บทที่ 5

การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยรวมความเฉื่อย

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลนั้นขึ้นอยู่กับค่าเรย์โนลด์ของการไหลซึ่งอาจจำแนกได้ออกเป็น 2 ประเภทที่ตรงข้ามกัน คือ การไหลแบบไม่หนืด ($Re = \infty$) และการไหลแบบเชื่องช้าแบบหนืด ($Re = 0$) ซึ่งในกรณีหลังนี้ได้อธิบายในบทที่แล้ว ในบทนี้ จะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลในระหว่างกลาง ปัญหาชนิดนี้มีเป็นจำนวนมาก ซึ่งเรย์โนลด์นัมเบอร์นั้นมีค่าอยู่ระหว่าง $0 < Re < \infty$ ปัญหาของการไหลประเภทนี้อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องมาจาก 2 พจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ (สมการ 2.20a-b) ต่างเป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ทั้งสองนี้จะนำมาแสดงในที่นี้ใหม่อีกครั้งเพื่อความชัดเจน ดังนี้

$$u\,u_{,x} + v\,u_{,x} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \qquad (5.1a)$$

$$u\,v_{,x} + v\,v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \qquad (5.1b)$$

โดย ค่าความเค้นในทิศตั้งฉากและความเค้นเฉือน คือ

$$\sigma_x = -p + 2\,\nu\,u_{,x} \qquad (5.2a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\,\nu\,v_{,y} \qquad (5.2b)$$

$$\tau_{xy} = \nu\,(u_{,y} + v_{,x}) \qquad (5.2c)$$

และ ค่าจลนศาสตร์ของความหนืด คือ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (5.3)$$

สมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ ดังแสดงในสมการ (5.1a-b) ข้างต้นนี้จะทำการแก้พร้อมไปกันกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล ซึ่งคือ

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \qquad (5.1c)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตของความเร็วตลอดขอบ S_1 (ดังแสดงในรูป 2.3) ดังนี้

$$u = u\ (x, y) \tag{5.4a}$$

$$v = v\ (x, y) \tag{5.4b}$$

และแรงกระทำที่ผิวตลอดขอบ S_2 ดังนี้

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \tag{5.5a}$$

$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \tag{5.5b}$$

5.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวซึ่งรวมพจน์ของความเฉื่อย สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ในทำนองคล้ายกันกับกรณีที่ไม่รวมพจน์ของความเฉื่อยที่นำเสนอไปแล้วในหัวข้อที่ 3.1 อย่างไรก็ตาม ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ชนิดนี้มีความซับซ้อนมากกว่า ทั้งนี้เนื่องจากพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความเฉื่อยนั้นทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นดังแสดงในสมการ (5.1a-b) อย่างไรก็ตาม ตัวไม่รู้ค่าสำหรับปัญหาของการไหลชนิดนี้ ยังคงเป็นตัวแปรของความเร็ว u, v และความดัน p เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อดังแสดงในรูป 3.1 จะนำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกัน การกระจายของความเร็วและความดันภายในเอลิเมนต์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ได้ดังนี้

$$u\,(x, y) = N_\alpha\, u_\alpha = \lfloor N \rfloor \{u\} \tag{5.6a}$$

$$v\,(x, y) = N_\alpha\, v_\alpha = \lfloor N \rfloor \{v\} \tag{5.6b}$$

$$p\,(x, y) = N_\lambda\, p_\lambda = \lfloor H \rfloor \{p\} \tag{5.6c}$$

โดย $\alpha = 1, 2, ..., 6;\ \lambda = 1, 2, 3$ N_α และ H_λ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและความดันตามลำดับ

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ จะใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ขั้นตอนของวิธีการนี้เริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก ซึ่งในกรณีนี้คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ จากนั้นจึงทำการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\int_A N_i\,(u\,u_{,x} + v\,u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y})\,dA = 0 \qquad (5.7a)$$

$$\int_A N_i\,(u\,v_{,x} + v\,v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y})\,dA = 0 \qquad (5.7b)$$

$$\int_A H_i\,(u_{,x} + v_{,y})\,dA = 0 \qquad (5.7c)$$

โดยที่ A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ ทฤษฎีบทของเกาส์จะนำมาประยุกต์เข้ากับสมการ (5.7a-b) เพื่อก่อให้เกิดค่าอินทิกรัลที่สอดคล้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ กระบวนการในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ จึงคล้ายคลึงกับกระบวนการที่ใช้การไหลแบบสโตกส์ ดังอธิบายในบทที่ 3 ซึ่งจะได้

$$\int_A N_i\,(u\,u_{,x} + v\,u_{,y})\,dA + \int_A (N_{i,x}\,\sigma_x)\,dA + \int_A (N_{i,y}\,\tau_{xy})\,dA$$
$$= \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (5.8a)$$

$$\int_A N_i\,(u\,v_{,x} + v\,v_{,y})\,dA + \int_A (N_{i,x}\,\tau_{xy})\,dA + \int_A (N_{i,y}\,\sigma_y)\,dA$$
$$= \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (5.8b)$$

ทำการแทนค่าความเค้นในรูปแบบของความเร็วและความดัน ดังแสดงสมการ (5.2a-c) สมการข้างบนนี้จะกลายมาเป็น

$$\int_A N_i\,u\,u_{,x}\,dA + \int_A N_i\,v\,u_{,y}\,dA - \int_A N_{i,x}\,p\,dA$$
$$+ \int_A 2\,\nu\,N_{i,x}\,u_{,x}\,dA + \int_A \nu\,N_{i,y}\,u_{,y}\,dA + \int_A \nu\,N_{i,y}\,v_{,x}\,dA$$
$$= \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (5.9a)$$

$$\int_A N_i\,u\,v_{,x}\,dA + \int_A N_i\,v\,v_{,y}\,dA - \int_A N_{i,y}\,p\,dA$$
$$+ \int_A \nu\,N_{i,x}\,u_{,y}\,dA + \int_A \nu\,N_{,x}\,v_{,x}\,dA + \int_A 2\,\nu\,N_{,y}\,v_{,y}\,dA$$
$$= \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (5.9b)$$

และสมการการอนุรักษ์มวล คือ

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y})\, dA = 0 \tag{5.9c}$$

จากการกำหนดการกระจายของความเร็วและความดันบนเอลิเมนต์ ในรูปแบบดังนี้

$$u = N_\alpha u_\alpha \tag{5.10a}$$

$$v = N_\alpha v_\alpha \tag{5.10b}$$

$$p = H_\lambda p_\lambda \tag{5.10c}$$

ดังนั้น

$$u_{,x} = N_{\alpha,x} u_\alpha \quad ; \quad u_{,y} = N_{\alpha,y} u_\alpha \tag{5.11a}$$

$$v_{,x} = N_{\alpha,x} v_\alpha \quad ; \quad v_{,y} = N_{\alpha,y} v_\alpha \tag{5.11b}$$

แทนสมการ (5.10-5.11) ลงในสมการ (5.9a-c) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^x} \tag{5.12a}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta = Q_{\alpha^y} \tag{5.12b}$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \tag{5.12c}$$

โดย

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x}\, dA \tag{5.13a}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y}\, dA \tag{5.13b}$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda\, dA \tag{5.13c}$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda\, dA \tag{5.13d}$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = \int_A 2\nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x}\, dA + \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y}\, dA \tag{5.13e}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xy} = \int_A \nu\, N_{\alpha,y}\, N_{\beta,x}\, dA \tag{5.13f}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yx} = \int_A \nu\, N_{\alpha,x}\, N_{\beta,y}\, dA \tag{5.13g}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yy} = \int_A \nu\, N_{\alpha,x}\, N_{\beta,x}\, dA + \int_A 2\nu\, N_{\alpha,y}\, N_{\beta,y}\, dA \tag{5.13h}$$

$$Q_\alpha{}^{x} = \int_{S_2} N_i\, T_x\, dS \tag{5.13i}$$

$$Q_\alpha{}^{y} = \int_{S_2} N_i\, T_y\, dS \tag{5.13j}$$

5.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆดังแสดงในสมการ (5.13a-j) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงเลข การประดิษฐ์ดังกล่าวเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์โดยใช้สมการ (3.25) ดังนี้

$$N_\alpha = A_{\alpha\xi}\, R_\xi \tag{5.14}$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, ..., 6$; $A_{\alpha\xi}$ และ R_ξ ได้แสดงในสมการ (3.26) และ (3.27) โดยการใช้สมการ (3.34-3.39) ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์คือ

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, H_\eta \tag{5.15a}$$

และ

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, H_\eta \tag{5.15b}$$

โดย $\eta = 1, 2, 3,$ และ H_η ได้แสดงในสมการ (3.29)

ดังนั้น ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.13e) คือ

$$S_{\alpha\beta}{}^{xx} = \int_A 2\nu\, N_{\alpha,x} N_{\beta,x}\, dA + \int_A \nu\, N_{\alpha,y} N_{\beta,y}\, dA \tag{5.13e}$$

$$= 2\nu \int_A A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, H_\eta\, A_{\beta\lambda}\, B_{\lambda\mu}\, H_\mu\, dA$$

$$+ \nu \int_A A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, H_\eta\, A_{\beta\lambda}\, C_{\lambda\mu}\, H_\mu\, dA$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xx} = 2\nu M_{\alpha\beta}{}^{xx} + \nu M_{\alpha\beta}{}^{yy} \tag{5.16a}$$

ในทำนองเดียวกันเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.13f-h) คือ

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu M_{\alpha\beta^{xy}} \tag{5.16b}$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu M_{\alpha\beta^{yx}} \tag{5.16c}$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu M_{\alpha\beta^{xx}} + 2\nu M_{\alpha\beta^{yy}} \tag{5.16d}$$

โดย

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{5.17a}$$

$$M_{\alpha\beta^{xy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{5.17b}$$

$$M_{\alpha\beta^{yx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{5.17c}$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{5.17d}$$

เมตริกซ์ A, B, C, และ G ในสมการเหล่านี้ได้แสดงในสมการ (3.26), (3.35), (3.38), และ (3.42) ตามลำดับ ซึ่งประกอบด้วยตัวกำกับ $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1, 2, ..., 6; \eta, \mu = 1, 2, 3.$

และเช่นเดียวกัน เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (2.13c) คือ

$$H_{\alpha\lambda^x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda \, dA \tag{5.13c}$$

$$= \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_\eta H_\lambda \, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_\eta H_\lambda \, dA$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} G_{\eta\lambda} \tag{5.18a}$$

ในทำนองเดียวกันเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.13d) คือ

$$H_{\alpha\lambda^y} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} G_{\eta\lambda} \tag{5.18b}$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, ..., 6$ และ $\eta, \lambda = 1, 2, 3.$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.13a) คือ

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x}\, dA \tag{5.13a}$$

$$= \int_A A_{\alpha\xi} R_\xi A_{\beta\eta} R_\eta A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} H_\mu\, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A R_\xi R_\eta H_\mu\, dA$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} F_{\xi\eta\mu} \tag{5.19a}$$

ในทำนองเดียวกันเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.13b) คือ

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} C_{\lambda\mu} F_{\xi\eta\mu} \tag{5.19b}$$

โดยที่ $\alpha, \xi, \beta, \eta, \gamma, \lambda = 1, 2, ..., 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ เมตริกซ์ F ในสมการ (5.19a-b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอินทิกรัลได้ดังนี้

$$F_{\xi\eta\mu} = \int_A R_\xi R_\eta H_\mu\, dA \tag{5.20}$$

โดยเมตริกซ์ R และ H ได้แสดงในสมการ (3.27) และ (3.29) ตามลำดับ เอลิเมนต์เมตริกซ์ F ในสมการ (5.20) สามารถหาค่าในรูปแบบเมตริกซ์ได้ เนื่องจาก

$$R_\xi R_\eta = \begin{bmatrix} L_1^4 & L_1^2 L_2^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^3 L_3 & L_1^3 L_2 \\ L_1^2 L_2^2 & L_2^4 & L_2^2 L_3^2 & L_2^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_2^3 \\ L_1^2 L_3^2 & L_2^2 L_3^2 & L_3^4 & L_2 L_3^3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 \\ L_1^2 L_2 L_3 & L_2^3 L_3 & L_2 L_3^3 & L_2^2 L_3^2 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 \\ L_1^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 \\ L_1^3 L_2 & L_1 L_2^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^2 L_2^2 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

ดังนั้นหลังจากการอินทิเกรตสมการ (5.20) จะได้เมตริกซ์ F ดังต่อไปนี้

$$F_{\xi\eta 1} = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 120 & 12 & 12 & 6 & 24 & 24 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad (5.22a)$$

$$F_{\xi\eta 2} = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \\ 12 & 120 & 12 & 24 & 6 & 24 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \qquad (5.22b)$$

$$F_{\xi\eta 3} = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 120 & 24 & 24 & 6 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad (5.22c)$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้ดังแสดงในสมการ (5.16-5.23) สามารถนำมาใช้ในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง อย่างไรก็ตาม สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (5.12) ที่เกิดขึ้นนี้อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงต้องนำวิธีการการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Iteration Method) มาใช้ในการหาผลลัพธ์ กระบวนการดังกล่าวจะอธิบายในหัวข้อย่อย 5.3 ดังต่อไปนี้

5.3 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้ดังแสดงในสมการ (5.12a-c) นั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ระบบสมการในรูปแบบไม่เชิงเส้นนี้จำเป็นต้องทำการแก้ด้วยวิธีการทำ

ซ้ำ (เดชะอำไพ, 2539) โดยในที่นี้จะทำการประยุกต์ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันมาใช้ หากพิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย n สมการในรูปแบบดังนี้

$$[K(x)]\{x\} = \{R\} \tag{5.24}$$

โดย $x_i, i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ เป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องการหา หาก x_i เหล่านี้ไม่ใช่ค่าที่ถูกต้อง ดังนั้นค่าตกค้างสำหรับสมการที่ i^{th} ใดๆ ก็คือ

$$F_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = K_{ij}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, x_j - R_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \tag{5.25}$$

แนวคิดของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน คือ การประยุกต์อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน F_i ที่ประกอบด้วย n ตัวแปร ซึ่งคือ

$$F_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots\ldots, x_n + \Delta x_n)$$

$$= F_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, \Delta x_j + \ldots\ldots$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots, n \tag{5.26}$$

โดยการละพจน์อันดับสูงขึ้นไปและกำหนดให้ค่าทางด้านซ้ายมือของสมการเป็นศูนย์เมื่อ x_i, $i = 1, 2, \ldots.., n$ ลู่เข้าหาผลลัพธ์แม่นตรง สมการ (5.26) จะก่อให้เกิดระบบสมการซึ่งตัวไม่รู้ค่าคือ Δx_j ดังนี้

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, \Delta x_j = -F_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \tag{5.27}$$

กระบวนการดังกล่าวเป็นกระบวนการการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันซึ่งได้นำมาประยุกต์เพื่อใช้แก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่เชิงเส้นดังที่ได้แสดงในสมการ (5.12a-c) กระบวนการดังกล่าวเริ่มจากการเขียนสมการในรูปแบบของค่าตกค้าง เช่น ค่าตกค้างของระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (5.12a) คือ

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x}\, u_\beta\, u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\, v_\beta\, u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x}\, p_\lambda$$

$$+ S_{\alpha\beta^{xx}}\, u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}}\, v_\beta - Q_{\alpha^x} \tag{5.28a}$$

และเช่นเดียวกัน ค่าตกค้างสำหรับสมการ (5.12b) คือ

$$F_{\alpha^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda$$
$$+ S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - Q_{\alpha^y} \qquad (5.28b)$$

และค่าตกค้างสำหรับสมการ (5.12c) คือ

$$F_\mu = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \qquad (5.28c)$$

โดยการประยุกต์สมการ (5.27) เข้ากับสมการ (5.28a-c) จะก่อให้เกิดระบบสมการเพื่อใช้แก้หาค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่รู้ค่า ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\lambda^x}} \\ \hdashline \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\lambda^y}} \\ \hdashline \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^x}} & \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^y}} & \underset{(3x3)}{0} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underset{(6x1)}{\Delta u_\beta} \\ \hdashline \underset{(6x1)}{\Delta v_\beta} \\ \hdashline \underset{(3x1)}{\Delta p_\lambda} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \underset{(6x1)}{F_{\alpha^x}} \\ \hdashline \underset{(6x1)}{F_{\alpha^y}} \\ \hdashline \underset{(3x1)}{F_\mu} \end{array}\right\} \qquad (5.29)$$

โดย

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \qquad (5.30a)$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \qquad (5.30b)$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \qquad (5.30c)$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \qquad (5.30d)$$

ในสมการ. (5.30a-d) นี้ u_γ และ v_γ แทนค่าความเร็วของการทำซ้ำครั้งที่ i^{th} โดยเมตริกซ์อื่นๆทางด้านขวาของสมการนั้นได้แสดงในสมการ (5.13-5.23) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (5.29) นี้ได้นำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังที่จะอธิบายโดยละเอียดในบทที่ 6 ในระหว่างกระบวนการทำซ้ำ จะทำการคำนวณค่าที่เพิ่มขึ้นของความเร็วและความดันตามจุดต่อต่างๆ กระบวนการดังกล่าวนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อความคลาดเคลื่อนรวมนั้นน้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ ค่าความคลาดเคลื่อนรวม (Overall error) นี้คิดเป็นเปอร์เซนต์ได้โดยการคำนวณจาก

$$\text{Overall error} = \frac{\text{Error}}{\text{Sum}} \times 100\% \tag{5.31}$$

ในสมการนี้

$$\text{Error} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (\Delta p_j) \tag{5.32a}$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (p_j) \tag{5.32b}$$

โดย NPOIV และ NPOIP แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของความเร็วและความดัน ตามลำดับ