บทที่ 4

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยไม่รวมความเฉื่อย

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ดังแสดงในบทที่ 3 ได้นำมาทำการประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อแก้ปัญหาของการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยไม่รวมความเฉื่อย จุดประสงค์หลักของการประดิษฐ์โปรแกรมนี้ คือการประดิษฐ์อย่างเป็นขั้นเป็นตอนตามสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมเพื่อคำนวณหาลักษณะของการไหล หรือปรับปรุงโปรแกรมเพื่อนำไปใช้สำหรับงานวิจัยอื่นๆหลังจากที่ได้เข้าใจในตัวโปรแกรมนี้แล้ว โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้เขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ซึ่งสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลรวมทั้งคอมพิวเตอร์ชนิดอื่นแบบต่างๆกันไปจนถึงซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ได้ตั้งให้ชื่อว่า สโตกส์ (STOKES) โดยรายละเอียดของโปรแกรมจะอธิบายในหัวข้อต่อไปนี้

4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สโตกส์มีโปรแกรมหลักซึ่งประกอบด้วยโปรแกรมย่อยเจ็ดโปรแกรม ขั้นตอนการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้มีดังต่อไปนี้

4.1.1 การทำงานเริ่มจากอ่านค่าข้อมูลนำเข้าของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนี้ จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด โคออร์ดิเนตของแต่ละจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นแต่ละเอลิเมนต์ รวมทั้งค่าความหนืดของของไหลนั้น

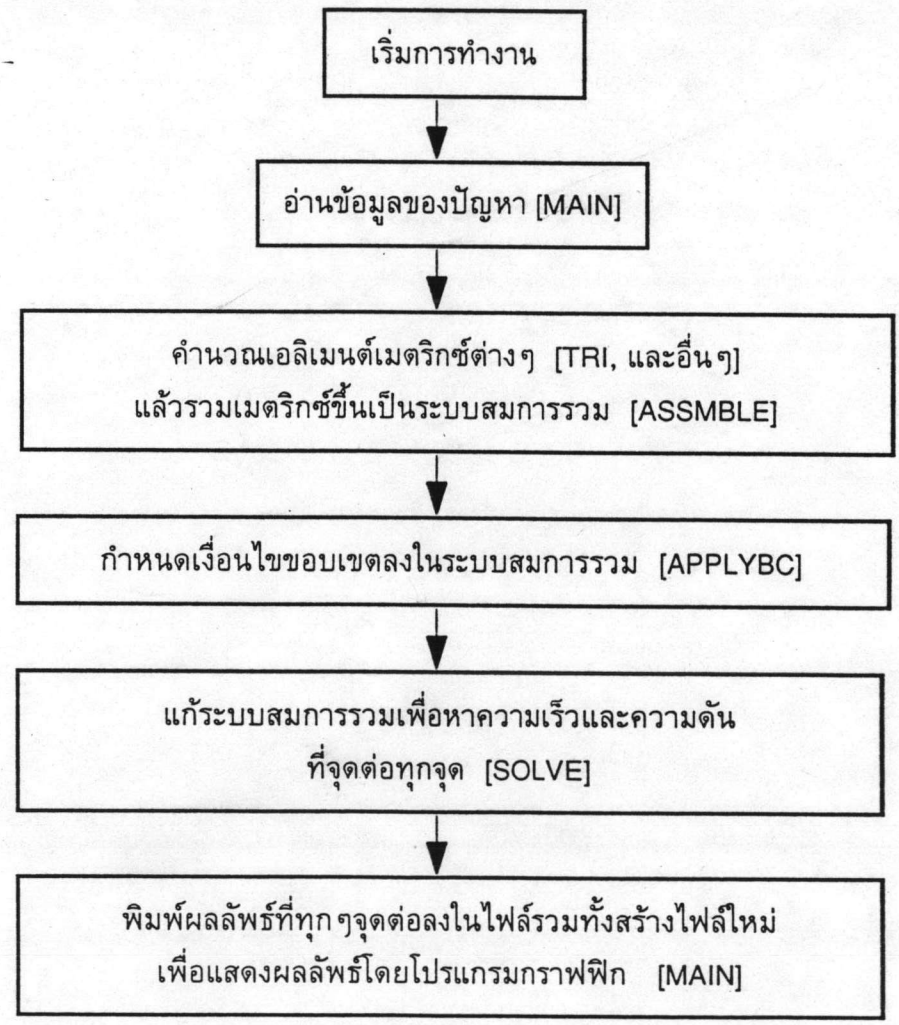
4.1.2 สร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.32-3.47) โดยการเรียกโปรแกรมย่อย TRI โปรแกรมย่อยนี้ทำการคูณกันระหว่างเมตริกซ์ต่างๆซึ่งเรียกใช้โปรแกรมย่อย MULMAT โปรแกรมย่อย TRI นี้ยังเรียกใช้โปรแกรมย่อย ASSMBLE เพื่อทำการรวมเอลิเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้เข้าด้วยกันขึ้นเป็นระบบสมการ

4.1.3 ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตบนระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC เงื่อนไขขอบเขตหลายๆชนิดสามารถประยุกต์ใช้ได้ ตัวอย่างเช่น ความเร็ว u และ v อาจถูกกำหนดตลอดทางเข้าของการไหล หรือความเร็ว u และ v นี้ จะมีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับจุดต่อตลอดผิวที่สัมผัสกับของแข็ง เป็นต้น

4.1.4 แก้ระบบสมการเพื่อหาค่าความเร็วและความดันที่จุดต่อต่างๆ โดยเรียกโปรแกรมย่อย SOLVE

4.1.5 แสดงผลของผลลัพธ์ในไฟล์ผลลัพธ์เพื่อนำไปใช้พล็อตลักษณะของการไหล การแสดงลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ต่างๆด้วยเส้นชั้น ตลอดจนพล็อตในรูปแบบ x-y

ขั้นตอนในการคำนวณในโปรแกรมสามารถสรุปโดยใช้แผนภูมิการทำงาน (Flow chart) ดังแสดงในรูป 4.1



รูป 4.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STOKES

4.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สโตกส์นี้ ได้แสดงในภาคผนวก ก ที่ท้ายเล่มของวิทยานิพนธ์นี้

4.3 ไฟล์ข้อมูลและไฟล์ผลลัพธ์

ลักษณะไฟล์ข้อมูลที่ใช้กับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สโตกส์ ประกอบด้วยหกส่วน ดังแสดงต่อไปนี้

4.3.1 ลักษณะของไฟล์ข้อมูล

บรรทัดแรก จำนวนบรรทัดที่อธิบายลักษณะของปัญหา

บรรทัดต่อมา ลักษณะของคำอธิบายเท่ากับจำนวนบรรทัดที่บอกไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่าง
```
2
FLOW  BETWEEN PARALLEL PLATES
WITH 8 TRIANGLES AND 25 NODES
```

4.3.2 ขนาดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบาย จำนวนจุดต่อ และเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดที่สอง จำนวนจุดต่อความเร็ว จุดต่อความดัน เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตที่ทางออก

ตัวอย่าง

NPOIV	NPOIP	NELEM	NFREE
15	9	8	1

4.3.3 ค่าคุณสมบัติของไหล

บรรทัดแรก คำอธิบายคุณสมบัติของของไหล

บรรทัดที่สอง ค่าคุณสมบัติความหนืด

ตัวอย่าง
```
Viscosity
   1.0
```

4.3.4 ข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำอธิบายข้อมูลจุดต่อ

บรรทัดต่อมา หมายเลขจุดต่อ รหัสเงื่อนไขขอบเขตสำหรับความเร็ว u, v และความดัน p (0 =อิสระ, 1 =คงไว้) โคออร์ดิเนต และค่าของ u, v, p

ตัวอย่าง

NODE	IBCU	IBCV	IBCP	X	Y	U	V	P
1	1	1	0	0.	0.	1.	0.	0.
2	0	1	0	1.	0.	0.	0.	0.

หมายเหตุ การนับเลขที่จุดต่อภายในเอลิเมนต์ จะต้องนับเลขที่มุมของเอลิเมนต์ก่อนแล้วจึงนับเลขจุดต่อที่กลางขอบของเอลิเมนต์ (ดูตัวอย่างในหัวข้อ 4.4)

4.3.5 การจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายความหมายของบรรทัดถัดไป

บรรทัดต่อมา หมายเลขเอลิเมนต์ เลขจุดต่อที่มุมเอลิเมนต์ จากนั้นจึงเป็นเลขจุดต่อที่กลางขอบเอลิเมนต์ (ดูรูป 3.1)

ตัวอย่าง

IE	I	J	K	L	M	N
1	1	13	11	12	6	7
2	1	3	13	8	7	2

4.3.6 เงื่อนไขการไหลที่ทางออก

บรรทัดแรก คำอธิบายรายละเอียด

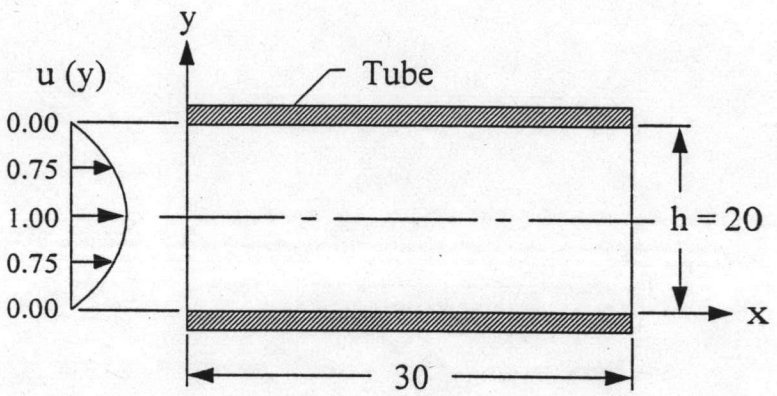
บรรทัดต่อมา หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสามที่ขอบเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่าง

IE	II	JJ	KK
4	5	15	10

4.4 ตัวอย่างสำหรับการใช้โปรแกรม

เพื่อแสดงการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์และในขณะเดียวกันเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่แล้ว การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในท่อ ดังแสดงในรูป 4.2 ซึ่งใช้รูปแบบของความเร็วก่อนเข้าท่อ u(y) ในรูปแบบของการกระจายความเร็วแบบพาราโบลิก (Parabolic) ซึ่งมีความเร็วสูงสุดเท่ากับหนึ่งที่เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ



รูป 4.2 การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวในท่อ

รูปแบบการกระจายของความเร็วแม่นตรงที่ทุกตำแหน่งของ x สามารถประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติเช่นนี้ได้ สมการสโตกส์ในแกน x ซึ่งคือสมการ (2.16a) ลดรูปมาเป็น

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (4.1)$$

และในแกน y สมการ (2.16b) ลดรูปมาเป็น

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (4.2)$$

สมการ (4.2) นี้ แสดงให้เห็นว่า $p = p(x)$ เพียงอย่างเดียว หากทำการอินทิเกรตสมการ (4.1) สองครั้ง จะได้

$$\mu u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B \qquad (4.3)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งค่าคงที่นี้สามารถหาค่าได้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$u(y = 0) = u(y = h) = 0 \qquad (4.5)$$

ดังนั้น ลักษณะการกระจายของความเร็วจึงเขียนได้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$u(y) = \frac{y}{2\mu}(y - h) \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4.6)$$

หากกำหนดการไหลเข้าแบบเต็มรูปแบบ (Fully developed flow) ที่มีการกระจายความเร็วแบบพาราโบลิกดังแสดงในรูป 4.2

$$u(y) = \frac{4y}{h^2}(h - y) \tag{4.6}$$

จากนั้น เนื่องจากอัตราการไหลของมวลจำเป็นต้องต่อเนื่อง

$$\int_0^h \frac{4y}{h^2}(h - y)\, dy = \int_0^h \frac{y}{2\mu}(y - h)\frac{\partial p}{\partial x}\, dy \tag{4.7}$$

และทำการอินทิเกรตจะได้

$$\frac{2}{3}h = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{8\mu}{h^2} \tag{4.8}$$

สำหรับในตัวอย่างที่แสดงในที่นี้ กำหนดให้ $\mu = 10$ และ $h = 20$ ดังนั้น

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -0.2 \tag{4.9}$$

ถ้าความดันที่ทางออกที่ $x = 30$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น ค่าการกระจายความดันแม่นตรงตามแนวแกน x คือ

$$p(x) = 6 - 0.2x \tag{4.10}$$

แทนสมการ (4.9) ลงในสมการ (4.5) ก่อให้เกิดรูปแบบของการกระจายของความเร็วแม่นตรง ดังนี้

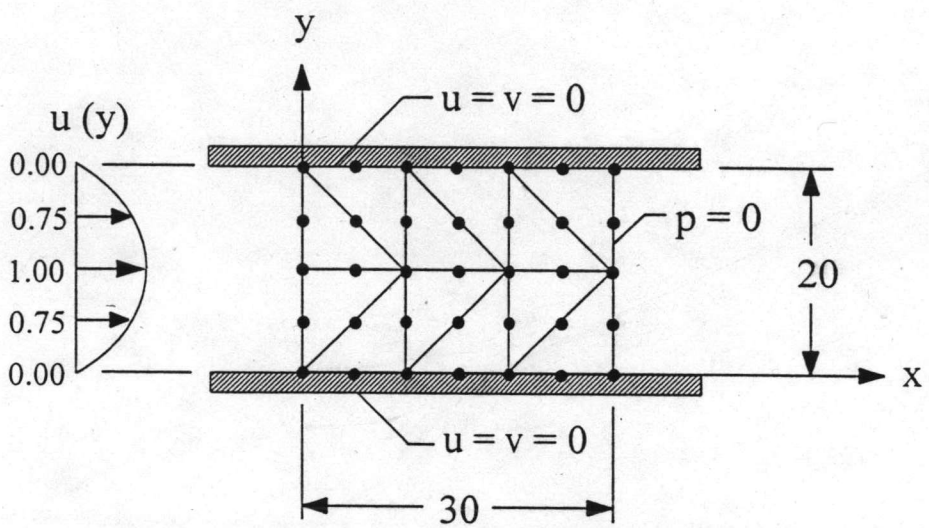
$$u(y) = \frac{-0.1\,y}{\mu}(y - h) \tag{4.11}$$

ซึ่งหากใช้ $\mu = 10$ และ $h = 20$ รูปแบบความเร็ว ณ ตำแหน่ง x ใดๆ คือ

$$u(y) = 0.01\,y\,(20 - y) \tag{4.12}$$

ซึ่งรูปแบบของความเร็วที่ได้นี้จะเหมือนกับการไหลแบบเต็มรูปแบบที่ปากทางเข้า

เพื่อวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 4.3 จึงได้นำมาใช้หาผลลัพธ์รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย จุดต่อของความเร็ว35 จุดต่อ จุดต่อของความดัน 12 จุดต่อ และ 12 เอลิเมนต์ รูปแบบความเร็วในทางเข้า ที่ x = 0 นี้ ดังอธิบายในสมการ (4.6) ได้แสดงในรูป กำหนดให้ค่าความดันตามแนวการไหลที่ทางออกมีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้ความเร็วที่ผิวด้านบนและล่างของท่อมีค่าเท่ากับศูนย์ เช่นกัน



รูป 4.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต

จากรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 4.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวตอร์ STOKES ต้องการได้ทำการสร้างขึ้น และตั้งชื่อให้ว่า TUBE.DAT ไฟล์ข้อมูลดังกล่าวนี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```
2
FULLY-DEVELOPED VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW IN TUBE
FINITE ELEMENT MODEL WITH 35 NODES AND 12 ELEMENTS.
    NPOIV      NPOIP      NELEM      NFREE
       35         12         12          1
    DENSITY        VISCOSITY
        1.0             10.0
NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES [35]:
  1    1    1    0     0.     0.     0.     0.     0.
  2    1    1    0     0.    10.     1.     0.     0.
  3    1    1    0     0.    20.     0.     0.     0.
  4    1    1    0    10.     0.     0.     0.     0.
  5    0    1    0    10.    10.     0.     0.     0.
  6    1    1    0    10.    20.     0.     0.     0.
  7    1    1    0    20.     0.     0.     0.     0.
  8    0    1    0    20.    10.     0.     0.     0.
```

```
  9    1    1    0    20.   20.     0.     0.     0.
 10    1    1    1    30.    0.     0.     0.     0.
 11    0    1    1    30.   10.     0.     0.     0.
 12    1    1    1    30.   20.     0.     0.     0.
 13    1    1   -1     0.    5.    0.75    0.     0.
 14    1    1   -1     0.   15.    0.75    0.     0.
 15    1    1   -1     5.    0.     0.     0.     0.
 16    0    1   -1     5.    5.     0.     0.     0.
 17    0    1   -1     5.   10.     0.     0.     0.
 18    0    1   -1     5.   15.     0.     0.     0.
 19    1    1   -1     5.   20.     0.     0.     0.
 20    0    1   -1    10.    5.     0.     0.     0.
 21    0    1   -1    10.   15.     0.     0.     0.
 22    1    1   -1    15.    0.     0.     0.     0.
 23    0    1   -1    15.    5.     0.     0.     0.
 24    0    1   -1    15.   10.     0.     0.     0.
 25    0    1   -1    15.   15.     0.     0.     0.
 26    1    1   -1    15.   20.     0.     0.     0.
 27    0    1   -1    20.    5.     0.     0.     0.
 28    0    1   -1    20.   15.     0.     0.     0.
 29    1    1   -1    25.    0.     0.     0.     0.
 30    0    1   -1    25.    5.     0.     0.     0.
 31    0    1   -1    25.   10.     0.     0.     0.
 32    0    1   -1    25.   15.     0.     0.     0.
 33    1    1   -1    25.   20.     0.     0.     0.
 34    0    1   -1    30.    5.     0.     0.     0.
 35    0    1   -1    30.   15.     0.     0.     0.
ELEMENT NODAL CONNECTIONS [12]:
  1    4    5    1    16    15    20
  2    2    1    5    16    17    13
  3    2    5    3    18    14    17
  4    6    3    5    18    21    19
  5    7    8    4    23    22    27
  6    5    4    8    23    24    20
  7    5    8    6    25    21    24
  8    9    6    8    25    28    26
  9   10   11    7    30    29    34
 10    8    7   11    30    31    27
 11    8   11    9    32    28    31
 12   12    9   11    32    35    33
ELEMENT NODAL CONNECTIONS FOR OUTFLOW [1]:
  9   10   34   11
```

จากการใช้ไฟล์ข้อมูลนี้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในระหว่างการคำนวณจะเห็นรายละเอียดที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ดังนี้

```
>STOKES        <Enter>

PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:
TUBE.DAT       <Enter>

*** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF:
        NUMBER OF VELOCITY NODES     =    35
        NUMBER OF PRESSURE NODES     =    12
        NUMBER OF ELEMENTS           =    12
        NUMBER OF OUTFLOW BOUNDARY   =     1

*** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***
```

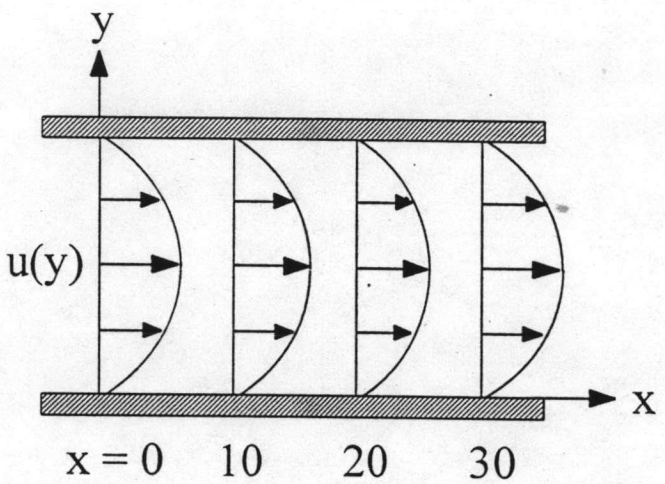
```
 *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL VELOCITIES AND PRESSURES ***

 *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR VELOCITY AND PRESSURE
SOLUTIONS ***
     ( TOTAL OF   82 EQUATIONS TO BE SOLVED )

 PLEASE ENTER FILE NAME FOR VELOCITY & PRESSURE SOLUTIONS:
 UVP.OUT       <Enter>

 Stop - Program terminated.
```

หลังจากทำการคำนวณได้เสร็จสิ้นสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะประกอบด้วยผลลัพธ์ของความเร็วและความดันที่จุดต่อ ไฟล์ผลลัพธ์มีชื่อว่า UVP.OUT ประกอบด้วยรายละเอียดต่อไปนี้

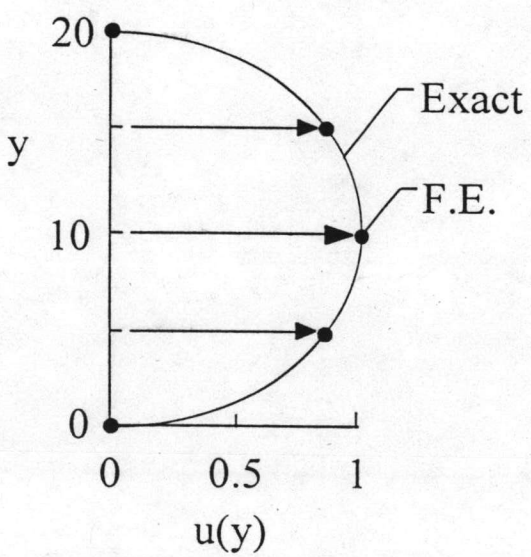
```
 NODAL VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS [   35]:

 NODE       U-VELOCITY        V-VELOCITY        PRESSURE

    1    0.000000E+00    0.000000E+00    0.600000E+01
    2    0.100000E+01    0.000000E+00    0.600000E+01
    3    0.000000E+00    0.000000E+00    0.600000E+01
    4    0.000000E+00    0.000000E+00    0.400000E+01
    5    0.100000E+01    0.000000E+00    0.400000E+01
    6    0.000000E+00    0.000000E+00    0.400000E+01
    7    0.000000E+00    0.000000E+00    0.200000E+01
    8    0.100000E+01    0.000000E+00    0.200000E+01
    9    0.000000E+00    0.000000E+00    0.200000E+01
   10    0.000000E+00    0.000000E+00    0.000000E+00
   11    0.100000E+01    0.000000E+00    0.000000E+00
   12    0.000000E+00    0.000000E+00    0.000000E+00
   13    0.750000E+00    0.000000E+00
   14    0.750000E+00    0.000000E+00
   15    0.000000E+00    0.000000E+00
   16    0.750000E+00    0.000000E+00
   17    0.100000E+01    0.000000E+00
   18    0.750000E+00    0.000000E+00
   19    0.000000E+00    0.000000E+00
   20    0.750000E+00    0.000000E+00
   21    0.750000E+00    0.000000E+00
   22    0.000000E+00    0.000000E+00
   23    0.750000E+00    0.000000E+00
   24    0.100000E+01    0.000000E+00
   25    0.750000E+00    0.000000E+00
   26    0.000000E+00    0.000000E+00
   27    0.750000E+00    0.000000E+00
   28    0.750000E+00    0.000000E+00
   29    0.000000E+00    0.000000E+00
   30    0.750000E+00    0.000000E+00
   31    0.100000E+01    0.000000E+00
   32    0.750000E+00    0.000000E+00
   33    0.000000E+00    0.000000E+00
   34    0.750000E+00    0.000000E+00
   35    0.750000E+00    0.000000E+00
```

I17432030

ไฟล์ของผลลัพธ์ที่ได้ประกอบด้วยผลลัพธ์ของความเร็วและความดัน รูปแบบของความเร็วที่คำนวณได้ในแต่ละตำแหน่งของแกน x (ที่ x = 0, 10, 20, และ 30) ได้แสดงในรูป 4.4 ซึ่งมีรายละเอียดในรูป 4.5

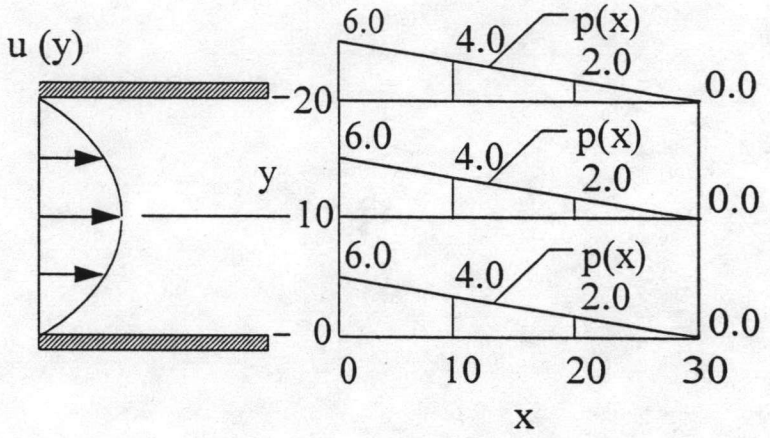


รูป 4.4 รูปแบบความเร็วที่ได้จากการคำนวณที่แต่ละตำแหน่งในแกน x



รูป 4.5 รายละเอียดรูปแบบความเร็วที่เหมือนกันในทุกระยะ x

การคำนวณการกระจายความดัน p(x) ที่ได้ ณ ระดับต่างๆในแนวแกน y ได้แสดงในรูป 4.6 การกระจายความดันที่คำนวณได้นี้ ให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกันกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในสมการ (4.10)



รูป 4.6 การกระจายความดันที่ได้จากการคำนวณ ณ ระดับต่าง ๆในแกน y