FOR U-V-P DISPLAY:
UVP.PLT          <Enter>

PLEASE ENTER FILE NAME FOR U-V DISPLAY:
UV.PLT           <Enter>

Stop - Program terminated.
```

หลักจากที่โปรแกรมคำนวณเสร็จ บรรทัดสุดท้ายโปรแกรมจะถามชื่อของไฟล์ผลลัพธ์ของความเร็วและความดัน เช่นเดียวกันกับไฟล์ผลลัพธ์ของเส้นชั้นเพื่อการพล็อตในรูปแบบ x-y ในตัวอย่างนี้ผลลัพธ์ของความเร็วและความดันจะถูกบรรจุในไฟล์ที่มีชื่อว่า UVP.OUT ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```
 NODAL VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS [   25]:

 NODE       U-VELOCITY       V-VELOCITY        PRESSURE

    1    0.000000E+00     0.000000E+00     0.000000E+00
```

2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.500000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.500000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.500000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
8	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
9	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
10	0.000000E+00	0.000000E+00	
11	0.000000E+00	0.000000E+00	
12	0.250000E+00	0.000000E+00	
13	0.250000E+00	0.000000E+00	
14	0.250000E+00	0.000000E+00	
15	0.250000E+00	0.000000E+00	
16	0.250000E+00	0.000000E+00	
17	0.500000E+00	0.000000E+00	
18	0.500000E+00	0.000000E+00	
19	0.750000E+00	0.000000E+00	
20	0.750000E+00	0.000000E+00	
21	0.750000E+00	0.000000E+00	
22	0.750000E+00	0.000000E+00	
23	0.750000E+00	0.000000E+00	
24	0.100000E+01	0.000000E+00	
25	0.100000E+01	0.000000E+00	

ผลลัพธ์ของความเร็วที่จุดต่อที่คำนวณได้ ได้แสดงในรูป 6.3 และได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์แม่นตรงในสมการที่ (6.4) แสดงในรูปที่ 6.4

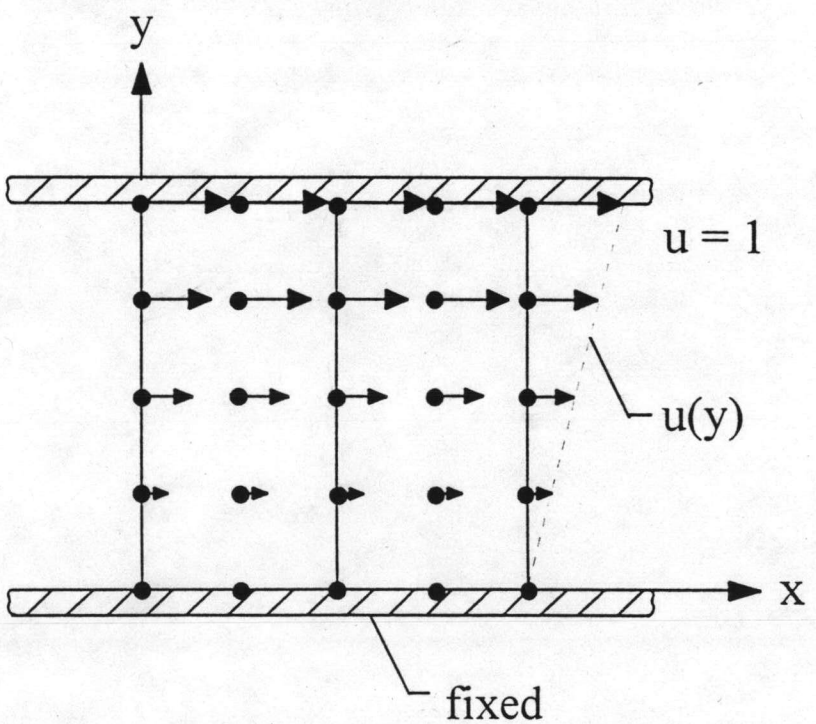


Fig. 6.3 ความเร็วที่จุดต่อที่คำนวณได้สำหรับการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน

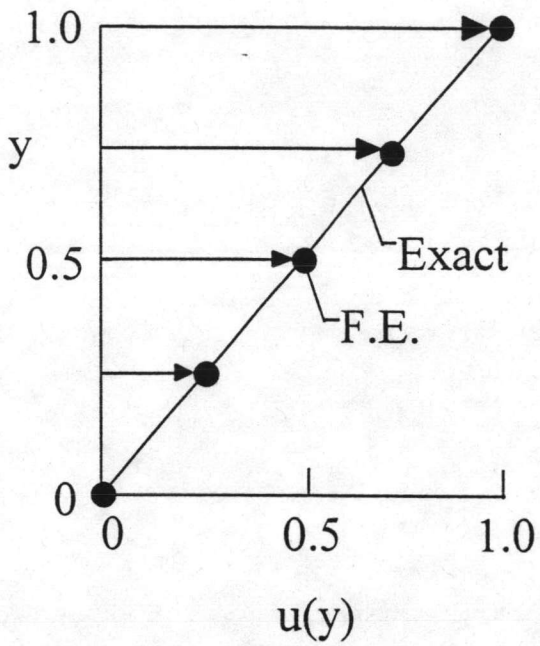


Fig. 6.4 การเปรียบเทียบการกระจายความเร็วระหว่างผลลัพธ์แม่นตรง และผลลัพธ์ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES (ดังอธิบายในบทที่ 4) และ NAVIER ดังที่ได้อธิบายในบทนี้ จะนำไปแก้ปัญหาของการไหลผ่านรูปทรงต่าง ๆกัน ลักษณะของการไหลที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาต่าง ๆกันนี้ ได้รวบรวมและแสดงในบทที่ 7 เพื่อแสดงความเที่ยงตรงและประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมานี้